

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA  
UESB**

Jérfesson Santos Moreira

**QUATÉRNIOS ANIMADOS:**

Existe alguma relação entre os números quatérnios e a animação 3D?

**Vitória da Conquista - Bahia  
Junho - 2022**

Jérfesson Santos Moreira

**QUATÉRNIOS ANIMADOS:  
Existe alguma relação entre os números quatérnios e a animação  
3D?**

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Júlio César dos Reis.

**Vitória da Conquista - Bahia  
2022**

## Folha de aprovação

Jérfesson Santos Moreira

### QUATÉRNIOS ANIMADOS:

Existe alguma relação entre os números quatérnios e a animação 3D?

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em:

#### BANCA EXAMINADORA

---

Júlio César dos Reis - UESB  
Orientador

---

Gislan Silveira Santos  
IFBA

---

Clênia Andrade Oliveira de Melo  
UESB

Vitória da Conquista - BA  
2022

*Aos meus pais Manuel Dilson e Edilma.*

---

## Agradecimentos

Primeiramente, agradecer a Deus por sempre me dar forças nas horas essenciais.

Agradeço a minha família, meus pais Manuel Dilson e Edilma e meu irmão Dierlei, eles sempre estavam me apoiando nos momentos difíceis e sempre me incentivando a continuar, amo vocês incondicionalmente.

Agradecer a minha namorada e companheira de curso, Nadia. Obrigado por estar sempre ao meu lado, não só nos momentos felizes, mas sempre me apoiando nos momentos difíceis de fraqueza e desânimo, obrigado por tudo, eu amo muito você!

Ao meu amigo Jabson, por sempre estar ao meu lado nesses 4 anos. Você, Nadia e eu formamos um trio parada dura, sempre estudando juntos. Valeu, meu “brodi”!!!

Aos meus colegas de curso, que de alguma forma e em algum momento, me ajudou na longa caminhada.

Agradecer ao meu orientador Júlio César por ter aceitado e me ajudado no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus professores, não vou citar todos, mas vou mencionar Altemar, que nem só como professor, mas também como coordenador do curso nunca mediu esforços para organizá-lo da melhor forma possível.

---

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é abordar os números Quatérnios. Foi estudado alguns artigos e retiradas algumas aplicações de quatérnios em rotações 3D. Será abordado um pouco da história e a grande relevância que a descoberta desses números trouxe para o mundo da Álgebra, além de fazer comparações de rotações via matrizes conhecidas com a utilização dos quatérnios, evidenciando a praticidade e relevância da realização de rotações utilizando apenas a multiplicação de quatérnios.

**Palavras-Chave** Rotação 3D; Números quatérnios; Aplicação dos quatérnios.

## ABSTRACT

The main objective of this work is to approach the Quaternions numbers. Some articles were studied and some applications of quaternions in 3D rotations were removed. A bit of history and the great relevance that the discovery of these numbers brought to the world of algebra will be discussed, in addition to making comparisons of rotations via known matrices with the use of quaternions, evidencing the practicality and relevance of performing rotations using only multiplication. of quaternions.

**Key words** 3D Rotation; Quaternary numbers; Applications of quaternions.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Algumas definições importantes</b>	<b>8</b>
<b>2 Os Quatérnios</b>	<b>13</b>
2.1 Um pouco de história e os números complexos. . . . .	13
2.2 Os quatérnios, suas operações e propriedades. . . . .	16
2.2.1 Igualdade de quatérnios . . . . .	17
2.2.2 Soma . . . . .	17
2.2.3 Multiplicação: . . . . .	19
2.2.4 Conjugado de um quatérnio: . . . . .	20
2.2.5 Multiplicação de um escalar por um quatérnio: . . . . .	20
2.2.6 Norma de um quatérnio. . . . .	21
2.2.7 Quatérnio unitário. . . . .	21
2.2.8 Inverso de um quatérnio. . . . .	21
2.3 Os quatérnios puros. . . . .	22
<b>3 Aplicações: Rotação via quatérnio e uma aplicação dos quatérnios na física do ensino médio</b>	<b>24</b>
3.1 Uma aplicação dos quatérnios na física do ensino médio . . . . .	30
<b>4 Rotações com os quatérnios e suas matrizes.</b>	<b>33</b>
4.1 Quatérnios, rotações e as relações com matrizes. . . . .	42
<b>5 Aplicação dos quatérnios na animação 3D</b>	<b>49</b>
5.1 Representações de rotações 3D sem o uso de quatérnios . . . . .	49
5.2 O fenômeno Gimbal Lock na animação 3D e algumas formas de evitá-lo . . . . .	52
5.3 Rotação ao redor de um eixo arbitrário . . . . .	52
5.4 Interpolação “ natural ” entre orientações . . . . .	54
5.5 Rotação ao redor de um eixo . . . . .	55
5.6 Representação e composição de rotações via quatérnios . . . . .	57

<b>Conclusão</b>	<b>62</b>
<b>Referências bibliográficas</b>	<b>63</b>

# Lista de Figuras

2.1	Ciclo de multiplicação . . . . .	19
3.1	Rotação utilizando quatérnios . . . . .	30
4.1	Vetor rotacionado . . . . .	42
5.1	Avião voando em direção ao norte . . . . .	50
5.2	Avião voando em direção ao oeste . . . . .	50
5.3	Avião voando em direção ao leste-oeste . . . . .	51
5.4	Avião voando em direção ao solo . . . . .	51
5.5	Avião voando em direção ao norte . . . . .	53
5.6	Avião voando de cabeça para baixo . . . . .	54
5.7	Representação Geometrica . . . . .	56
5.8	Avião voando em direção ao solo . . . . .	59
5.9	Avião voando com asa em direção ao céu . . . . .	59

# Lista de Tabelas

2.1	Tabela de multiplicação dos quatérnios . . . . .	20
-----	--	----

# Introdução

Na disciplina de Álgebra, são estudados alguns conteúdos abstratos que, em sua maioria, instiga o discente a procurar aplicações em determinadas situações. Embora muitas vezes não é imaginado que conteúdos da Álgebra Linear como transformações lineares, produto interno, produto vetorial, entre outros, possuem aplicações que podem ser notadas em contexto do dia a dia.

Este trabalho tem por objetivo realizar uma revisão bibliográfica e sintetizar definições, propriedades e aplicações da Álgebra dos números quatérnios. A relevância dos números quatérnios está na usabilidade da sua multiplicação para descrever rotações no espaço tridimensional. Willian Rowan Hamilton passou anos tentando descobrir uma forma de realizar essas rotações e serão mencionadas as tentativas no decorrer deste trabalho.

Para melhor entendimento do leitor, o trabalho foi dividido em capítulos, nos quais são abordados uma aplicação em cada. O capítulo 1 traz algumas definições importantes que será usado no decorrer do trabalho; já no capítulo 2, inicia-se a falar sobre os quatérnios, será mencionado os números complexos, os quais a grande relevância está na sua multiplicação que representa rotações no plano e será introduzido um pouco da história de Hamilton. O assunto do capítulo 3 é aplicação dos quatérnios na realização de rotações, e ainda será evidenciado uma aplicação dos quatérnios na Física do ensino médio. No capítulo 4, será melhor detalhado a aplicação de rotação via homomorfismo e deduzido uma matriz de rotação para os números quatérnios. No quinto e último capítulo, será mostrado uma aplicação dos quatérnios na animação 3D, e feito uma comparação do método de ângulos de Euler com a multiplicação de quatérnios para realizar rotações na animação 3D.

# Capítulo 1

## Algumas definições importantes

Neste capítulo, será apresentada algumas definições que serão essenciais para uma boa compreensão do presente trabalho.

**Definição 1.1 (Espaço vetorial)** *Um Espaço vetorial  $E$  é um conjunto, cujo os elementos são chamados de vetores, no qual estão definidos duas operações: a adição, que a cada par de vetores  $u, v \in E$  faz corresponder um novo vetor  $u + v \in E$  chamados a soma de  $u$  e  $v$ , e a multiplicação por um número real, que a cada número  $\alpha \in \mathbb{R}$  e a cada vetor  $v \in E$  faz corresponder um vetor  $\alpha v$  chamado de produto de  $\alpha$  por  $v$ . Essas operações devem satisfazer, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in E$ , as condições abaixo, são chamadas os axiomas de espaço vetorial:*

1. *Comutativa:  $u + v = v + u$ ,*
2. *Associativa:  $u + (v + w) = (u + v) + w$  e  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$*
3. *Vetor nulo: Existe um vetor  $0 \in E$  chamado de vetor nulo, ou vetor zero, tal que  $0 + v = v + 0 = v, \forall v \in E$ ;*
4. *Inverso aditivo: para cada vetor  $v \in E$  existe um vetor  $-v \in E$ , chamado de inverso aditivo, ou simétrico aditivo de  $v$ , tal que  $(-v) + v = v + (-v) = 0$*
5. *Multiplicação por 1:  $1 \cdot v = v$*
6. *Distributividade:  $(u + v) \alpha = \alpha u + \alpha v$  e  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$*

**Definição 1.2 (Anel)** *Um anel é um conjunto  $A \neq \emptyset$ , no qual estão definidas duas operações,  $(+, \cdot)$  satisfazendo os seguintes axiomas:*

1. *Comutativa:  $u + v = v + u, \forall u, v \in A$ .*

2. *Associativa:*  $u + (v + u) = (u + v) + u, \forall u, v \text{ e } w \in A.$
3. *Elemento neutro:* *Existe*  $0_A \in A$  *tal que*  $u + 0_A = u, \forall u \in A.$
4. *Simétrico aditivo:* *Dado*  $u \in A,$  *existe*  $(-u),$  *tal que*  $u + (-u) = (-u) + u = 0_A$
5. *Associativa na multiplicação:*  $u.(v.w) = (u.v).w, \forall u, v \in A.$
6. *Distributiva à esquerda:*  $u.(v + w) = u.v + u.w, \forall u, v \text{ e } w \in A.$
7. *Distributiva à direita:*  $(u + v).w = u.w + v.w, \forall u, v \text{ e } w \in A.$

**Observação 1.3** *Quando o anel tiver unidade (elemento neutro da multiplicação) chamaremos esse de Anel unitário. Quando o anel for comutativo com a operação de soma, chamaremos esse de Anel comutativo.*

**Definição 1.4 (Corpo)** *Corpo:* *Um corpo é um anel unitário e comutativo*  $K$  *que satisfaz*

1.  $a \in K \text{ e } a \neq 0 \implies \exists x \in K ; ax = 1$

**Observação 1.5** *O elemento da definição anterior é chamado de inverso do elemento*  $a \in K,$  *e denotado por*  $a^{-1}.$  *Assim, um corpo é um anel unitário e comutativo no qual todo elemento diferente de zero tem inverso.*

**Definição 1.6 (Grupo)** *Seja*  $G$  *um conjunto não vazio munido de uma operação*  $(*)$ . *Diz-se que a operação*  $(*)$  *define uma estrutura de grupo sobre o conjunto*  $G$  *ou que o conjunto*  $G$  *é um grupo em relação à operação*  $(*)$  *quando as seguintes propriedades são válidas:*

$(G_1)$  *Associativa:* - *Quaisquer que sejam*  $x, y \text{ e } z \in G,$  *tem-se*  $x*(y*z) = (x*y)*z.$

$(G_2)$  *Elemento Neutro:* - *Existe em*  $G$  *um elemento*  $e$  *tal que*  $x*e = e*x = x$  *qualquer que seja*  $x \in G.$

$(G_3)$ : *Elementos Simetrizáveis* - *Para todo*  $x$  *em*  $G,$  *existe um elemento*  $x'$  *em*  $G$  *tal que*  $x*x' = x'*x = e.$

**Definição 1.7 (Subgrupo)** : *Sejam*  $(G, *)$  *um grupo e*  $H$  *uma parte não vazia do conjunto*  $G.$  *O par*  $(H, *)$  *diz-se um subgrupo do grupo*  $(G, *),$  *quando*  $H$  *é fechado à operação*  $(*)$  *do grupo*  $G$  *e*  $(H, *)$  *também é grupo, isto é, quando as seguintes condições forem satisfeitos:*

$(S_1)$  *Quaisquer que sejam os elementos*  $x \text{ e } y$  *de*  $H,$  *tem-se*  $x*y \in H.$

$(S_2)$  *O parte*  $(H, *)$  *também é um grupo.*

**Lema 1.8** *Seja  $G$  um grupo. Consideremos também  $H$  e  $K$  subgrupos de  $G$ .*

*Então  $H \cap K$  é subgrupo.*

**Demonstração:** *Sejam  $a, b \in H \cap K$*

*Daí, temos que  $a \in H, a \in K, b \in K, b \in H \Rightarrow$*  
$$\begin{cases} a.b^{-1} \in H \\ a.b^{-1} \in K \end{cases}$$

*Portanto  $ab^{-1} \in H \cap K$  é subgrupo de  $G$ .*

■

**Definição 1.9** *O conjunto  $GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \exists A^{-1}\}$  é denominado grupo linear de dimensão  $n$ .*

**Teorema 1.10** *Uma matriz quadrada  $A$  admite inversa se, e somente se,  $\det A \neq 0$ .*

Então, pelo teorema anterior, temos que  $GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$

**Proposição 1.11**  *$GL(n)$  é um grupo.*

**Demonstração:** *Temos que se  $A, B \in GL(n)$ , então  $GL(n)$  é associativa, pela propriedade associativa da multiplicação de matrizes.*

*Também, como  $I = I^{-1}$ , temos que  $I \in GL(n)$ .*

*Temos que  $(A^{-1})^{-1} = A \in GL(n)$  segue que  $A^{-1} \in GL(n)$*

*Logo  $GL(n)$  é um grupo. ■*

**Definição 1.12** *O conjunto  $SL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$  é denominado subgrupo linear especial de dimensão  $n$ .*

**Proposição 1.13**  *$SL(n)$  é um subgrupo de  $GL(n)$ .*

**Demonstração:** *Temos que  $SL(n) \subset GL(n)$ .*

*Sejam  $A, B \in SL(n)$ .*

*Como  $B \in SL(n)$  temos que  $\det B = 1$*

*Ainda temos que  $(\det A)^{-1} = \frac{1}{\det B}$*

*Segue que  $\det B^{-1} = 1$*

*Portanto,  $B^{-1} \in SL(n)$*

*Disto, podemos afirmar que  $\det(AB^{-1}) = \det A \cdot \det B^{-1} = 1$ , ou seja,  $A.B^{-1} \in SL(n)$*

*Logo,  $SL(n) \leq GL(n)$ . ■*

**Teorema 1.14** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  com produto interno  $\langle, \rangle$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  uma transformação Linear. São equivalentes*

*$I - \forall v, w \in V, \langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ , ou seja,  $T$  representa o produto interno;*

II -  $T$  preserva a norma, isto é,  $\|T(v)\| = \|v\|$  e se  $v$  e  $w$  têm ângulo  $\theta$ ,  $\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$ , então o ângulo entre  $T(v)$  e  $T(w)$  também é  $\theta$ ;

III -  $T$  transforma bases ortornormais em bases ortornormais, isto é, se  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ ,  $\subset V$  é base ortornormal relativa ao produto interno  $\langle, \rangle$  então  $\{T(f_1) \dots T(f_n)\} \subset V$  é base ortornormal;

IV -  $[T]_F = (t_{ij})_{i,j} = 1, \dots, n$  é ortogonal, isto é,  $[T]_F^T = [T]_F^{-1}$ , para toda base ortornormal  $F$ .

**Demonstração:**

$I \Rightarrow II$

Seja  $v \in V$ . Então  $\|T\|^2 = \langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle = \|v\|^2$ , logo  $\|T(v)\| = \|v\|$ .

Sejam  $w \in V$  e  $\theta$  o ângulo entre  $v$  e  $w$ . Então  $\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{\langle T(v), T(w) \rangle}{\|T(v)\| \|T(w)\|}$

Logo,  $\theta$  é também o ângulo entre  $T(v)$  e  $T(w)$ .

$II \Rightarrow III$

Seja  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  base ortornormal de  $V$ .

Por hipótese, temos que  $\|T(f_k)\| = \|f_k\| = 1$  e que o ângulo entre  $T(f_i)$  e  $T(f_j)$  é igual ao ângulo entre  $f_i$  e  $f_j$  para  $i, j = \{1, \dots, n\}$ , ou seja,  $\theta = \frac{\phi}{2}$ , se  $i \neq j$ .

Logo,  $T$  leva base ortornormal em base ortornormal.

$III \Rightarrow IV$

Podemos escrever a matriz de transformação  $T$  na base  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  como  $(T(f_1) \dots T(f_n))$

Deste modo, vamos calcular  $[T]_F^T [T]_F$ . Temos que

$$[T]_F^T [T]_F = \begin{pmatrix} T^T(f_1) \\ T^T(f_2) \\ \vdots \\ T^T(f_n) \end{pmatrix} (T(f_1) T(f_2) \dots T(f_n)) = (\langle T(f_i), T(f_j) \rangle)_{ij}$$

Podemos escrever os termos da matriz  $T$  como  $T_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle$  e a  $i$ -ésima linha de  $T$  é o vetor  $L_i = ((T_{i1}), \dots, (T_{in}))$

$$\text{Então } T_F [T]_F^T = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} (L_1^T \dots L_n^T) = (\langle L_i, L_j \rangle)_{ij}$$

com

$$= \sum_{k=1}^n (T_{ik} T_{jk})_{ij} = \sum_{k=1}^n (\langle f_i, T(f_k) \rangle \langle f_j, T(f_k) \rangle)_{ij}$$

$$= (\langle f_i, f_j \rangle)_{ij}$$

$$(\delta_{ij})_{ij} = I$$

Logo,  $[T]_F$  é uma matriz ortogonal.

$IV \Rightarrow I$

Temos que  $(\langle f_i, f_j \rangle) = \sum_{i=1, \dots, n} (\alpha_i \beta_i)$ ,

Ainda podemos representar matricialmente os vetores de  $V$  na base  $F$  como vetores

coluna  $[u]_F = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ,  $[v]_F = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$  e o produto interno como  $\langle u, v \rangle = [u]_F^T [v]_F$

Então  $\langle T(u), T(v) \rangle = [T_u]_F^T [T v]_F = [u]_F^T [T]_F^T [T]_F [u]_F$   
 $= [u]_F^T [v]_F = \langle u, v \rangle$  ■

**Definição 1.15** O conjunto  $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I\}$  é denominado conjunto das matrizes ortogonais de dimensão  $n$ .

**Proposição 1.16**  $O(n)$  é subgrupo de  $GL(n)$

**Demonstração:** Por definição, sabemos que  $O(n) \subset GL(n)$ . Tomemos  $A, B \in O(n)$ .

Então  $A^T = A^{-1}$ .

Como  $A^T \cdot (A^T)^T = I^{-1} = I$  e conseqüentemente  $A^T = A^{-1} \in O(n)$ .

Temos que  $BA^{-1} \in O(n)$ . Logo  $O(n) \leq GL(n)$ . ■

**Proposição 1.17**  $O(n) \cap SL(n)$  é um subgrupo de  $GL(n)$ .

**Demonstração:** Temos que  $O(n)$  e  $SL(n)$  são subgrupos de  $GL(n)$ .

Logo, pelo Lema 1.8,  $O(n) \cap SL(n)$  é um subgrupo de  $GL(n)$ . ■

**Definição 1.18** O conjunto das matrizes ortogonais com determinante 1 é denotada  $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$  é denominado grupo especial ortogonal de dimensão  $n$ .

**Definição 1.19** A esfera  $\mathbb{S}^n$  é o conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que satisfazem a equação  $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$

**Definição 1.20** O produto vetorial de dois vetores  $\vec{P}$  e  $\vec{q}$ , denotado por  $\vec{P} \times \vec{q}$ , é uma grandeza vetorial dada pela fórmula

$$\vec{P} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}$$

onde  $i, j$  e  $k$  são vetores unitários paralelos aos eixos  $x, y$  e  $z$ . O produto vetorial também pode ser expresso como uma transformação linear a partir de  $\vec{P}$  que opera com  $\vec{q}$ , como mostrado a seguir

$$\vec{P} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

# Capítulo 2

## Os Quatérnios

Neste capítulo, será feita uma pequena menção aos números complexos e falará sobre os números quatérnios. Será apresentado também como aconteceu a descoberta destes números, bem como suas operações e propriedades.

### 2.1 Um pouco de história e os números complexos.

Nesta seção, será apresentado brevemente a história de Hamilton e da sua descoberta acerca dos números complexos, além disso será exemplificado de forma rápida como é feita uma rotação no plano utilizando os complexos. O objetivo neste trabalho não é fazer um estudo aprofundado sobre esse conjunto, mas entende-se que é necessário mencionar um exemplo, para que fique claro ao leitor e ajude o mesmo a ter um melhor entendimento no decorrer da leitura sobre os quatérnios. Willian Rowan Hamilton, foi um matemático, físico e astrônomo, nascido em Durbliin, na Irlanda, em 1805. Hamilton, em 1833, definiu os números complexos como uma álgebra de pares ordenados de números reais, ou seja, um número complexo  $a+bi$  pode ser escrito da forma  $(a, b)$ . Conseguimos realizar rotações, apenas multiplicando os números complexos, de tal forma que a cada vez que multiplicarmos um complexo por  $i$ , estamos realizando uma rotação de  $90^\circ$  no plano, como pode ser visto no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.1** Tome  $\lambda = 1 + i \in \mathbb{C}$  e  $\alpha = i$ . Agora, faremos a multiplicação de  $\lambda$  por  $\alpha$ .

$$\lambda \cdot \alpha = (1 + i)i = (i + i^2) = (i - 1) = (-1, 1)$$

Como já é de nosso conhecimento, podemos escrever um número complexo como par ordenado, dessa forma no exemplo a seguir, temos a representação no plano de como a multiplicação feita acima descreve a rotação no  $\mathbb{R}^2$ .

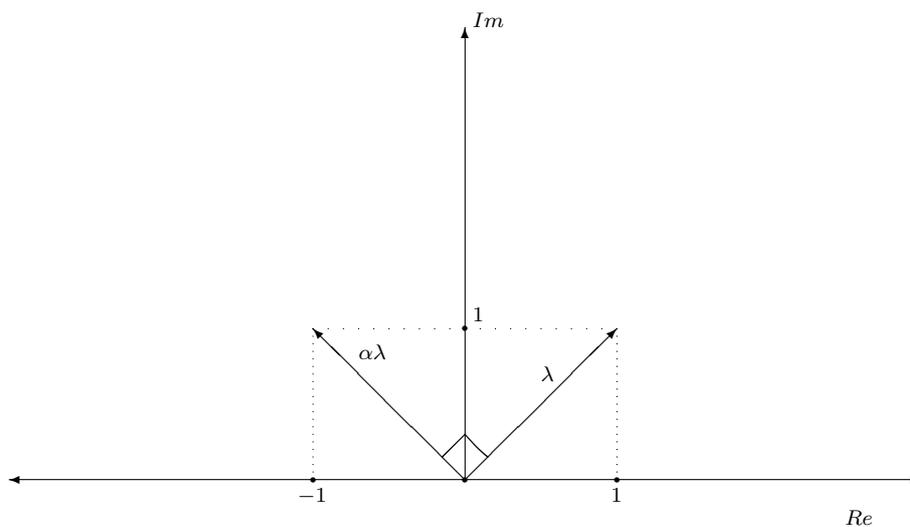
$$\lambda = 1 + i = (1, 1)$$

$$\alpha = i = (0, 1)$$

$$\lambda \cdot \alpha = (-1, 1)$$

*Sendo assim, segue a representação geométrica da multiplicação.*

Figura 0.0



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

*Note que multiplicamos dois números complexos e conseguimos descrever uma rotação, de  $90^\circ$ , no plano somente realizando a multiplicação de dois números pertencentes a  $\mathbb{C}$ .*

Hamilton pretendia fazer o mesmo tipo de rotação, só que agora no  $\mathbb{R}^3$ . Ele passou dez anos pensando em como realizar rotações no espaço. No início, pensava que apenas adicionando mais uma componente imaginária, resolveria o problema. Entretanto, havia um empecilho com o número da forma  $a + bi + cj$ , pois quando se desenvolvia o produto  $(a + bi + cj)(d + ei + fj)$  não resultava em um elemento da mesma natureza, ou seja, não é uma álgebra fechada. Além disso, era esperado que o comprimento do produto de vetores fosse igual ao produto dos comprimentos, ou seja, que  $(a^2 + b^2 + c^2) = (d^2 + e^2 + f^2)$ , que ele chamou de lei dos módulos.

De acordo com Santos (2016, p. 48), “ Foi na tentativa de preservar a lei dos módulos que lhe impôs finalmente a necessidade de trabalhar com uma dimensão a mais [...]”. Diante disso, Hamilton admitiu um terceiro símbolo imaginário  $k$ , diferente das componentes  $i$  e  $j$ , introduzindo os quatérnios.

No trabalho de Nevez (2008), ele traz a fala de Hamilton, argumentando a admissão da quarta dimensão.

E aqui me veio a idéia de que devemos admitir, de alguma maneira, uma quarta dimensão para o espaço com o propósito de calcular com tripletos; ou transferindo o paradoxo para a álgebra, que devemos admitir um terceiro símbolo imaginário  $k$ , distinto de  $i$  e  $j$ , mas igual ao produto deste (na ordem), o que me levou a introduzir quatérnios tais como  $a + ib + jc + kd$  ou  $(a; b; c; d)$  (HAMILTON apud NEVEZ, 2008, p. 71)

A forma com que Hamilton descobre (ou idealiza) os quatérnios, foi de um jeito inusitado, no dia que ele estava indo ao trabalho, passando por uma ponte <sup>1</sup>, lhe veio na mente a terceira componente imaginária, como podemos ver no trecho da carta que Hamilton escreveu ao seu filho, escrito por Eves (2011).

era uma segunda-feira e dia de reunião do Conselho a Real Sociedade da Irlanda, eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal canal, embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado, e saltou uma faísca, o heraldo de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte dos outros, se eu tivesse o duficnete para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma livreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso tão não filosófico quanto possa ser de gravar com uma canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando a cruzamentos, a fórmula fundamental dos simbolos  $i, j, k$  (EVES, 2011, apud NEVEZ 2008, p.72)

E foi assim que no dia 16 de outubro de 1843 que Hamilton descobriu a primeira Álgebra não comutativa da história: a Álgebra dos quatérnios. Um dia após a sua descoberta, Hamilton escreve a seu amigo John T. Graves comunicando-o os seus resultados. Plantou-se ali a semente de novos desenvolvimentos.

Após a descoberta, Hamilton dedicou o resto de sua vida para desenvolver aplicações dos quatérnios à geometria, mecânica e física. Entretanto, os quatérnios não ocuparam um

---

<sup>1</sup>Ponte Brougham, localizada em Dublin na Irlanda, nos dias atuais existe uma placa contando a história citada. Essa ponte é famosa e recebe vários visitantes por conta do ocorrido.

lugar que Hamilton sonhava na área da Física quando comparado ao papel desempenhado pelo cálculo, mas mesmo assim teve importância na origem do cálculo vetorial e na álgebra, sendo que o conjunto dos quatérnios é o primeiro exemplo conhecido onde a ordem dos fatores altera o produto.

Para um melhor entendimento de como funciona a álgebra dos quatérnios, será detalhado as propriedades das operações deste conjunto no próximo capítulo.

## 2.2 Os quatérnios, suas operações e propriedades.

Nesta seção, será feita uma breve introdução aos números quatérnios, apresentando suas principais operações e correspondentes propriedades. Denota-se o conjunto dos quatérnios como  $\mathbb{H}$  (em homenagem a Hamilton) e será trabalhado com os quatérnios sobre o corpo dos reais ( $\mathbb{R}$ ), ou seja, os coeficientes das partes imaginárias são números reais. Um número quatérnio  $\mathbb{H}$  é escrito da forma

$$\mathbb{H} = \{h_0 + h_1i + h_2j + h_3k \mid h_0, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

Tem-se as seguintes relações, entre as componentes imaginárias

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = -ji = k$
- $jk = -kj = i$
- $ki = -ik = j$

**Observação 2.2** *Um número quatérnio, assim como um complexo do  $\mathbb{R}^2$ , é dividido em parte real e parte imaginária. As componentes imaginárias podem ser interpretadas como um vetor do  $\mathbb{R}^3$ , logo podemos escrever para simplificar, da seguinte forma:  $h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k = h_0 + \vec{h}$ , onde chamamos o  $h_0$  de parte real e  $\vec{h}$  de parte imaginária.*

**Observação 2.3** *Podemos escrever o número quatérnio na forma de um vetor que possui duas entradas; sendo a primeira entrada a parte real e a segunda entrada o vetor com as componentes da parte imaginária, por exemplo:  $h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k = h_0 + \vec{h} = (h_0, (h_1, h_2, h_3))$ .*

**Observação 2.4** *Quando se fala de quatérnio imaginário puro, significa que será utilizado apenas a parte imaginária do número, ou seja,  $h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k$  com  $h_0 = 0$ .*

**Observação 2.5** *Os três termos complexos, representarão a direção do eixo de rotação, sendo eles o  $i$ ,  $j$  e  $k$  no qual o  $i$  que representa a direção do eixo- $x$ , o  $j$  que representa a direção do eixo- $y$  e o  $k$  representa a direção do eixo- $z$ . O termo real representa  $\cos(\frac{\theta}{2})$  em torno do qual se está girando.*

## 2.2.1 Igualdade de quatérnios

Seja  $q$  e  $w \in \mathbb{H}$ , tal que:

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$$

$$w = w_0 + w_1i + w_2j + w_3k$$

Temos que  $w = q \Leftrightarrow q_0 = w_0, q_1 = w_1, q_2 = w_2, q_3 = w_3$ .

## 2.2.2 Soma

A soma entre quatérnios é definida da seguinte forma: Seja  $q$  e  $w \in \mathbb{H}$ , tal que:

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$$

$$w = w_0 + w_1i + w_2j + w_3k$$

$$q + w = q_0 + w_0 + q_1i + w_1i + q_2j + w_2j + q_3k + w_3k$$

Agora vamos agrupar números reais e partes respectivas imaginárias colocando-as em evidência

$$q + w = (q_0 + w_0) + (q_1 + w_1)i + (q_2 + w_2)j + (q_3 + w_3)k$$

**Proposição 2.6** *A soma dos quatérnios é associativa, comutativa e possui elemento neutro e elemento simétrico. Ou seja, se tomarmos*

$$q, w, e p \in \mathbb{H}$$

*Temos:*

*Comutativa:*

$$q + w = w + q$$

***Demonstração:***

$$q + w = (q_0 + w_0) + (q_1 + w_1)i + (q_2 + w_2)j + (q_3 + w_3)k$$

Utilizando a comutatividade nos reais, temos

$$q + w = (w_0 + q_0) + (w_1 + q_1)i + (w_2 + q_2)j + (w_3 + q_3)k$$

$$q + w = w + q$$

■ *Associativa:*

$$(q + w) + p = q + (w + p)$$

**Demonstração:**

$$(q + w) + p = (q_0 + w_0) + (q_1 + w_1)i + (q_2 + w_2)j + (q_3 + w_3)k + p$$

$$(q + w) + p = (q_0 + w_0) + (q_1 + w_1)i + (q_2 + w_2)j + (q_3 + w_3)k + p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$$

vamos agrupar as partes:

$$(q + w) + p = (q_0 + w_0 + p_0) + (q_1 + w_1 + p_1)i + (q_2 + w_2 + p_2)j + (q_3 + w_3 + p_3)k$$

vamos fazer a distributiva nas partes complexas

$$(q + w) + p = q_0 + w_0 + p_0 + q_1i + w_1i + p_1i + q_2j + w_2j + p_2j + q_3k + w_3k + p_3$$

$$(q + w) + p = q_0 + (w_0 + p_0) + q_1i + (w_1i + p_1i) + q_2j + (w_2j + p_2j) + q_3k + (w_3k + p_3k)$$

Agora vamos utilizar a propriedade comutativa, assim temos:

$$(q + w) + p = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k + (w_0 + p_0) + (w_1i + p_1i) + (w_2j + p_2j) + (w_3k + p_3k)$$

vamos colocar em evidência as partes imaginárias

$$(q + w) + p = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k + (w_0 + p_0) + (w_1 + p_1)i + (w_2 + p_2)j + (w_3 + p_3)k$$

com isso, temos

$$(q + w) + p = q + (w + p)$$

■ *Elemento neutro:* Tome  $0 \in \mathbb{R}$  e  $q \in \mathbb{H}$

$$q + 0 = 0 + q = q$$

*Simétrico aditivo:*  $\forall q \in \mathbb{H} \exists -q \mid q + (-q) = 0$

**Demonstração:**  $q_0 + q_1i + q_2j + q_3k + (-q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) = (q_0 - q_0) + (q_1 - q_1)i +$

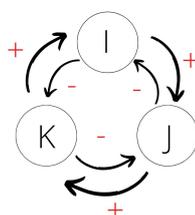
$$(q_2 - q_2)j + (q_3 - q_3)k = 0 + 0i + 0j + 0k = 0 \blacksquare$$

Portanto, após mostrarmos que os quatérnios possuem as propriedades Comutativa, Associativa, Elemento neutro e Simétrico aditivo, chegamos à conclusão que os quatérnios é um grupo com a operação de soma.

### 2.2.3 Multiplicação:

A multiplicação dos quatérnios é a forma distributiva que conhecemos dos números complexos.

Figura 2.1: Ciclo de multiplicação



Fonte: Desenhado pelo autor

$$q.w = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(w_0 + w_1i + w_2j + w_3k)$$

$$q.w = q_0w_0 + q_0w_1i + q_0w_2j + q_0w_3k + q_1iw_0 + q_1iw_1i + q_1iw_2j + q_1iw_3k + q_2jw_0 + q_2jw_1i + q_2jw_2j + q_2jw_3k + q_3kw_0 + q_3kw_1i + q_3kw_2j + q_3kw_3k$$

**Observação 2.7** Observe que as partes imaginárias de um quatérnio comuta com os números reais

Perceba que aqui vamos utilizar as relações da multiplicação e sabemos que as partes imaginárias comutam com números reais.

$$q.w = q_0w_0 + q_0w_1i + q_0w_2j + q_0w_3k + q_1iw_0 - q_1w_1 + q_1w_2k - q_1w_3j + q_2jw_0 - q_2w_1k - q_2w_2 + q_2w_3i + q_3w_0k + q_3w_1j - q_3w_2i - q_3w_3$$

$$q.w = (q_0w_0 - q_1w_1 - q_2w_2 - q_3w_3) + (q_0w_1 + q_1w_0 + q_2w_3 - q_3w_2)i + (q_0w_2 - q_1w_3 + q_2w_0 + q_3w_1)j + (q_0w_3 + q_1w_2 - q_2w_1 + q_3w_0)k$$

A seguir temos a tabela 2.1 de multiplicação.

Perceba que primeiro pegamos os elementos da coluna e depois as linhas. Por exemplo, se quisermos multiplicar  $i$  por  $j$  será o segundo elemento da primeira coluna multiplicado pelo terceiro elemento da primeira linha, teremos como resultado o terceiro elemento da segunda linha.

Tabela 2.1: Tabela de multiplicação dos quatérnios

1	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

### 2.2.4 Conjugado de um quatérnio:

Seja  $q \in \mathbb{H}$  chamamos de conjugado de  $q$  e denotamos

$$\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$$

**Proposição 2.8** *Seja  $q$  e  $p \in \mathbb{H}$  temos que:*

1. *Vamos mostrar que  $q.\bar{q} = \bar{q}.q$*

**Demonstração:**  $q.\bar{q} = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) = q_0^2 - q_0q_1i - q_0q_2j - q_0q_3k - q_1iq_0 - q_1^2i^2 - q_1q_2ij - q_1q_3ik + q_2q_0j - q_2q_1ji - q_2^2j^2 - q_2q_3jk + q_3q_0k - q_3q_1ki - q_3q_2kj - q_3^2k^2 = q_0^2 + q_1^2 - q_1q_2k - q_1q_3j - q_2q_1k + q_2^2 + q_2q_3i + q_3q_1j - q_3q_2i + q_3^2 = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$  (I)

Agora vamos calcular  $\bar{q}.q = (q_0 - q_1i - q_2j - q_3k)(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = q_0^2 + q_0q_1i + q_0q_2j + q_0q_3k + q_1iq_0 - q_1^2i^2 + q_1q_2ij + q_1q_3ik + q_2q_0j + q_2q_1ji - q_2^2j^2 + q_2q_3jk + q_3q_0k + q_3q_1ki - q_3q_2kj - q_3^2k^2 = q_0^2 + q_1^2 - q_1q_2k - q_1q_3j - q_2q_1k + q_2^2 + q_2q_3i + q_3q_1j - q_3q_2i + q_3^2 = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$  (II)

Perceba que (I) = (II) ■

### 2.2.5 Multiplicação de um escalar por um quatérnio:

Tome  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $q \in \mathbb{H}$ , a multiplicação de um escalar por um quatérnio é dado por:

$$\begin{aligned} & \alpha(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= (\alpha q_0 + \alpha q_1i + \alpha q_2j + \alpha q_3k) \end{aligned}$$

### 2.2.6 Norma de um quatérnio.

Seja  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ , definimos a norma (ou valor absoluto) de  $q$ ,

$$\|q\| = \|q_0 + q_1i + q_2j + q_3k\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

### 2.2.7 Quatérnio unitário.

Seja  $q \in \mathbb{H}$ , se  $\|q\| = 1$ , então chamamos  $q$  de quatérnio unitário.

**Proposição 2.9** *Seja  $p$  e  $q$  dois quatérnios unitários, então  $\|pq\| = \|p\|\|q\|$ .*

**Demonstração:**  $\|pq\| = \sqrt{pq\overline{pq}} = \sqrt{p\overline{p}q\overline{q}} = \|q\|\sqrt{p\overline{p}} = \|p\|\|q\|$  ■

Por conta dessa propriedade, multiplicando-se dois quatérnios unitários teremos outro quatérnio de comprimento igual a um. O conjunto dos quatérnios unitários pode ser visto como um conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^4$ , conjunto este denominado de esfera  $\mathbb{S}^3$

### 2.2.8 Inverso de um quatérnio.

Seja  $q \in \mathbb{H}$ , então existe um único  $q^{-1} \in \mathbb{H}$  tal que  $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ .

Se fizermos um breve cálculo, conseguimos constatar a seguinte igualdade:

$$q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = q \cdot q = \|q\|^2 = q^2$$

**Teorema 2.10** *O inverso de um quatérnio  $q$  diferente de zero, é denotado por  $q^{-1}$ , é dado por*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{q^2}$$

**Demonstração:** Usando a equação dada na seção 2.2.8 temos,

$$q \cdot q^{-1} = \frac{q \cdot \bar{q}}{q^2} = \frac{q^2}{q^2} = 1$$

E ainda temos que,

$$q^{-1} \cdot q = \frac{\bar{q} \cdot q}{q^2} = \frac{q^2}{q^2} = 1$$

■

Temos a conjugação quaternônica, que satisfaz a identidade

$$\overline{pq} = \overline{qp}$$

e assim

$$\|pq\| = \|p\|\|q\|$$

## 2.3 Os quatérnios puros.

O conjunto dos quatérnios puros é denotado por  $I\mathbb{H}$ , como já citado anteriormente, quatérnios puros são aqueles cuja parte real é nula, dessa forma podem ser tratados como vetores do  $\mathbb{R}^3$ , pois existe uma correspondência biunívoca entre  $I\mathbb{H}$  e  $\mathbb{R}^3$ , que cada vetor  $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$  faz corresponder o quatérnio puro  $q = 0 + q \in I\mathbb{H}$ , isso quer dizer que,

$$q \in \mathbb{R}^3 \iff q = 0 + q \in I\mathbb{H} \subset \mathbb{H}$$

A seguir, veremos alguns resultados que envolvem os quatérnios puros, começando pela seguinte definição:

**Definição 2.11** *Seja  $q \in I\mathbb{H}$*

$$q \in I\mathbb{H} \iff q^2 \in \mathbb{R} \text{ e } q \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A proposição a seguir, se demonstra facilmente utilizando a definição anterior e também que  $I\mathbb{H}$  é fechado para adição.

**Proposição 2.12** *Se  $p, q \in I\mathbb{H}$ , então*

$$pq + qp \in I\mathbb{H}$$

Outra maneira de demonstrar essa proposição, seria usando que  $qp = q \times q - pq$  e  $|pq| = |q||q|$

**Definição 2.13** *(Olinde Rodrigues) Sejam  $p = p_0 + p$  e  $q = q_0 + q$  então*

$$pq = p_0q_0 - pq + p_0q + q_0p + p \times q$$

onde  $pq$  representa o produto interno dos vetores e  $p \times q$  representa o produto vetorial.

**Proposição 2.14** *Sejam  $p, q \in I\mathbb{H}$ . Então*

$$|p|^2|q|^2 = (pq_0^2 + |p \times q|^2)$$

Os próximos resultados, verificam-se utilizando a fórmula da definição 2.13 de Olinde Rodrigues para multiplicação de quatérnios puros, usando  $pq = p \times q - pq$  e a igualdade  $p \times q = -q \times p$

**Proposição 2.15** *Se  $p, q, r \in I\mathbb{H}$ . Então*

a)  $p \times q = \frac{1}{2}(pq - qp)$

b)  $p \times (q \times r) = \frac{1}{2}(pqr - qrp)$

c)  $pq = \frac{1}{2}(p\bar{q} - q\bar{p})$

d)  $-\frac{1}{2}(pq - qp)$

Temos que de c), resulta:

**Proposição 2.16** *(Critério de Ortogonalidade) Seja  $p, q \in I\mathbb{H}$ . Então*

$$pq = 0 \iff p\bar{q} \in I\mathbb{H}$$

.

**Proposição 2.17** *(Igualdade de Grassman) Sejam  $p, q, r \in I\mathbb{H}$ . Então*

$$p \times (q \times r) = (pr)q - (pq)r$$

**Proposição 2.18** *Sejam  $p, q, r \in I\mathbb{H}$ . Então*

$$(p \times q) \times r = (pr)q - (qr)p$$

**Proposição 2.19** *(Igualdade de Jacobi) Sejam  $p, q, r \in I\mathbb{H}$ . Então*

$$p \times (q \times r) + q \times (r \times p) + r \times (p \times q) = 0$$

No decorrer desse capítulo, foi visto uma pequena menção aos números complexos e sua representação no plano, bem como a realização de uma rotação utilizando esses. Além disso, foi apresentado uma breve história dos números quatérnios, além de suas operações e propriedades.

## Capítulo 3

# Aplicações: Rotação via quatérnio e uma aplicação dos quatérnios na física do ensino médio

Neste capítulo, será estudado como realizar rotações utilizando quatérnios, via transformações lineares no  $\mathbb{R}^3$ . E também será evidenciado, de forma breve, uma aplicação dos quatérnios na física do ensino médio.

O conjunto dos quatérnios forma um espaço vetorial sobre o corpo dos reais. O interessante de ter um espaço vetorial é que pode-se realizar transformações lineares, uma destas transformações que será empregada são as rotações no espaço. Para tal, será utilizado a parte real do número quatérnio nula (ou fixa), visto que se fixado a parte real nula será feita uma projeção no  $\mathbb{R}^3$ , tornando os números em vetores de triplas ordenadas, possibilitando assim a visualização.

Vamos pensar na rotação  $\mathbb{R}$ -transformação

$$\partial : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

em um ponto  $P$  no espaço.

Para que  $R$  represente uma rotação, precisamos que ela preserve norma (comprimento), ângulo e direção. Veremos como cada um destes itens serão preservados. Sejam  $P$ ,  $P_1$  e  $P_2 \in \mathbb{R}^3$ .

O primeiro é a norma: temos que a norma da imagem de  $P$  é igual à norma de  $P$ .

$$\|\partial(P)\| = \|P\|$$

(I)

Depois temos o ângulo: O ângulo é preservado pelo fato da multiplicação das imagens de  $P_1$  por  $P_2$  ser igual a multiplicação de  $P_1$  por  $P_2$

$$\partial(P_1) \cdot \partial(P_2) = P_1 \cdot P_2$$

(II)

E por fim, mas não menos importante temos a preservação da direção, dada por:

$$\partial(P_1) \times \partial(P_2) = P_1 \times P_2$$

(III)

Agora vamos estender essa função  $\partial$  para  $\mathbb{H}$ , exigindo que  $\partial(s + v) = s + \partial(v)$  permite que podemos reescrever a (III) da seguinte forma:

$$(Iv) - \partial(P_1) \cdot \partial(P_2) = \partial(P_1 \cdot P_2)$$

Agora tome  $P_1 e P_2 \in \mathbb{H}$ . A parte escalar permite que podemos combinar (III) e (IV) como

$$P_1 P_2 = -P_1 \cdot P_2 + P_1 P_2$$

Assim podemos escrever a preservação do ângulo e preservação da direção em uma única equação

$$\partial(P_1)\partial(P_2) = \partial(P_1 P_2)$$

(v) Temos que a função que satisfaz esta equação é chamada de homomorfismo.

**Proposição 3.1** *A classe de funções dada pela*

$$\partial_q(P) = qPq^{-1}$$

*onde  $q$  é um quatérnio diferente de zero, satisfaz os requisitos estabelecidos nas equações (I) e (v), ou seja, preserva norma, ângulo e direção, sendo assim representa um conjunto de rotações. Agora vamos demonstrar as constatações.*

*Preserva comprimento:*

**Demonstração:** Temos a seguinte igualdade:

$$\partial_q(P) = qPq^{-1}$$

assim, temos

$$\|\partial_q(P)\| = \|qPq^{-1}\|$$

Temos da conjugação quaternônica a seguinte igualdade

$$= \|q\| \|P\| \|q^{-1}\|$$

Temos ainda, que

$$qq^{-1} = \frac{\|q\| \|\bar{q}\|}{q^2}$$

usando esse fato, podemos escrever

$$= \|P\| \frac{\|q\| \|\bar{q}\|}{q^2}$$

temos que

$$\|q\| \|\bar{q}\| = \|q\bar{q}\| = \|q\|^2 = q^2$$

utilizando esse fato, temos

$$\begin{aligned} &= \|P\| \frac{q^2}{q^2} \\ &= \|P\| \end{aligned}$$

além disso temos que  $\partial_q$  é um homomorfismo, com isso

$$\begin{aligned} &\partial_q(P_1)\partial_q(P_2) \\ &= qP_1q^{-1}qP_2q^{-1} \\ &= qP_1P_2q^{-1} \\ &= \partial_q(P_1P_2), \end{aligned}$$

portanto concluímos que  $\partial$  preserva comprimento. ■

Nesse momento necessita-se encontrar uma fórmula que consiga descrever uma rotação, utilizando um quatérnio  $q$ , de um ângulo  $\emptyset$  em torno do eixo  $A$ . Tem-se que  $\partial_a q = \partial_q$  para qualquer escalar  $a$  diferente de zero. Para simplificar, o foco será apenas com quatérnios unitários. Seja  $q = s + v$  um quatérnio unitário, então  $q^{-1} = s - v$ . Dado um ponto  $P$ , temos

$$\begin{aligned} qPq^{-1} &= (s + v)P(s - v) \\ &= (-v \cdot P + sP + v \times P)(s - v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -sv \cdot P + s^2P + sv \times P + (v \cdot P)v - sPv - (v \times P)v \\
 &= s^2P + 2sv \times P + (v \cdot P)v - v \times P \times v
 \end{aligned}$$

Sabemos que

$$qPq^{-1} = (s^2 - v^2)P + 2sv \times P + 2(v \cdot P)v$$

vamos colocar  $v = tA$ , onde  $A$  é um vetor unitário, podemos escrever essa equação como

$$qPq^{-1} = (s^2 - t^2)P + 2stA \times P + 2st^2(A \cdot P)A$$

Nesse momento vamos comparar essa fórmula para rotação em torno de um eixo arbitrário que é  $P = P \cos \theta + (A \times P) \sin \theta + A(A \cdot P)(1 - \cos \theta)$  com a equação acima, temos as seguintes igualdades

1.  $s^2 - t^2 = \cos(\theta)$
2.  $2st = \text{sen}(\theta)$
3.  $2t^2 = \cos(\theta)$

Temos da terceira igualdade, extraindo a raiz quadrada em ambos os lados e utilizando a propriedade trigonométrica, chega-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 t &= \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} \\
 &= \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Se somarmos a equação 1 com a equação 3, obteremos

$$s^2 + t^2 = 1$$

Como já temos  $t = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , vamos utilizar essa igualdade na equação e assim teremos:

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + t^2 = 1$$

Se pensarmos na relação fundamental trigonométrica, teremos  $s = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Perceba que isso acontece de fato, pois se utilizarmos a relação trigonométrica  $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$  fazendo as contas com a equação 2, temos:

$$2st = \text{sen}(\theta)$$

Temos  $s = \cos(\frac{\theta}{2})$  e  $t = \text{sen}(\frac{\theta}{2})$  se utilizarmos novamente relações trigonométricas, temos:

$$\begin{aligned} 2\cos(\frac{\theta}{2})\text{sen}(\frac{\theta}{2}) &= \text{sen}(2\frac{\theta}{2}) \\ &= \text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Perceba que determinamos que o quatérnio unitário corresponde a uma rotação através do ângulo  $\theta$  em torno do eixo A, e é dada pela seguinte equação:

$$q = \cos(\frac{\theta}{2}) + A\text{sen}(\frac{\theta}{2})$$

Agora perceba que para todo múltiplo escalar de um quatérnio  $q$ , em particular  $-q$  também representa a mesma rotação pois

$$(aq)P(aq)^{-1} = (aq)P(a^{-1}q^{-1})$$

Agora se utilizarmos a propriedade do inverso multiplicativo de  $a$ , sabemos que

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Então

$$\begin{aligned} &= aqP\frac{q^{-1}}{a} \\ &= qPq^{-1} \end{aligned}$$

Se pegarmos dois quatérnios  $q_1$  e  $q_2$  e fizermos o produto  $q_1q_2$ , isso representa uma rotação, essa rotação é dada da seguinte forma: a primeira rotação resultante é dada por  $q_2$  e, consequentemente por  $q_1$ .

Como

$$q_1(q_2Pq_2^{-1})q_1^{-1}$$

utilizamos a associatividade e propriedade de potenciação

$$= (q_1q_2)P(q_1q_2)^{-1}$$

Realizar rotações utilizando os quatérnios é uma vantagem, pois economiza tempo e cálculo, devido requerer menos operações do que utilizar multiplicação de matrizes, de acordo

com Santos (2016),

Podemos combinar muitos quatérnios de tal forma que a produzir um único quatérnio representando toda a série de rotações. Multiplicando dois quatérnios juntos requeremos 16 operações multiplicação/adição, enquanto que a multiplicação de duas matrizes 3 x 3 juntas requer 27 operações. Dessa forma, existe alguma eficiência computacional ao usar quatérnios em situação que muitas rotações podem ser aplicadas a um objeto. (Santos, 2016, p. 79)

Ou seja, ao invés de fazer 27 operações juntas, multiplicando apenas dois quatérnios consegue-se descrever a rotação desejada. Agora vamos ao exemplo de uma rotação:

**Exemplo 3.2** *Vamos supor a rotação do ponto  $P = (2, 0, 1)$  em um ângulo de  $90^\circ$  em torno do eixo  $z$ . Neste caso, vamos usar o seguinte quatérnio*

$$q = \text{sen}\left(\frac{90^\circ}{2}\right) + A\text{cos}\left(\frac{90^\circ}{2}\right)$$

*Perceba que queremos fazer uma rotação em torno do eixo  $z$ , logo utilizaremos  $A = (0, 0, 1)$ , assim:*

$$= \text{sen}(45^\circ) + (0, 0, 1)\text{cos}(45^\circ)$$

*Perceba que o quatérnio  $P$  não precisa ser unitário. Então temos*

$$qPq^{-1} = (\text{sen}(45^\circ) + (0, 0, 1)\text{cos}(45^\circ))(2, 0, 1)(\text{sen}(45^\circ) - (0, 0, 1)\text{cos}(45^\circ))$$

*Temos uma outra forma de escrever um quatérnio  $q = a + bi + cj + dk$  que é escrevendo em forma de vetor. Desse modo, temos:  $q = (a, (b, c, d))$ , sabemos que*

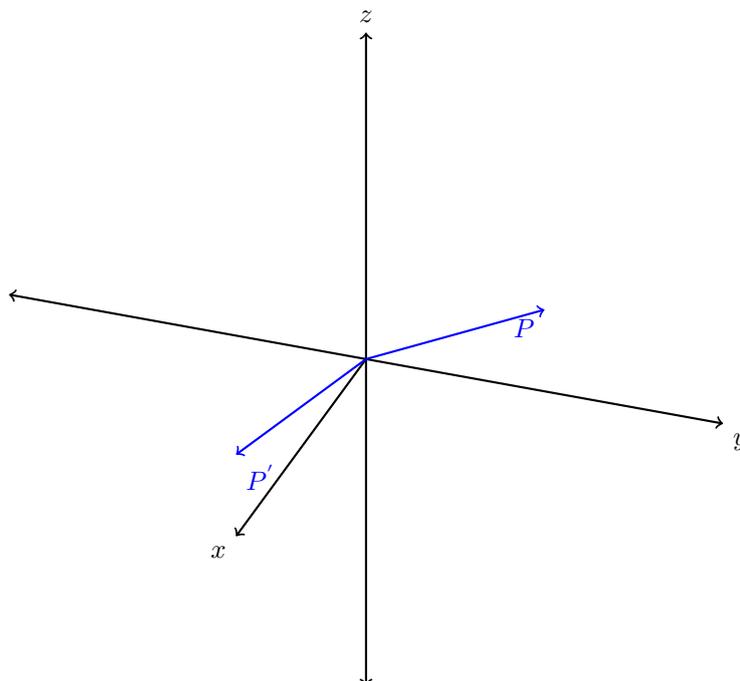
$$\text{sen}(45^\circ) = \text{cos}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*com isso temos,  $q = (\frac{\sqrt{2}}{2}, (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}))$ . Então podemos fazer*

$$\begin{aligned} qPq^{-1} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})\right)(2, 0, 1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, (0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})\right) \\ &= (0, (0, 2, 1)) \end{aligned}$$

*Perceba que temos como resultado o quatérnio  $q = (0, (0, 2, 1))$ . Agora se tomarmos apenas a parte imaginária, temos o  $P'$  resultado da rotação, isto é  $P' = (0, 2, 1)$ , como esperado, fizemos uma rotação utilizando quatérnios de acordo com a figura 3.1*

Figura 3.1: Rotação utilizando quatérnios



Fonte: Desenho produzido pelo autor.

### 3.1 Uma aplicação dos quatérnios na física do ensino médio

Nesta seção, veremos uma aplicação dos quatérnios na Física do ensino médio, Santos (2016), traz a aplicação, com ideias de (FOSSÁ, 2012).

De acordo com Santos (2016), “Podemos definir um quatérnio posição no espaço-tempo na forma geral como:  $q = \frac{c}{\lambda}t + xi + yj + zk$ .” Ainda nas ideias de Santos (2016), temos

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

em que  $v$  é a velocidade do referencial e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo, tomando  $V_t = \frac{c}{\lambda}$ , sabemos que o produto de um quatérnio pelo seu conjugado é dado por  $q\bar{q} = V_t^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$

que representa o hiperraio da hipersfera. Agora suponhamos que  $y = z = 0$ , logo estamos considerando apenas a situação plana em que o hiperplano se reduz a  $|q|^2 = V_t^2 t^2 + x^2$  (I).

Sabemos que essa equação equivale a circunferência de raio  $|q|$ , dessa forma podemos usar

$$\begin{cases} V_t = |q| \cos \theta \\ x = |q| \sin \theta \end{cases} \quad (\text{II})$$

Agora por II e I, temos que

$$2t^2 = q^2 - x^2 \implies |q|^2 = \frac{|q|^2}{\cos^2 \theta} - \frac{|q|^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad (\text{III})$$

Isso, na relatividade garante a invariância da velocidade da luz no vácuo.

Como exemplo, Santos (2016) diz que “Um dos possíveis referenciais temos o referencial próprio”. Como exemplo, podemos tomar o carro e como referencial o motorista, como diz Santos (2016) “[...] suponha um carro com o motorista em repouso por um tempo indeterminado, neste caso consideramos o carro como referencial próprio do motorista, para todos os objetos dentro do carro permanecem repouso em relação ao motorista [...]”. Santos (2016) afirma que somente o tempo  $T$  é a variável que muda.

Em seguida continuando com o exemplo, Santos (2016) “Em um certo instante o motorista olha pela janela um outro carro em movimento, isto é, um segundo referencial com o tempo  $t$  e coordenadas  $x, y = 0$  e  $z = 0$  e com velocidade  $v$  em relação ao seu carro”. Foi escolhido, sem perda de generalidade, a velocidade  $v$  na direção de  $x$ .

Como temos que o carro pode ser considerado em repouso e o movimento todo esta no segundo carro, pela relatividade temos que

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 T^2$$

Utilizando as transformações de *Lorentz*, podemos resolver a relação acima, chegando à seguinte transformação

$$\begin{cases} ct = \frac{cT}{\alpha} \\ x = -\frac{\beta cT}{\alpha} \end{cases} \quad (\text{IV})$$

então, se fizermos os cálculos teremos

$$\begin{cases} \alpha ct = cT \\ x = -\beta cT \end{cases} \quad (\text{V})$$

no qual  $\beta = \frac{v}{c}$  e  $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2}$ .

Vamos supor em (IV) e (V) que  $\beta = \sin \theta$ ,  $\alpha = \cos \theta$  e  $|q| = ct$  então temos a identidade encontrada em (III), logo podemos considerar a velocidade  $v_t$  como:

$$v_t = c\alpha$$

o que nos resulta em

$$q = \frac{c}{\lambda}t + xi + yj + zk$$

Nesse capítulo, conseguiu-se observar rotações realizadas utilizando os números quatérnios via transformações lineares, além de evidenciar uma aplicação na Física do ensino médio.

# Capítulo 4

## Rotações com os quatérnios e suas matrizes.

Neste capítulo, entende-se melhor como é feita a rotação envolvendo a multiplicação de quatérnios e também serão deduzidas as matrizes de rotação com quatérnios, será percorrida gradualmente a teoria envolvida, na visão do trabalho de Santos (2012) e o que foi apresentado estará bem detalhada no trabalho supracitado.

Para descrever rotações no espaço, é necessário especificar um eixo e um ângulo de rotação. O eixo pode ser descrito como um vetor arbitrário e o ângulo será descrito em torno deste vetor, que é conhecido como vetor diretor.

Como já é conhecido, Hamilton buscou trabalhar rotações no  $\mathbb{R}^3$  por meio de produto de números quatérnios. Nesta seção, será feito um estudo sobre teoria envolvida.

Sabe-se que o conjunto dos quatérnios forma um espaço vetorial, assim é possível determinar, a partir de um quatérnio  $q$ , uma transformação linear  $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Pode-se associar um ponto do espaço tridimensional  $(x, y, z)$  a um quatérnio puro  $w = xi + yj + zk$ . Dessa forma, é definida uma transformação  $R_q(x, y, z) = qwq^{-1} = (x', y', z')$ , onde  $q$  é um quatérnio unitário.

**Proposição 4.1**  $\mathbb{H}$  e  $\mathbb{R}^4$  formam espaços vetoriais isomorfos.

**Proposição 4.2** Sejam  $p$  e  $q$  dois quatérnios puros, então

$$pq = - \langle p, q \rangle + (p \times q)$$

em que  $\langle p, q \rangle$  representa o produto interno entre  $p$  e  $q$  e  $(p \times q)$  representa o produto vetorial.

**Demonstração:** Seja  $p = p_0i + p_1j + p_2k$  e  $q = q_0i + q_1j + q_2k$ . Temos que

$$pq = (p_0i + p_1j + p_2k)(q_0i + q_1j + q_2k)$$

$$\begin{aligned}
 &= -p_0q_0 + p_0q_1k - p_0q_2j - p_1q_0k - p_1q_1 + p_1q_2i + p_2q_0j - p_2q_1i - p_2q_2 \\
 &= -(p_0q_0 + p_2q_1 + p_2q_2) + (p_1q_2 - p_2q_1)i + (-p_0q_2 + p_2q_0)j + (p_0q_1 - p_1q_0)k \quad (**)
 \end{aligned}$$

Como sabemos que  $\langle p, q \rangle = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2$   $(**)$  e

$$(v \times w) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = (p_1q_2 - p_2q_1)i + (-p_0q_2 + p_2q_0)j + (p_0q_1 - p_1q_0)k \quad (***)$$

Fazendo a substituição de  $(**)$  e  $(***)$  em  $(*)$ , podemos concluir que  $pq = -\langle p, q \rangle + (p \times q)$  ■

**Proposição 4.3** *Seja  $w$  um quatérnio puro e  $q$  um quatérnio unitário. Então o produto  $qwq^{-1}$  é um quatérnio puro.*

**Demonstração:**  $qwq^{-1} = qw\bar{q} =$

$$(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(xi + yj + zk)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k)$$

$$\begin{aligned}
 &= q_0xi + q_0yj + q_0zk + q_1xi^2 + q_1yij + q_1zik + q_2xji + q_2yj^2 + q_2zjk + q_3xki + q_3yjk + q_3zk^2)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\
 &= (q_0xi + q_0yj + q_0zk - q_1x - q_1yk + q_1zj + q_2xk - q_2y - q_2zi - q_3xj + q_3yi - q_3z)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k)
 \end{aligned}$$

Agora vamos colocar as partes imaginárias em evidência

$$\begin{aligned}
 &= ((-q_1x - q_2y - q_3z) + (q_0x - q_2z + q_3y)i + ((q_0y + q_1z - q_3x)j + (q_0z - q_1y + q_2x)k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\
 &= (q_0^2x + q_1^2x - q_2^2x - q_3^2x + 2q_0q_2z - 2q_0q_3y + 2q_1q_2y)i + (q_0^2y - q_1^2y + q_2^2y - q_3^2y - 2q_0q_1z + 2q_0q_3x + \\
 &2q_1q_2x + 2q_2q_3z)j + (q_0^2z - q_1^2z - q_2^2z - q_3^2z + 2q_0q_1y - 2q_0q_2x + 2q_1q_3x + 2q_2q_3y)k \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Conseguimos constatar na propriedade anterior que podemos levar um ponto do  $\mathbb{R}^3$  em outro ponto do  $\mathbb{R}^3$  por meio da transformação  $R_q$ . Temos como objetivo provar que este novo ponto do  $\mathbb{R}^3$  é o ponto original rotacionado de acordo com o quatérnio  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ , num eixo e num ângulo de rotação codificado nas quatro coordenadas  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$ .

Mas, antes de desenvolvermos essas contas e mostrar esses resultados, vamos primeiramente analisar a transformação  $R_q$ , que passaremos a denotar, a partir de agora, de  $Rd_q$ . Se tomarmos um quatérnio puro  $w$  aplicado à  $Ad_q$  encontra-se um produto de três quatérnios  $qwq^{-1}$ . Como  $q^{-1}$  é o inverso de  $q$ , então teremos por definição que  $q$  deve ser diferente de zero. Então, será possível enunciar a seguinte proposição.

**Proposição 4.4** *Sejam  $q \in \mathbb{H}^*$  e a aplicação*

$$Ad_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$w \mapsto qwq^{-1}$$

Esta aplicação é um Isomorfismo de anel e, em particular, é  $\mathbb{R}$  – linear.

Vamos mostrar que  $Ad_q$  é um homomorfismo de anel,  $\mathbb{R}$  – linear e bijetora, ou seja, é um isomorfismo.

**Demonstração:**

Sejam  $v, w \in \mathbb{H}$ . vamos mostrar, primeiramente que  $Ad_q$  é um homomorfismo, ou seja que  $Ad_q(v + w) = Ad_q(v) + Ad_q(w)$  e  $Ad_q(vw) = Ad_q(v).Ad_q(w)$

Temos que

$$Ad_q(v + w) =$$

Usando a aplicação, temos

$$q(v + w)q^{-1} =$$

vamos distribuir  $q$  pela esquerda e depois  $q^{-1}$  pela direita.

$$(qv + qw)q^{-1}$$

$$qvq^{-1} + qwq^{-1}$$

perceba que temos

$$Ad_q(v) + Ad_q(w)$$

Agora vamos mostrar que  $Ad_q(vw) = Ad_q(v).Ad_q(w)$ .

Primeiramente, sabemos que  $q.q^{-1} = 1$ , dessa forma

$$Ad_q(vw) =$$

$$q(vw)q^{-1} =$$

$$qvq^{-1}qwq^{-1} =$$

$$Ad_q(v).Ad_q(w)$$

Então temos  $Ad_q(vw) = Ad_q(v).Ad_q(w)$ ., com isso,  $Ad_q$  é um homomorfismo.

Agora, vamos mostrar que  $Ad_q$  é  $\mathbb{R}$ -linear. Para tal, tome  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então

$$Ad_q(\lambda v) = q(\lambda v)q^{-1}$$

Note que um número real  $\lambda$  comuta com um quatérnio  $q$ , então podemos fazer

$$\lambda(qvq^{-1}) = \lambda Ad_q(v)$$

Logo,  $Ad_q$  é  $\mathbb{R}$ -linear

Agora vamos mostrar que  $Ad_q$  é bijetiva, ou seja, que existe  $(Ad_q)^{-1}$

Temos que:

$$\begin{aligned} Ad_{(q)^{-1}} \circ Ad_q(v) &= Ad_{(q)^{-1}}(qvq^{-1}) \\ &= q^{-1}(qvq^{-1})q \\ &= (qq^{-1})v(q^{-1}q) \\ Ad_{(q)^{-1}} \circ Ad_q(v) &= v \end{aligned}$$

Agora, por outro lado temos:

$$\begin{aligned} Ad_q \circ Ad_{(q)^{-1}} &= Ad_q(q^{-1}vq) \\ &= q(q^{-1}vq)q^{-1} \\ &= (qq^{-1})v(qq^{-1}) \\ Ad_q \circ Ad_{(q)^{-1}} &= v \end{aligned}$$

Portanto, temos que  $(Ad_q)^{-1} = Ad_{(q)^{-1}}$ , ou seja, existe a inversa de  $Ad_q$ . Dessa forma,  $Ad_q$  é bijetiva, ou seja, é um isomorfismo. ■

Lembrando que  $GL(\mathbb{H})$  é o grupo linear de grau  $n$ , formado pelas matrizes  $n \times n$  invertíveis com operação de multiplicação de matrizes.

**Proposição 4.5** Consideramos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} Ad : \mathbb{H}^* &\rightarrow GL(\mathbb{H}) \\ q &\mapsto Ad_q \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos.

**Demonstração:** Sejam  $p, q \in \mathbb{H}^*$  e  $v \in \mathbb{H}$ , então

$$\begin{aligned} Ad_p \circ Ad_q(v) &= p(qvq^{-1})p^{-1} \\ &= (pq)v(q^{-1}p^{-1}) \\ &= (pq)v(pq)^{-1} \\ &= Ad_{pq}(v) \end{aligned}$$

■

**Definição 4.6** *O homomorfismo  $A_d$  descrito anteriormente é uma ação de grupo denominado ação adjunta de  $\mathbb{H}^*$  em  $\mathbb{H}$*

**Teorema 4.7** *Consideramos a aplicação*

$$Ad : \mathbb{S}^3 \rightarrow GL(3, \mathbb{R})$$

$$q \mapsto Ad_q$$

*Então  $Ad$  é um homomorfismo de grupo cujo conjunto imagem está contido no subgrupo  $SO(3)$ , das rotações espaciais.*

**Demonstração:** *Podemos verificar que  $\mathbb{S}^3$  é um subgrupo de  $\mathbb{H}^*$ , visto que  $\mathbb{S}^3$  é o conjunto dos quatérnios unitários, logo  $\mathbb{S}^3$  é um subgrupo de  $\mathbb{H}$ , logo é subgrupo de  $\mathbb{H}^*$ . Portanto, como já mostramos anteriormente,  $Ad$  é um homomorfismo, então a aplicação é um homomorfismo.*

*Agora precisamos mostrar que  $Im(Ad) \subset SO(3)$ .*

*Seja  $v = v_1i + v_2j + v_3k$  e  $w = w_1i + w_2j + w_3k$ , dois quatérnios puros e  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{S}^3$ , isto é, satisfazendo  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ , pela proposição 4.1 temos que*

$$Ad_q(v).Ad_q(w) = - \langle Ad_q(v), Ad_q(w) \rangle + (Ad_q(v) \times Ad_q(w))$$

(I)

*Queremos provar que a parte real de  $Ad_q(v).Ad_q(w)$  é igual a parte real de  $vw$ . Para tal, aplicaremos  $Ad_q(v)$  e  $Ad_q(w)$  e faremos a multiplicação, seguem os cálculos  $Ad_q(v).Ad_q(w) = qvq^{-1}qwq^{-1}$*

$$= qvwq^{-1}$$

*Primeiro, a multiplicação à esquerda*

$$\begin{aligned} &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(-\langle v, w \rangle + v \times w)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= ((-q_0 \langle v, w \rangle - q_1(v_2.w_3 - v_3.w_2) - q_2(v_3.w_1 - v_1.w_3) - q_3(v_1.w_2 - w_1.v_2)) + \\ &+ ((-q_1 \langle v, w \rangle + q_0(v_2.w_3 - v_3.w_2) - q_2(v_1.w_2 - v_2.w_1) - q_3(v_3.w_1 - v_1.w_3))i \\ &+ ((-q_2 \langle v, w \rangle + q_0(v_3.w_1 - w_3.v_1) - q_3(v_2.w_3 - w_2.v_3) - q_1(v_2.w_3 - w_2.v_3)) \\ &+ ((-q_3 \langle v, w \rangle + q_0(v_1.w_2 - w_1.v_2) - q_1(v_3.w_1 - v_1.w_3) - q_2(v_2.w_3 - v_3.w_2))k \\ &\cdot (q_0 - q_1i - q_2j + q_3k) \end{aligned}$$

*Agora faremos a multiplicação à direita*

$$\begin{aligned} &= ((q_0^2 \langle v, w \rangle - q_1q_0(v_2.w_3) - q_2q_0(v_3.w_1 - v_1.w_3) - q_3q_0(v_1.w_2 - w_1.v_2) + \\ &- q_1^2 \langle v, w \rangle + q_0q_1(v_2.w_3 - v_3.w_2) + q_2q_1(v_1.w_2 - v_2.w_1) - q_3q_1(v_3.w_1 - v_1.w_3) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -q_2^2 \langle v, w \rangle + q_0 q_2 (v_3 w_1 - w_3 v_1) + q_3 q_2 (v_2 w_3 - w_2 v_3) - q_1 q_2 (v_2 w_3 - w_2 v_3) \\
 & -q_3^2 \langle v, w \rangle + q_0 q_3 (v_1 w_2 - w_1 v_2) + q_1 q_3 (v_3 w_1 - v_1 w_3) - q_2 q_3 (v_2 w_3 - v_3 w_2) \\
 & + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k
 \end{aligned}$$

$$= -(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \langle v, w \rangle + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k$$

Sabemos que  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ , dessa forma teremos

$$Ad_q(v) \cdot Ad_q(w) = - \langle v, w \rangle + (Ad_q(v) \times Ad_q(w)) \quad (II)$$

Se subtrairmos (I) de (II), teremos que

$$\begin{aligned}
 & - \langle Ad_q(v), Ad_q(w) \rangle + (Ad_q(v) \times Ad_q(w)) - (- \langle v, w \rangle + (Ad_q(v) \times Ad_q(w))) = 0 \\
 & \langle Ad_q(v), Ad_q(w) \rangle = \langle v, w \rangle
 \end{aligned}$$

Dessa forma, chegamos que  $Ad_q \in SO(3)$  (\*)

Agora, vamos verificar o determinante da matriz transformação de  $Ad_q$  na base canônica, ou seja,  $[Ad_q] = (Ad_q i Ad_q j Ad_q k)$

Vamos aplicar  $Ad_q(i)$

$$\begin{aligned}
 Ad_q(i) &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) i (q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) = \\
 &= (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) i + (2q_1 q_2 + 2q_0 q_3) j + (2q_1 q_3 - 2q_0 q_2) k
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \\ (2q_1 q_2 + 2q_0 q_3) \\ (2q_1 q_3 - 2q_0 q_2) \end{pmatrix}$$

Agora vamos aplicar  $Ad_q j$

$$\begin{aligned}
 Ad_q(j) &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) j (q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\
 &= (2q_1 q_2 - 2q_0 q_3) i + (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) j + (2q_0 q_1 + 2q_2 q_3) k
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} ((2q_1 q_2 - 2q_0 q_3)) \\ (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \\ (2q_0 q_1 + 2q_2 q_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 Ad_q(k) &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) k (q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\
 &= (2q_0 q_2 + 2q_1 q_3) i + (2q_2 q_3) j + (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) k
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (2q_0 q_2 + 2q_1 q_3) \\ (2q_2 q_3) \\ (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \end{pmatrix}$$

Fazendo o determinante da matriz  $[Ad_q]$  e utilizando o fato de que  $q$  é um quatérnio

unitário, teremos que  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ , podemos concluir que  $\det[Ad_q] = 1$ , ou seja,  $Ad_q \in SL(3)$ . (\*\*)

Logo, por (\*) e (\*\*) temos que  $Ad_q \in SO(3)$ , ou seja,  $Im(A_d) \subset SO(3)$  ■

Como já foi mencionado anteriormente, o ângulo e o vetor de rotação ficam codificados no quatérnio  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ , ou seja, no vetor cuja as coordenadas são  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$ . Vamos mostrar essa afirmação na proposição a seguir.

**Proposição 4.8** *Seja o quatérnio unitário  $= q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ . O vetor eixo de rotação da transformação  $Ad_q$  é*

$$\frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(q_1, q_2, q_3)$$

**Demonstração:** *Seja o quatérnio unitário*

$$N = \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(q_1i + q_2j + q_3k)$$

*Temos, por definição que  $-q- = 1$ , ou seja,  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$*

*Vamos aplicar  $Ad_q$  em  $N$ .*

$$Ad_q(N) = qNq^{-1} = qN\bar{q}$$

$$\begin{aligned} & (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(q_1i + q_2j + q_3k)((q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(q_0q_1i + q_0q_2j + q_0q_3k - q_1^2 + q_1q_2k - q_1q_3j - q_1q_2k - q_2^2 + q_2q_3i + q_2q_3j - q_2q_3i - \\ & q_3^2)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(-q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_0q_1i + q_0q_2j + q_0q_3k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(q_1(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)i + (q_2(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)j + (q_3(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)k) \end{aligned}$$

*Sabemos que  $q$  é um quatérnio unitário, então  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$  dessa forma, teremos*

$$= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(q_1i + q_2j + q_3k)$$

*Portanto, concluímos que  $Ad_q(N) = N$ , note que fizemos uma rotação de  $N$  em torno do próprio  $N$  e resultou no mesmo, sendo assim, conseguimos demonstrar que  $N$  é o eixo de rotação da transformação  $Ad_q$*

■

Na proposição a seguir, evidenciaremos o ângulo de rotação da transformação  $Ad_q$

**Proposição 4.9** *Seja  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  unitário. Então o ângulo de rotação da transformação  $Ad_q$  é  $2\arccos\theta$ .*

**Demonstração:** *Seja um vetor unitário  $v$ , perpendicular ao eixo de rotação  $(q_1, q_2, q_3)$ . Sendo assim,  $v$  e  $Ad_q(v)$  estarão no mesmo plano, também perpendicular à  $(q_1, q_2, q_3)$  e o ângulo entre eles, será o próprio ângulo de rotação.*

$$\text{Seja } v = \frac{-q_2i + q_1j}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$$

Agora vamos aplicar a transformação em  $v$ , teremos

$$\begin{aligned} Ad_q(v) &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(-q_2i + q_1j)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}(-q_0q_2i + q_1q_2 + q_2^2k - q_2q_3j + q_0q_1j + q_1^2k - q_1^2k - q_1q_2 - q_1q_3i)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}(q_0^2q_2i + q_0q_2^2k - q_0q_2q_3j + q_0q_1^2 - q_0q_1q_3i - q_0q_1q_2 - q_1q_2^2j - q_1q_2q_3k + q_0q_1^2k - q_1^3j - \\ & q_1q_3 + q_0q_2^2k + q_2^3i - q_2^2q_3 + q_0q_1q_2 + q_1^2q_2i + q_1q_2q_3k - q_0q_2q_3j + q_2^2q_3 + q_2q_3^2i - q_0q_1q_3i + q_1^2q_3 - q_1q_3^2j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}(-2q_0q_1q_3 - q_0q_2 + q_1^2q_2 + q_2^3 + q_2q_3^2)i + 9 - 2q_0q_2q_3 + q_0^2q_1 - q_1^3 - q_1q_2^2 - q_1q_3^2j + \\ & (2q_0q_2^2 + 2q_0q_1^2)k \end{aligned}$$

$$\text{Temos que } \frac{\langle Ad_q(v), v \rangle}{|Ad_q(v)||v|} = \cos \theta$$

Se  $|v| = 1$ , teremos  $|Ad_q(v)| = 1$ . Dessa forma,  $\langle Ad_q(v), v \rangle = \cos \theta$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle Ad_q(v), v \rangle &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}2q_0q_1q_2q_3 + q_0^2q_2^2 - q_2^4 - q_2^2q_3^2 - 2q_0q_1q_2q_3 + q_0^2q_1^2 - q_1^4 - q_1^2q_2^2 - q_1^2q_3^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}q_0^2(q_1^2 + q_2^2) - q_2^2(q_1^2 + q_2^2) - q_3^2(q_1^2 + q_2^2) - q_1^2(q_1^2 + q_2^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}q_1^2 + q_2^2)(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \\ &= q_0^2 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = \end{aligned}$$

Sabemos que  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ , então

$$q_0^2 = 1 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

$$q_0^2 - 1 = -(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

Substituindo a igualdade, teremos

$$= q_0^2 + q_0^2 - 1$$

$$= 2q_0^2 - 1$$

Agora, realizando os cálculos necessários e utilizando propriedades trigonométricas, teremos

$$\langle Ad_q(v), v \rangle = 2q_0^2 - 1$$

$$= \cos \theta = 2q_0^2 - 1 = \frac{\cos \theta + 1}{2} = q_0^2$$

$$= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = q_0$$

$$\frac{\theta}{2} = \arccos(q_0)$$

$$\theta = 2 \arccos(q_0) \quad \blacksquare$$

Sabemos, pelo teorema 4.7, que o contradomínio de  $Ad$  pode ser restrito a  $SO(3)$ .

Então, podemos redefinir o homomorfismo  $Ad$ .

**Teorema 4.10** Consideremos a aplicação

$$Ad : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$$

$$q \mapsto Ad_q$$

Então  $Ad$  é um homomorfismo de grupos sobrejetivo, ou seja,  $Im(Ad) = SO(3)$

**Demonstração:** Sabemos que se  $A \in SO(3)$ , então  $A = R_{\vec{n}, \psi}$ . Também, pelo resultado anterior, temos que  $\cos(\frac{\psi}{2}) = q_0$  e

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

$$\text{Então } \|q\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 = \cos^2 \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

$$\text{Portanto } \sin \frac{\psi}{2} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

$$\text{Com isso, temos que } \sin \frac{\psi}{2}(\vec{n}) = \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \sin \frac{\psi}{2} i + \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \sin \frac{\psi}{2} j + \frac{q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \sin \frac{\psi}{2} k$$

$$\sin \frac{\psi}{2} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

Logo,  $q = \cos \frac{\psi}{2} + \vec{n} \sin \frac{\psi}{2}$ , ou seja,  $Ad$  é sobrejetiva.

■

Como já é de conhecimento,  $Ad$  é um homomorfismo de grupos, isso foi demonstrado na proposição 4.5, temos que a composição de rotações consiste no produto dos dois quatérnios unitários que definem as transformações, ou seja, dados  $p, q \in \mathbb{S}^3$  temos que  $Ad_p \circ Ad_q = Ad_{pq}$ . Utilizando o teorema anterior, concluimos que  $Im(Ad|_{\mathbb{S}^3} = SO(3))$ . Isso implica que as rotações com quatérnios preservam o produto interno, seguindo na preservação de comprimentos e ângulos entre os vetores rotacionados.

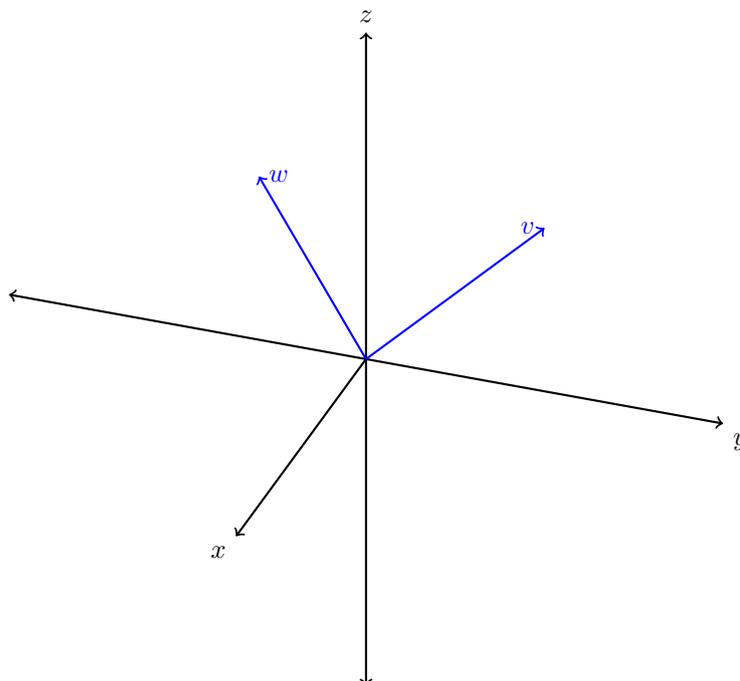
**Exemplo 4.11** Tome  $v \in \mathbb{R}^3$ . Perceba que temos que  $v = 0 + 0i + 1j + 1k = (0, 0, 1, 1) = (0, 1, 1)$  com  $v_0 = 0$ . Queremos fazer uma rotação em torno do eixo-z, dessa forma, tomaremos  $q = 0 + 0i + 0j + 1k = (0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ , perceba que temos  $|q| = 1$ . Com isso, vamos aplicar  $Ad$  em  $v$ .

$$Ad_q(v) = qvq^{-1} = -k(j+k)k = (-kj - k^2)k = \text{utilizando as relações fundamentais, temos}$$

$$(i+1)k = ik + k = -j + k = (0, 0, -1, 1) = w, \text{ com } w \in \mathbb{R}^3 = (0, -1, 1). \text{ Portanto,}$$

conseguimos realizar uma rotação utilizando os quatérnios, como pode-se verificar na figura 4.11, foi possível fazer uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $z$

Figura 4.1: Vetor rotacionado



Fonte: Desenho produzido pelo autor

## 4.1 Quatérnios, rotações e as relações com matrizes.

Foi visto anteriormente uma análise do método de produto de quatérnios para realizar rotações, a partir da transformação  $Ad_q$ . Agora, serão deduzidas as matrizes elementares de rotação no espaço.

Nesta seção, será aplicada a transformação  $Ad$  em cada componente da base  $\{i, j, k\}$ . A partir disso, evidencia-se matrizes de rotação em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Tem-se o objetivo de mostrar que o método de rotação por matrizes é equivalente ao método de multiplicação de quatérnios.

Tem-se pela proposição 4.9 o ângulo de rotação.

$$\theta = 2 \arccos(q_0)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = q_0$$

Primeiramente, será considerado o vetor de rotação (ou vetor diretor), o eixo- $x$ , ou seja, vamos rotacionar os vetores em torno do eixo- $x$ , então  $q_x = q_0 + q_1 i$ . Temos que  $q_x$  é um quatérnio unitário, então  $q_0^2 + q_1^2 = 1$ . Com isso, segue que  $q_1 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Para encontrarmos as matrizes de rotação, vamos aplicar  $Ad_{q_x}$  em cada um dos vetores da base  $\{i, j, k\}$ .

$$Ad_{q_x} = (q_0 + q_1 i)(q_0 - q_1 i)$$

$$= (q_0 i - q_1)(q_0 - q_1 i)$$

$$q_0^2 i + q_0 q_1 - q_0 q_1 + q_1^2 i$$

$$(q_0^2 + q_1^2) i$$

Temos que  $q_0^2 + q_1^2 = 1$ , portanto,

$$Ad_{q_x}(i) = i$$

$$Ad_{q_x}(j) = (q_0 + q_1 i)j(q_0 - q_1 i)$$

$$(q_0 j + q_1 k)(q_0 - q_1 i)$$

$$(q_0^2 - q_1^2)j + 2q_0 q_1 k$$

usando as relações trigonométricas, temos:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

Substituindo  $\alpha$  por  $\frac{\theta}{2}$ , teremos

$$\frac{\sin \theta}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Substituindo  $\alpha$  por  $\frac{\theta}{2}$

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\cos(\theta) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Logo  $Ad_{q_x}(j) = \cos \theta j + \sin \theta k$ .

$$Ad_{q_x}(k) = (q_0 + q_1 i)k(q_0 - q_1 i)$$

$$= (q_0 k - q_1 j)(q_0 - q_1 i)$$

$$= -2q_0 q_1 j + (q_0^2 - q_1^2)k$$

$$Ad_{q_x}(k) = -\sin \theta j + \cos \theta k$$

A partir dos quatérnios, encontramos triplas ordenadas

$$Ad_{q_x}(i) = i + 0j + 0k = (1, 0, 0)$$

$$Ad_{q_x}(j) = 0i + \cos \theta j + \sin \theta k = (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

$$Ad_{q_x}(k) = 0i - \sin \theta j + \cos \theta k = (0, -\sin \theta, \cos \theta)$$

Note que essas triplas ordenadas são os vetores coluna da matriz rotação. Dessa forma, a matriz rotação no eixo- $x$  é:

$$Ad_{q_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_x(\theta)$$

Agora vamos considerar a rotação em torno do eixo- $y$ .

Para tal, vamos utilizar o quatérnio unitário  $q_y = q_0 + q_2j$ . Agora vamos aplicar  $Ad_{q_y}$  em cada um dos vetores da base  $\{i, j, k\}$ .

$$Ad_{q_y}(i) = (q_0 + q_2j)i(q_0 - q_2j)$$

$$= (q_0i - q_2k)(q_0 - q_2j)$$

$$q_0^2i - q_0q_2k - q_0q_2k - q_2^2i$$

$$= (q_0^2 - q_2^2)i - 2q_0q_2k$$

$$Ad_{q_y}(i) = \cos \theta i - \sin \theta k$$

$$Ad_{q_y}(j) = (q_0 + q_2j)j(q_0 - q_2j)$$

$$= (q_0j)(q_0 - q_2j)$$

$$= (q_0^2j + q_0q_2 - q_0q_2 + q_2^2j)$$

$$= (q_0^2 + q_2^2)j$$

Como  $q_y$  é unitário, então  $q_0^2 + q_2^2 = 1$ , portanto

$$Ad_{q_y}(j) = j$$

$$Ad_{q_y}(k) = (q_0 + q_2j)k(q_0 - q_2j)$$

$$(q_0k + q_2i)(q_0 - q_2j)$$

$$q_0^2k + q_0q_2i + q_0q_2i - q_2^2k$$

$$(q_0 - q_2^2)k + 2q_0q_2i$$

$$Ad_{q_y}(k) = \sin \theta i + \cos \theta k$$

Deste modo, obtemos os vetores colunas de  $Ad_{q_y}$ , e vamos listá-los a seguir:

$$Ad_{q_y}(i) = \cos \theta i + 0j - \sin \theta k = (\cos \theta, 0, -\sin \theta)$$

$$Ad_{q_y}(j) = 0i + e_1 + 0e_2 = (0, 1, 0)$$

$$Ad_{q_y}(k) = \sin \theta i + 0j + \cos \theta k = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

Dessa forma, a matriz rotação no eixo- $y$  é:

$$Ad_{q_y} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = R_y(\theta)$$

Agora, por fim, consideremos a rotação em torno do eixo- $z$ . Para tal, vamos utilizar o quatérnio  $q_z = q_0 + q_3k$ , unitário.

$$Ad_{q_z}(i) = (q_0 + q_3k)i(q_0 - q_3k)$$

$$= (q_0i + q_3j)(q_0 - q_3k)$$

$$= q_0^2i + q_0q_3j + q_0q_3j - q_3^2i$$

$$= (q_0^2 - q_3^2)i + 2q_0q_3j$$

$$Ad_{q_z}(i) = \cos \theta i + \sin \theta j$$

$$Ad_{q_z}(j) = (q_0 + q_3 k)j(q_0 - q_3 k)$$

$$= (q_0 j - q_3 i)(q_0 - q_3 k)$$

$$= q_0^2 j - q_0 q_3 i - q_0 q_3 i - q_3^2 j$$

$$= (q_0^2 - q_3^2)j - 2q_0 q_3 i$$

$$Ad_{q_z}(j) = -\sin \theta i + \cos \theta j$$

$$Ad_{q_z}(k) = (q_0 + q_3 k)k(q_0 - q_3 k)$$

$$= (q_0 k - q_3)(q_0 - q_3 k)$$

$$= q_0 k + q_0 q_3 - q_0 q_3 + q_3^2 k$$

$$= (q_0^2 + q_3^2)k$$

, como temos que  $q_z$  é unitário, então

$$Ad_{q_z} = k$$

Agora vamos listar os vetores colunas.

$$Ad_{q_z}(i) = \cos \theta i + \sin \theta j + 0k = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$Ad_{q_z}(j) = -\sin \theta i + \cos \theta j + 0k = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$Ad_{q_z}(k) = 0i + 0j + k = (0, 0, 1)$$

Logo, a matriz rotação no eixo- $z$  é

$$Ad_{q_z} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\theta)$$

Note que foi verificado nessa seção, que o método de rotação com números quatérnios é equivalente ao método matricial, o qual faz uso de matrizes de rotação elementares.

Foi possível observar neste capítulo como é feita a rotação envolvendo a multiplicação dos quatérnios e foi deduzido, de acordo com o trabalho de Santos (2012), as matrizes de rotações dos quatérnios. Além disso, foi feito um exemplo geométrico de uma rotação.

# Capítulo 5

## Aplicação dos quatérnios na animação 3D

Neste capítulo, será apresentada uma aplicação dos quatérnios que foi baseada no trabalho de Biasi e Gattas (2002), todas as informações e demonstrações que serão vistas neste capítulo, se encontra mais detalhada no trabalho supracitado.

No decorrer deste capítulo, será abordada a rotação sem o uso dos números quatérnios e os obstáculos que foram encontrados para realizar animação em 3D com uso de matrizes ou ângulos de Euler. Será evidenciado exemplos que foram retirados do trabalho de Biasi e Gattas (2002) de rotações sem e com o uso dos quatérnios.

Na seção a seguir, será feita uma representação de rotações 3D sem o uso de quatérnios, verifica-se que existem alguns problemas envolvendo essas rotações que discutiremos abaixo.

### 5.1 Representações de rotações 3D sem o uso de quatérnios

Para fazer rotações 3D, é preciso de parâmetros; especificar sua ordem de rotação em relação aos eixos  $x$ ,  $u$ ,  $z$ . Entretanto, alguns problemas podem ser notados quanto utilizado esse modo de rotação.

Para ser mais preciso, a parametrização proposta é a seguinte: Segundo Biasi e Gattas (2002), para especificar a orientação de uma entidade, são fornecidos três parâmetros: sendo estes os ângulos de rotação anti-horária em relação a cada um dos eixos coordenados, a esses ângulos dá-se o nome de Ângulos de Euler. Mas, a pergunta que sempre é feita será: Com isso, os problemas não estão resolvidos?

Diante desse questionamento, Biasi e Gattas (2002) trazem respostas, que de alguma forma são surpreendentes, pois eles dizem que para muitas aplicações, esta representação é problemática. No decorrer do trabalho estudado, os autores destacam algumas dificuldades

que serão evidenciadas a seguir.

A primeira dificuldade é o fato de que operações de rotações, distintivamente das de translação, não são comutativas, ou seja, na translação não importa a ordem em que são feitos os deslocamentos, ao final termina-se na mesma posição, já com as rotações, isso não acontece. Se fizermos uma rotação em torno do eixo- $x$  e depois em torno do eixo- $y$ , obteremos orientações diferentes, se aplicarmos as rotações em ordens diferentes.

Para que o leitor possa ter um melhor entendimento, será descrito abaixo um exemplo que foi retirado do trabalho de Biasi e Gattas (2002).

Imagine que estamos no comando de um avião que voa em linha reta para a frente, indo para o norte, com a asa direita apontando para o leste e a esquerda para o oeste, de acordo com a figura abaixo

Figura 5.1: Avião voando em direção ao norte



Fonte: Desenhado pelo autor no programa “blender”.

Agora, imagine um giro de 90 graus para a esquerda, ou seja, no sentido anti-horário, em torno do eixo vertical, voando agora para o oeste.

Figura 5.2: Avião voando em direção ao oeste



Fonte: Desenhado pelo autor no programa “blender”.

Em seguida, imaginaremos que continuamos voando para o oeste, porém incline o avião de forma que baixe a asa direita e erga a esquerda de 90 graus (isto é, uma rotação anti-horária

em torno do eixo leste-oeste).

Figura 5.3: Avião voando em direção ao leste-oeste

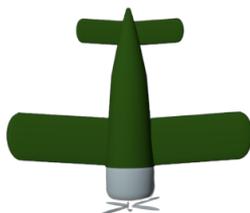


Fonte: Desenhado pelo autor no programa “blender”.

Perceba que depois que foi feita todas essas rotações, tem-se o avião voando para o leste, com a asa direita apontando para o solo e a esquerda para o céu.

Agora será executado exatamente as mesmas rotações, porém na ordem inversa. Começa-se com o avião voando para o norte, executa-se a rotação anti-horária de 90 graus em torno do eixo leste/oeste, o avião começará a voar na vertical, com a cabine voltada para o solo, a cauda apontando para o céu e a barriga para o sul.

Figura 5.4: Avião voando em direção ao solo



Fonte: Desenhado pelo autor no programa “blender”.

Note que a asa direita continuará apontando para o leste e a esquerda para o oeste. Se fizermos agora a rotação anti-horária de 90 graus em torno do eixo vertical, teremos o avião ainda voando para baixo, mas com a asa direita apontando para o norte, a esquerda para o sul e a barriga voltada para o leste.

Logo, pode-se observar no exemplo acima, a ordem em que foi executado as rotações podem alterar completamente a orientação final obtida.

Com isso, evidencia-se que para se executar uma rotação, não basta fornecer os ângulos de rotação em torno dos eixos coordenados, é necessário também especificar a ordem em que essas rotações devem ser executadas.

## 5.2 O fenômeno Gimbal Lock na animação 3D e algumas formas de evitá-lo

Quando utilizado os ângulos de Euler para realizar rotações, existe um acúmulo de erros e algumas orientações que nunca poderão ser atingidas, esse fenômeno em que se dar a “perca” de grau de liberdade de rotação é chamado de *Gimbal Lock*

Biasi e Gattas (2002) trazem alguns exemplos de rotações, nos quais eles apontam o ângulo de Euler não se mostrar tão eficientes e práticos. Será citado alguns deles a seguir. Quando se tem um objeto com uma determinada orientação, caso deseja-se girá-la um pouco mais, mesmo que seja em torno de um dos três eixos coordenados e não de um eixo arbitrário, não é satisfatório simplesmente incrementar um pouco a rotação do eixo correspondente, visto que se quer executar a nova rotação do eixo correspondente após as rotações que já foram previamente executados.

Uma alternativa que os autores trazem, é simplesmente guardar uma lista de todas as rotações executadas, na mesma ordem que foram feitas. Mas isso seria pouco prático e ineficiente, visto que guardaria uma quantidade cada vez maior de dados e repetir o histórico de rotações todas as vezes que quiséssemos rotacionar o objeto.

Uma outra solução proposta pelos autores seria representar as orientações por meio de uma matriz de rotação à posição inicial. Entretanto, essa solução também apresenta problemas, visto que seria usado uma matriz 3 x 3 para representar algo que só tem 3 graus de liberdade, ou seja, estaríamos guardando informações desnecessárias, as suscetivas multiplicações executadas sobre a matriz acumulam erros e, isso acarretaria em uma distorção na orientação pretendida.

## 5.3 Rotação ao redor de um eixo arbitrário

Existe também uma dificuldade importante apresentada pela representação por meio dos ângulos de Euler. Esta surge quando temos o objetivo de interpolar entre duas orientações, isto é, de produzir uma sequência de orientações.

Mesmo que não encontramos o problema *Gimbal Lock*, ainda não é óbvio como fazer que uma entidade execute uma transição suave entre duas orientações.

Temos aqui novamente, uma situação diferente do caso de translação simples, na qual a

interpolação, pelo menos no caso mais simples, é instantânea. Quando é desejado que um objeto se locomova de forma branda entre duas posições percorrendo uma linha reta, simplesmente interpolando de uma forma linear, todas as suas coordenadas, de forma autônoma, dessa maneira teremos efetuado tantas posições intermediárias quanto quisermos ao longo da linha reta que liga as duas posições.

Contudo, se estivermos trabalhando com ângulos de Euler, essa situação não acarreta em resultados satisfatórios. Se aplicarmos a interpolação sobre cada um dos ângulos de rotação gerará rotações independentes em torno desses eixos, ao invés de uma rotação suave e natural em torno do eixo desejado.

Agora vamos apresentar um exemplo, ainda com o avião imaginário. Suponhamos que, ao realizar uma animação, desejamos que ele execute uma rotação de orientação  $(0, 0, 0)$  até a orientação  $(0, 180, 180)$ .

A primeira orientação é a que já conhecemos, do avião voando de cabeça para cima voltada para o eixo norte.

Figura 5.5: Avião voando em direção ao norte



Fonte: Desenhado pelo autor no programa “blender”.

Podemos concluir que a segunda corresponde ao avião voando de cabeça para baixo, voltada para o norte, de acordo com a imagem seguinte.

Podemos perceber que a rotação de  $180^\circ$  no eixo *leste/oeste* deixa o avião voando de cabeça para baixo em direção ao sul, como podemos ver na imagem anterior.

Perceba que a rotação posterior de  $180^\circ$  no eixo *norte/sul* o coloca voando de novo em direção ao norte, mas ainda de cabeça para baixo.

Podemos concluir que para apenas virar o avião de cabeça para baixo, utilizamos uma interpolação linear entre  $(0, 0, 0)$  e  $(0, 180, 180)$ . Isso acarretará orientações intermediárias que não parecerão naturais, pois para virar de cabeça para baixo bastaria girar  $180^\circ$  em torno do eixo *Sul/Norte*. Com a interpolação  $(0, 0, 0)$  a  $(0, 180, 180)$  ele realizará uma cambalhota estranha e pouco natural, a qual girará simultaneamente em torno dos eixos *leste/oeste* e do vertical.

Figura 5.6: Avião voando de cabeça para baixo



Fonte: Desenhado pelo autor no programa “blender”.

Portanto, pode-se perceber que se desejar-se fazer rotações que caminhem e realizem combinações, utilizando ângulos de Euler, em geral gerará movimentos estranhos e inesperados.

## 5.4 Interpolação “ natural ” entre orientações

O questionamento natural é: “Qual o caminho que um objeto deve seguir para percorrer suavemente de uma orientação para outra?”

Primeiramente, o assunto a ser abordado é sobre translações. Biasi e Gattas (2002) afirmam “Quando falamos de translações e queremos que um objeto se mova suavemente de uma posição para outra precisamos determinar uma sequência de posições intermediária entre a posição inicial e a final.” ou seja, deve-se determinar todas as posições que se encontrem entre a posição inicial do objeto e a posição final. Entretanto, dada duas posições no espaço tridimensional, existe uma quantidade infinita de curvas que as ligam. Logo, existe infinitas maneiras e caminhos para um objeto mover-se de uma posição para outra. No caso da translação, a solução mais trivial e instatânea para o problema, “é percorrer o caminho em linha reta, sem que a entidade execute qualquer desvio desnecessário” (BIASI E GATTAS, 2002). Neste caso, será feita uma transalação de forma que não realize desvios ou movimentos desnecessários.

No caso da mudança entre duas orientações, objetiva-se que a alteração não inclua voltas e cambalhotas que pareçam “desnecessárias” para chegar a orientação final. A grande dúvida neste caso, é uma forma para padronizar essa ação, sem que pareça pouco natural.

Como resposta, temos o fato (demonstrado por Euler) que Biasi e Gattas (2002) reafirmam que “sempre é possível chegar de uma orientação a outra por meio de uma rotação simples, ao redor de um único eixo”. Logo, se são dados duas orientações, só e preciso executar uma interpolação linear simples no ângulo de rotação em torno do eixo desejado, que já é de conhecimento a sua existência, para obtermos uma transição branda, exclusiva e sem

imprecisão.

Entretanto, esse não é exatamente um dos eixos coordenados e o parâmetro da rotação por meio do ângulo de Euler não leva com uma forma natural um giro em torno dos eixos arbitrários. Diante disso, objetiva-se encontrar uma maneira de parametrizar a mudança entre duas rotações, de tal forma que aconteça naturalmente ao redor do eixo específico e não siga um caminho arbitrário.

## 5.5 Rotação ao redor de um eixo

Tendo em vista uma forma natural de apresentar orientações e rotações arbitrárias é a especificação de um eixo e de um ângulo de rotação. Agora deseja-se saber de qual forma, a partir de um ponto no espaço, um ângulo de rotação e um eixo dado, pode-se determinar a nova posição do ponto após sofrer a rotação especificada?

Para que seja possível realizar uma rotação, necessita-se de um ponto no  $\mathbb{R}^3$ , representado pelo vetor  $r = (r_x, r_y, r_z)$ . Seja  $P_{\theta, \vec{n}}$  uma rotação anti-horária, de um ângulo  $\theta$ , em torno de um eixo que intercepta a origem definida por um vetor unitário  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ . Biasi e Gattas (2002) deduziram uma expressão para  $P(\vec{r})$ , de tal forma que o vetor represente o ponto obtido após aplicado a  $\vec{r}$  a rotação  $P$ .

Uma solução, foi decompor  $\vec{r}$  em suas componentes normal ( $\vec{r}_\perp$ ) e paralela ( $\vec{r}_\parallel$ ) ao vetor  $\vec{n}$ , aplicando a rotação de  $P$ , a cada uma dessas componentes e somando os resultados. Para que possamos calcular a magnitude da componente  $\vec{r}$  paralela ao vetor  $\vec{n}$ , basta utilizarmos a Álgebra Linear e realizarmos o produto escalar entre  $\vec{r}$  e  $\vec{n}$ .

Nesse sentido, fazendo os cálculos obteremos:

$$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$$

$$\vec{r}_\parallel = (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}$$

$$\vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{r}_\parallel = \vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}$$

Sabemos que se fizermos uma rotação em torno do eixo  $\vec{n}$ , da componente  $\vec{r}_\parallel$ , ela permanece inalterada, então

$$P(\vec{r}_\parallel) = \vec{r}_\parallel$$

Como conseguimos determinar o comportamento da rotação em relação a  $\vec{r}_\parallel$ , agora nos resta encontrar o resultado da rotação em  $\vec{r}_\perp$ . Biasi e Gattas (2002) afirmam que, por definição, “esta rotação ocorrerá num plano paralelo a  $\vec{r}_\parallel$  e perpendicular a  $\vec{n}$ ”. Logo, definindo o vetor

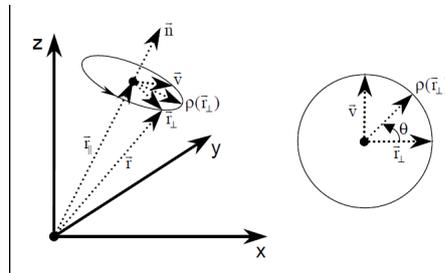
$\vec{v}$  como

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{r}_{\parallel} = \vec{n} \times (\vec{r} - \vec{r}_{\parallel}) = \vec{r} - \vec{n} \times \vec{r}_{\parallel} = \vec{n} \times \vec{r}$$

Após esses cálculos, Biasi e Gattas (2002) afirmam que “obteremos que  $\vec{n}$ ,  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  formarão um triedo direto, e em particular que  $\vec{r}_{\perp}$  e  $\vec{v}$  serão perpendiculares e estarão no plano onde ocorrerá a rotação”. Ainda tem-se que como  $\vec{n}$  é unitário,  $\vec{v}$  terá a mesma norma que  $\vec{r}_{\perp}$ . Pode-se perceber que  $\vec{n}$ ,  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  é um ângulo poliedro, formado por três semirretas e será visto a conclusão e os cálculos a seguir

$$P(\vec{r}_{\perp}) = (\cos \theta)\vec{r}_{\perp} + (\sin \theta)\vec{v}$$

Figura 5.7: Representação Geometrica



Fonte: Imagem retirada do trabalho de Biasi e Gattas.

Somando as componentes, encontraremos

$$\begin{aligned} P(\vec{r}) &= P(\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \\ &= P(\vec{r}_{\parallel}) + P(\vec{r}_{\perp}) \\ &= \vec{r}_{\parallel} + (\cos \theta)\vec{r}_{\perp} + (\sin \theta)\vec{v} \\ &= (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + (\cos \theta)(\vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}) + (\sin \theta)(\vec{n} \times \vec{r}) \\ &= (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + (\cos \theta)\vec{r} - (\cos \theta)(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + (\sin \theta)(\vec{n} \times \vec{r}) \\ &= (\cos \theta)\vec{r} + (1 - \cos \theta)(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + (\sin \theta)(\vec{n} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

Portanto, conseguimos concluir que o ponto resultante após a realização de uma rotação  $P(\theta, \vec{n})$  em um ponto  $\vec{r}$  é

$$P(\theta, \vec{n}) = (\cos \theta)\vec{r} + (1 - \cos \theta)(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + (\sin \theta)(\vec{n} \times \vec{r})$$

## 5.6 Representação e composição de rotações via quatérnios

Nesta seção, será observado como os quatérnios podem ser usados para representar rotações. O ponto em que queremos executar uma rotação será representado por um quatérnio puro  $q = q_1i + q_2j + q_3k$ , que pode ser representado como um vetor no  $\mathbb{R}^3$ ,  $q' = (q_1, q_2, q_3)$ .

A expressão de rotação será  $R_w(q') = wq'w^{-1}$ , como já conhecemos, citado anteriormente neste trabalho, que é equivalente à  $R_w(q') = wq'\bar{w}$

Expandindo as contas obtemos:

$$\begin{aligned}
 wq'\bar{w} &= (w_0, \vec{w})(0, \vec{q})(w_0, -\vec{w}) \\
 &= (w_0, \vec{w})(0w_0 - \vec{q} \cdot -\vec{w}, -0\vec{w} + w_0\vec{q} + \vec{q} \times -\vec{w}) \\
 &= (w_0, \vec{w})(\vec{q} \cdot \vec{w}, w_0\vec{q} - \vec{q} \times \vec{w}) \\
 &= (w_0(\vec{q} \cdot \vec{w}) - \vec{w} \cdot (w_0\vec{q} - \vec{q} \times \vec{w}), w_0(w_0\vec{q} - \vec{q} \times \vec{w}) + (\vec{q} \cdot \vec{w})\vec{w} + \vec{w} \times w_0\vec{q} + \vec{w}(-\vec{q} \times \vec{w})) \\
 &= (w_0(\vec{q} \cdot \vec{w}) - \vec{w} \cdot w_0\vec{q} - \vec{w} \cdot (-\text{vec}q \times \vec{w}), w_0^2\vec{q} - w_0\vec{q} \times \vec{w} + (\vec{q} \cdot \vec{w})\vec{w} + \vec{w} \times (-\vec{q} \times \vec{w})) \\
 &= (w_0(\vec{q} \cdot \vec{w}) - \vec{w} \cdot w_0\vec{q} - \vec{w} \cdot \text{vec}(-\text{vec}q \times \vec{w}), w_0^2\vec{q} + w_0\vec{w} \times \vec{q} + (\vec{q} \cdot \vec{w})\vec{w} + w_0\vec{w} \times \vec{q} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{q})) \\
 &= (\vec{w} \cdot (\vec{q} \times \vec{w}), w_0^2\vec{q} + (\vec{q} \cdot \vec{w})\vec{w} + 2w_0\vec{w} \times \vec{q} + (\vec{w} \cdot \vec{q})\vec{w} - (\vec{w}\vec{w})\vec{r}) \\
 &= (0, w_0^2\vec{r} - (\vec{w} \cdot \vec{w})\vec{q} + 2(\vec{w} \cdot \vec{q})\vec{w} + 2w_0\vec{w} \times \vec{q}) \quad (\text{I})
 \end{aligned}$$

Conseguimos assim, uma expressão genérica da rotação aplicada a um ponto qualquer.

**Observação 5.1** Na dedução acima, utilizamos as seguintes identidades:

- a)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = 0$
- b)  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- c)  $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Como citado na observação 2.2, podemos escrever  $w = w_0 + \vec{w} = (w_0, \vec{w})$ . Dessa forma, sabemos que  $w$  é unitário, logo temos que  $w_0^2 + |\vec{w}|^2 = 1$ . Isso significa, utilizando a trigonometria, que sempre existe um ângulo  $\theta$  tal que  $w_0 = \cos \theta$  e  $|\vec{w}| = \sin \theta$ . Então, sempre podemos escrever  $w$  como

$$w = (w_0, \vec{w}) = (\cos \theta, \sin \theta \vec{n}, |\vec{n}| = 1)$$

Se substituirmos esta interpretação de  $w$  na expressão (I), obteremos

$$\begin{aligned}
 &(0, w_0^2\vec{q} - (\vec{w} \cdot \vec{w})\vec{q} + 2(\vec{w} \cdot \vec{q})\vec{w} + 2w_0\vec{w} \times \vec{q}) \\
 &= (0, (\cos^2 \theta)\vec{q} - (\sin \theta \vec{n} \cdot \sin \theta)\vec{q} + 2(\sin \theta \vec{n} \cdot \vec{r}) \sin \theta \vec{n} + 2 \cos \theta (\sin \theta \vec{n}) \times \vec{r}) \\
 &= (0, (\cos^2 \theta)\vec{q} - (\sin^2 \theta \vec{n} \cdot \vec{n})\vec{q} + (2 \sin^2 \theta)(\vec{n} \cdot \vec{q})\vec{n} + (2 \cos \theta \sin \theta)\vec{n} \times \vec{q}) \\
 &= (0, (\cos^2 \theta)\vec{q} - (\sin^2 \theta)\vec{q} + (1 - \cos 2\theta)(\vec{n} \cdot \vec{q})\vec{n} + (\sin 2\theta)\vec{n} \times \vec{q}) \\
 &= (0, (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\vec{q} + (1 - \cos 2\theta)(\vec{n} \cdot \vec{q})\vec{n} + (\sin 2\theta)\vec{n} \times \vec{q}) \\
 &= (0, (\cos 2\theta)\vec{q} + (1 - \cos 2\theta)(\vec{n} \cdot \vec{q})\vec{n} + (\sin 2\theta)\vec{n} \times \vec{q})
 \end{aligned}$$

**Observação 5.2** Para a dedução acima, utilizamos as seguintes identidades:

$$a) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$b) \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$c) 2 \sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)$$

$$d) 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$$

Se compararmos a parte imaginária da expressão obtida acima, com a que encontramos em 5.5, podemos verificar que são muito parecidas, a única mudança é o fator 2 associado ao ângulo  $\theta$ .

Tem-se com isso, que se desejado aplicar a um ponto  $q'$ , uma rotação anti-horária de um ângulo  $\theta$ , ao redor de um eixo definida por um vetor unitário  $\vec{n}$ , pode-se resolver, com quatérnios da seguinte maneira:

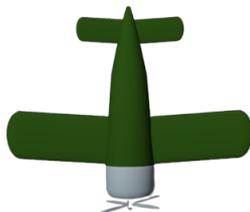
- Represente  $q'$  pelo quatérnio  $q = (0, \vec{q})$ ;
- Represente a rotação pelo quatérnio  $q = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \vec{n})$ ;
- Realize a operação  $R_w(q') = wq\bar{w}$ ;
- A parte real do resultado será zero e a parte imaginária conterá o resultado da rotação.

Como já foi mostrado no capítulo 4, que a composição de rotações é equivalente a fazermos a multiplicação de dois quatérnios. Portanto, a rotação “natural” que tanto se procura, é feito de forma prática com a própria álgebra dos quatérnios. Basta tomar dois quatérnios unitário que representam duas rotações de ângulos diferentes, em torno de eixos distintos e deseja-se encontrar uma representação para a rotação resultante da composição dessas duas rotações, basta multiplicar os dois quatérnios. Após essa multiplicação, é encontrado como resultado um novo quatérnio unitário cuja parte imaginária será um vetor na direção e sentido do eixo da rotação resultante e a parte real será o cosseno do ângulo de rotação. Conseguindo assim, descrever a rotação de forma natural e única.

Após chegar-se a conclusão da vantagem de utilizar os quatérnios para realizar rotações, simularemos, de acordo com Biasi e gattas (2002), novamente com o avião, utilizando os quatérnios e para exemplificar vamos apresentar um exemplo a seguir:

Vamos supor que o piloto, inicialmente voando para o norte, realiza uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo *leste oeste* (voltando o nariz para o solo), que podemos visualizar na figura a seguir

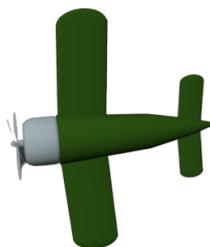
Figura 5.8: Avião voando em direção ao solo



Fonte: Desenhado pelo autor no programa “blender”.

E depois outra de  $90^\circ$  em torno do eixo *Sul* (voltando a asa esquerda para o céu), vide figura a seguir

Figura 5.9: Avião voando com asa em direção ao céu



Fonte: Desenhado pelo autor no programa “blender”.

A primeira rotação será representada pelo quatérnio

$$q_1 = \left(\cos\left(\frac{90}{2}\right), \sin\left(\frac{90}{2}\right)(0, 1, 0)\right)$$

Note que o nosso vetor unitário  $\vec{n}$  é o ponto  $(0, 1, 0)$ , e sabemos que  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , temos  
 $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 0)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\right)$

E a segunda rotação pelo quatérnio

$$\begin{aligned} q_1 &= \left(\cos \frac{90}{2}, \sin \frac{90}{2}(1, 0, 0)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 0)\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)\right)$$

Como vimos anteriormente, para realizar a composição das duas rotações, basta multiplicarmos os dois quatérnios. A rotação composta, portanto, será:

$$\begin{aligned} q_3 &= q_2 \cdot q_1 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right), 0, 0) \left(0, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(0, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right), 0, 0\right) + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 0, 0\right) \times \right. \\ &\left. \left(0, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - (0 + 0 + 0), \left(0, \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + \frac{1}{2}(1, 0, 0) \times (0, 1, 0)\right)\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}(0, 0, 1)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + (0, 0, \frac{1}{2})\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Como temos que o ângulo de rotação, no sentido anti-horário, da transformação é  $2\arccos a$ , no qual  $a$  é a parte real do resultado, temos que  $\theta = 2\arccos \frac{1}{2} = 120^\circ$  em torno do eixo definido pelo vetor  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

Após chegarem ao exemplo anterior, Biasi e Gattas (2002), procuraram saber se a rotação simples em torno de um único eixo realmente corresponde à composição das duas rotações dadas, para tal, retornaram ao exemplo do avião. Vamos supor um ponto na asa direita do avião com ele voando em sua orientação inicial, voltada para o norte. Suponhamos que esse ponto ocupe a posição  $\vec{r}_1 = (10, -5, 0)$ , ou seja, a dez unidades a norte da origem, cinco para a leste e a zero de altura. Já é de nosso conhecimento que após as duas rotações, o avião deverá estar para o oeste, com a asa direita apontando para o solo, ou seja, com  $\vec{r}_2 = (0, 10, -5)$ . Aplicando a rotação sobre  $\vec{r}_1$ , obteremos

$$\begin{aligned} & q_3(0, \vec{r}_1)\overline{q_3} \\ &= \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \left(0, (10, -5, 0)\right) \left(\frac{1}{2}, -\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \left(0 + (10, -5, 0) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), 0 + \frac{1}{2}(10, -5, 0) \times \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \left(\left(\frac{1}{2}10 - \frac{1}{2}5 + 0\right), \left(\frac{1}{2}10, -\frac{1}{2}5, 0\right) - \left(-\frac{1}{2}5 - 0, 0 - \frac{1}{2}10, \frac{1}{2}10 - \left(-\frac{1}{2}5\right)\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \left(\frac{1}{2}5, \left(\frac{1}{2}10, -\frac{1}{2}5, 0\right) - \left(-\frac{1}{2}5, -\frac{1}{2}10, \frac{1}{2}15\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \left(\frac{1}{2}5, \left(\frac{1}{2}15, \frac{1}{2}5, -\frac{1}{2}15\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}5 - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}15, \frac{1}{2}5, -\frac{1}{2}15\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}15, \frac{1}{2}5, -\frac{1}{2}15\right) + \frac{1}{2}5\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}15, \frac{1}{2}5, -\frac{1}{2}15\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}5 - \left(\frac{1}{4}15 + \frac{1}{4}5 - \frac{1}{4}15\right), \left(\frac{1}{4}15, \frac{1}{4}5, -\frac{1}{4}15\right) + \left(\frac{1}{4}5, \frac{1}{4}5, \frac{1}{4}5\right) + \left(-\frac{1}{4}15 - \frac{1}{4}5, \frac{1}{4}15 - \left(-\frac{1}{4}15\right), \frac{1}{4}5 - \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{4}15\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}5 - \frac{1}{4}5, \left(\frac{1}{4}20, \frac{1}{4}10, -\frac{1}{4}10\right) + \left(-\frac{1}{4}20, \frac{1}{4}30, -\frac{1}{4}10\right)\right) \\ &= \left(0, \left(0, \frac{1}{4}40, -\frac{1}{4}20\right)\right) \\ &= \left(0, (0, 10, -5)\right) \end{aligned}$$

Dessa forma, pode-se concluir de acordo com Biasi e Gattas (2002) que apenas multiplicando quatérnios, pode-se encontrar a parametrização em coordenadas “naturais” da composição de um número arbitrário de rotações e de aplicar essas rotações a pontos dados. Dessa forma, para compor a orientação de uma entidade, é necessário somente de um quatérnio, ou seja, utilizando somente um quatérnio, conseguimos descrever rotações naturais tão desejadas nas animações 3D.

Outra vantagem de utilizar o quatérnio para descrever rotações é que nos encontramos livres do *Gimbal Lock*. Biasi e Gattas (2002) dizem que “ não existem eixos preferenciais ou perda de graus de liberdade nesta parametrização. A partir de qualquer posição ou rotação, podemos aplicar qualquer outra rotação sem restrições”. Dessa forma, os quatérnios se mostram mais vantajosos quando utilizados para fazer rotações do que as outras maneiras apresentadas no decorrer do capítulo.

Nesse capítulo, foi apresentado uma aplicação dos quatérnios, baseado no trabalho de Biasi e Gattas (2002), vale ressaltar que todas as demonstrações e afirmações feitas nesse capítulo foram baseadas na ideia dos autores supracitados. Além das aplicações que trouxemos, foi evidenciado as vantagens de realizar rotações de animação 3D utilizando os quatérnios, ao invés de se usar as rotações via matrizes ou ângulos de Euler.

# Considerações finais

No que se diz respeito a história, percebe-se a relevância dos quatérnios, visto que foi a primeira Álgebra não comutativa da história, revolucionando a Álgebra na época e posteriormente.

Percebe-se a relevância dos números quatérnios na rotação 3D, visto que apenas multiplicando dois números é possível descrever qualquer rotação no espaço tridimensional, diferentemente da rotação via matrizes, as quais acumulam muitos cálculos e erros no decorrer do processo de rotações.

No decorrer do texto foram observadas e feitas comparações de animações 3D utilizando matrizes e depois utilizando os números quatérnios sendo possível verificar que o primeiro método não consegue descrever todas as rotações possíveis e nem fazer com que essas animações pareçam tão natural quanto a realidade, diferentemente de quando são usados os quatérnios para realizar as mesmas animações.

Por fim, este trabalho tem relevância no que diz respeito a aplicação na rotação 3D, deixando em aberto novas pesquisas que podem utilizar os conceitos trazidos na presente escrita para evidenciar outras aplicações ou feitas de forma diferente com um novo olhar.

# Bibliografia

- [1] LIMA, Elon Lages . **Álgebra Linear**. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, f. 357, 2014. 359 p.
- [2] ALMEIDA, Ricardo José de Oliveira; LIMA, Airlan Arnaldo Nascimento de. **Quatérnios: Indo além dos números complexos**. Repositorio ifpe. 2020. 12 p. Disponível em: <https://repositorio.ifpe.edu.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/256/QUAT>
- [3] BIASI, S. C. de; GATTASS, M. **Utilização de Quaternios para a representação de rotações em 3D**. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2002. Disponível em: [www.tecgraf.pucRio.br/~mgattass/Quaternios.pdf](http://www.tecgraf.pucRio.br/~mgattass/Quaternios.pdf). Acesso em: 23 jul. 2021.
- [4] EVES, H., **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.
- [5] NEVEZ, Robson Coelho. **Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço**. Rio de Janeiro, 2008. 113 p Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - UFRJ – Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2008.
- [6] SÁ, Pedro Franco de; CHAQUIAN, Miguel. **Algebra**. 1 ed. Belém: UEPA, 2011.
- [7] SANTOS, Davi José dos. **A álgebra dos complexos/quatérnios/octônios e a construção de Cayley-Dickson**. Catalão , 2016. 103 p Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2016.
- [8] SANTOS, Michel Valmor dos. **Números Complexos, Quatérnios e Rotações**. Florianópolis, 2012. 58 p Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.
- [9] YARTEY, Joseph Nee Anyah . **Álgebra II**. 1 ed. Salvador: UFBA - Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a distância, 2017. 244 p.