UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THIAGO SANTOS MENDES

DUELO DAS RETAS: A Evolução de Um Jogo de Estratégia - Papel, Caneta, Figuras e Pontos Transportados Para Um Aplicativo

Vitória da Conquista - BA
2023

THIAGO SANTOS MENDES

DUELO DAS RETAS: A Evolução de Um Jogo de Estratégia - Papel, Caneta, Figuras e Pontos Transportados Para Um Aplicativo

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Júlio César dos Reis.

Vitória da Conquista - Bahia
2023

Folha de aprovação

Thiago Santos Mendes

DUELO DAS RETAS: A Evolução de Um Jogo de Estratégia - Papel, Caneta, Figuras e Pontos Transportados Para Um Aplicativo

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em: 30 de agosto de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César dos Reis (Orientador)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)

Prof. Dr. André Nagamine
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)

Prof.ª Dr.ª Daniela Andrade Monteiro Veiga
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)

Vitória da Conquista – BA
2023

Aos meus pais Edilson Luz Mendes e Eva Maria dos Santos Mendes,
com todo o meu amor e gratidão.

Agradecimentos

Ao concluir esse trabalho, agradeço inicialmente ao Senhor Deus por ter me abençoado e guiado durante todo este período de estudos.

Aos meus pais Edilson Luz Mendes e Eva Maria dos Santos Mendes, eles que pela graça divina me deram o privilégio da vida e de ser seu filho. As palavras de conforto e confiança em meio às dificuldades encontradas pelo caminho foram fundamentais para a realização desse trabalho. Obrigado por todo o apoio.

Aos meus irmãos mais velhos Higo Santos Mendes e Iago Santos Mendes, eles que sempre demonstraram entusiasmo e alegria com a minha formação acadêmica. Obrigado por acreditar no irmão mais novo de vocês.

À Láisa Lopes Mendes, uma pessoa especial que esteve, está e sempre estará presente na minha vida e no meu coração. Você é o meu grande amor.

Agradeço também a todos os amigos e familiares que torceram por mim, em especial, a minha tia Eleni Mendes, ela que abriu as portas de sua casa quando mudei de cidade e fui em busca do meu sonho.

À Júlio Reis, que sempre esteve presente como orientador e amigo, por todos os ensinamentos, por todas as conversas e por me fazer gostar ainda mais de Matemática. Júlio, você é um professor incrível e é o meu exemplo de educador. Deixo aqui a minha admiração e também a minha gratidão por ter aceitado essa parceria tão especial e única para mim.

Aos meus professores da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB por toda a partilha de conhecimento e troca de experiências. À banca examinadora pelas ricas contribuições para a conclusão desse trabalho.

Por fim e não menos importante, aos meus colegas da turma de 2020.1 por terem compartilhado diversos momentos únicos e marcantes durante a minha jornada acadêmica. Sempre levarei na minha memória todos os momentos vividos juntos na UESB.

RESUMO

O presente trabalho busca apresentar o jogo eletrônico Duelo das Retas. Esse jogo é a evolução do jogo digital Intersecting Lines e representa algumas generalizações possíveis de serem realizadas a partir da versão inicial. O novo aplicativo está disponível gratuitamente para telefones celulares, cujo sistema operacional é o Android. O jogo, assim como na primeira versão, é para dois jogadores que, alternadamente, devem construir segmentos de reta através da ligação de dois pontos que estão localizados em lados diferentes do polígono base escolhido para a partida. As figuras geométricas que estão disponíveis para serem escolhidas na segunda versão do jogo são o triângulo, quadrado, pentágono, hexágono e heptágono. Cada figura base possui distribuições de pontos específicas para assegurar as mesmas chances de vitória entre os dois jogadores, ou seja, para que a partida seja disputada de forma justa e igualitária. Cada cruzamento realizado entre retas de uma mesma cor possibilita ao jogador daquela cor marcar dois pontos. O objetivo para ambos os jogadores é realizar a maior quantidade de intersecções possíveis entre retas de sua cor e, com isso, vencer a disputa. No decorrer dos capítulos, serão discutidos os processos de elaboração e verificação de uma estratégia ideal que garante o resultado de vitória ou empate para o jogador que a utilizar, independentemente do polígono base escolhido para a partida. Serão abordados também o comportamento dos casos e suas respectivas variações possibilitados a partir da utilização da estratégia ideal, além das semelhanças existentes entre partidas jogadas em polígonos base diferentes.

Palavras-chave: Jogos digitais; Evolução; Estratégia ideal; Duelo das Retas.

Lista de figuras

Sumário

Introdução

O jogo eletrônico Intersecting Lines é fruto da Monografia intitulada INTERSECTING LINES: Um Jogo de Raciocínio, desenvolvida por Micaeli Meira Queiroz para a obtenção do Título de Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB.

O jogo digital mencionado é inspirado em uma proposta de jogo que originalmente é disputado com papel e caneta. Em uma das edições da Revista Superinteressante, na seção "Superdivertido" que abordava propostas de jogos matemáticos, foi publicado um artigo escrito por Luiz Del Monte Neto, no qual apresentava-se o referido jogo de papel e caneta. Tal jogo foi inspirado em um dos jogos do livro "50 jeux avec du papier et des crayons" (50 jogos com papel e lápis) de François Pingaud e Jean-Fraçois Germe (Editions du Rocher, Mônaco, 1984).

A ideia do jogo consiste em dois jogadores desenharem um quadrado de tamanho razoável em um papel e marcarem 4 pontos em cada lado da figura com igual espaçamento entre um ponto e outro. Cada um dos jogadores deve ter uma caneta de cor diferente. O objetivo para ambos os jogadores é ligar dois pontos de lados diferentes para construir uma reta e realizar a maior quantidade de intersecções entre as retas da sua respectiva cor.

Nesse contexto, a autora do trabalho mencionado buscou desenvolver uma versão eletrônica desse jogo para ser disponibilizado gratuitamente como um aplicativo para telefones celulares, cujo sistema operacional é o Android. A criação de regras, objetivos, estratégias, cores para as retas de cada jogador e contagem de pontos também foram aspectos pensados pela autora durante a elaboração do aplicativo.

Com isso, o objetivo geral da autora com o seu trabalho foi transferir o jogo original com papel e caneta para uma versão digital inédita e mais simples compatível com telefones celulares. Além disso, a autora buscou apresentar e investigar os possíveis usos pedagógicos desse aplicativo para o ensino de conteúdos matemáticos em sala de aula.

Ao término da monografia a autora menciona a possibilidade de se pensar em uma segunda versão para o jogo Intersecting Lines. Para isso, a ideia básica citada no trabalho é tratar da variação quanto ao número de lados da figura geométrica escolhida para as partidas, bem como as possíveis distribuições de pontos.

Isso significa que o triângulo ou polígonos com maior número de lados do que o quadrado (pentágono, hexágono, heptágono, octógono, etc.) são figuras possíveis de serem utilizadas como figura base para o jogo. É válido destacar que existem algumas restrições quanto ao número de pontos em cada lado de um determinado polígono, uma vez que certa quantidade de pontos pode tornar a partida injusta para um dos jogadores.

Nesse sentido, para que a partida seja disputada de forma justa em polígonos com número ímpar de lados é necessário que a quantidade de pontos distribuídos em cada um dos lados seja um número múltiplo de 4. Isso se deve ao fato de que um número ímpar de pontos resulta sempre em um ponto sem par. E, caso a quantidade de pontos seja um número par que não é múltiplo de 4 o total de segmentos de reta possíveis de serem construídos é uma quantidade ímpar. Esses dois cenários possibilitam ao primeiro jogador vantagem sobre o segundo.

De modo análogo, para que a disputa seja justa em polígonos com número par de lados é necessário que a quantidade de pontos distribuídos em cada um dos lados não possibilite um total ímpar de segmentos de retas, pois esse cenário possibilita ao primeiro jogador vantagem sobre o seu adversário.

Assim, pensando em possíveis variações quanto ao número de lados e de pontos que respeitem as regras do jogo a presente monografia busca apresentar uma segunda versão para o aplicativo Intersecting Lines.

O novo jogo desenvolvido é intitulado "Duelo das Retas" e representa algumas generalizações possíveis de serem realizadas baseando-se na versão anterior. Convém ressaltar que os polígonos base e a quantidade de pontos em cada um dos lados sofrem variações adequadas para garantir as mesmas chances de jogadas e vitória entre os dois jogadores.

É importante destacar também que uma estratégia ideal foi desenvolvida durante as análises das jogadas boas e ruins em cada uma das figuras base. Mais do que isso, foi possível constatar que tal estratégia é válida para qualquer polígono base com qualquer quantidade de pontos em cada um dos seus lados. Isso significa que independentemente da configuração inicial escolhida para o jogo a estratégia ideal a se seguir continua sendo a mesma.

Pôde-se verificar também que tal estratégia permite, basicamente, três casos diferentes entre si e que cada caso possui variações que são possibilitadas de acordo o andamento da partida. Além disso, observou-se que tais variações se comportam da mesma forma independentemente do polígono base escolhido, constatando-se que partidas disputadas em polígonos com maior número de lados são "semelhantes" às partidas jogadas em figuras menores.

Nesse contexto, o jogo eletrônico Duelo das Retas a ser apresentado nos próximos capítulos do texto é a segunda versão digital do jogo Intersecting Lines. Foi planejado e desenvolvido pelos autores do presente trabalho como uma generalização do jogo na versão anterior.

A organização da escrita do trabalho está estruturada em 5 capítulos. O primeiro capítulo busca apresentar as duas versões dos jogos digitais mencionados anteriormente.

O segundo e terceiro capítulos apresentam o desenvolvimento e as análises de partidas disputadas no jogo Duelo das Retas, escolhendo-se como polígonos base para as partidas os Triângulos de 4, 8 e 12 pontos e os Quadrados de 2, 3 e 4 pontos, respectivamente.

O quarto capítulo visa apresentar uma expressão matemática que permite determinar a quantidade máxima de retas que podem existir em um dos casos que podem acontecer ao se disputar uma partida no jogo Duelo das Retas.

Já o quinto e último capítulo aborda algumas partidas jogadas no jogo Duelo das Retas, optando-se como figuras geométricas base o Pentágono e o Hexágono, além de se trabalhar as possíveis generalizações que podem ser realizadas para polígonos com maior número de lados e de pontos.

Por fim, escreveu-se as considerações finais com base nos possíveis usos pedagógicos do jogo em sala de aula, na evolução e jogabilidade do aplicativo, nas generalizações e ideias trabalhadas nos capítulos apresentados durante o texto.

Capítulo 1

Intersecting Lines e Duelo das Retas: dois jogos de raciocínio

Neste capítulo, serão apresentadas as principais ideias e características relacionadas aos jogos eletrônicos Intersecting Lines (primeira versão) e Duelo das Retas (segunda versão).

1.1 Intersecting Lines

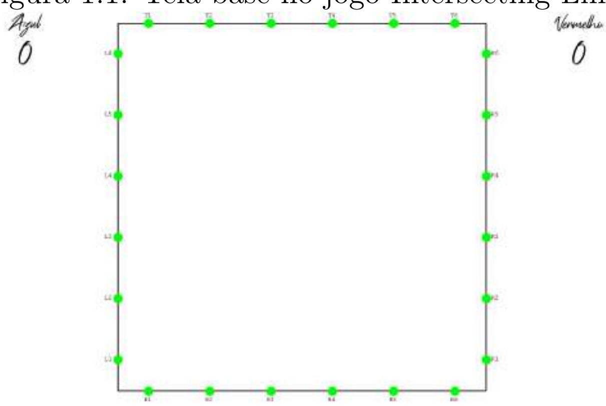
A primeira versão desse jogo digital foi desenvolvida pela Professora Micaeli Meira Queiroz no ano de 2021 durante o seu trabalho de monografia para o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB.

A versão eletrônica e inédita é inspirada em uma proposta de jogo que originalmente é disputado com papel e caneta. O aplicativo está disponível gratuitamente para download no Google Play Store para telefones celulares com sistema operacional Android.

1.1.1 Conhecendo o jogo

O jogo possui como polígono base para as partidas um quadrado contendo 6 pontos distribuídos igualmente em cada um dos lados. A Figura 1.1 apresenta esse cenário.

Figura 1.1: Tela base no jogo Intersecting Lines



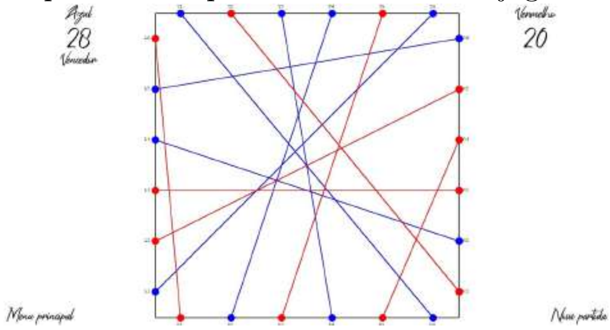
Fonte: elaborado pelos autores

Uma partida é disputada por dois jogadores (Azul e Vermelho) que jogam alternadamente em cada rodada. É possível que uma partida seja disputada contra o próprio aplicativo ou por dois usuários manualmente, isto é, ambos utilizando o mesmo telefone celular.

A proposta do jogo consiste em construir segmentos de retas através da ligação de dois pontos que estão em lados diferentes do polígono base e realizar intersecções entre retas de uma mesma cor. Desse modo, o objetivo para ambos os jogadores é realizar a maior quantidade de intersecções entre retas de uma mesma cor e, com isso, vencer a partida.

A Figura 1.2 mostra a conclusão de uma partida, na qual o vencedor foi o jogador Azul com um total de 28 pontos, enquanto o seu adversário (jogador Vermelho) obteve 20 pontos.

Figura 1.2: Exemplo de uma partida finalizada no jogo Intersecting Lines



Fonte: elaborado pelos autores

1.1.2 Regras do jogo

As regras para o jogo Intersecting Lines segundo Queiroz (2021, p. 14) são:

> 1. Cada jogador tem uma cor: azul ou vermelha.
> 2. Cada jogador tem a sua vez de jogar.
> 3. Cada jogada consiste em traçar uma reta (line) unindo dois pontos.
> 4. Não é possível pular uma jogada.
> 5. Pontos que estão de um mesmo lado do quadrado não podem ser ligados.
> 6. Só é permitido que um ponto seja ligado a outro uma única vez, de forma que um ponto forme uma única reta com outro.

Tais regras norteiam o desenvolvimento justo e correto de uma partida entre dois jogadores. É válido mencionar que o aplicativo está programado para seguir fielmente as normas mencionadas acima, o que significa que não é possível violar as regras do jogo.

1.1.3 Jogadas boas e ruins

Sabemos que uma reta divide um plano em duas partes diferentes, chamadas de semi-planos. Se dois pontos estão localizados em semi-planos distintos, então ao traçarmos uma reta que passa por esses dois pontos realizamos um cruzamento entre a nova reta e a reta que define os dois semi-planos.

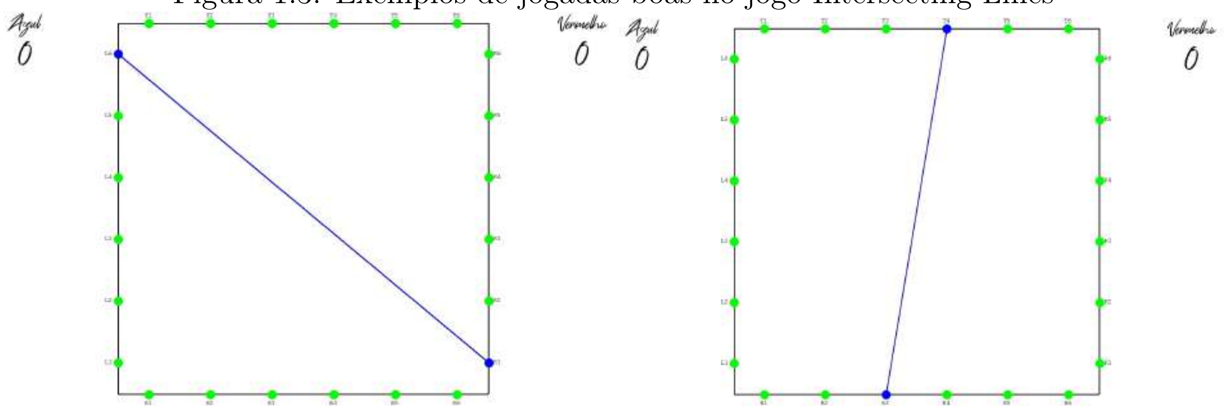
Um jogador marca pontos no jogo Intersecting Lines quando realiza intersecções entre retas de sua cor. Assim, para um jogador marcar pontos durante uma partida basta construir retas a partir de pontos que estejam posicionados em lados opostos de uma reta de sua cor.

Ao pensarmos nas possibilidades de jogadas que podem ser realizadas durante uma partida disputada no jogo Intersecting Lines, podemos considerar algumas jogadas como sendo jogadas boas ou ruins. A autora do jogo eletrônico em sua primeira versão descreve em seu trabalho esses dois tipos de jogadas.

- Jogadas boas são retas que separam o numero de pontos restantes de forma igual, pois esses cenários concedem maiores chances de interseções futuras entre retas de mesma cor.
- Jogadas ruins são retas que não separam o número de pontos restantes de forma igual, pois esses cenários não permitem muitos cruzamentos futuros entre retas de mesma cor.

A Figura 1.3 apresenta dois exemplos de jogadas boas no jogo Intersecting Lines.

Figura 1.3: Exemplos de jogadas boas no jogo Intersecting Lines

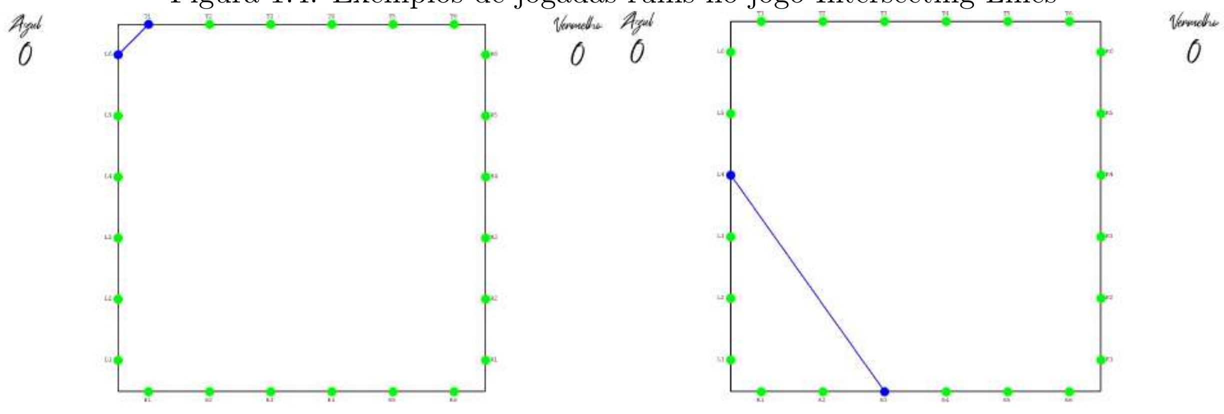


Fonte: elaborado pelos autores

Note que as duas retas da cor azul apresentadas acima separam os 22 pontos restantes de maneira igual nos dois semi-planos formados. Esses cenários permitem maiores chances de intersecções futuras entre retas de cor azul, pois ao escolhermos dois pontos que estão localizados nos semi-planos criados um cruzamento entre a nova reta e a reta já existente irá ocorrer.

Observe agora na Figura 1.4 dois exemplos de jogadas ruins no jogo Intersecting Lines.

Figura 1.4: Exemplos de jogadas ruins no jogo Intersecting Lines



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que as duas retas da cor azul mostradas acima dividem a quantidade de pontos restantes em dois semi-planos de maneira desigual. Esses cenários não possibilitam grandes chances de cruzamentos futuros entre novas retas azuis e a reta azul já existente, uma vez que existem poucos (ou nenhum) pontos para serem escolhidos em um dos semi-planos criados.

1.1.4 Estratégia ideal

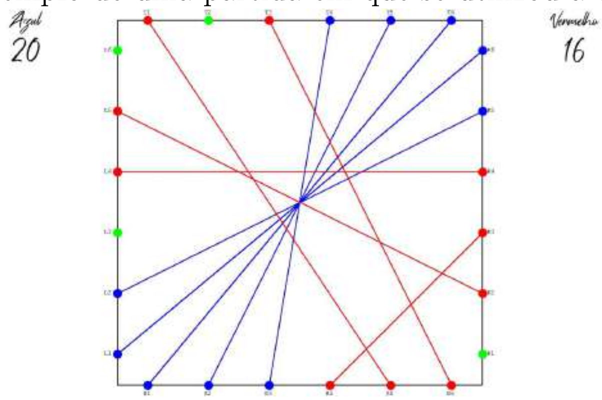
Ao analisarmos as possibilidades de jogadas boas e ruins para o jogo Intersecting Lines uma estratégia ideal de jogo pode ser pensada. Tal estratégia deve oportunizar ao jogador que a utilizar a chance de vitória ou pelo menos o empate.

Nesse contexto, a estratégia ideal a ser adotada consiste em o jogador construir, durante cada uma de suas rodadas, retas que separem o número de pontos restantes de forma igual. Isso significa que a quantidade de pontos que sobram em cada um dos dois semi-planos formados após a construção da reta deve ser a mesma.

O jogador ao fazer uso dessa estratégia, próximo ao final da partida, mais precisamente quando restarem 4 pontos em jogo, terá a oportunidade de definir o resultado para a disputa. Para isso, o jogador deve analisar a configuração em que se encontra a partida, decidir qual será a sua jogada final e, consequentemente, a de seu adversário. Isso irá permitir ao jogador inicial prever a conclusão da disputa, ou seja, se o jogo irá acabar empatado ou se haverá um vencedor e um perdedor.

A Figura 1.5 apresenta um exemplo de partida em que o jogador Azul adotou a estratégia ideal mencionada acima, enquanto que o seu adversário (jogador Vermelho) realizou jogadas diversas.

Figura 1.5: Exemplo de uma partida em que se utilizou a estratégia ideal



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que o cenário acima possibilita ao jogador Azul, a partir da definição de sua jogada final, a chance de determinar a jogada final de seu adversário e, com isso, prever o resultado para a partida. Nesse sentido, por meio de uma análise correta da configuração da partida, é possível que o jogador Azul realize uma jogada que lhe oportunize a vitória ou pelo menos o empate, assim como presume a estratégia ideal utilizada.

1.2 Duelo das Retas

Esse jogo digital para telefones celulares com sistema operacional Android foi desenvolvido no ano de 2023 e é parte da monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da UESB pelos autores do presente trabalho.

O aplicativo é a segunda versão do jogo eletrônico Intersecting Lines e encontra-se disponível gratuitamente para download no Google Play Store. O jogo Duelo das Retas representa a generalização das ideias abordadas na primeira versão. Nesse contexto, o número de lados da figura geométrica utilizada, bem como a quantidade de pontos em cada um dos lados podem ser alterados durante a escolha do polígono base para as partidas.

1.2.1 Conhecendo o jogo

O jogo Duelo das Retas permite a escolha de 5 tipos de figuras geométricas para as partidas: triângulo, quadrado, pentágono, hexágono e heptágono.

É importante destacar que cada figura geométrica possui variações específicas quanto ao número de pontos em cada um dos lados. Essas variações são necessárias para permitir uma disputa justa entre os jogadores, ou seja, possibilitar as mesmas chances de vitória para ambos.

As possíveis variações de pontos para cada figura geométrica que podem ser escolhidas no jogo Duelo das Retas são:

- Triângulo: 4, 8 ou 12 pontos;
- Quadrado: 4, 5, 6, 8 ou 10 pontos;
- Pentágono: 4, 8 ou 12 pontos;
- Hexágono: 4, 6, 8 ou 10 pontos;
- Heptágono: 4, 8 ou 12 pontos.

A proposta do jogo Duelo das Retas é a mesma que a sua versão inicial: construir segmentos de retas através da ligação de dois pontos que estão em lados diferentes do polígono base escolhido para a partida. A disputa ocorre entre dois jogadores (Azul e Vermelho) que intercalam jogadas em cada rodada. Além disso, assim como na primeira versão, é possível que uma partida seja jogada por dois jogadores manualmente ou contra o próprio aplicativo.

1.2.2 Regras do jogo

As regras que devem ser seguidas durante uma partida disputada no jogo Duelo das Retas são:

1. Cada jogador possui uma cor: azul ou vermelha;
2. Cada jogador possui a sua vez de jogar;

3. Não é possível pular uma rodada;
4. Cada jogada consiste em traçar um segmento de reta através da ligação entre dois pontos;
5. Pontos que estão em um mesmo lado da figura base não podem ser ligados;
6. Só é permitido que um ponto seja ligado a outro ponto uma única vez, de modo que um ponto faça parte de apenas uma única reta.

Veja que as regras apresentadas para o jogo Duelo das Retas são as mesmas regras mencionadas para o jogo Intersecting Lines. Isso significa que a segunda versão do aplicativo está programada para seguir as mesmas regras da versão inicial.

1.2.3 Jogadas boas e ruins

Mencionamos anteriormente que jogadas boas no jogo Intersecting Lines são as retas que separam a mesma quantidade de pontos restantes nos dois semi-planos formadas, pois essa distribuição concede maiores chances de intersecções futuras. Já as jogadas ruins são as retas que não dividem o número de pontos restantes de maneira igual em ambos os semi-planos formados, já que esses cenários não permitem grandes chances de cruzamentos futuros.

Devido ao fato do jogo Duelo das Retas ser a evolução do jogo Intersecting Lines, compreende-se que as jogadas boas e ruins possuem as mesmas características apresentadas para a versão anterior. Nesse contexto, a principal questão envolvendo os tipos de jogadas que deve ser analisada é a distribuição dos pontos restantes após a construção de uma reta.

1.2.4 Estratégia ideal

Sabemos que o jogo Duelo das Retas é a generalização da primeira versão (Intersecting Lines). Desse modo, existem algumas características que são comuns a ambos os jogos como por exemplo a proposta de jogo, as regras, as cores para os dois jogadores, a pontuação, além dos tipos de jogadas e das configurações que podem ser realizadas.

Foi mencionado na seção 1.1.4 um tipo de estratégia que garante ao jogador que a utilizar a chance de vitória ou pelo menos o empate no jogo Intersecting Lines. Tal estratégia consiste do jogador realizar a construção de retas que separem a mesma quantidade de pontos em ambos os semi-planos formados durante cada uma de suas rodadas.

Nesse contexto, nos perguntamos se tal estratégia é válida também para o jogo Duelo das Retas, uma vez que esse aplicativo é a evolução da primeira versão. Buscamos verificar também se a estratégia ideal mencionada para a primeira versão do jogo continua sendo a mesma, independentemente dos polígonos base escolhidos para as partidas disputadas na segunda versão.

Observamos que a estratégia ideal para o jogo Duelo das Retas é a mesma apresentada anteriormente para o jogo Intersecting Lines. Isso significa que a construção de retas que separem o total de pontos restantes em ambos os semi-planos criados é a ideia-chave relacionada à estratégia ideal que deve ser adotada durante uma partida no jogo Duelo das Retas.

Assim, as análises das partidas a serem apresentadas nos próximos capítulos são decorrentes da utilização contínua da estratégia ideal pelo primeiro jogador (Azul), enquanto que o segundo jogador (Vermelho) fará uso sempre de jogadas boas. Além disso, os casos a serem trabalhados, bem como suas possíveis variações são consequências das escolhas de jogadas seguindo as abordagens fixadas para ambos os jogadores.

Capítulo 2

Polígono regular de três lados: Triângulo

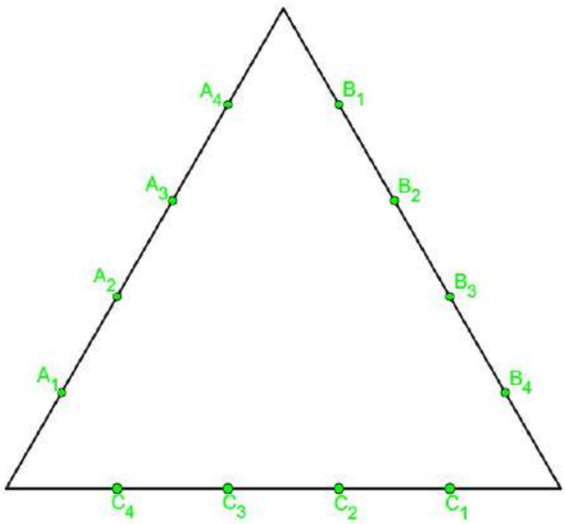
Esse capítulo busca apresentar as análises que podem ser feitas nas jogadas finais das partidas disputadas no jogo Duelo das Retas, nas quais o polígono base escolhido é o Triângulo. Para que as partidas sejam disputadas de forma justa, é necessário que a quantidade de pontos distribuídos em cada um dos lados do Triângulo seja múltipla de quatro, uma vez que outras configurações possibilitam quantidades ímpares de retas, tornando a partida injusta ou a sobra de um ponto.

Nesse sentido, faremos o estudo para as partidas disputadas nas telas inicias dos Triângulos de 4, 8 e 12 pontos. O objetivo é mostrar que os estudos das configurações finais nos triângulos com maiores quantidades de pontos se reduzem ao Triângulo de 4 pontos.

2.1 Triângulo de 4 pontos

Considere a tela inicial do jogo escolhida como sendo o Triângulo contendo 4 pontos em cada um dos seus lados, conforme a Figura 2.1.

Figura 2.1: Tela inicial Triângulo de 4 pontos



Fonte: elaborado pelos autores

Vamos considerar que o jogador Azul será aquele que fará uso da estratégia ideal, ou seja, em cada rodada irá construir retas que separam igualmente o número de pontos restantes. Já o seu adversário (jogador Vermelho) fará sempre jogadas boas, ou seja, construir retas que dividam a quantidade de pontos de forma igual.

Nesse contexto, próximo ao final do jogo, quando restarem somente 4 pontos livres, irá existir dois possíveis casos de configurações finais para a partida. Vejamos:

- Caso (1,1,2): um ponto em um lado L_1, um ponto em um lado L_2 e dois pontos em um mesmo lado L_3;
- Caso (2,2): dois pontos em um mesmo lado L_1 e dois pontos em um mesmo lado L_2.

Cada caso em particular pode ter como resultado para a partida o empate; o empate ou a derrota; o empate ou a vitória; a derrota, o empate ou a vitória. Isso significa que o jogodor Azul deve analisar e interpretar a configuração final do jogo e ser capaz de prever o que acontece ao término da disputa. Vejamos cada caso e possibilidade de resultado detalhadamente.

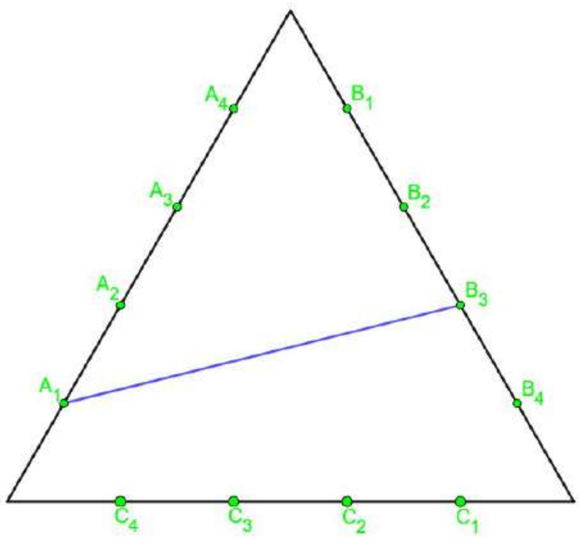
2.1.1 O Caso 1,1,2 e suas possíveis variações

Caso 1,1,2 - empate

Sabemos que na tela inicial do Triângulo de 4 pontos existe um total de 12 pontos. Seguindo a estratégia ideal adotada, o jogador Azul deve construir uma reta que divida igualmente os 10 pontos restantes nos dois semi-planos formados.

Nesse contexto, uma primeira escolha de jogada pode ser a reta A_1B_3, uma vez que existem 5 pontos no plano superior e 5 pontos no plano inferior à reta escolhida. A Figura 2.2 mostra esse cenário.

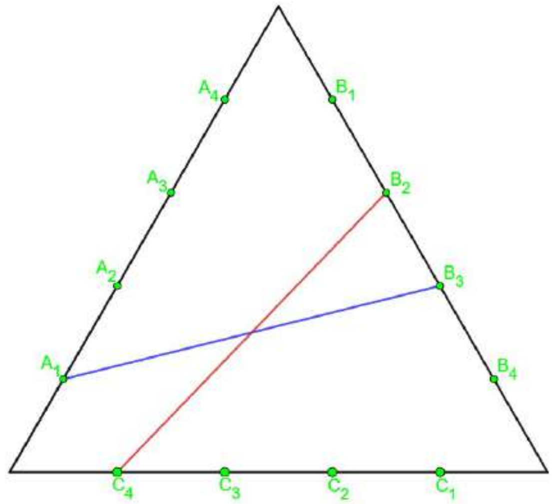
Figura 2.2: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate: 10 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

De acordo às regras do jogo, agora será a vez do jogador Vermelho. Uma possibilidade de escolha nessa rodada é a construção da reta B_2C_4, uma vez que essa criação separa de maneira igual os 8 pontos restantes nos dois semi-planos formados após a construção da reta. Esse cenário está apresentado na Figura 2.3.

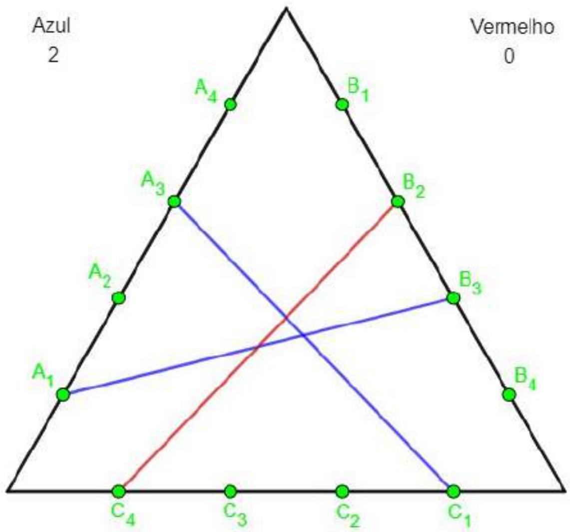
Figura 2.3: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate: 8 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Seguindo a estratégia ideal adotada, o jogador Azul pode optar em construir na sua rodada a reta A_3C_1, uma vez que essa escolha de criação resulta em 3 pontos distribuídos igualmente em cada um dos respectivos semi-planos formados. Essa configuração está apresentada na Figura 2.4.

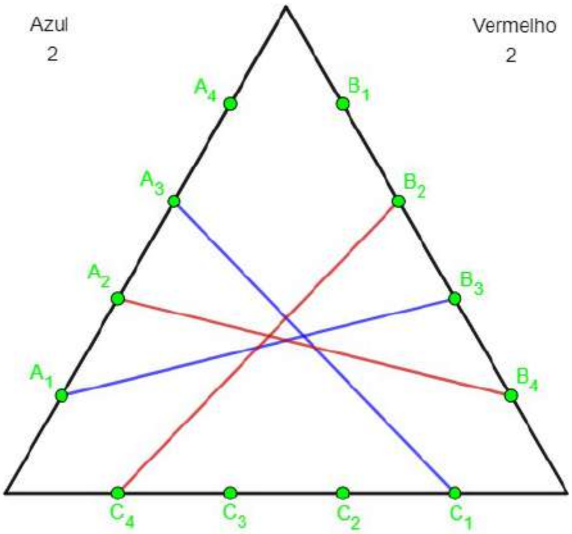
Figura 2.4: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate: 6 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

A próxima jogada do jogador Vermelho pode ser a construção da reta A_2B_4, uma vez que essa escolha resulta em 2 pontos distribuídos igualmente em cada um dos dois semi-planos formados, como mostra a Figura 2.5.

Figura 2.5: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente

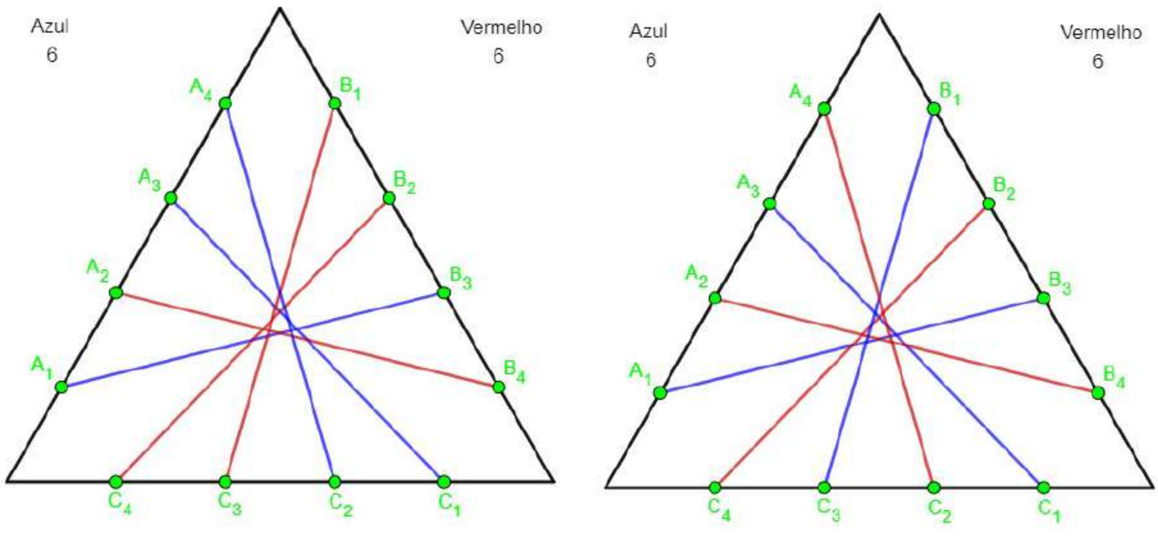


Fonte: elaborado pelos autores

Observe que a partida se encontra no momento em que o jogador Azul possui a possibilidade de analisar qual será a sua última jogada e, consequentemente, a última ação do seu adversário. Vejamos:

Se o jogador Azul optar por construir a reta A_4C_2, restará para seu adversário a reta B_1C_3. Caso a escolha seja pela reta B_1C_3, restará ao jogador Vermelho a reta A_4C_2. Em ambas as situações a partida possui como resultado o empate, como se observa na Figura 2.6.

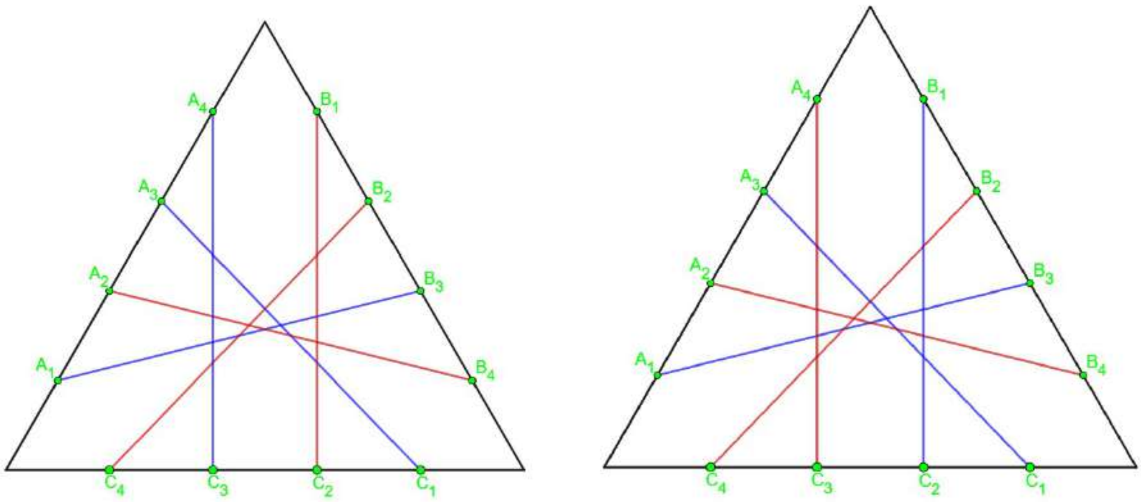
Figura 2.6: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul decide construir a reta A_4C_3 ou a reta B_1C_2, seu adversário é obrigado a construir a reta B_1C_2 ou a reta A_4C_3, respectivamente. Em ambas as situações a partida possui como resultado o empate, conforme exemplificado na Figura 2.7.

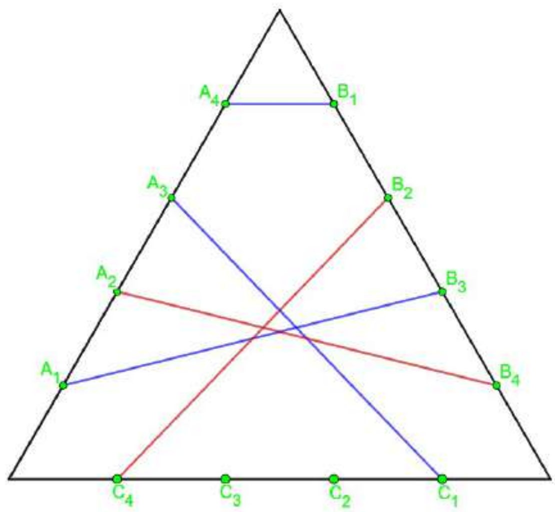
Figura 2.7: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se a escolha do jogador Azul for a reta A_4B_1, o jogador Vermelho não terá nenhuma reta para construir, uma vez que não é permitido ligar pontos que estejam sob um mesmo lado do polígono base. Entretanto, como a reta criada não faz nenhum cruzamento com as outras retas azuis, a quantidade de interseções entre retas azuis é a mesma que das interseções entre as retas vermelhas. Assim, a partida termina em empate, como se verifica na Figura 2.8.

Figura 2.8: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate: 3° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

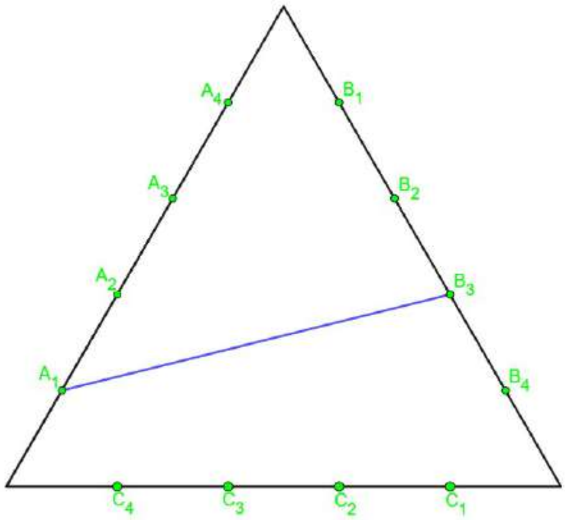
A partir das análises realizadas, podemos constatar que o *Caso 1,1,2 - empate* possibilita ao jogador Azul, independente da reta final escolhida, o resultado de empate.

Acabamos de apresentar a primeira parte do *Caso 1,1,2* para o Triângulo de 4 pontos. Vejamos agora a segunda parte.

Caso 1,1,2 - empate ou vitória

De acordo a estratégia ideal adotada pelo jogador Azul, a reta A_1B_3 pode ser escolhida como primeira construção, uma vez que essa reta divide os 10 pontos restantes de forma igual nos dois semi-planos formados. A Figura 2.9 mostra essa situação.

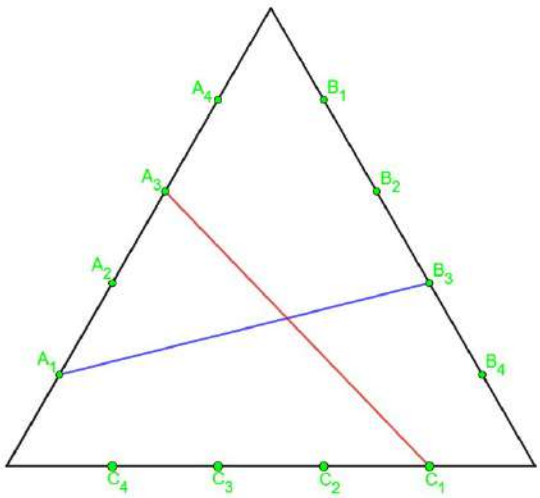
Figura 2.9: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 10 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

A próxima rodada pertence ao jogador Vermelho, o qual pode optar por construir a reta A_3C_1, pois os 8 pontos restantes são divididos de maneira igual nos dois semi-planos formados. A Figura 2.10 exemplifica esse cenário.

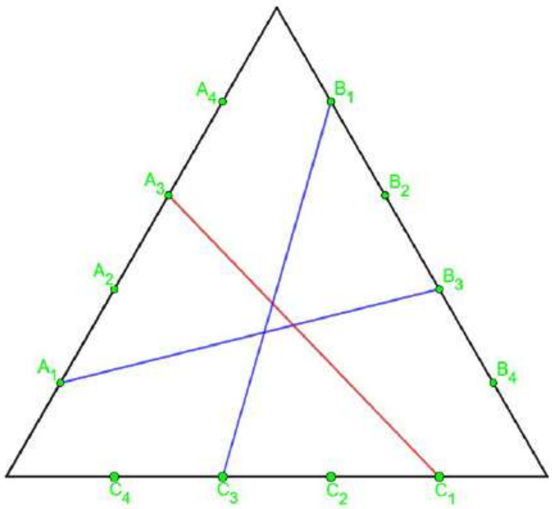
Figura 2.10: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 8 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Dando continuidade a partida, a rodada seguinte pertence ao jogador Azul, o qual pode escolher a reta B_1C_3, já que os 6 pontos restantes são separados de forma igual nos dois semi-planos formados. A Figura 2.11 apresenta essa situação.

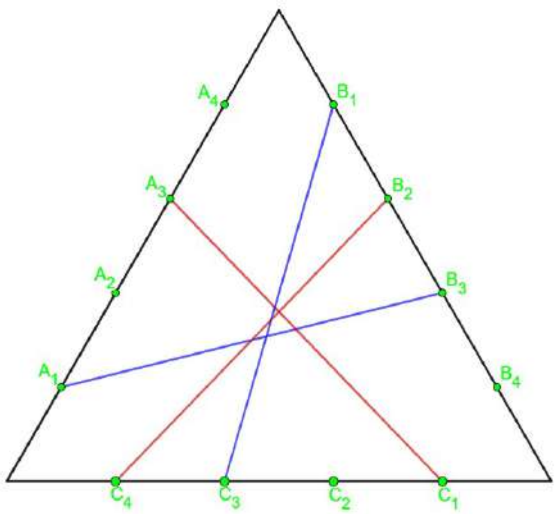
Figura 2.11: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 6 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Na próxima rodada que pertence ao jogador Vermelho, uma possibilidade de escolha de reta a ser construída é a reta B_2C_4, pois os 4 pontos restantes ficam separados igualmente nos dois semi-planos gerados após a construção dessa reta. A Figura 2.12 mostra esse cenário.

Figura 2.12: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 4 pontos distribuídos igualmente

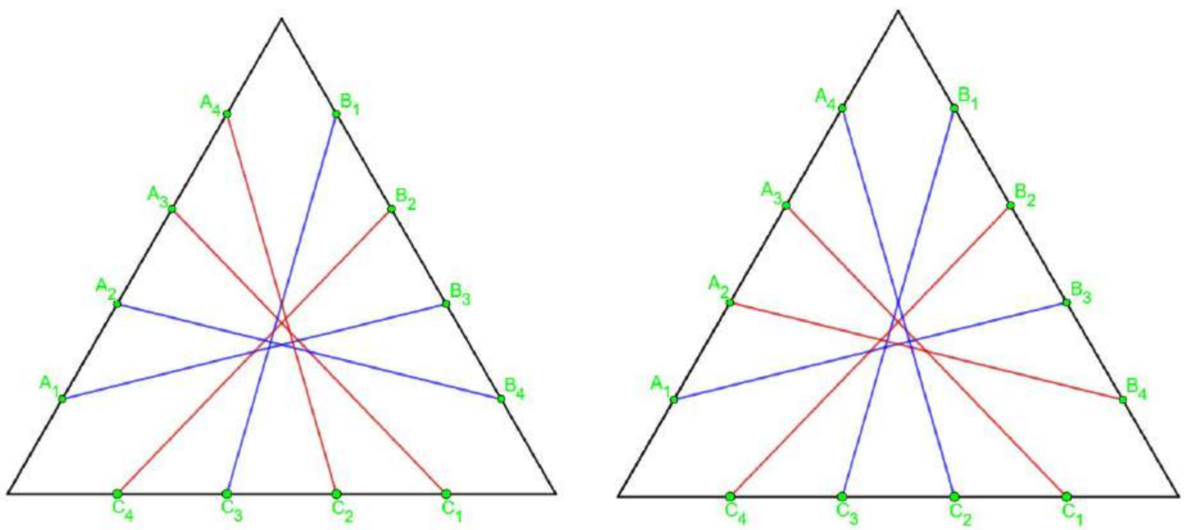


Fonte: elaborado pelos autores

Note que a partida se encontra no momento em que é permitido ao jogador Azul decidir qual será a sua última jogada, a de seu adversário e, consequentemente, prever o resultado para a disputa. Existem duas possíveis análises para a situação apresentada. Vejamos a primeira.

Se o jogador Azul escolher a reta A_2B_4, restará para seu adversário a reta A_4C_2. Caso a escolha seja pela reta A_4C_2, restará ao jogador Vermelho a reta A_2B_4. Em ambas as situações a partida possui como resultado o empate, como se observa na Figura 2.13.

Figura 2.13: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 1° resultado de empate

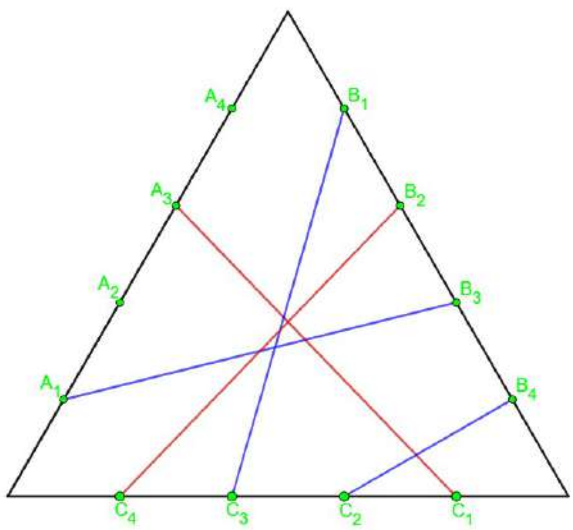


Fonte: elaborado pelos autores

Caso o jogador Azul opte pela construção da reta B_4C_2, ele irá conseguir uma reta a mais do que seu adversário (jogador Vermelho), já que os dois pontos restantes estão em um mesmo lado do triângulo e com isso não podem ser ligados.

Entretanto, a partida possui como resultado o empate, uma vez que a reta azul construída não intercepta nenhuma reta azul, como se observa na Figura 2.14.

Figura 2.14: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 2° resultado de empate



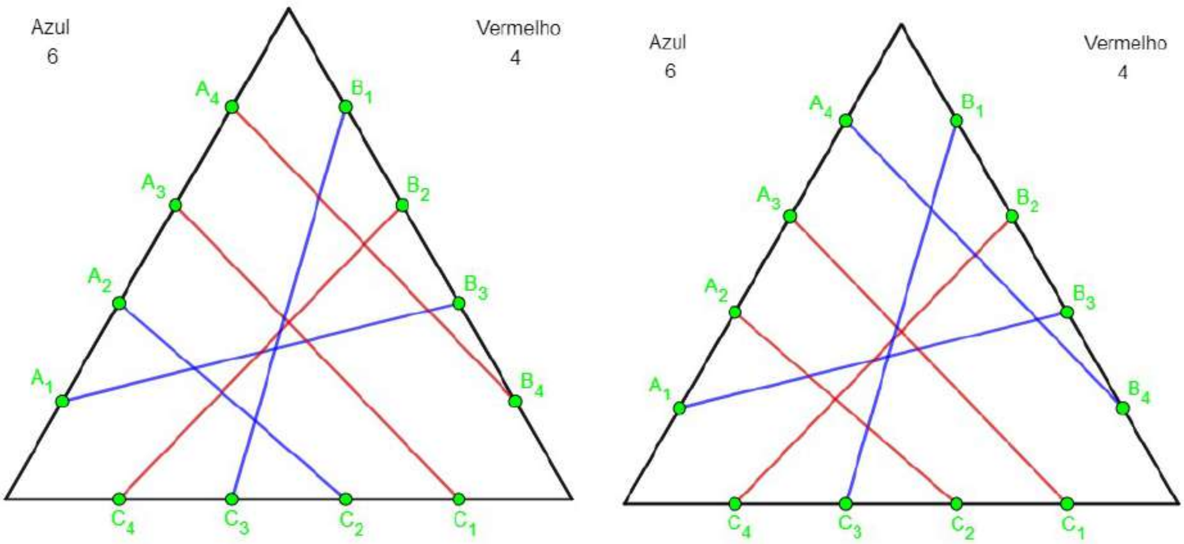
Fonte: elaborado pelos autores

Assim, a escolha de qualquer uma das três retas apresentadas acima proporcionam ao jogador Azul somente o resultado de empate.

Observamos a primeira análise para o caso atual. Vejamos agora o segundo estudo possível para a configuração atual da partida.

Se o jogador Azul decide construir a reta A_2C_2 ou a reta A_4B_4, seu adversário é obrigado a criar a reta A_4B_4 ou a reta A_2C_2, respectivamente. Em ambas as situações mencionadas o jogador Azul será o vencedor da partida, uma vez que ele consegue mais interseções do que seu adversário. Esse cenário está exemplificado na Figura 2.15.

Figura 2.15: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: jogador Azul vence



Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de verificar as duas análises possíveis de serem realizadas para a configuração apresentada. Podemos constatar que o *Caso 1,1,2 - empate ou vitória* possibilita ao jogador Azul os resultados de empate ou vitória.

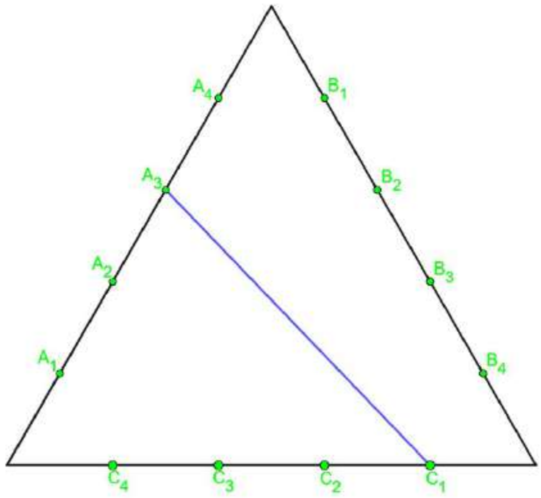
É importante destacar que se a distribuição das retas entre os dois pontos que estão em um mesmo lado do Triângulo fosse outra, os mesmos resultados vistos nos exemplos acima seriam encontrados.

Concluímos assim a apresentação da segunda parte do *Caso 1,1,2* para o Triângulo de 4 pontos. Vejamos agora a terceira parte.

Caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória

Conforme a estratégia ideal adotada, uma possibilidade de escolha para o jogador Azul é a construção da reta A_3C_1, uma vez que os pontos restantes ainda em jogo são distribuídos de maneira igual nos respectivos semi-planos formados. Essa situação está exemplificada na Figura 2.16.

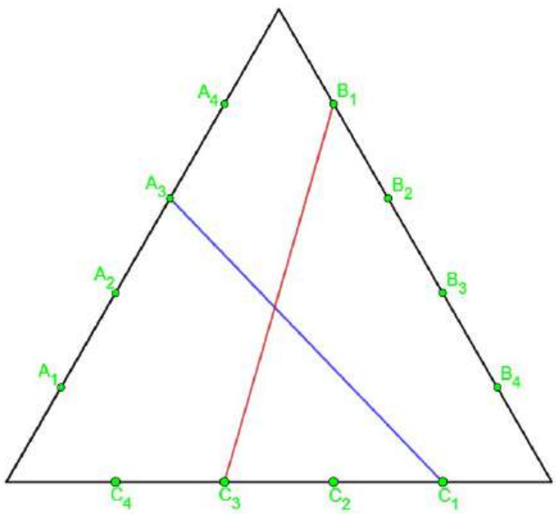
Figura 2.16: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: 10 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

O jogador Vermelho, durante o seu momento de jogar, pode escolher construir a reta B_1C_3, uma vez que essa reta separa a quantidade de pontos restantes de forma igual. Esse cenário está exemplificado na Figura 2.17.

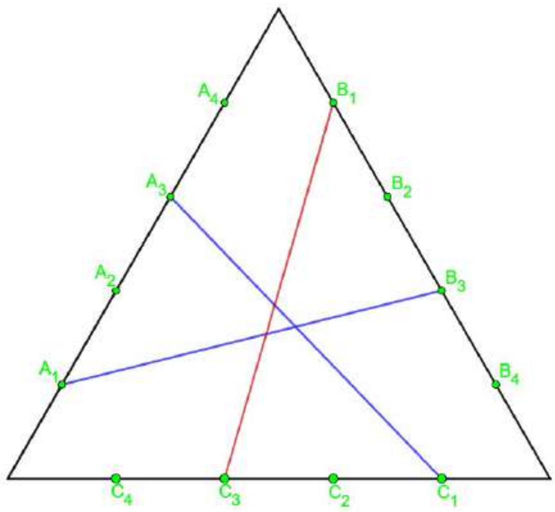
Figura 2.17: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: 8 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

De acordo a estratégia ideal adotada, o jogador Azul pode optar em construir durante a sua rodada a reta A_1B_3. Isso se deve ao fato de que essa reta divide a quantidade de pontos restantes de maneira igual nos dois semi-planos criados. Esse cenário está apresentado na Figura 2.18.

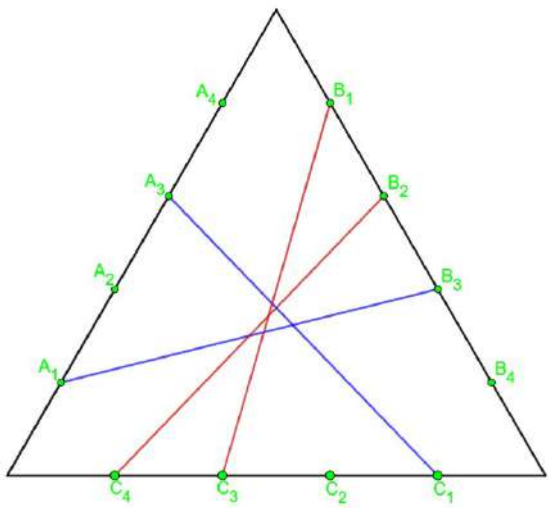
Figura 2.18: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: 6 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

O jogador Vermelho pode optar em construir a reta B_2C_4, uma vez que a quantidade de pontos restantes nos dois semi-planos formados fica dividida ao meio. Essa situação pode ser observada na Figura 2.19.

Figura 2.19: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: 4 pontos distribuídos igualmente

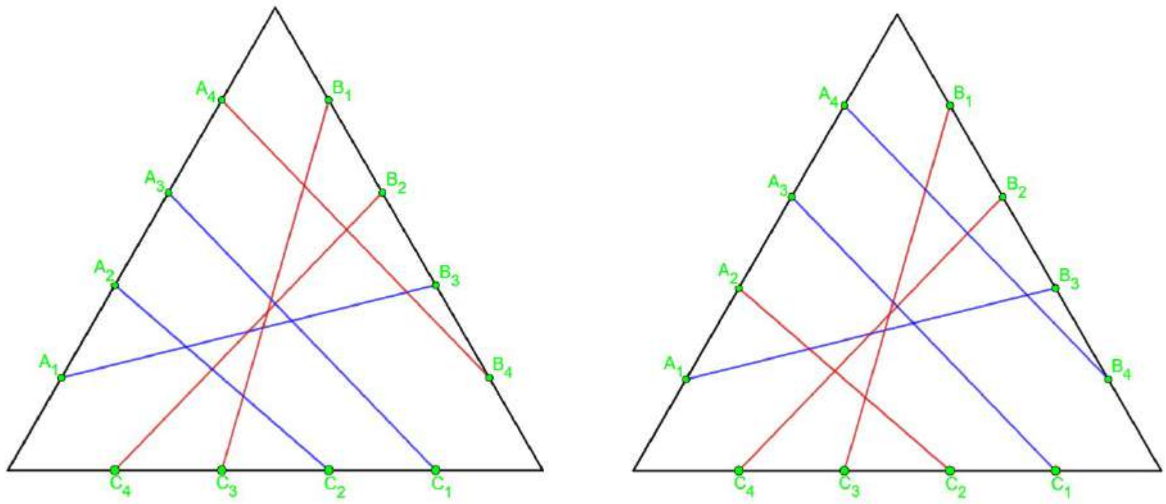


Fonte: elaborado pelos autores

Nesse momento, é possibilitado ao jogador Azul analisar a configuração em que se encontra a partida e decidir qual será a sua última jogada e, consequentemente, a jogada final de seu adversário. Existem três possíveis análises para a situação apresentada. Vejamos a primeira.

Se a escolha do jogador Azul for a reta A_2C_2, o seu adversário é obrigado a criar a reta A_4B_4, a qual possibilita uma interseção a mais entre retas vermelhas do que retas azuis e, com isso, permite ao jogador Vermelho vencer a partida. Pela mesma justificativa, o resultado da partida é igual ao apresentado anteriormente se o jogador Azul optar por construir a reta A_4B_4. A Figura 2.20 apresenta as duas situações descritas.

Figura 2.20: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: jogador Vermelho vence

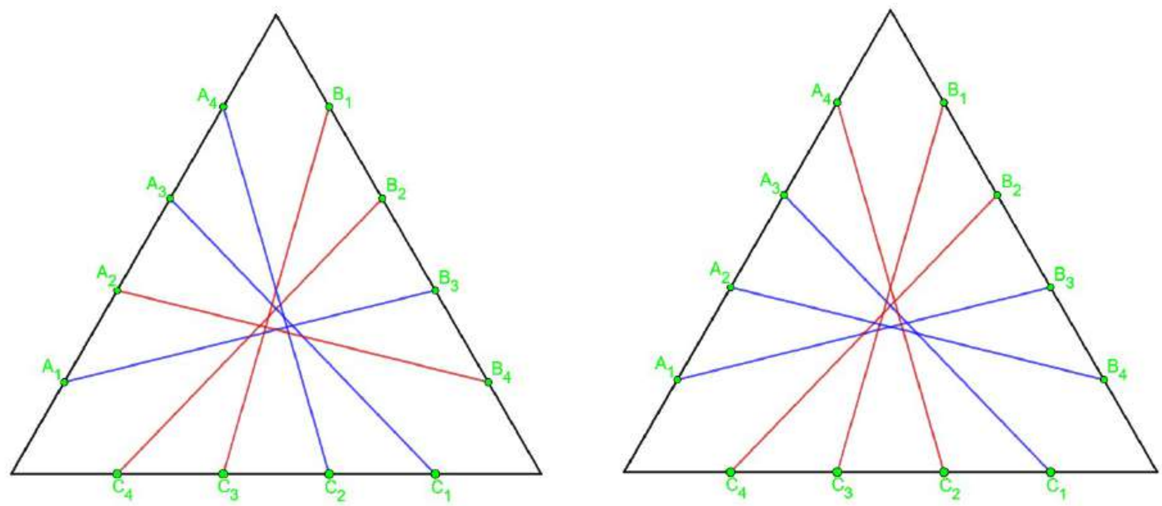


Fonte: elaborado pelos autores

Podemos observar que as retas apresentadas devem ser evitadas pelo jogador Azul nesse momento final do jogo, uma vez que ambas proporcionam a vitória para o jogador Vermelho. Observamos a primeira análise da situação atual. Vejamos agora o segundo estudo.

Se o jogador Azul optar por construir a reta A_4C_2 ou a reta A_2B_4, o seu adversário é obrigado a escolher a reta A_2B_4 ou a reta A_4C_2, respectivamente. Em ambas as situações a partida possui como resultado final o empate, como mostrado na Figura 2.21.

Figura 2.21: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: resultado de empate

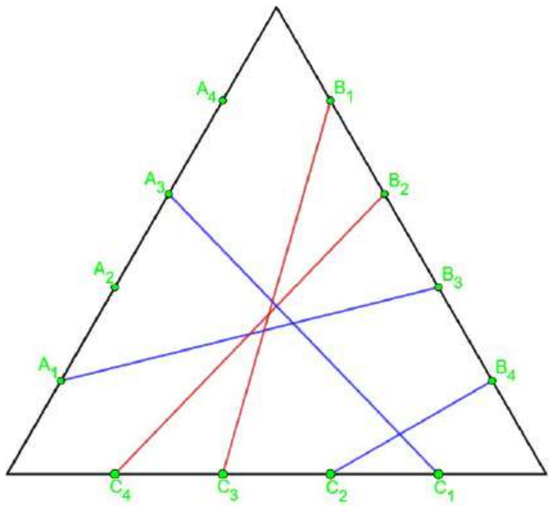


Fonte: elaborado pelos autores

Nesse sentido, a escolha de qualquer uma das duas retas apresentadas acima proporcionam ao jogador Azul o resultado de empate. Verificamos o segundo estudo possível para a configuração atual. Vejamos agora a terceira e última análise possível.

Se o jogador Azul construir a reta B_4C_2, o seu adversário não poderá criar nenhuma reta, pois os pontos restantes estão sob um mesmo lado e com isso não podem formar uma reta. Nesse cenário o jogador Azul ficará com uma interseção a mais do que seu adversário (jogador Vermelho) e, consequetemente, irá vencer a partida. Essa situação é mostrada na Figura 2.22.

Figura 2.22: Triângulo de 4 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: jogador Azul vence



Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de visualizar as três possíveis análises de construção de retas próximas do término do jogo, bem como suas respectivas conclusões para as partidas.

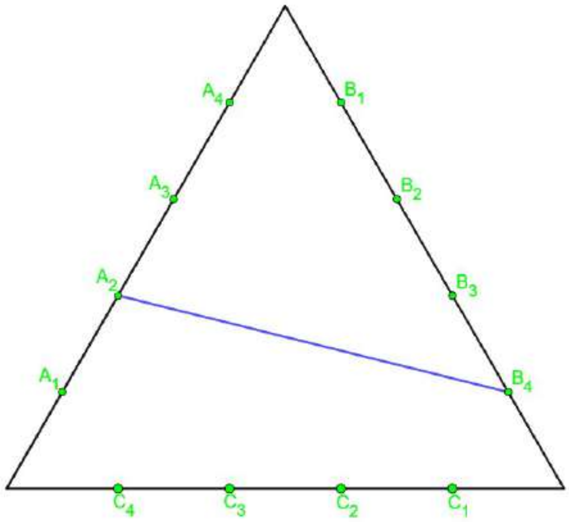
Foi possível visualizar que o *Caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória* concede ao jogador Azul os três possíveis resultados para uma partida. Nesse contexto, cabe ao jogador analisar corretamente a configuração final em que se encontra a partida e decidir qual será a sua jogada que irá lhe permitir vencer a disputa.

2.1.2 O Caso 2,2 e suas possíveis variações

Caso 2,2 - empate

O jogador Azul, ao seguir a estratégia ideal estabelecida, pode optar por construir em sua primeira rodada a reta A_2B_4. Isso se deve ao fato de que após a construção dessa reta os 10 pontos restantes em jogo são separados de maneira igual nos dois semi-planos formados. Essa situação é mostrada na Figura 2.23.

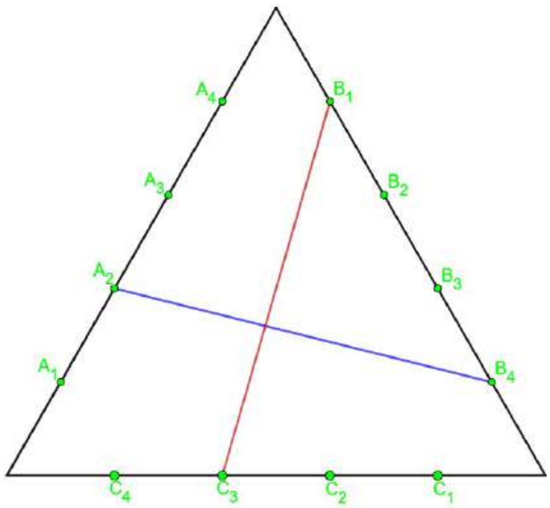
Figura 2.23: Triângulo de 4 pontos, caso 2,2: 10 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Durante a vez do jogador Vermelho que sempre faz jogadas boas, uma possibilidade de primeira construção de reta é a reta B_1C_3, uma vez que os 8 pontos restantes ainda em jogo são separados igualmente em cada um dos semi-planos formados. Esse cenário está apresentado na Figura 2.24.

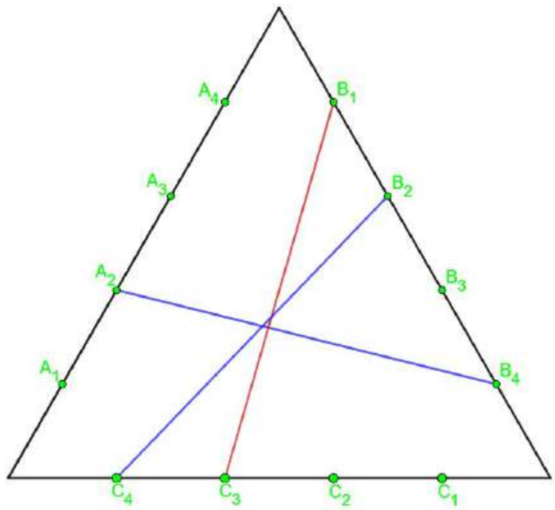
Figura 2.24: Triângulo de 4 pontos, caso 2,2: 8 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Durante a próxima jogada do jogador Azul, que sempre faz uso da estratégia ideal, uma possibilidade de reta que pode ser criada é a reta B_2C_4. A justificativa para essa construção é a mesma abordada para a reta construída na rodada anterior. A Figura 2.25 mostra essa construção.

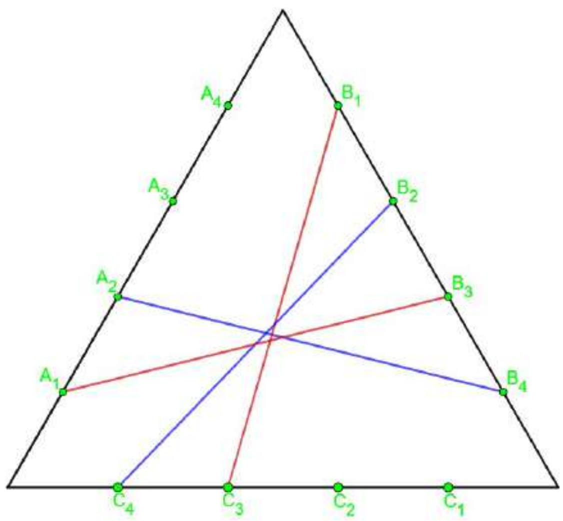
Figura 2.25: Triângulo de 4 pontos, caso 2,2: 6 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

De modo análogo, uma possibilidade de escolha para o jogador Vermelho, que sempre realiza jogadas boas, durante a sua vez de jogar é a construção da reta A_1B_3. Observe essa jogada apresentada na Figura 2.26.

Figura 2.26: Triângulo de 4 pontos, caso 2,2: 4 pontos distribuídos igualmente

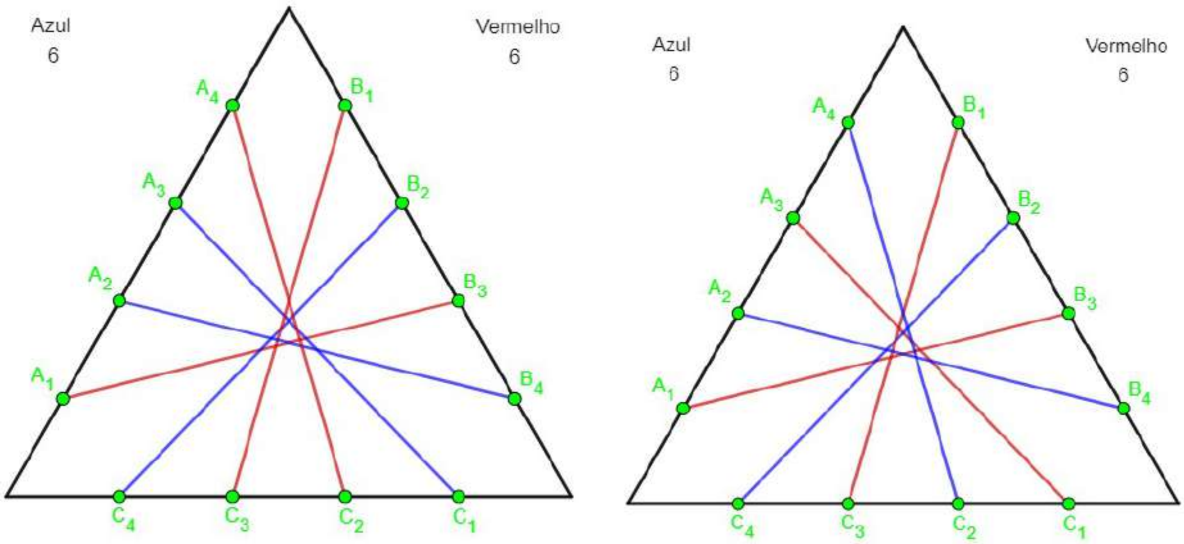


Fonte: elaborado pelos autores

Nesse momento, a partida disputada se encontra no cenário em que o jogador Azul possui a chance de analisar qual será sua última jogada, a de seu adversário e, consequentemente, o resultado final do jogo. Entretanto, a forma em que está a configuração da partida resulta, independentemente da opção de jogada, no resultado de empate. Vejamos:

Se a reta escolhida for a reta A_3C_1, resta ao jogador Vermelho construir a reta A_4C_2 e a partida termina em empate. Se a reta escolhida pelo jogador Azul for a reta A_4C_2, resta ao jogador Vermelho construir a reta A_3C_1 e a partida acaba empatada. Essas duas situações são exemplificadas na Figura 2.27.

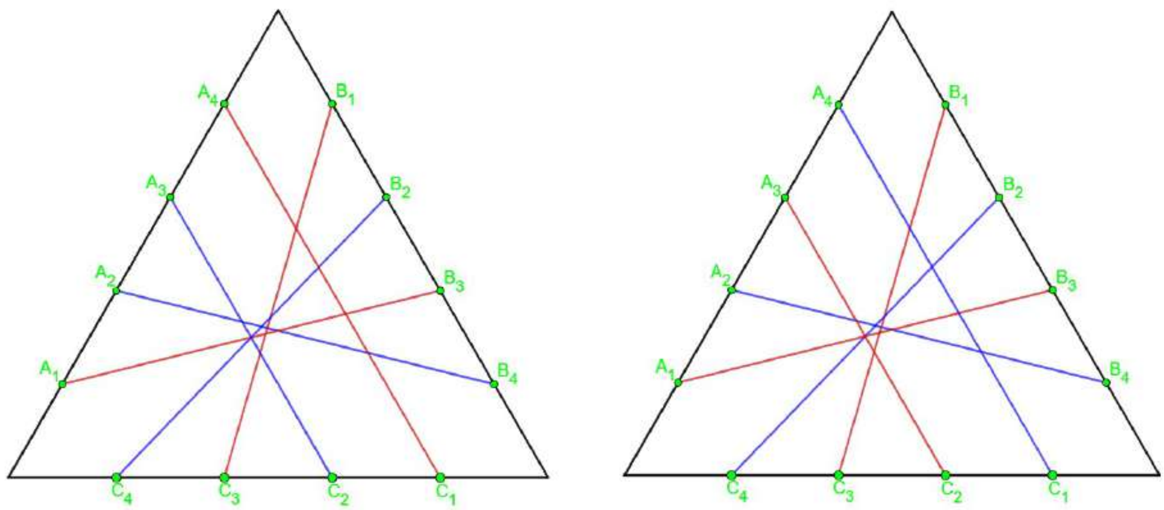
Figura 2.27: Triângulo de 4 pontos, caso 2,2: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, se a escolha do jogador Azul se der pela reta A_3C_2 ou pela reta A_4C_1, resta para o jogador Vermelho criar a reta A_4C_1 ou a reta A_3C_2, respectivamente. Em ambas as situações, a partida termina empatada, como se verifica na Figura 2.28.

Figura 2.28: Triângulo de 4 pontos, caso 2,2: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

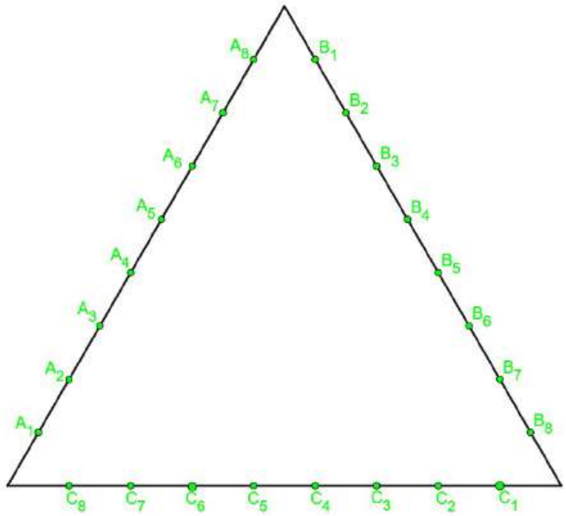
Assim, podemos notar que o *Caso 2,2*, de fato, possui somente como resultado para a partida, o empate. Esse resultado está de acordo com as conclusões pré-estabelecidas pela estratégia ideal adotada pelo jogador.

Acabamos de observar os dois possíveis casos de configurações finais para uma partida disputada no Triângulo de 4 pontos. Cada caso possibilita ao jogador Azul a oportunidade de analisar qual será sua última jogada, a de seu adversário e, consequentemente, o resultado da partida. Em ambas as situações é garantido ao jogador Azul a chance de empate ou vitória, sendo que a conclusão final decorre da escolha feita pelo jogador durante a sua última jogada.

2.2 Triângulo de 8 pontos

Considere a tela inicial do jogo escolhida como sendo o Triângulo contendo 8 pontos em cada um dos seus lados, como mostra a Figura 2.29.

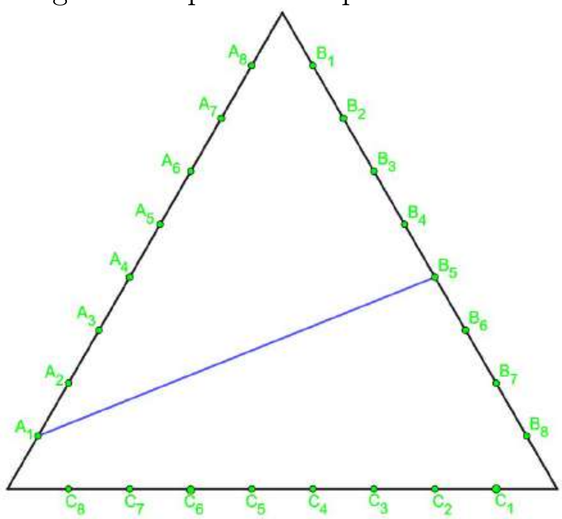
Figura 2.29: Tela inicial Triângulo de 8 pontos



Fonte: elaborado pelos autores

Admita que o jogador Azul irá adotar a estratégia ideal e seu oponente (jogador Vermelho) irá realizar sempre jogadas boas. Partindo dessa premissa, uma possibilidade de escolha de primeira construção realizada pelo jogador Azul é a reta A_1B_5, já que os 22 pontos restantes são distribuídos igualmente nos dois semi-planos formados. A Figura 2.30 mostra essa situação.

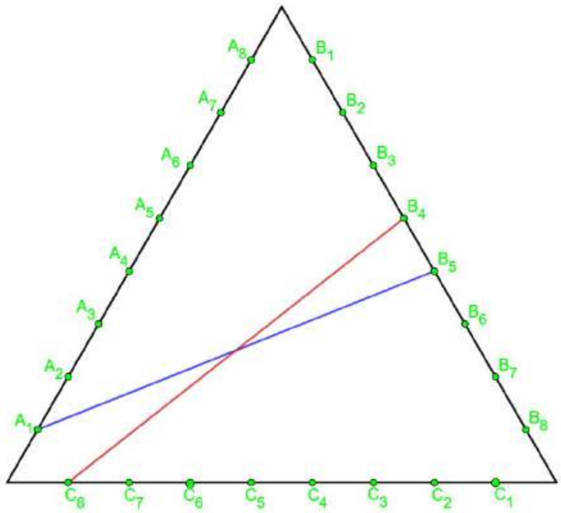
Figura 2.30: Triângulo de 8 pontos: 22 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Na próxima rodada, o jogador Vermelho que sempre realiza jogadas boas pode optar por construir a reta B_4C_8, pois essa reta separa os 20 pontos restantes de maneira igual em ambos os semi-planos formados. A Figura 2.29 mostra esse cenário.

Figura 2.31: Triângulo de 8 pontos: 20 pontos distribuídos igualmente



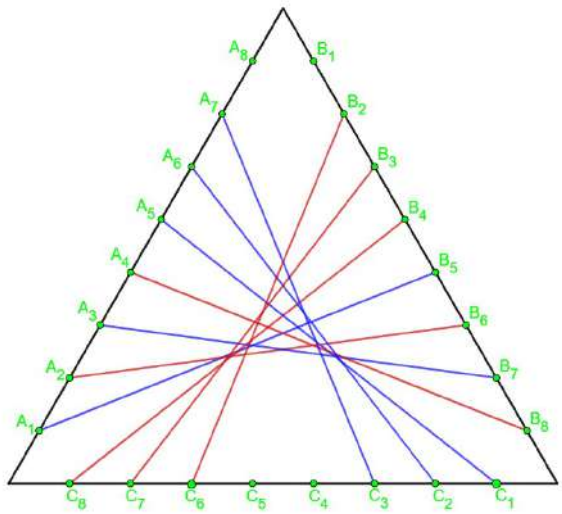
Fonte: elaborado pelos autores

Ambos os jogadores irão continuar a construir retas de acordo às estratégias estabelecidas anteriormente. Nesse contexto, após oito rodadas (quatro para cada jogador), existem, basicamente, cinco possíveis configurações finais diferentes para quando restam 4 pontos em jogo. Veremos ao decorrer do texto que, das cinco possibilidades, as quatro primeiras já são conhecidas, enquanto que a última será apresentada pela primeira vez.

Possibilidade 1: Caso 1,1,2 - empate

A primeira possibilidade é apresentada na Figura 2.32.

Figura 2.32: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente

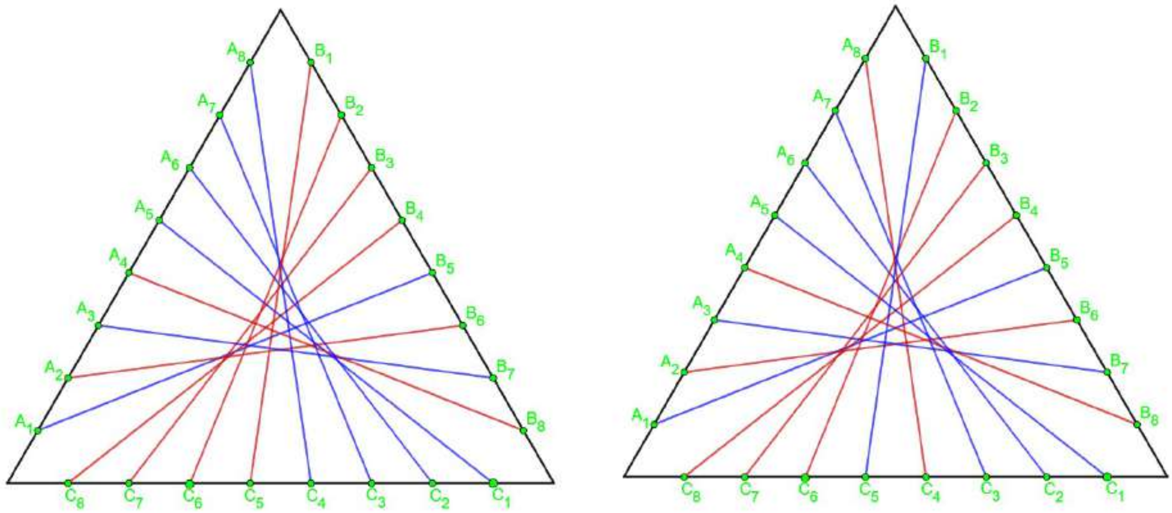


Fonte: elaborado pelos autores

Observe que essa configuração é semelhante a um dos casos apresentados para o Triângulo de 4 pontos, precisamente ao *Caso 1,1,2 - empate*. Nesse sentido, ao analisarmos as possibilidades de jogadas finais para o jogador Azul e, em seguida, para o Vermelho, concluiremos que os resultados obtidos são iguais aos encontrados anteriormente. Vejamos:

A Figura 2.33 mostra o resultado da partida se o jogador Azul optar por construir a reta A_8C_4 ou a reta B_1C_5, enquanto que seu adversário é obrigado a escolher a reta B_1C_5 ou a reta A_8C_4, respectivamente. Nas duas situações o resultado final é o empate.

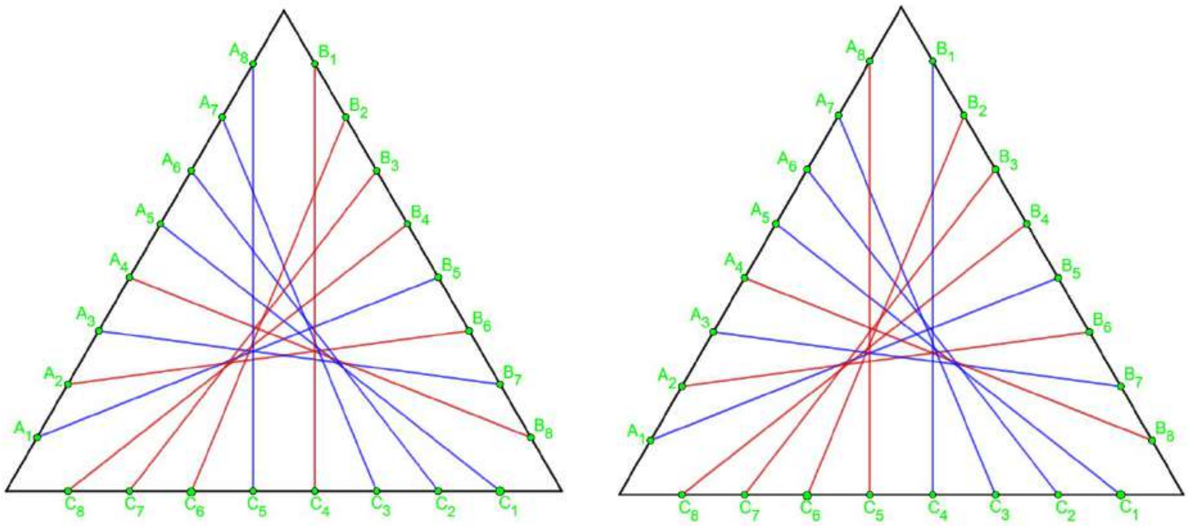
Figura 2.33: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - empate: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, a Figura 2.34 mostra o resultado da disputa se o jogador Azul optar por criar a reta A_8C_5 ou a reta B_1C_4, enquanto que seu oponente é obrigado a construir a reta B_1C_4 ou a reta A_8C_5, respectivamente. Novamente, a conclusão da partida é o empate.

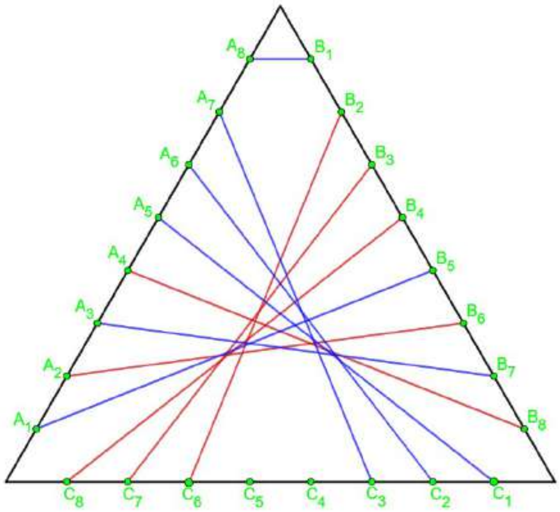
Figura 2.34: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Por fim, o resultado da partida caso o jogador Azul opte por construir a reta A_8B_1 é o empate. Veja que a reta escolhida não permite ao jogador Vermelho construir uma reta, pois não é permitido ligar pontos que estão sob um mesmo lado. Entretanto, mesmo obtendo uma reta a mais que seu adversário, o jogador Azul não obtém a vitória, já que a reta criada não cruza nenhuma reta azul. Com isso, a partida termina empatada, como mostra a Figura 2.35.

Figura 2.35: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - empate: 3° resultado de empate



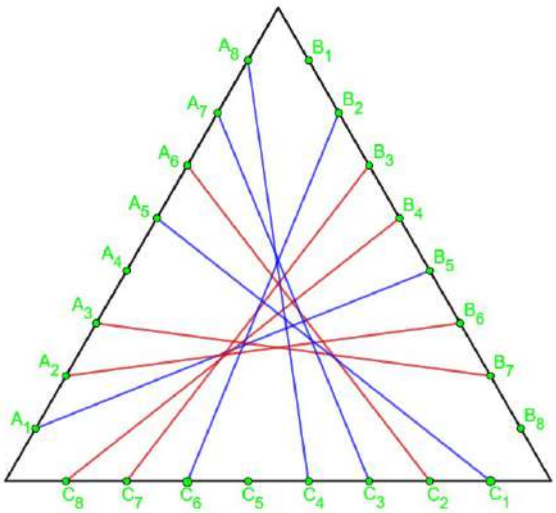
Fonte: elaborado pelos autores

Anteriormente, dissemos que existem cinco possibilidades de situações finais para o Triângulo de 8 pontos. A primeira possibilidade acabou de ser vista. Vejamos a próxima.

Possibilidade 2: Caso 1,1,2 - empate ou vitória

A Figura 2.36 apresenta a segunda possibilidade para a partida ao restarem 4 pontos.

Figura 2.36: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 4 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

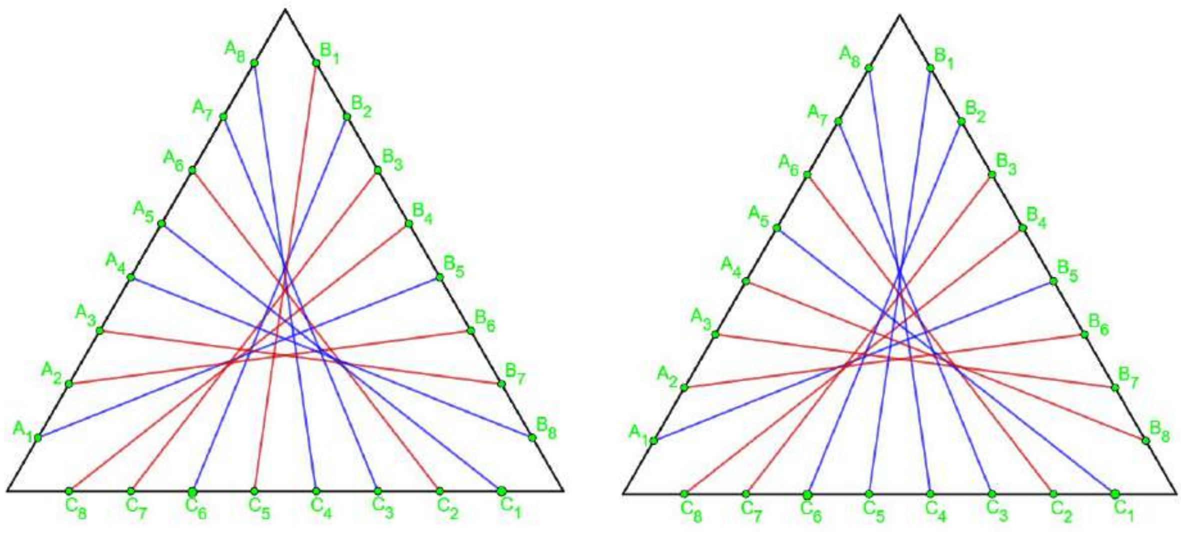
Perceba que o cenário apresentado acima é semelhante ao *Caso 1,1,2 - empate ou vitória* existente no polígono base Triângulo de 4 pontos. Vale ressaltar que a distribuição de retas azuis e vermelhas entre os dois pontos de um mesmo lado da figura geométrica base não influencia no resultado da partida, assim como mencionado durante a apresentação desse caso no Triângulo de 4 pontos.

Nessa perspectiva, ao analisarmos as possibilidades de jogadas finais para o jogador Azul e, em seguida, para o Vermelho, concluiremos que os resultados possíveis são os mesmos vistos anteriormente.

Vejamos as análises possíveis de serem realizadas para a configuração atual em que se encontra a partida.

Se o jogador Azul optar em construir a reta A_4B_8 ou a reta B_1C_5, o seu oponente (jogador Vermelho) é obrigado a escolher a reta B_1C_5 ou a reta A_4B_8, respectivamente. O resultado da partida, em ambas as situações mencionadas, é o empate. Essa situação está exemplificada na Figura 2.37.

Figura 2.37: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: resultado de empate

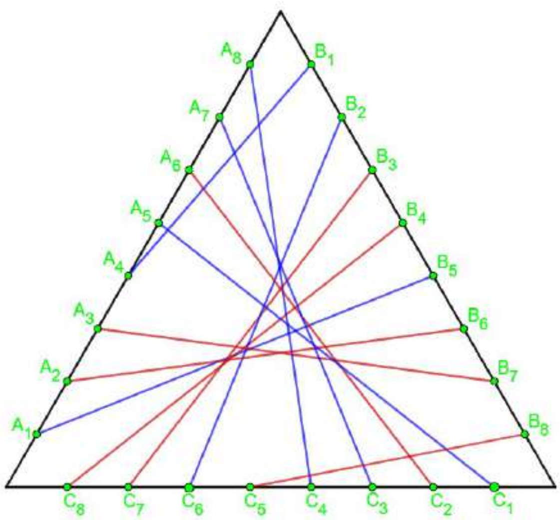


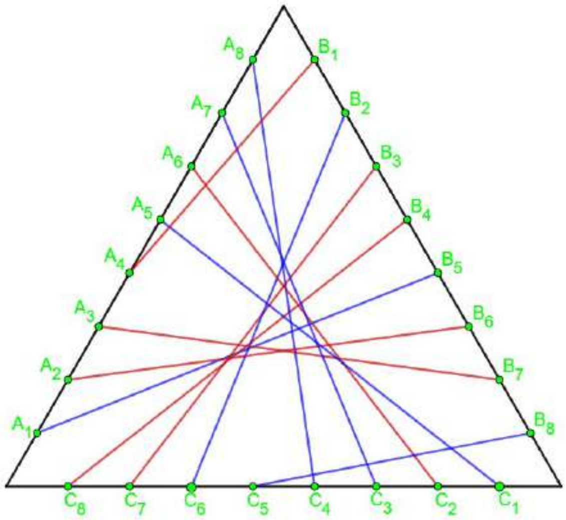
Fonte: elaborado pelos autores

Se a opção do jogador Azul se der pela construção da reta A_4B_1 ou da reta B_8C_5, o seu oponente (jogador Vermelho) é obrigado a construir a reta B_8C_5 ou a reta A_4B_1, respectivamente. Note que em ambas as situações mencionadas o jogador Azul consegue duas intersecções entre retas a mais do que o jogador Vermelho.

Nesse contexto, a partida irá possuir como vencedor da disputa o jogador Azul, uma vez que ele obtém uma pontuação maior do que o seu oponente. Esse cenário está exemplificada na Figura 2.38.

Figura 2.38: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 1° resultado de vitória do jogador Azul

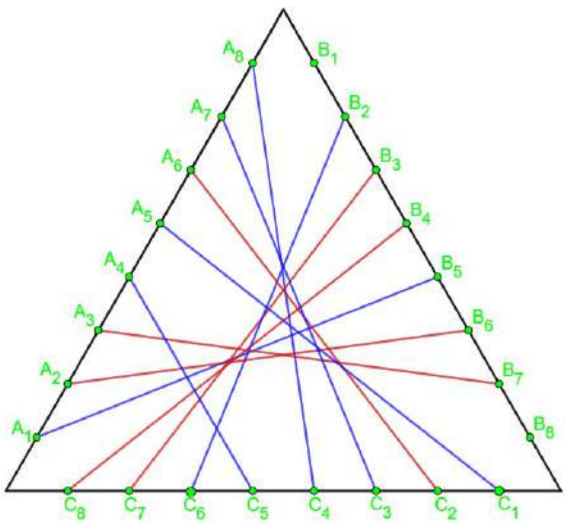




Fonte: elaborado pelos autores

O mesmo resultado será encontrado caso o jogador Azul opte em construir a reta A_4C_5, já que os dois pontos restantes não podem ser ligados para formar uma reta e com isso o jogador Vermelho fica com menos intersecções entre retas vermelhas do que retas azuis. Assim, o vencedor para a disputa é o jogador Azul, como mostra a Figura 2.39.

Figura 2.39: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 2° resultado de vitória do jogador Azul



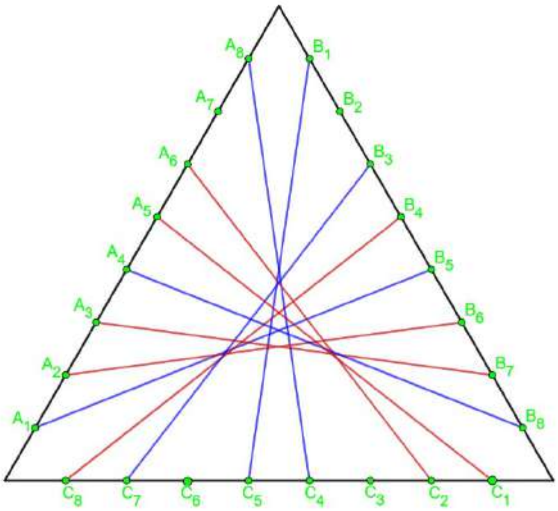
Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de apresentar a segunda configuração final possível quando permanecem 4 pontos em jogo na tela Triângulo de 8 pontos. Vejamos agora a próxima situação.

Possibilidade 3: Caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória

O terceiro cenário possível para a partida com 4 pontos restantes é visto na Figura 2.40.

Figura 2.40: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: 4 pontos distribuídos igualmente

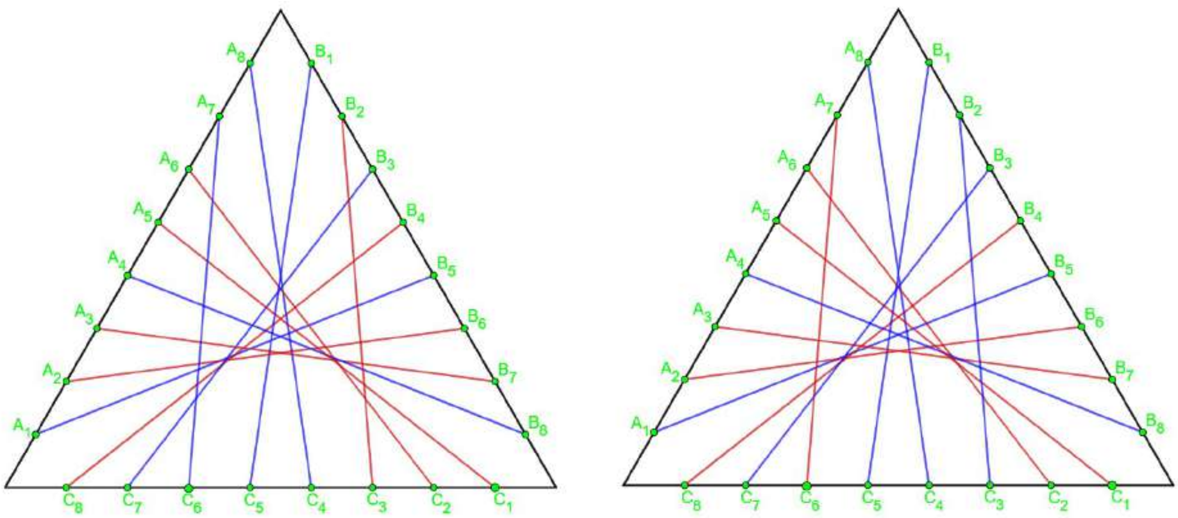


Fonte: elaborado pelos autores

Note que essa situação é semelhante ao *Caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória* já apresentado para o Triângulo de 4 pontos. Isso significa que ao analisarmos os possíveis resultados finais para a partida, teremos os mesmos resultados mencionados anteriormente. Vejamos:

Se o jogador Azul construir a reta A_7C_6 ou a reta B_2C_3, o seu oponente deve criar a reta B_2C_3 ou a reta A_7C_6, respectivamente. Nas duas situações o vencedor é o jogador Vermelho, como mostra a Figura 2.41.

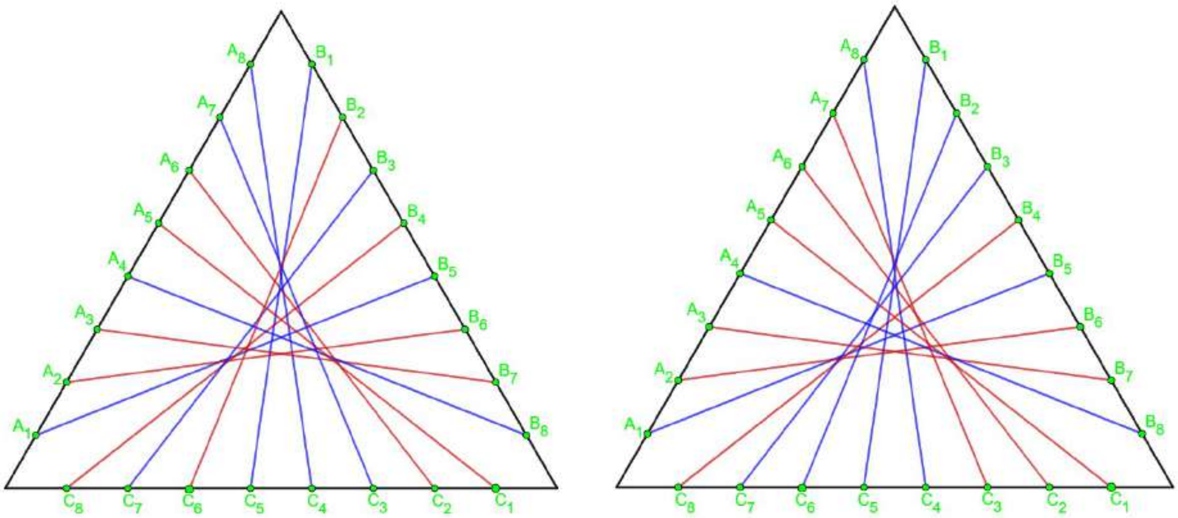
Figura 2.41: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: jogador Vermelho vence



Fonte: elaborado pelos autores

Se a opção do jogador Azul for a reta A_7C_3 ou a reta B_2C_6, o jogador Vermelho é obrigado a escolher a reta B_2C_6 ou a reta A_7C_3, respectivamente. Nas duas situações, a partida termina empatada, como mostra a Figura 2.42.

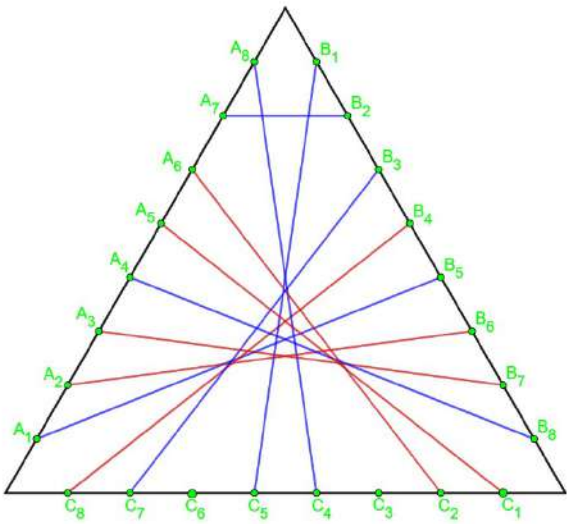
Figura 2.42: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Por fim, se o jogador Azul construir a reta A_7B_2, o seu adversário não poderá criar nenhuma reta, já que não é permitido ligar pontos que estão sob um mesmo lado. Como a reta azul criada intercepta outras duas retas de mesma cor e o jogador Vermelho não soma pontos nessa rodada, o vencedor da partida é o jogador Azul. Esse resultado é visto na Figura 2.43.

Figura 2.43: Triângulo de 8 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: jogador Azul vence



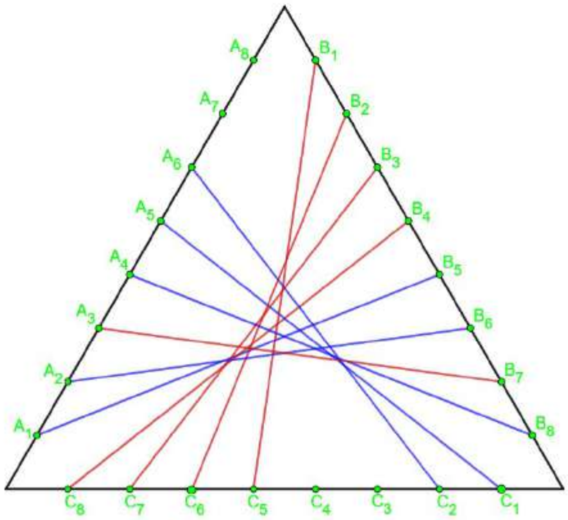
Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de observar a terceira possibilidade de configuração final ao restarem 4 pontos em jogo para a tela Triângulo de 8 pontos. Vejamos agora a próxima.

Possibilidade 4: Caso 2,2 - empate

A quarta possibilidade de cenário final para uma partida está mostrada na Figura 2.44.

Figura 2.44: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente

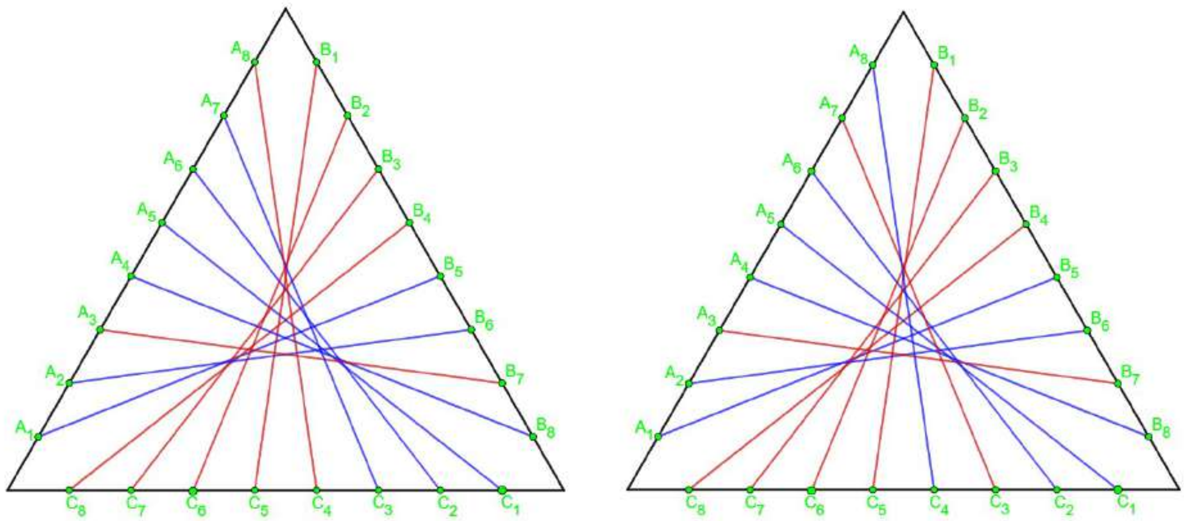


Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a situação apresentada acima é semelhante ao *Caso 2,2 - empate* observado para o Triângulo de 4 pontos. Desse modo, após as análises das possibilidades finais de construções de retas azuis e vermelhas, iremos encontrar os mesmos resultados vistos para o caso mencionado anteriormente. Assim, o resultado encontrado será o empate. Vejamos:

Se a opção do jogador Azul for a reta A_7C_3 ou a reta A_8C_4, seu adversário é obrigado a construir a reta A_8C_4 ou a reta A_7C_3, respectivamente. Em ambas as situações, a partida possui como resultado o empate, como mostrado na Figura 2.45.

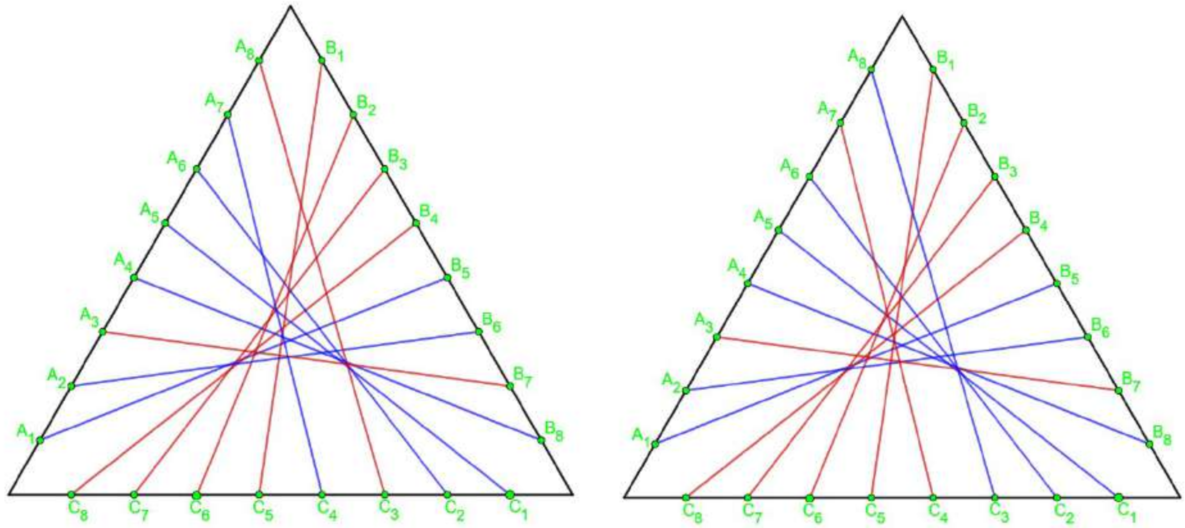
Figura 2.45: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - empate: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, caso o jogador Azul opte em construir a reta A_7C_4 ou a reta A_8C_3, a escolha do jogador Vermelho será direcionada para a reta A_8C_3 ou a reta A_7C_4, respectivamente. A Figura 2.46 mostra a partida empatada em ambos os cenários.

Figura 2.46: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Acabmos de verificar a quarta possibilidade de situação final quando existem 4 pontos restantes no Triângulo de 8 pontos.

Até o momento, as quatro situações apresentadas acima são, essencialmente, semelhantes aos casos já trabalhados no Triângulo de 4 pontos. Vejamos agora a quinta possibilidade.

Possibilidade 5: Caso 2,2 - especial

A quinta e última possibilidade de configuração final que vamos apresentar para a partida disputada no Triângulo de 8 pontos ocorre quando existem retas, azuis e/ou vermelhas, entre os dois pares de pontos restantes em um mesmo lado da figura base.

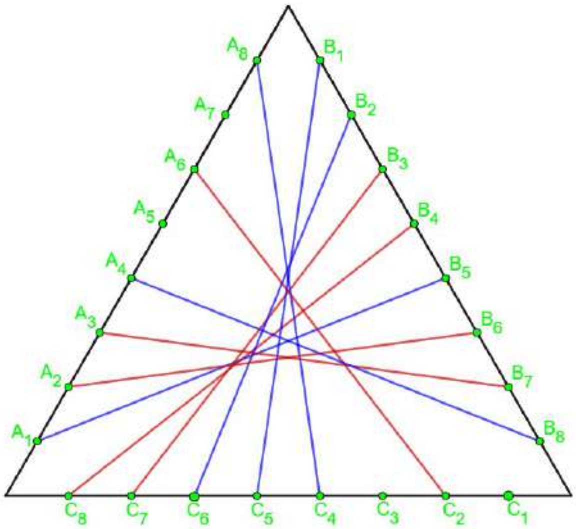
É importante destacar que o caso que será trabalhado não é exclusivo para a tela inicial Triângulo de 8 pontos, apenas se inicia a partir dessa tela. Veremos nos próximos capítulos o porquê da tela anterior (Triângulo de pontos) não comportar esse caso em particular, bem como o porquê disso em outras telas. Além disso, as ideias aqui trabalhadas serão abordadas de modo semelhante nas telas iniciais posteriores.

Para esse caso atual o que de fato é relevante é o número de retas de uma mesma cor que podemos encontrar dentro dos dois pares de pontos restantes. Nesse sentido, a quantidade de retas azuis pode ser menor, igual ou maior do que o número de retas vermelhas. É válido destacar que conforme aumentamos o número de pontos distribuídos na tela inicial ou o número de lados da figura, mais retas podem existir dentro dos dois pares de pontos finais.

Vejamos as situações em que o número de retas azuis e vermelhas sofrem variações, como ocorrem as análises e quais os resultados podemos encontrar em cada contexto. Para essa tela, a quantidade de retas que podemos ter entre os dois pares de pontos finais é no máximo duas. Essa afirmação será trabalhada com detalhes no capítulo 4 desse texto.

A primeira situação a ser apresentada é quando o número de retas vermelhas entre os dois pares de pontos restantes é maior do que o número de retas azuis. Assim, as opções são: uma reta vermelha e nenhuma azul; duas retas vermelhas e nenhuma azul. Vejamos a primeira possibilidade. A Figura 2.47 exemplifica esse cenário.

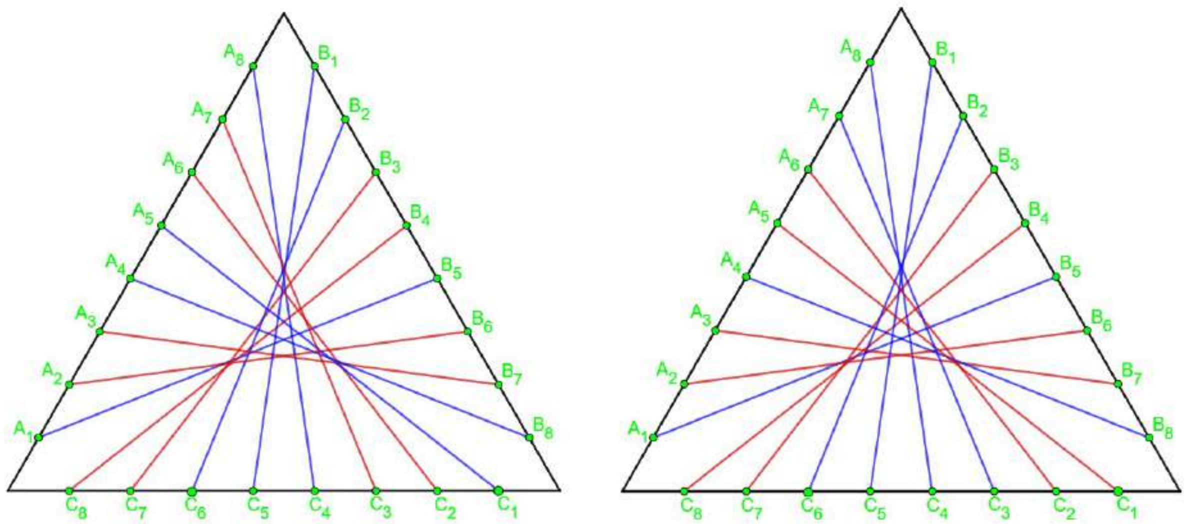
Figura 2.47: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 1 reta vermelha e 0 retas azuis



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a reta vermelha A_6C_2 encontra-se entre os pares de pontos finais. Se o jogador Azul criar a reta A_5C_1 ou a reta A_7C_3, resta ao jogador Vermelho escolher a reta A_7C_3 ou a reta A_5C_1, respectivamente. As duas escolhas resultam no empate, como visto na Figura 2.48.

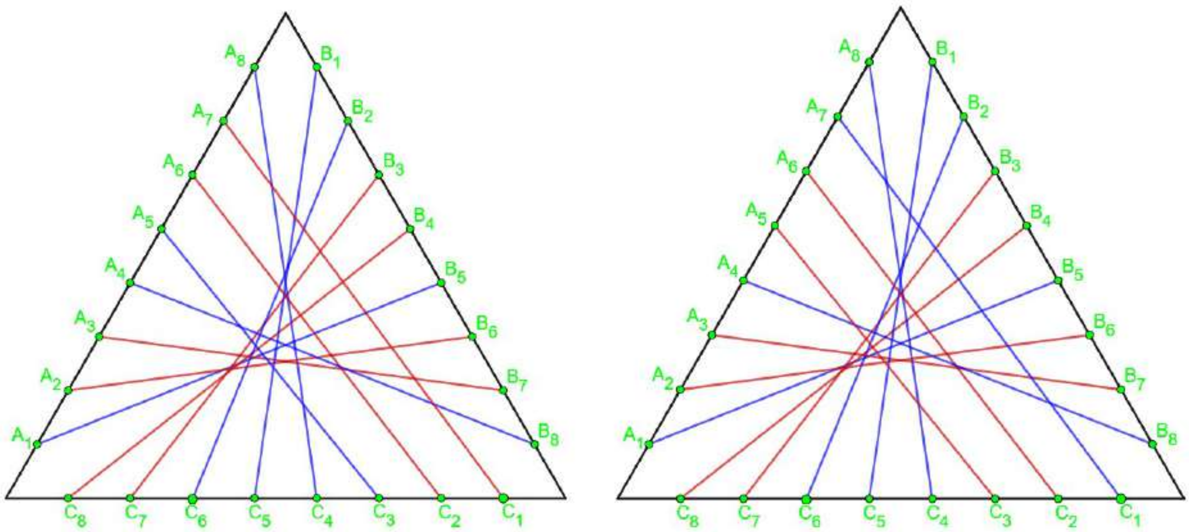
Figura 2.48: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul optar em construir a reta A_5C_3 ou a reta A_7C_1, o seu adversário (jogador Vermelho) é obrigado a escolher a reta A_7C_1 ou a reta A_5C_3, respectivamente. Ambas as escolhas proporcionam ao jogador Azul a vitória, já que seu oponente obtém uma intersecção a menos devido à reta vermelha criada não interceptar a reta vermelha que já estava localizada entre os pontos restantes. A Figura 2.49 exemplifica esse cenário.

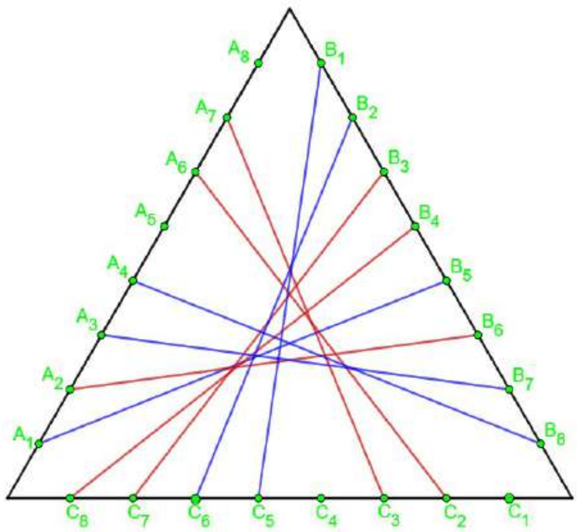
Figura 2.49: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 1° resultado de vitória do jogador Azul



Fonte: elaborado pelos autores

Vejamos agora a possibilidade quando existem duas retas vermelhas entre os pares de pontos restantes e nenhuma reta da cor azul e qual análise que podemos desenvolver. Na Figura 2.50 é possível observar as retas vermelhas A_6C_2 e A_7C_3 na condição mencionada.

Figura 2.50: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 2 retas vermelhas e 0 retas azuis

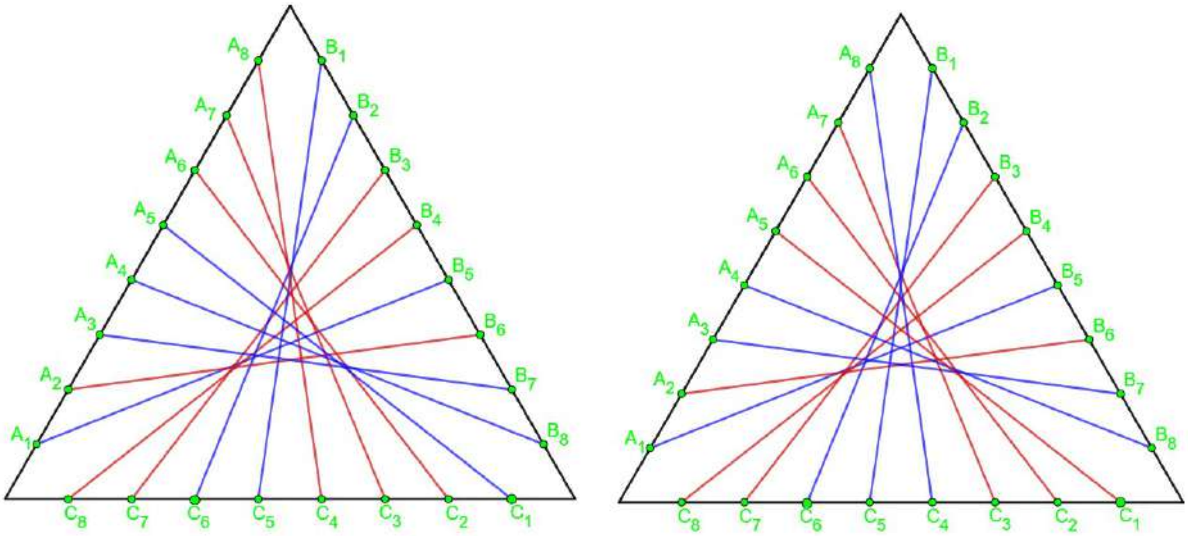


Fonte: elaborado pelos autores

Se a opção do jogador Azul ocorrer pela reta A_5C_1 ou pela reta A_8C_4, resta ao jogador

Vermelho construir a reta A_8C_4 ou a reta A_5C_1, respectivamente. Qualquer que seja a reta escolhida, a partida possui como resultado o empate, já que ambos os jogadores conseguem a mesma quantidade de cruzamentos entre suas próprias retas. A Figura 2.51 mostra esse cenário.

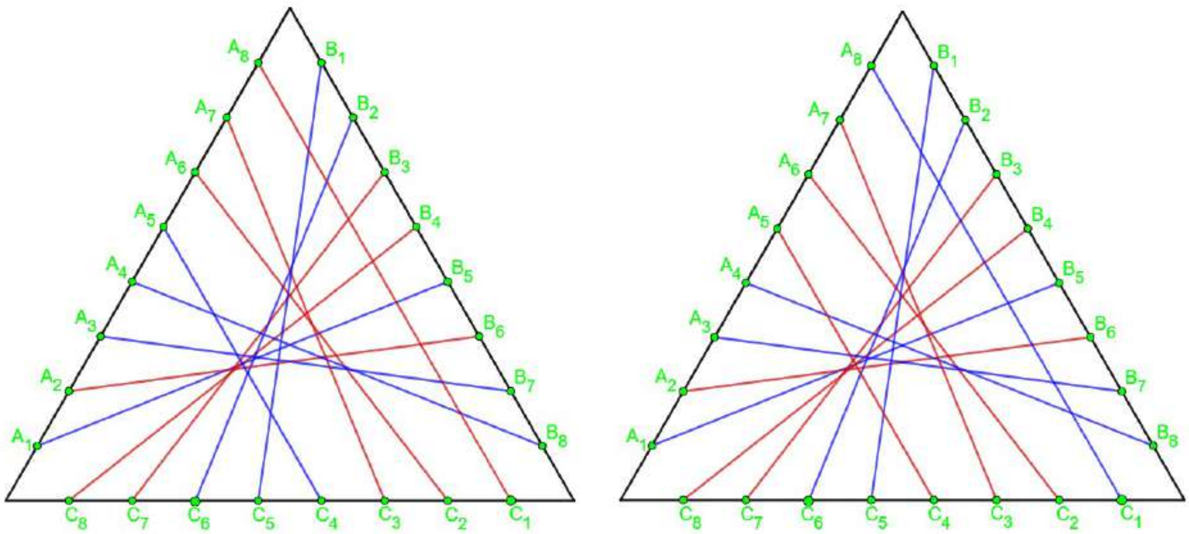
Figura 2.51: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul optar pela reta A_5C_4 ou pela reta A_8C_1, o seu oponente é obrigado a escolher a reta A_8C_1 ou a reta A_5C_4, respectivamente. Ambas as possibilidades resultam na vitória do jogador Azul, uma vez que a reta azul criada intercepta outras cinco retas azuis, enquanto que a reta vermelha cosntruída realiza apenas três intersecções com outras retas da mesma cor. A Figura 2.52 exemplifica essa situação.

Figura 2.52: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 2° resultado de vitória do jogador Azul

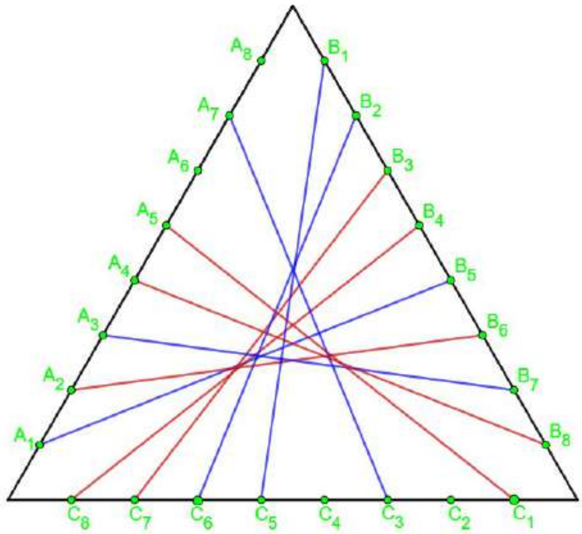


Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de observar as situações em que o número de retas vermelhas entre os dois pares de pontos finais é maior do que a de retas azuis. Em ambos os cenários o jogador Azul obteve o empate ou a vitória, enquanto que o jogador Vermelho não teve a chance de vencer.

A segunda situação a ser apresentada é quando o número de retas azuis entre os dois pares de pontos finais é maior do que a de retas vermelhas. As possibilidades são: uma reta azul e nenhuma reta vermelha; duas retas azuis e nenhuma vermelha. Vejamos a primeira e a análise que pode ser feita. A Figura 2.53 mostra esse cenário.

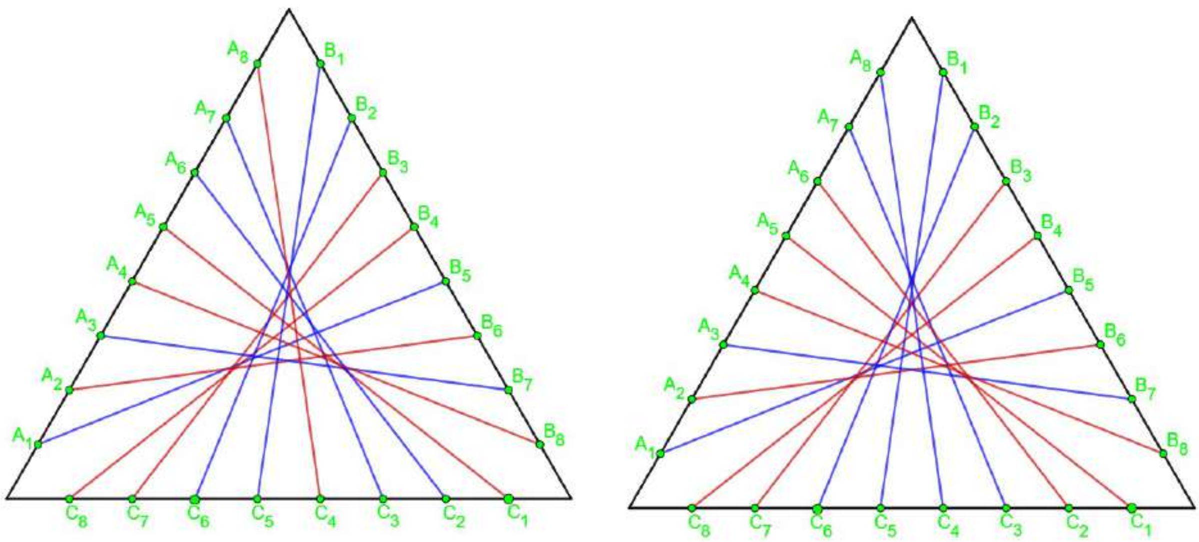
Figura 2.53: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 1 reta azul e 0 retas vermelhas



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul criar a reta A_6C_2 ou a reta A_8C_4, o seu oponente deve criar a reta A_8C_4 ou a reta A_6C_2, respectivamente. O resultado da partida nesse cenário será o empate, já que os dois jogadores conseguem o mesmo número de cruzamentos como mostra a Figura 2.54.

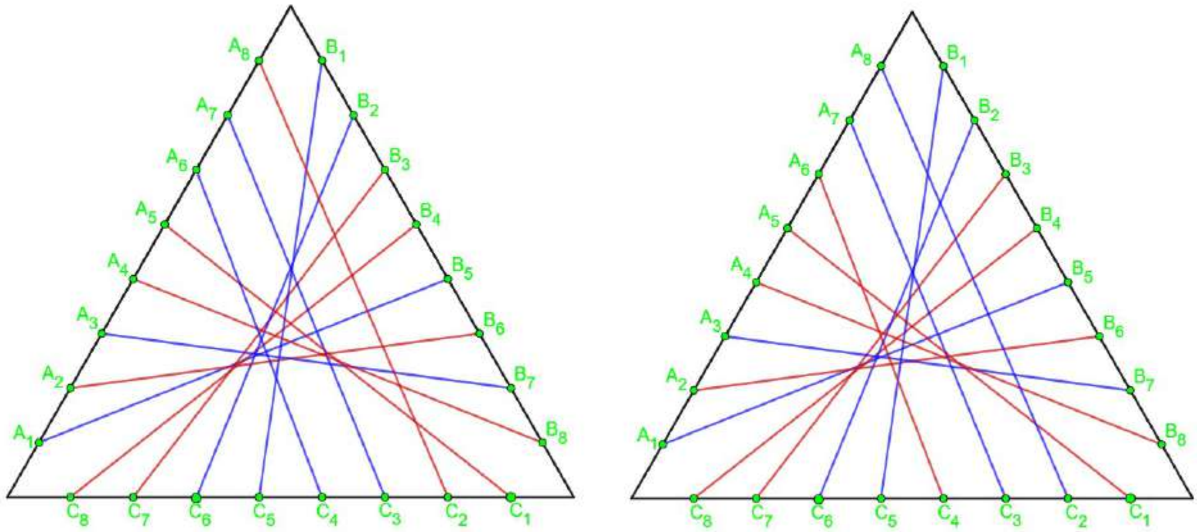
Figura 2.54: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 3° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul optar pela reta A_6C_4 ou pela reta A_8C_2, o seu adversário é obrigado a escolher a reta A_8C_2 ou a reta A_6C_4, respectivamente. Note que ambas as opções resultam na vitória do jogador Vermelho, uma vez que a reta vermelha criada realiza uma intersecção a mais do que a reta azul escolhida. A Figura 2.55 mostra esse cenário.

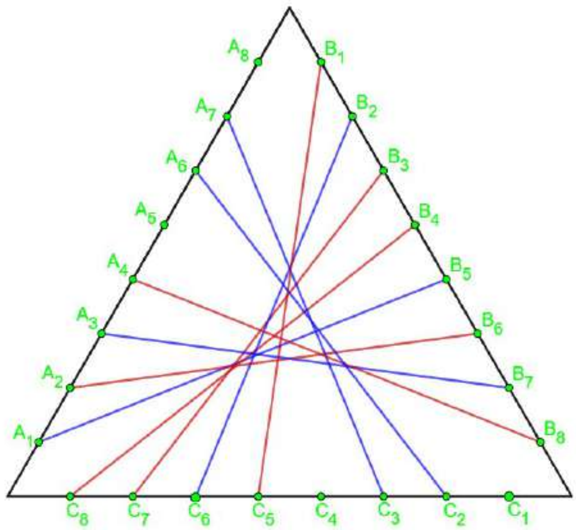
Figura 2.55: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 1° resultado de vitória do jogador Vermelho



Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de observar a primeira situação. Vejamos agora a segunda possibilidade, ou seja, quando existem duas retas azuis entre os dois pares de pontos restantes e nenhuma reta vermelha. A Figura 2.56 apresenta esse cenário.

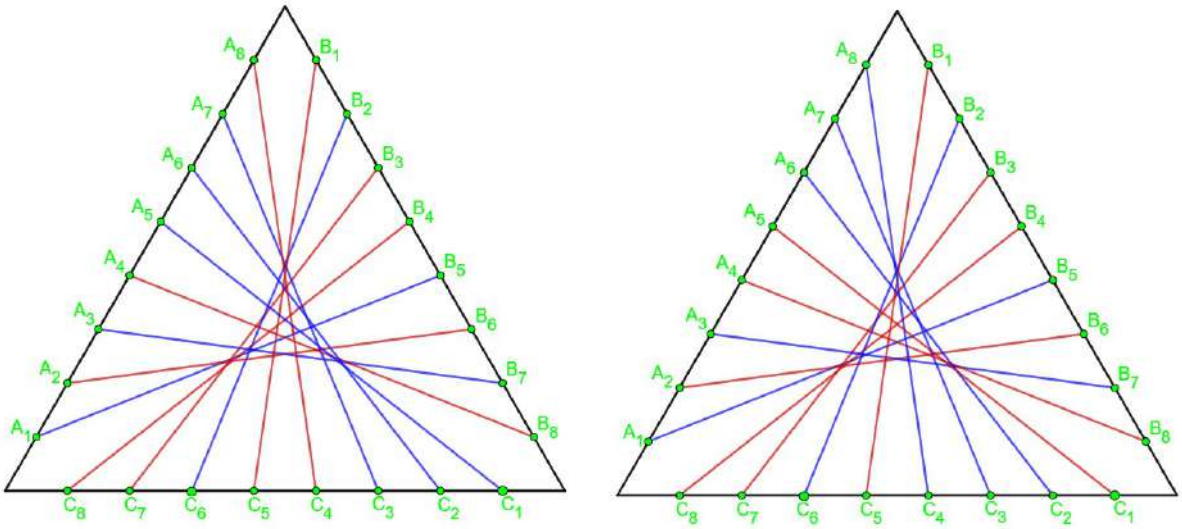
Figura 2.56: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 2 retas azuis e 0 retas vermelhas



Fonte: elaborado pelos autores

Se a opção do jogador Azul ocorrer pela reta A_5C_1 ou pela reta A_8C_4, o jogador Vermelho é obrigado a escolher a reta A_8C_4 ou a reta A_5C_1, respectivamente. Ambas as escolhas resultam no empate para a partida, já que ambos os jogadores conseguem o mesmo número de cruzamentos para suas retas, como mostra a Figura 2.57.

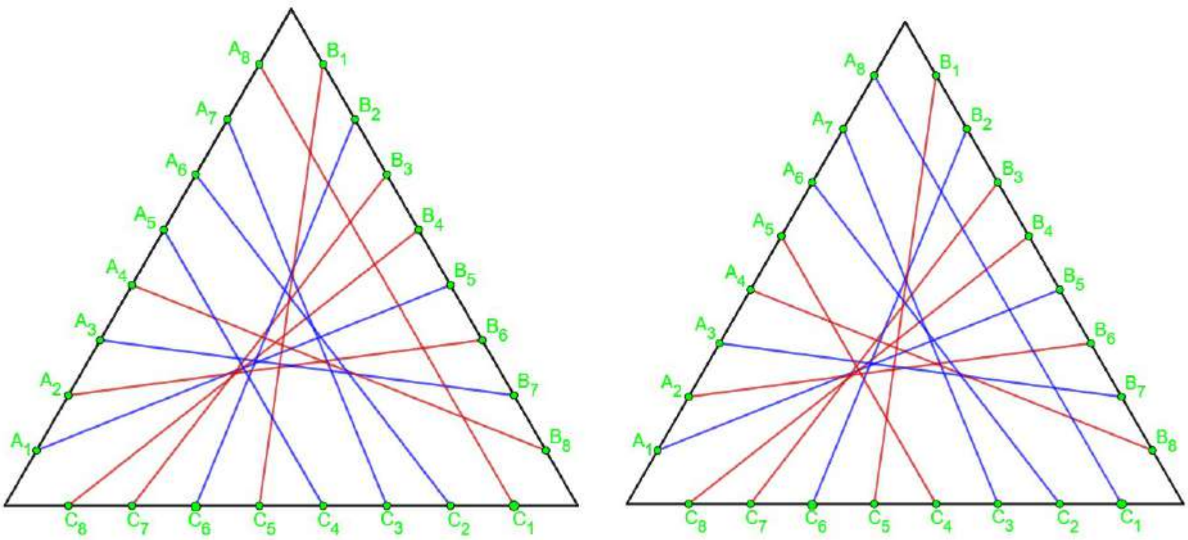
Figura 2.57: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 4° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul criar a reta A_5C_4 ou a reta A_8C_1, resta ao seu adversário escolher a reta A_8C_1 ou a reta A_5C_4, respectivamente. As duas escolhas resultam na vitória do jogador Vermelho, pois a reta azul criada não intercepta duas retas azuis, enquanto que a reta vermelha construída cruza todas as outras retas de mesma cor. A Figura 2.58 mostra essa situação.

Figura 2.58: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 2° resultado de vitória do jogador Vermelho

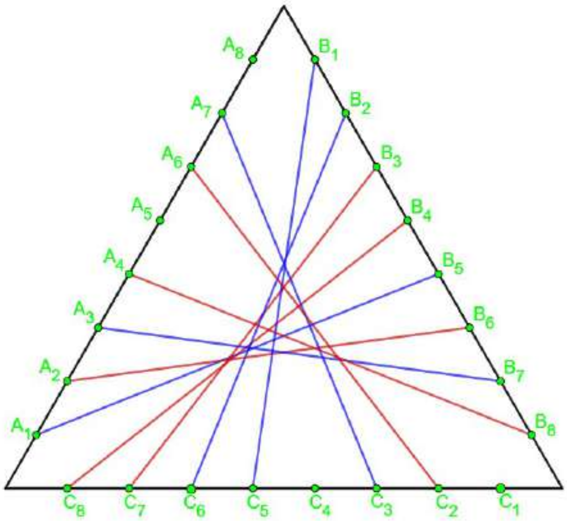


Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos a verificar a situação quando o número de retas Azuis entre os dois pares de pontos restantes é maior do que a quantidade de retas vermelhas. Nas duas configurações apresentadas o jogador Azul obteve a derrota ou o empate, o que significa que o jogador Azul não teve a oportunidade de vencer a partida.

A terceira e última situação a ser apresentada é quando o número de retas azuis e vermelhas entre os dois pares de pontos finais são iguais. Nesse caso, a única configuração possível é uma reta azul e uma reta vermelha. A Figura 2.59 exemplifica esse cenário.

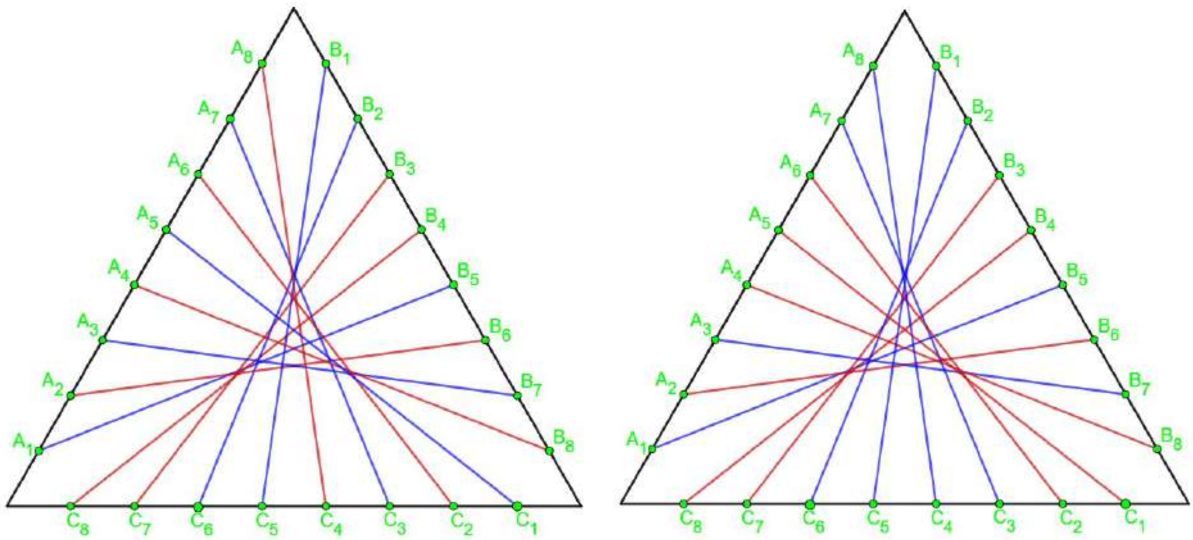
Figura 2.59: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: mesmo número de retas azuis e vermelhas



Fonte: elaborado pelos autores

Se a opção do jogador Azul for a reta A_5C_1 ou a reta A_8C_4 o seu oponente deve criar a reta A_8C_4 ou a reta A_5C_1, respectivamente. Em ambas as situações a partida termina empatada, pois os dois jogadores conseguem o mesmo número de intersecções como mostra a Figura 2.60.

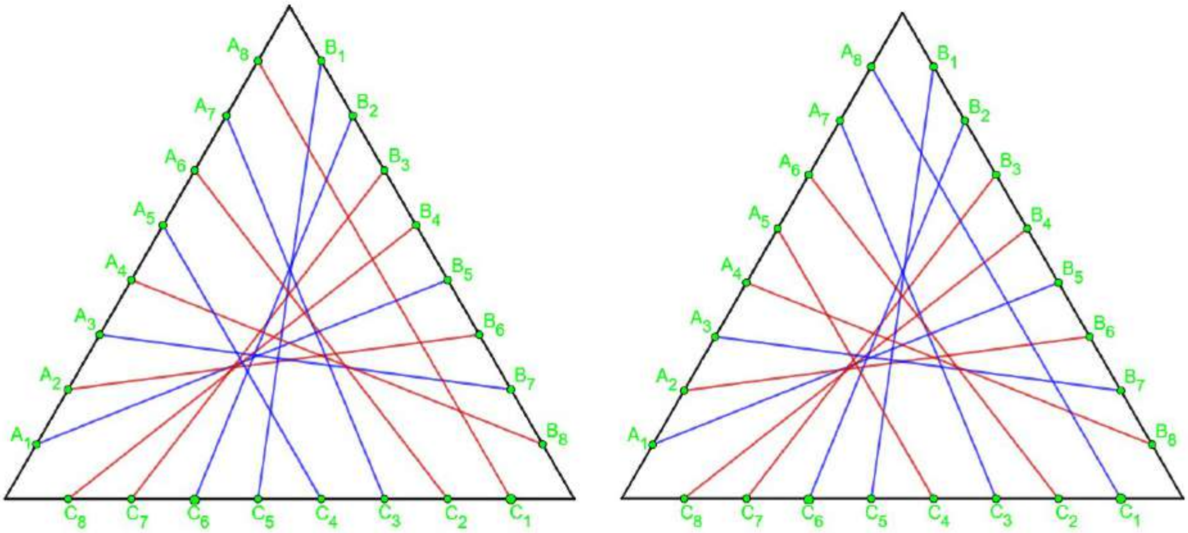
Figura 2.60: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 5° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, o jogador Azul ao escolher a reta A_5C_4 ou a reta A_8C_1 obriga o seu adversário a optar pela reta A_8C_1 ou pela reta A_5C_4, respectivamente. Nesse contexto, qualquer que seja a combinação de retas construídas, a partida possui como o resultado o empate, pois ambos os jogadores deixam de interceptar, cada um, uma reta de sua cor. Assim, o número de intersecções permanece o mesmo, como se observa na Figura 2.61.

Figura 2.61: Triângulo de 8 pontos, caso 2,2 - especial: 6° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Finalizamos a observação da partida quando a quantidade de retas azuis e vermelhas entre os pares de pontos finais é a mesma. Podemos notar que a disputa, nessa configuração, possui como resultado somente o empate.

Acabamos de apresentar o *Caso 2,2 - especial* no Triângulo de 8 pontos. A partir das análises realizadas podemos concluir que o número de retas de uma dada cor entre os dois pares de pontos finais influencia no desfecho da partida da seguinte forma:

- Se o número de retas vermelhas for maior do que o número de retas azuis, então o jogador azul não possui a chance de derrota;
- Se o número de retas azuis for maior do que o número de retas vermelhas, então o jogador Azul não possui a chance de vitória;
- Se o número de retas azuis for igual ao número de retas vermelhas, então a partida termina em empate.

Assim, podemos notar que o jogador que possuir mais retas entre os pares de pontos restantes está fadado a não vencer a partida.

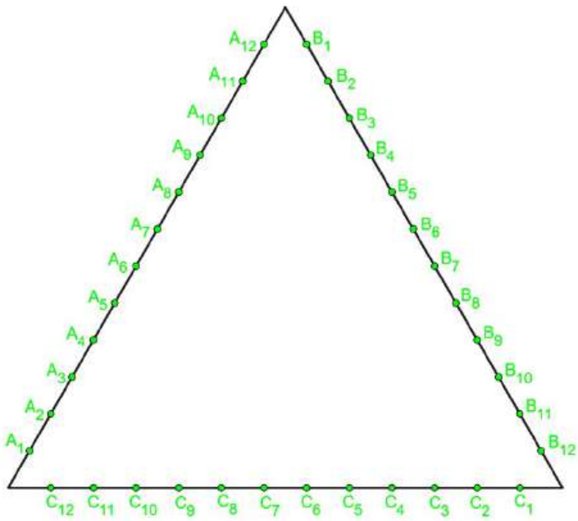
Concluímos a observação das cinco possibilidades de configurações finais para as partidas disputadas no Triângulo de 8 pontos. Percebemos que, exceto o *Caso 2,2 - especial*, as situações apresentadas são semelhantes àquelas trabalhadas anteriormente para o Triângulo de 4 pontos.

Isso significa que a maneira como podemos analisar cada configuração final, bem como os resultados encontrados são iguais aos desenvolvidos para as partidas disputadas no Triângulo de 4 pontos. Além disso, o novo caso trabalhado possui características próprias, as quais serão estendidas para outras figuras geométricas base como veremos mais adiante.

2.3 Triângulo de 12 pontos

Considere a tela inicial do jogo escolhida como sendo o Triângulo contendo 12 pontos em cada um dos seus lados, como mostra a Figura 2.62.

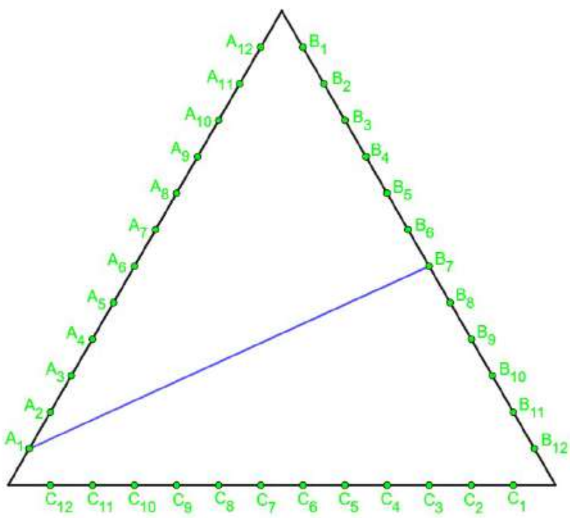
Figura 2.62: Tela inicial Triângulo de 12 pontos



Fonte: elaborado pelos autores

Considere que o jogador Azul fará uso da estratégia ideal e o jogador Vermelho irá realizar sempre jogadas boas. Uma primeira escolha pode ser a reta A_1B_7, pois os 34 pontos em jogo são distribuídos igualmente nos semi-planos formados, como mostra a Figura 2.63.

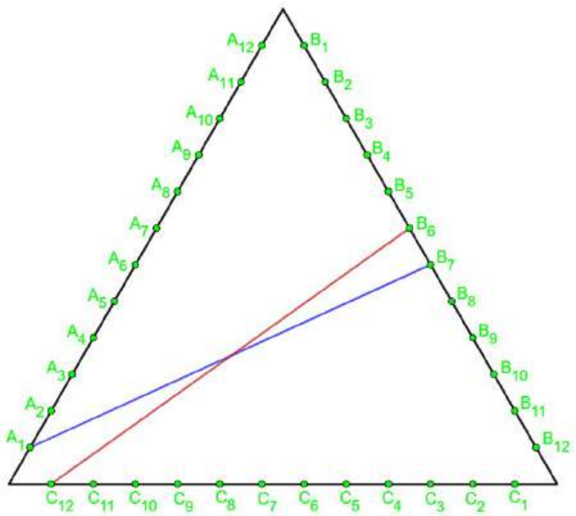
Figura 2.63: Triângulo de 12 pontos: 34 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Uma opção de primeira escolha para o jogador Vermelho é a reta B_6C_{12}, pois essa construção separa igualmente os 32 pontos restantes nos dois semi-planos formados. Esse cenário se verifica na Figura 2.64.

Figura 2.64: Triângulo de 12 pontos: 32 pontos distribuídos igualmente



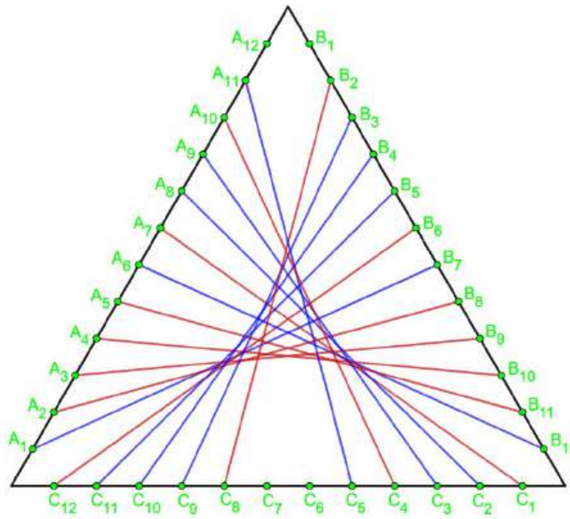
Fonte: elaborado pelos autores

Vamos considerar que ambos os jogadores vão continuar seguindo suas estratégias em cada uma das rodadas seguintes. Nesse contexto, após quatorze jogadas (sete de cada usuário) existem, assim como no Triângulo de 8 pontos, cinco possíveis configurações finais quando restam 4 pontos no jogo. Vejamos as possibilidades.

Possibilidade 1: Caso 1,1,2 - empate

A primeira possibilidade está apresentada na Figura 2.65.

Figura 2.65: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente

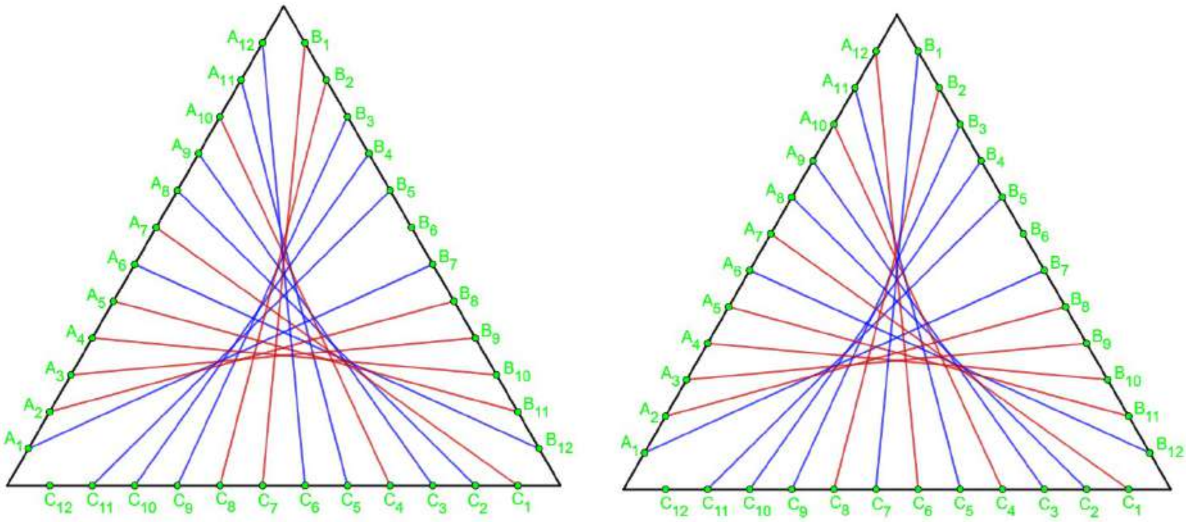


Fonte: elaborado pelos autores

Observe que a configuração acima é semelhante ao *Caso 1,1,2 - empate* do Triângulo de 4 pontos apresentado na Figura 2.5. Assim, ao analisarmos os resultados finais possíveis para a situação atual, encontraremos as mesmas conclusões obtidas anteriormente. Vejamos:

Se o jogador Azul optar em construir a reta $A_{12}C_6$ ou a reta B_1C_7, seu adversário é obrigado a criar a reta B_1C_7 ou a reta $A_{12}C_6$, respectivamente. Ambas as escolhas fazem com que a partida termine empatada, como exemplificado na Figura 2.66.

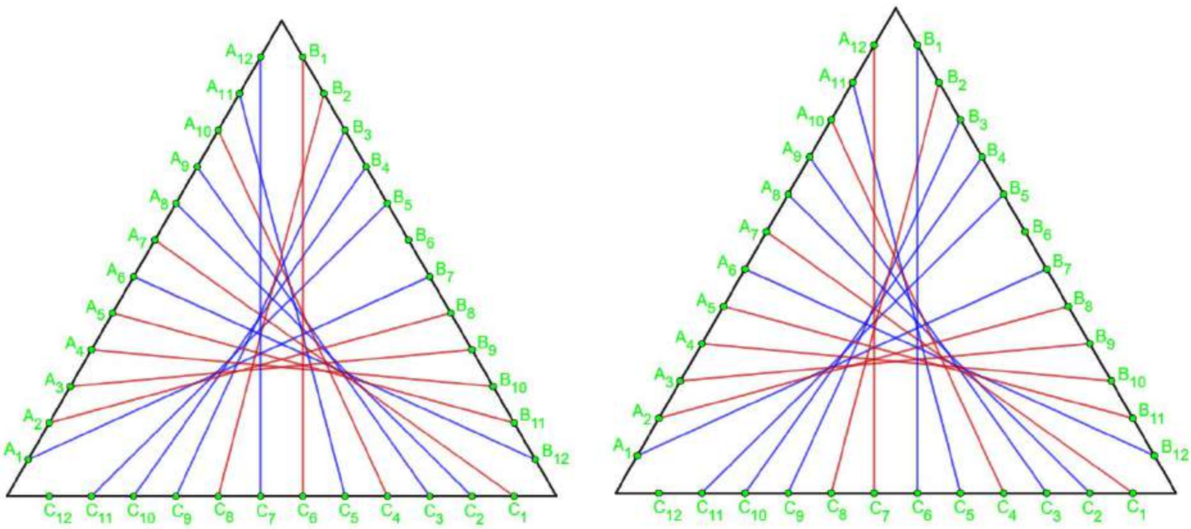
Figura 2.66: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - empate: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, caso a opção do jogador Azul seja a reta $A_{12}C_7$ ou a reta B_1C_6, resta ao jogador Vermelho construir a reta B_1C_6 ou a reta $A_{12}C_7$, respectivamente. Nas duas situações, a partida termina em empate, como se verifica na Figura 2.67.

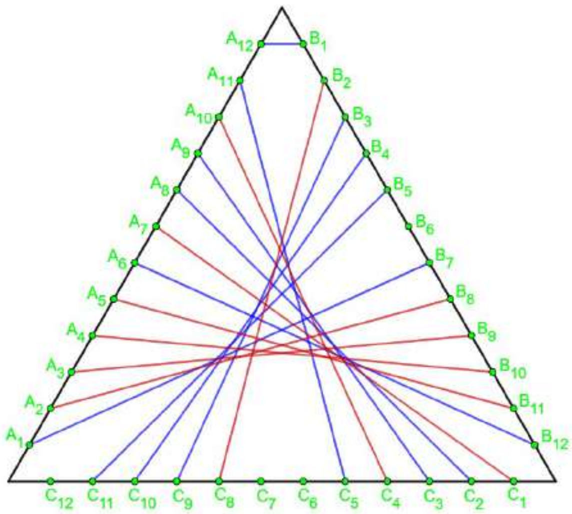
Figura 2.67: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Por fim, caso a escolha do jogador Azul seja a reta $A_{12}B_1$, seu adversário não poderá construir nenhuma reta, pois a regra do jogo não permite que pontos de um mesmo lado sejam ligados. Entretanto, mesmo o jogador Azul obtendo uma reta a mais que o seu oponente, a conclusão da partida será o empate, já que a reta azul construída não realiza cruzamentos com as outras retas de mesma cor. A Figura 2.68 mostra a situação descrita.

Figura 2.68: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - empate: 3° resultado de empate



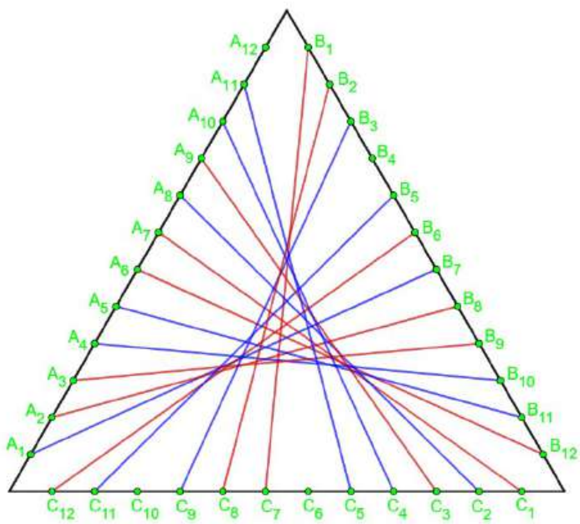
Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de observar a primeira das cinco possíveis configurações finais quando restam 4 pontos para serem jogados. Vejamos a próxima.

Possibilidade 2: Caso 1,1,2 - empate ou vitória

A segunda possibilidade está exemplificada na Figura 2.69.

Figura 2.69: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 4 pontos distribuídos igualmente

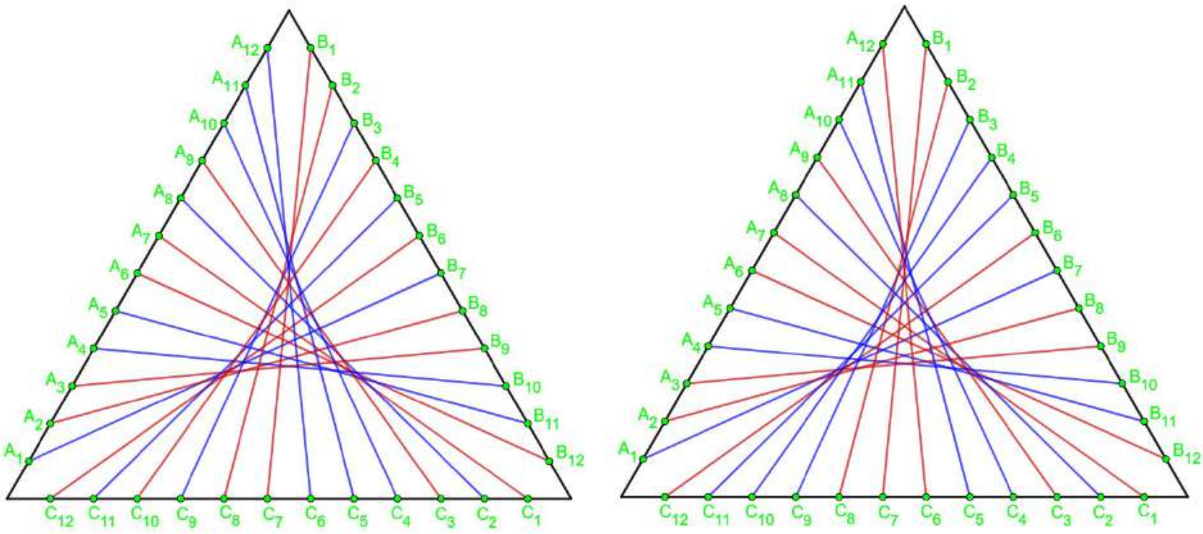


Fonte: elaborado pelos autores

Note que a situação acima é semelhante ao *Caso 1,1,2 - empate ou derrota* trabalhado anteriormente no Triângulo de 4 pontos. Assim, os resultados que podemos encontrar para a configuração atual são os mesmos vistos para esse caso no Triângulo de 4 pontos. Vejamos:

Se o jogador Azul criar a reta $A_{12}B_6$ ou a reta B_4C_{10}, resta a seu oponente as retas B_4C_{10} ou $A_{12}B_6$, respectivamente. Com isso a partida termina empatada, como visto na Figura 2.70.

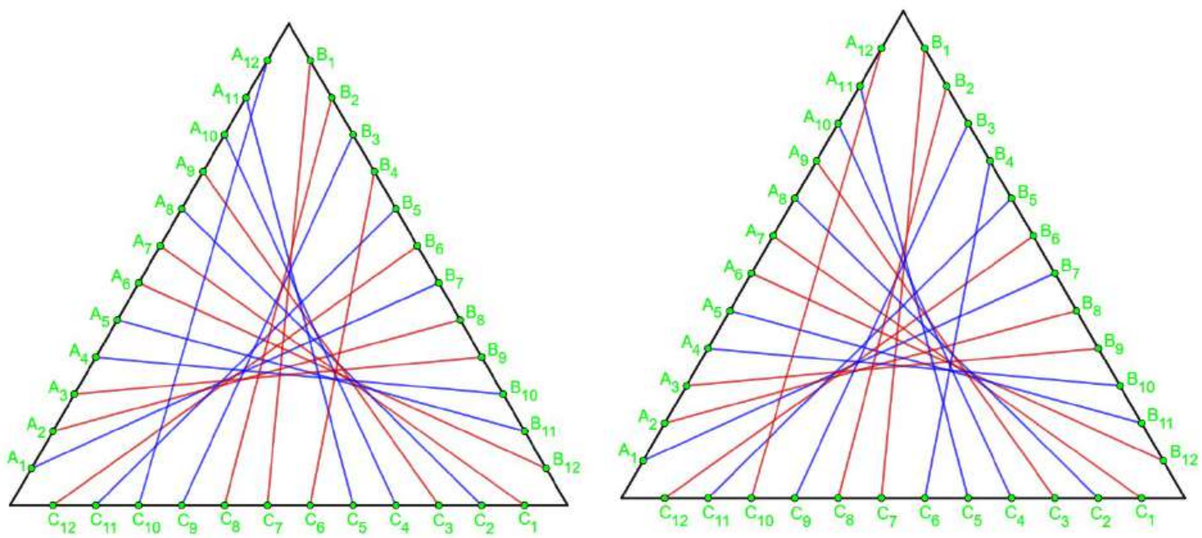
Figura 2.70: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul criar a reta $A_{12}C_{10}$ ou a reta B_4C_6, seu oponente deve escolher a reta B_4C_6 ou a reta $A_{12}C_{10}$, respectivamente. O vencedor nas duas situações será o jogador Azul, pois o jogador Vermelho fica com um cruzamento a menos. A Figura 2.71 mostra esses cenários.

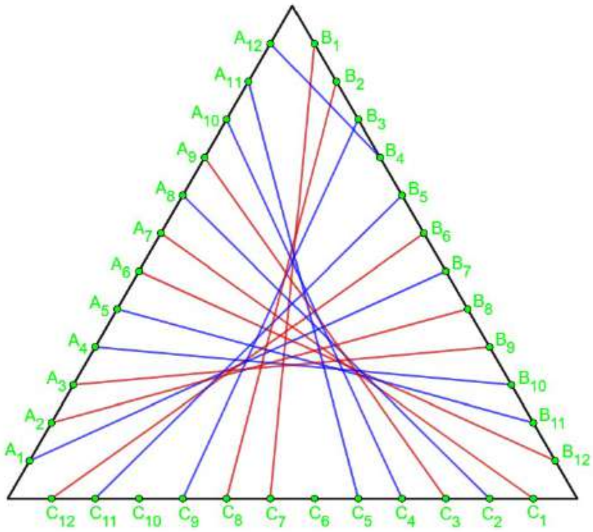
Figura 2.71: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 1° resultado de vitória do jogador Azul



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, se o jogador Azul optar pela reta $A_{12}B_4$, seu adversário não terá nenhuma reta para criar, pois os pontos finais estão localizados em um mesmo lado da figura. Com isso, o resultado da partida será a vitória do jogador Azul por conseguir um cruzamento a mais do que seu oponente. A Figura 2.72 mostra esse cenário.

Figura 2.72: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória: 2° resultado de vitória do jogador Azul



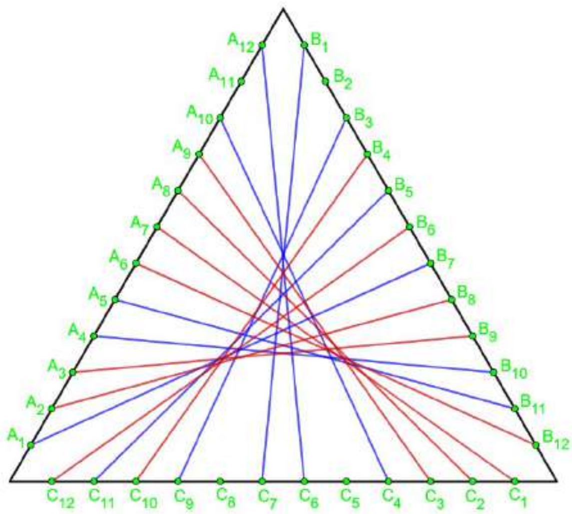
Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de visualizar a segunda configuração final possível quando restam 4 pontos em jogo na tela Triângulo de 12 pontos. Vejamos a próxima.

Possibilidade 3: Caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória

A terceira possibilidade está apresentada na Figura 2.73.

Figura 2.73: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: 4 pontos distribuídos igualmente

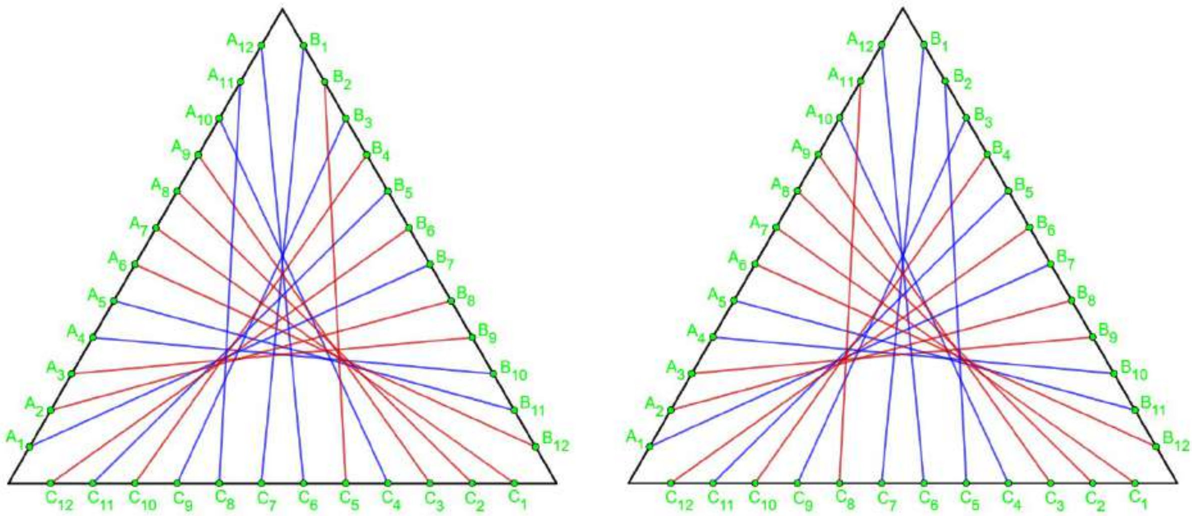


Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a situação acima é semelhante ao *Caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória* visto no Triângulo de 4 pontos. Assim, ao analisarmos o cenário atual, teremos os mesmos resultados observados anteriormente, ou seja, os resultados de derrota, empate ou vitória. Vejamos:

Se o jogador Azul criar a reta $A_{11}C_8$ ou a reta B_2C_5, resta ao seu adversário a reta B_2C_5 ou a reta $A_{11}C_8$, respectivamente. Em ambas as situações o vencedor da partida é o jogador Vermelho, como mostra a Figura 2.74.

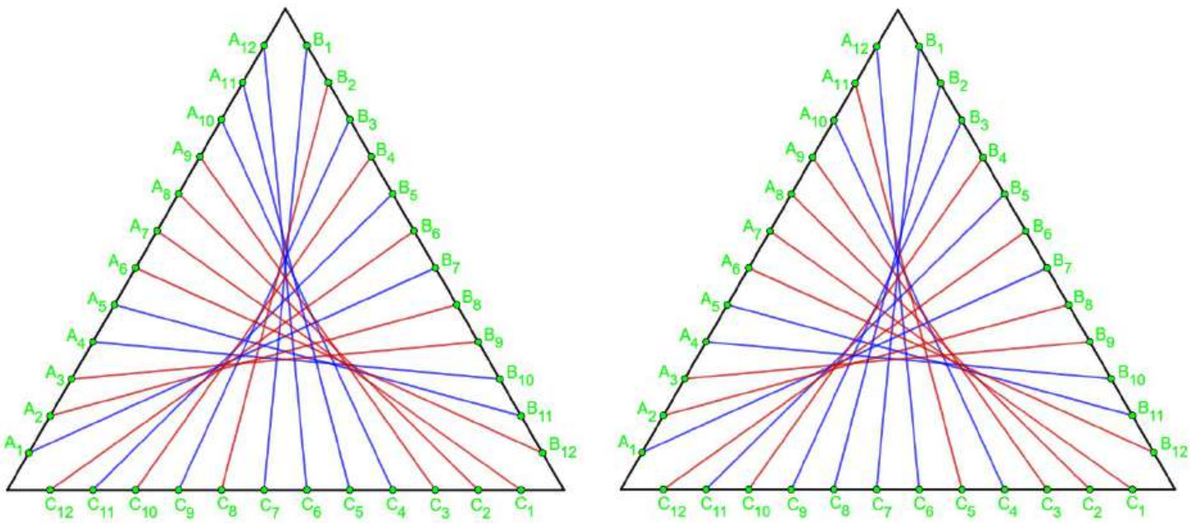
Figura 2.74: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: jogador Vermelho vence



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul criar a reta $A_{11}C_5$ ou a reta B_2C_8, resta a seu adversário as retas B_2C_8 ou $A_{11}C_5$, respectivamente. Com isso, a partida acaba empatada como mostra a Figura 2.75.

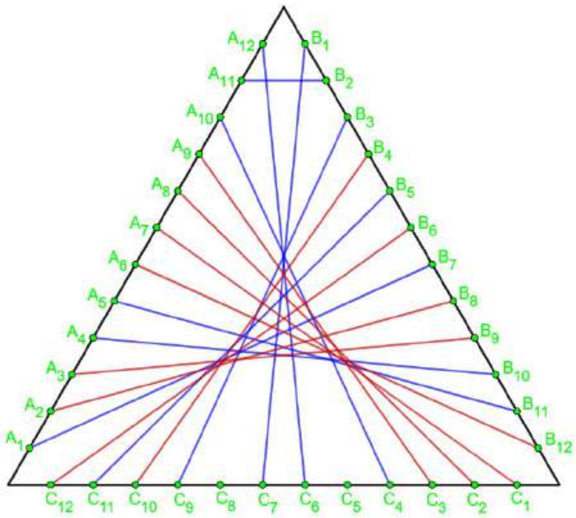
Figura 2.75: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Por fim, o jogador Azul pode construir a reta $A_{11}B_2$, obtendo duas interseções com retas azuis e obrigando o seu adversário a não criar mais nenhuma reta, pois os pontos finais estão sobre um mesmo lado e não podem formar uma reta. Com essa jogada, o jogador Azul finaliza a partida com dois cruzamentos a mais que o seu oponente, vencendo assim a disputa. Esse cenário se verifica na Figura 2.76.

Figura 2.76: Triângulo de 12 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória: jogador Azul vemce



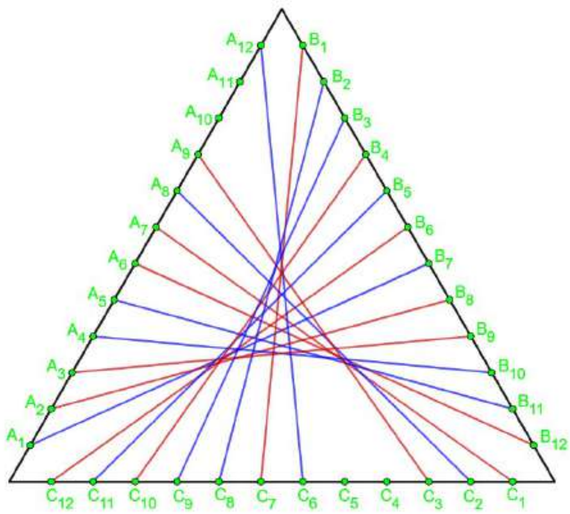
Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de observar a terceira possibilidade de configuração final para o Triângulo de 12 pontos. Vejamos agora, a quarta possibilidade para a partida quando restam 4 pontos.

Possibilidade 4: Caso 2,2 - empate

A Figura 2.77 exemplifica a quarta possibilidade.

Figura 2.77: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente

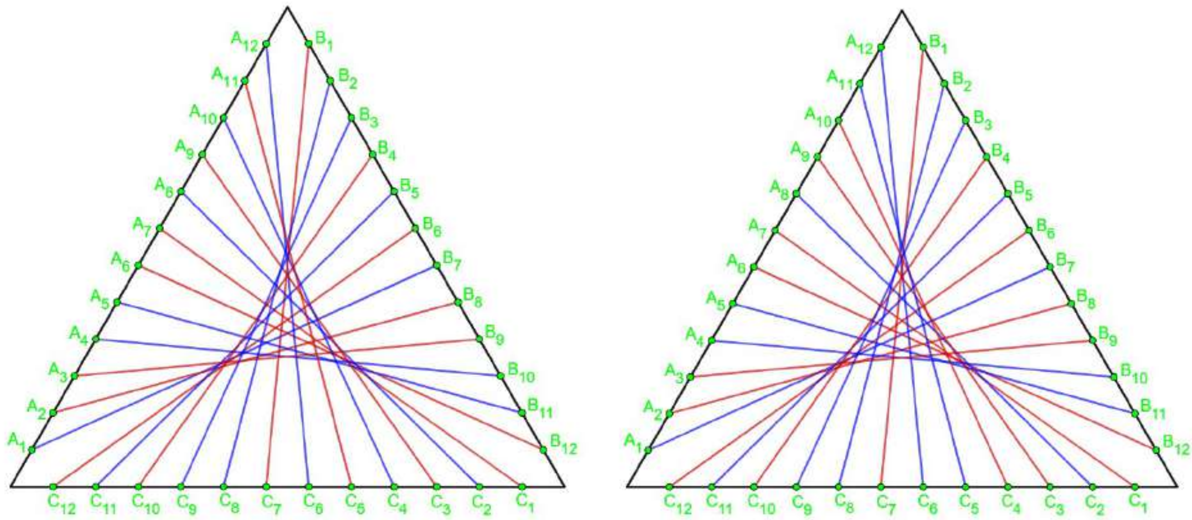


Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a situação acima é semelhante ao *Caso 2,2 - empate* do Triângulo de 4 pontos encontrado na Figura 2.26. Assim, ao analisarmos as possíveis conclusões para a configuração da partida, encontraremos os mesmos resultados vistos anteriormente para esse caso. Vejamos:

Se o jogador Azul optar por construir a reta $A_{10}C_4$ ou a reta $A_{11}C_5$, seu adversário é obrigado a escolher a reta $A_{11}C_5$ ou a reta $A_{10}C_4$, respectivamente. Em ambas as situações, o resultado para a partida é o empate, conforme se verifica na Figura 2.78.

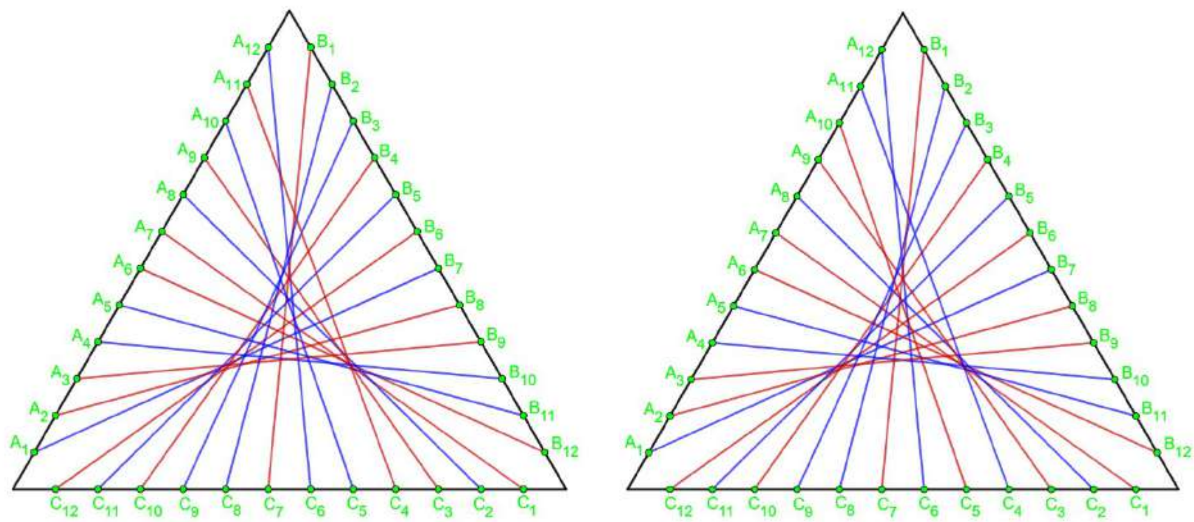
Figura 2.78: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - empate: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, caso o jogador Azul faça a escolha pela reta $A_{10}C_5$ ou a reta $A_{11}C_4$, seu adversário é obrigado a construir a reta $A_{11}C_4$ ou a reta $A_{10}C_5$, respectivamente. Em ambas as situações, a conclusão para a partida é o empate, conforme se observa na Figura 2.79.

Figura 2.79: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Finalizamos a observação da quarta possibilidade de configuração final para a tela Triângulo de 12 pontos quando restam 4 pontos em jogo. Vejamos agora a quinta e última possibilidade.

Possibilidade 5: Caso 2,2 - especial

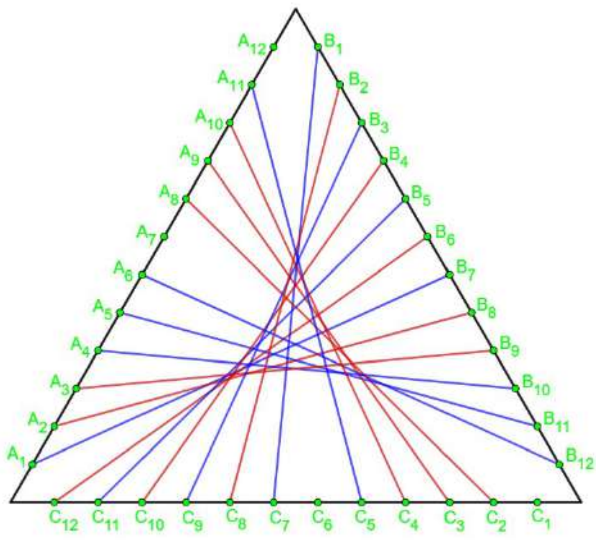
Assim como apresentado na tela Triângulo de 8 pontos, esse caso ocorre quando existem retas, azuis e/ou vermelhas, entre os dois pares de pontos restantes. Além disso, observamos que é relevante para esse caso a quantidade de retas de uma mesma cor que se encontram dento dos dois pares de pontos finais.

Como mencionado anteriormente, à medida que aumentamos o número de pontos e/ou de lados da figura geométrica escolhida para a partida, mais retas podem existir entre os pares de pontos finais. Nesse sentido, a distribuição de retas azuis pode ser menor, maior ou igual à quantidade de retas vermelhas.

Como as distribuições de retas para esse caso são diversas, iremos apresentar um exemplo relacionado a cada possibilidade. Os resultados para as outras distribuições serão os mesmos que os encontrados para as situações exemplificadas.

Desse modo, iremos apresentar as seguintes situações: mais retas vermelhas do que azuis; mais retas azuis do que retas vermelhas; quantidades de retas azuis e vermelhas são iguais. Vejamos a primeira situação. A Figura 2.80 exemplifica esse cenário.

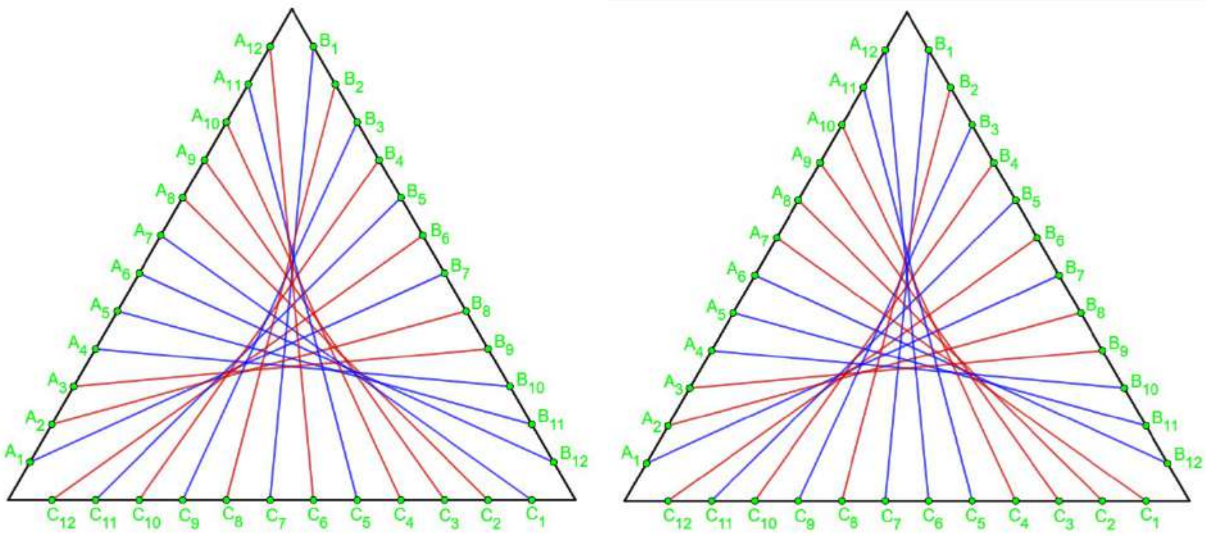
Figura 2.80: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - especial: mais retas vermelhas do que azuis



Fonte: elaborado pelos autores

Note que entre os pontos A_7 e A_{12} e os pontos C_1 e C_6 existem três retas vermelhas e uma reta azul. Assim, se o jogador Azul construir a reta A_7C_1 ou a reta $A_{12}C_6$, seu advresário é obrigado a criar a reta $A_{12}C_6$ ou a reta A_7C_1, respectivamente. Em ambas as situações a partida termina empatada, como se verifica na Figura 2.81.

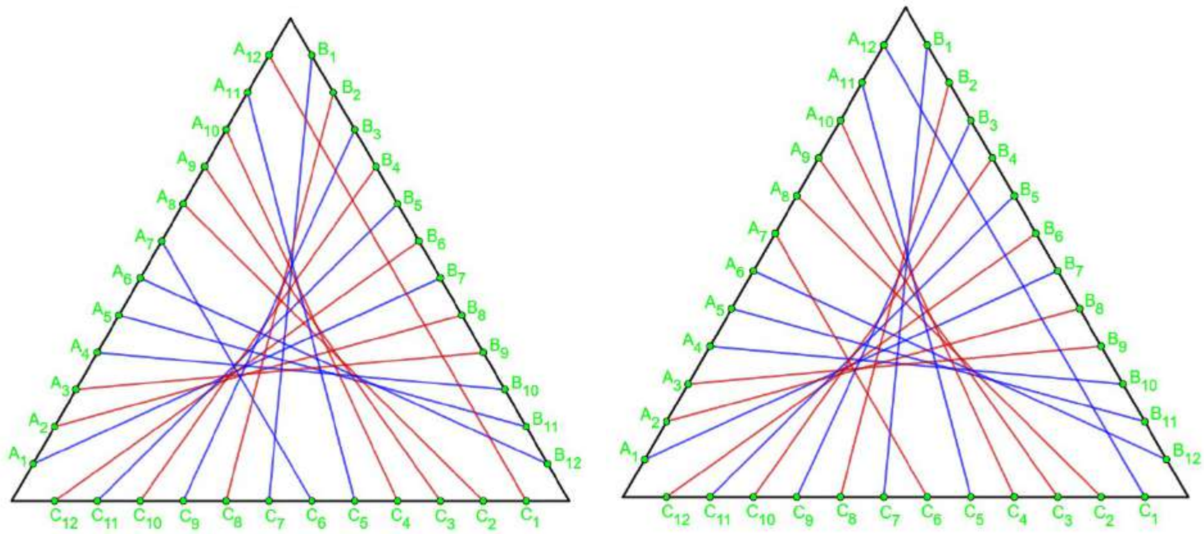
Figura 2.81: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - especial: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se a opção do jogador Azul se der pela reta A_7C_6 ou pela reta $A_{12}C_1$, seu oponente é obrigado a construir a reta $A_{12}C_1$ ou a reta A_7C_6, respectivamente. Nas duas situações o vencedor é o jogador Azul, pois ele consegue duas intersecções a mais do que o jogador Vermelho. A Figura 2.82 apresenta essas situações.

Figura 2.82: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - especial: jogador Azul vence

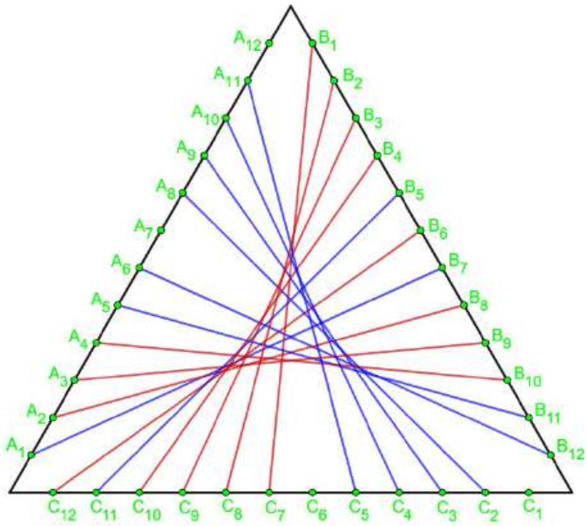


Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de observar uma situação que exemplifica o *caso 2,2 - especial* quando existem mais retas vermelhas entre os dois pares de pontos finais do que retas azuis. Notamos que essa distribuição não possibilita ao jogador Azul o resultado de derrota. Essa conclusão é estendida para qualquer distribuição, desde que se tenha mais retas vermelhas do que retas azuis dentro do espaço considerado para esse caso.

Vejamos agora a segunda situação, ou seja, quando existem mais retas azuis do que retas vermelhas. A Figura 2.83 exemplica essa configuração.

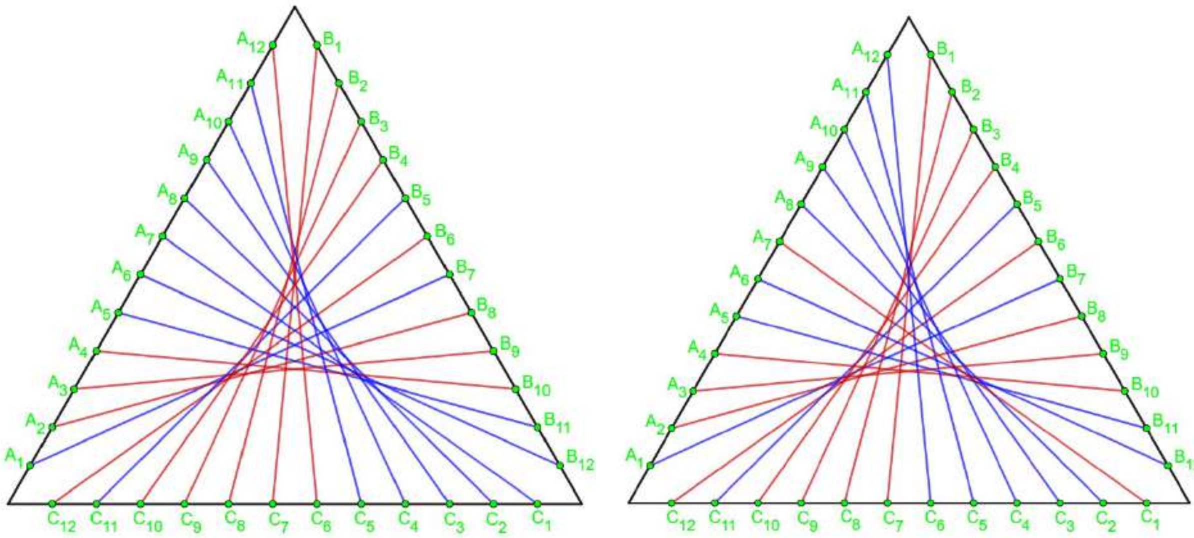
Figura 2.83: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - especial: mais retas azuis do que vermelhas



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que entre os pontos A_7 e A_{12} e os pontos C_1 e C_6 existem quatro retas azuis e nenhuma reta vermelha. Assim, se o jogador Azul criar a reta A_7C_1 ou a reta $A_{12}C_6$, o jogador Vermelho é obrigado a construir a reta $A_{12}C_6$ ou a reta A_7C_1, respectivamente. Em ambas as situações a partida termina empatada, como se observa na Figura 2.84.

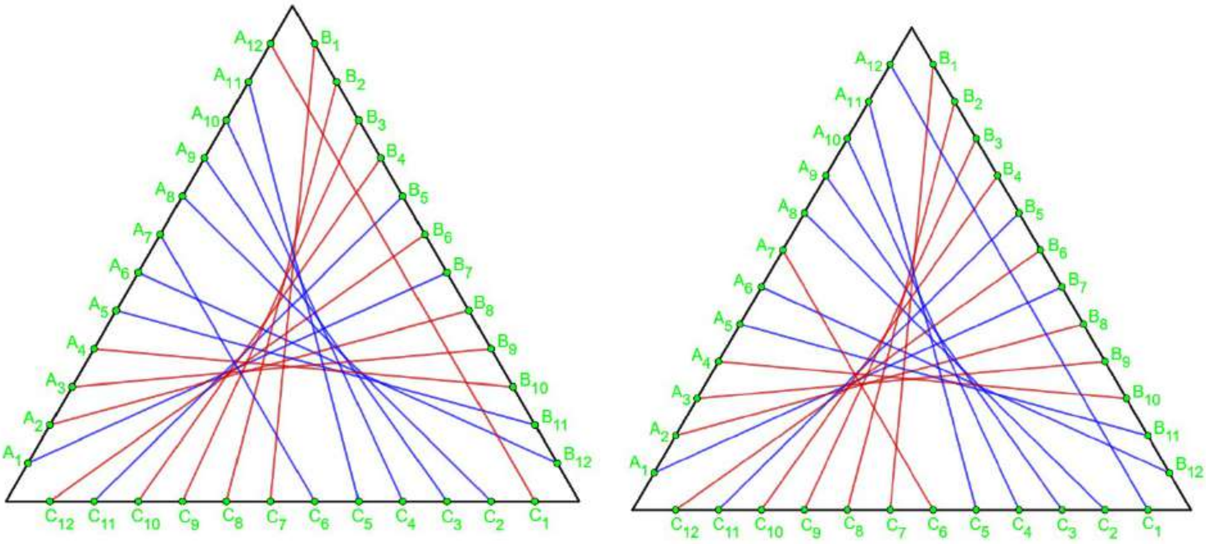
Figura 2.84: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - especial: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se a escolha do jogador Azul for a reta A_7C_6 ou a reta $A_{12}C_1$, seu adversário é obrigado a escolher a reta $A_{12}C_1$ ou a reta A_7C_6, respectivamente. Veja que ambas as escolhas fazem com que o vencedor da partida seja o jogador Vermelho, pois o jogador Azul fica com quatro intersecções a menos do que seu oponente. A Figura 2.85 apresenta esse cenário.

Figura 2.85: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - especial: jogador Vermelho vence

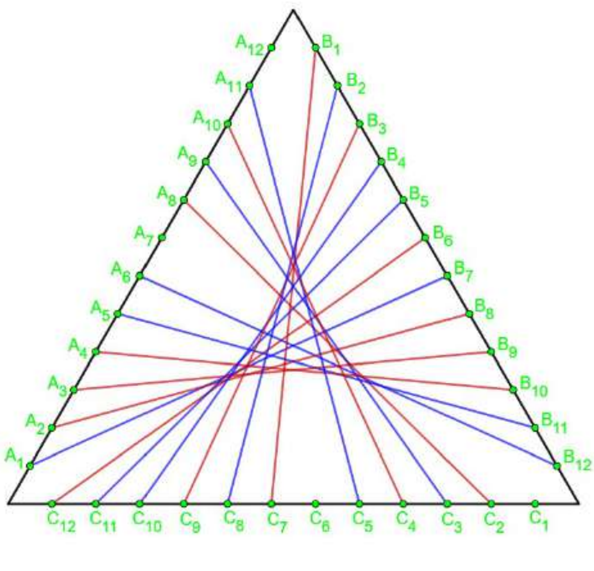


Fonte: elaborado pelos autores

Finalizamos a apresentação do *Caso 2,2 - especial* quando existem mais retas azuis do que vermelhas entre os dois pares de pontos finais. Notamos que essa distribuição não possibilita ao jogador Azul o resultado de vitória. Essa conclusão é válida para qualquer distribuição, desde que se tenha mais retas azuis do que vermelhas dentro do espaço considerado para esse caso.

Vejamos agora a terceira e última situação, ou seja, quando existem a mesma quantidade de retas azuis e vermelhas entre os dois pares de pontos restantes. A Figura 2.86 exemplifica essa configuração.

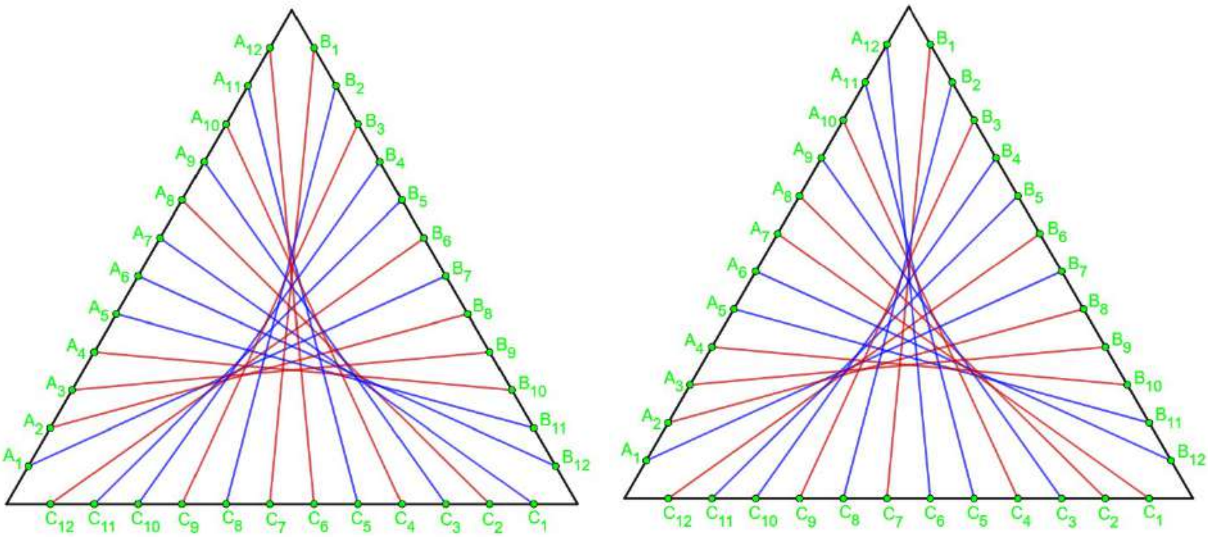
Figura 2.86: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - especial: mesmo número de retas azuis e vermelhas



Fonte: elaborado pelos autores

Perceba que entre os pontos A_7 e A_{12} e os pontos C_1 e C_6 existem duas retas vermelhas e duas retas azuis. Assim, se o jogador Azul construir a reta A_7C_1 ou a reta $A_{12}C_6$, seu adversário é obrigado a escolher a reta $A_{12}C_6$ ou a reta A_7C_1, respectivamente. Ambas as possibilidades implicam no resultado de empate para a partida, como se observa na Figura 2.87.

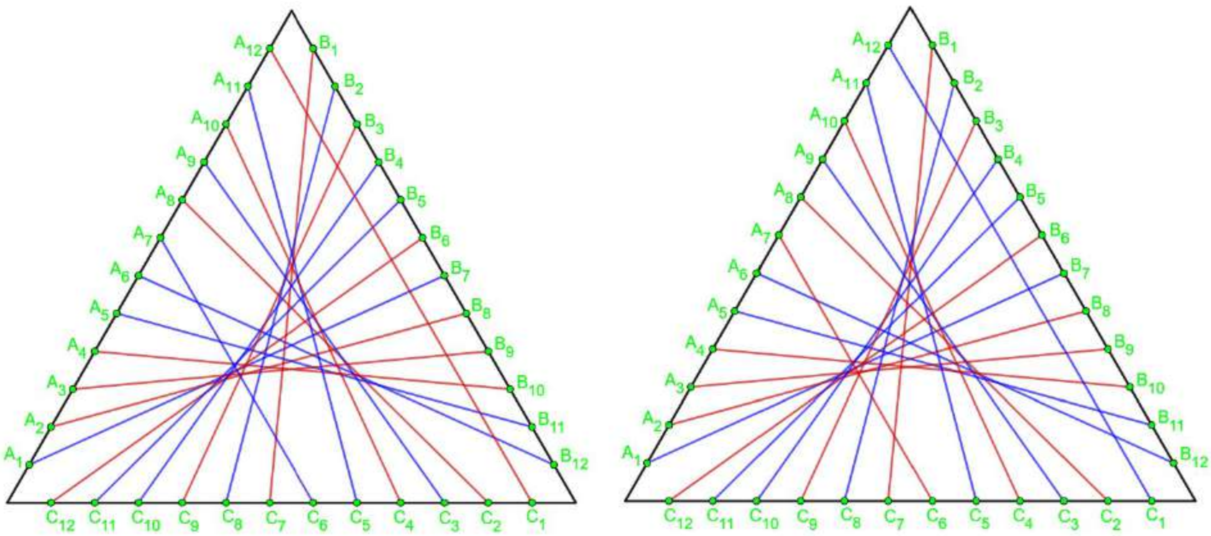
Figura 2.87: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - especial: 3° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul criar a reta A_7C_6 ou a reta $A_{12}C_1$, seu oponente é obrigado a construir a reta $A_{12}C_1$ ou a reta A_7C_6, respectivamente. Em ambas as construções, cada jogador deixa de cruzar o mesmo número de retas, resultando para os dois jogadores a mesma quantidade de intersecções. Assim, a partida termina empatada, como mostra a Figura 2.88.

Figura 2.88: Triângulo de 12 pontos, caso 2,2 - especial: 4° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Finalizamos a exemplificação do *Caso 2,2 - especial* quando existem o mesmo número de retas azuis e vermelhas entre os dois pares de pontos finais. Notamos que essa distribuição possibilita para a partida apenas o resultado de empate. Essa conclusão é válida para qualquer configuração, desde que se tenha a mesma quantidade de retas azuis e vermelhas dentro do espaço considerado para esse caso.

Assim, terminamos as exemplificações das três possíveis situações envolvendo a quantidade de retas azuis e/ou vermelhas durante o *Caso 2,2 - especial*. Como mencionado anteriormente, o que é relevante para esse caso é o número de retas de uma mesma cor que se encontra dentro do espaço delimitado pelos dois pares de pontos finais.

Isso significa que para qualquer outra configuração de retas que atenda a premissa da distribuição das retas, as análises e os resultados serão os mesmos que os exemplificados. Nesse sentido, as conclusões encontradas para esse caso na tela Triângulo de 12 pontos são as mesmas apontadas para esse caso na tela Triângulo de 8 pontos.

Acabamos de apresentar as cinco possibilidades de configurações finais para as partidas disputadas no Triângulo de 12 pontos. Observamos que essas configurações são semelhantes àquelas apresentadas anteriormente para o Triângulo de 4 pontos e para o *Caso 2,2 - especial* apresentado no Triângulo de 8 pontos.

Isso significa que as análises realizadas anteriormente, bem como os resultados encontrados nas telas anteriores são os mesmos encontrados durante as análises dos casos na tela Triângulo de 12 pontos. Assim, a forma como podemos analisar o Triângulo de 12 pontos se reduz às análises feitas para o Triângulo de 4 pontos e para o *Caso 2,2 - especial* apresentado no Triângulo de 8 pontos.

Capítulo 3

Polígono regular de quatro lados: Quadrado

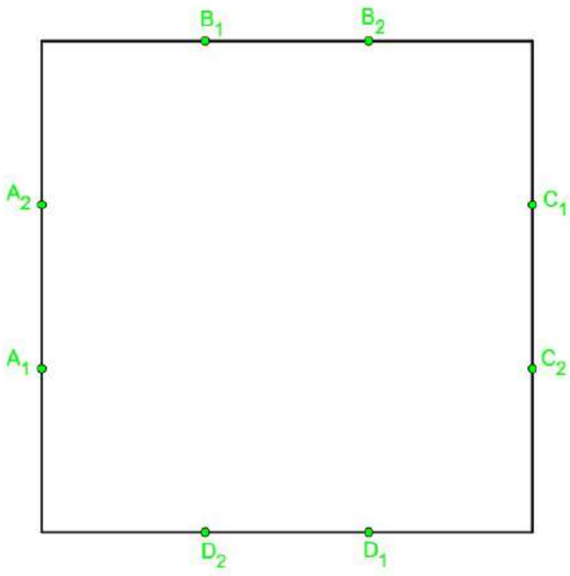
Este capítulo visa apresentar as análises que podem ser feitas próximas ao final de partidas disputadas no jogo Duelo das Retas, nas quais o polígono base escolhido é o Quadrado. Esse polígono não possui restrições para as possibilidades de distribuições de pontos, uma vez que qualquer configuração possibilita uma quantidade par de retas possíveis para serem criadas.

Nesse sentido, optamos em realizar o estudo das partidas disputadas nas telas inicias dos Quadrados de 2, 3 e 4 pontos. O objetivo é mostrar que os estudos das configurações finais nos Quadrados com maiores quantidades de pontos se reduzem ao Quadrado de 4 pontos.

3.1 Quadrado de 2 pontos

Considere a tela inicial escolhida para a partida como sendo o Quadrado contendo 2 pontos em cada um de seus lados, como se observa na Figura 3.1.

Figura 3.1: Tela inicial Quadrado de 2 pontos



Fonte: elaborado pelos autores

Vamos assumir que o jogador Azul será aquele que irá utilizar a estratégia ideal, ou seja, em cada rodada irá construir retas que separam igualmente o número de pontos restantes. O jogador Vermelho fará sempre jogadas boas, ou seja, construir retas que dividam a quantidade de pontos de forma igual.

Nesse contexto, próximo ao final da partida, quando restarem 4 pontos livres, irá existir dois possíveis casos de configurações finais para a partida em disputa. Vejamos:

- Caso (1,1,1,1): um ponto em cada um dos quatro lados;
- Caso (2,2): dois pontos em um mesmo lado L_1 e dois pontos em um mesmo lado L_2.

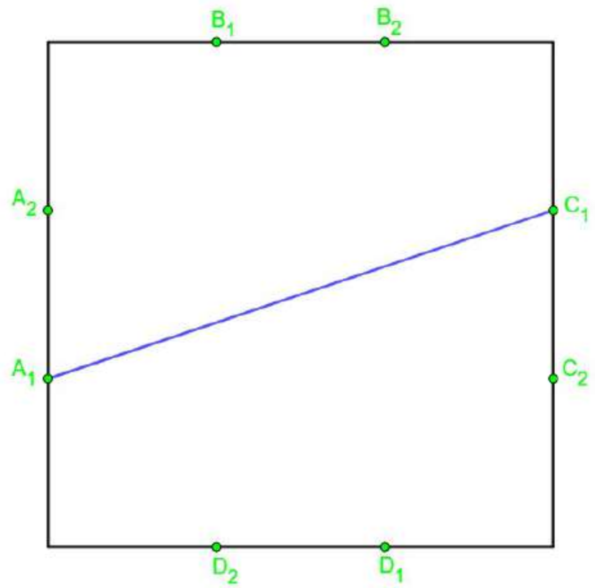
Cada caso em particular possibilita ao Jogador Azul dois tipos de resultados para a partida, a saber: somente empate; chance de derrota, empate ou vitória. Isso significa que é possibilitado ao jogador Azul analisar e interpretar a configuração final da partida quando restam 4 pontos e, assim prever o resultado final para a disputa. Vejamos então cada caso detalhadamente.

3.1.1 O Caso 1,1,1,1 e suas possíveis variações

Caso 1,1,1,1 - empate

Sabemos que na tela inicial do Quadrado de 2 pontos existem um total de 8 pontos. Obedecendo a estratégia ideal adotada, o jogador Azul deve construir uma reta que separe igualmente os 6 pontos restantes nos dois semi-planos formados após a criação da reta. Uma primeira escolha pode ser a reta A_1C_1, visto que há 3 pontos no plano superior e 3 pontos no plano inferior à reta criada, como mostra a Figura 3.2.

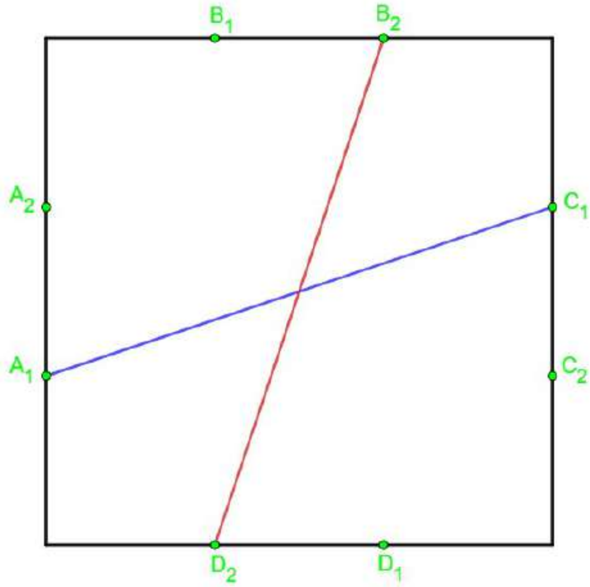
Figura 3.2: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 6 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

A próxima rodada pertence ao jogador Vermelho. Uma possibilidade de escolha é a reta B_2D_2, pois essa construção divide os 4 pontos restantes de forma igual nos dois semi-planos formados, como mostra a Figura 3.3.

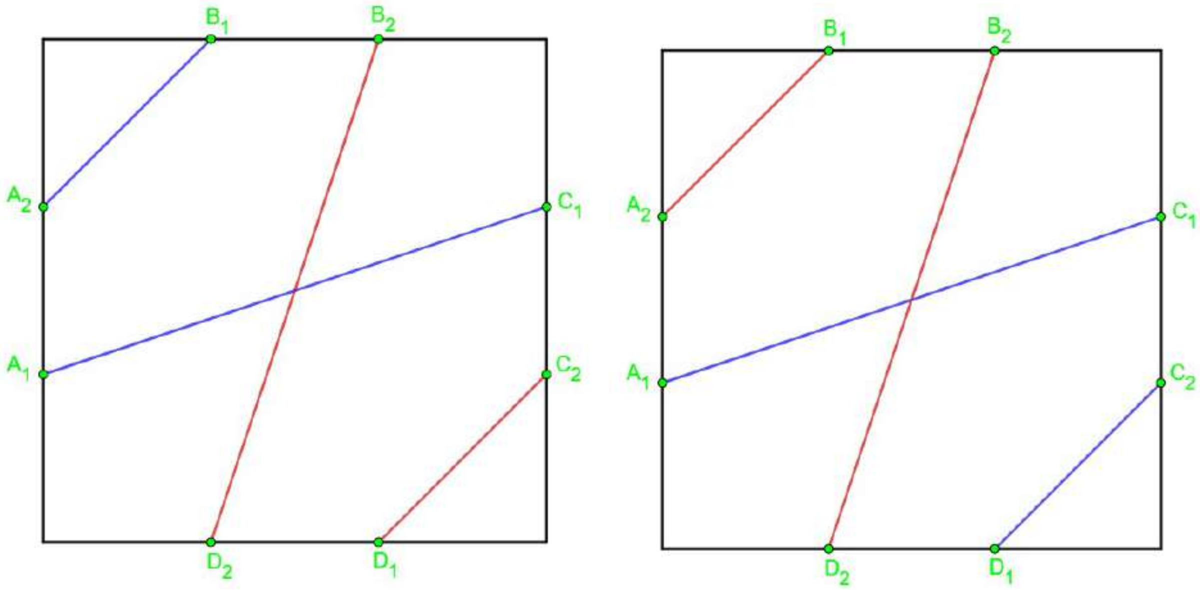
Figura 3.3: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a partida se encontra no momento em que o jogador Azul possui a oportunidade de analisar qual será a sua última jogada e, consequentemente, a de seu adversário. Se o jogador Azul construir a reta A_2B_1, seu adversário é obrigado a criar a reta C_2D_1. Se a escolha for a reta C_2D_1, resta ao jogador Vermelho construir a reta A_2B_1. Em ambas as situações a partida possui como resultado o empate. A Figura 3.4 mostra esses cenários.

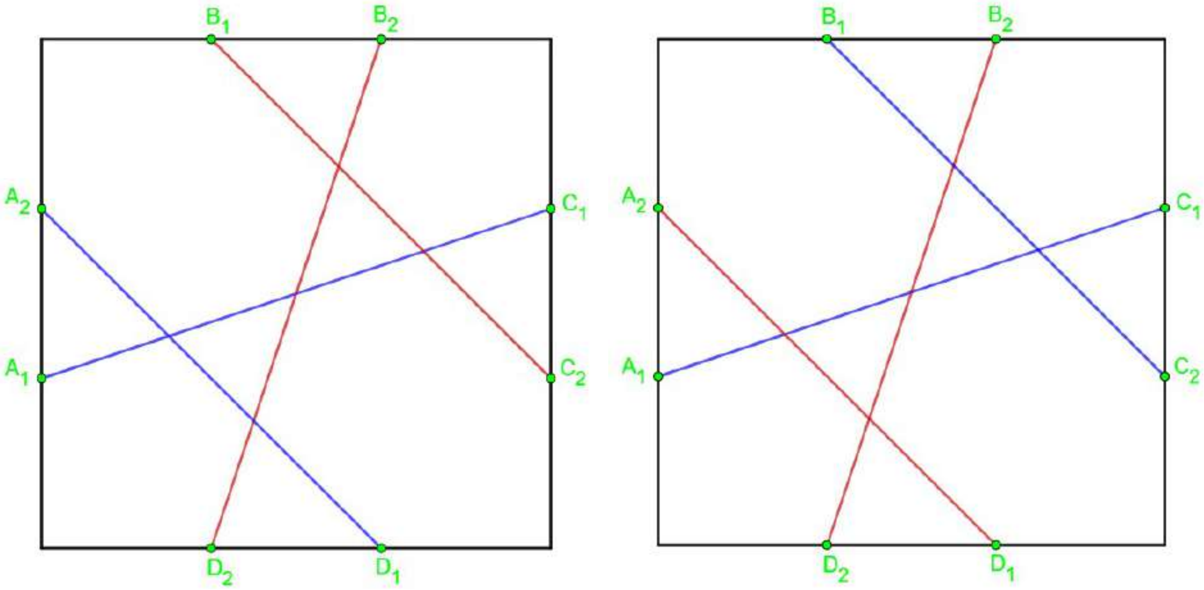
Figura 3.4: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul escolher a reta A_2D_1, seu adversário é obrigado a criar a reta B_1C_2. Caso a opção seja pela reta B_1C_2, resta ao jogador Vermelho construir a reta A_2D_1. Nas duas situações a partida termina empatada, como se verfica na Figura 3.5.

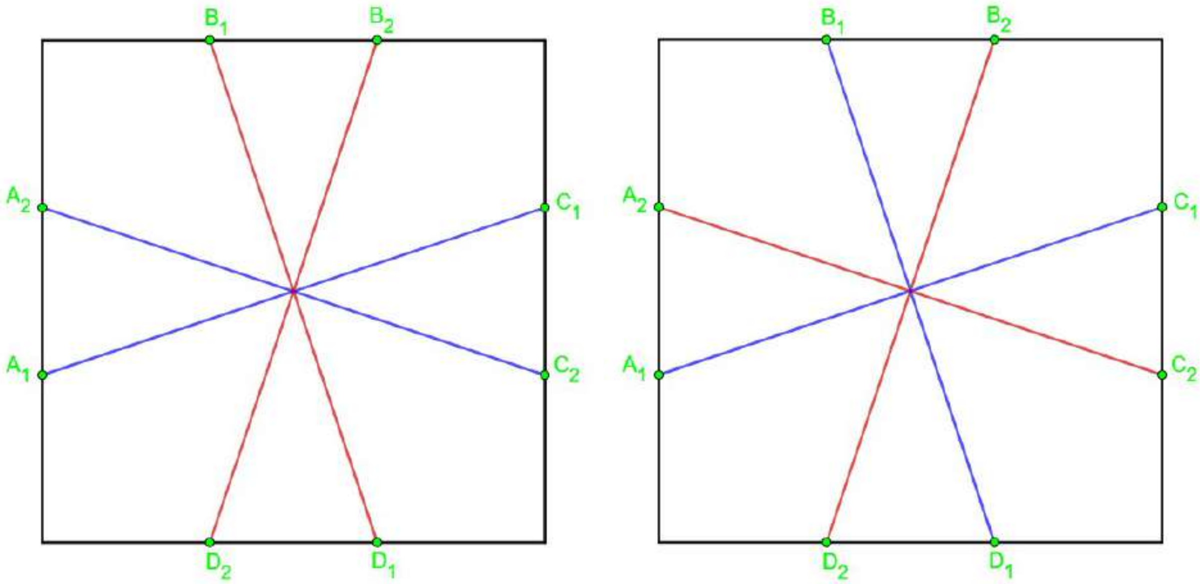
Figura 3.5: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se a escolha do jogador Azul for a reta A_2C_2, seu adversário é obrigado a construir a reta B_1D_1. Caso a opção seja pela reta B_1D_1, resta ao jogador Vermelho escolher a reta A_2C_2. Em ambas as situações a partida termina empatada, como se observa na Figura 3.6.

Figura 3.6: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 3° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

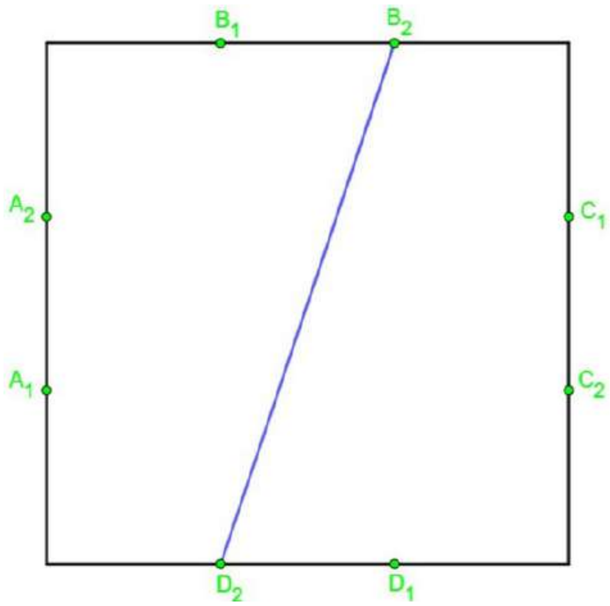
De acordo às análises realizadas acima, podemos observar que a primeira parte do *Caso 1,1,1,1 - empate* possibilita ao jogador Azul o resultado de empate, independentemente da reta escolhida ao fim do jogo. Isso significa que o único resultado possível de acontecer para esse caso é o empate.

Observamos a primeira parte para o caso trabalhado até o momento. Vejamos agora a segunda parte para esse caso.

Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória

A partir da estratégia ideal adotada pelo jogador Azul, uma possibilidade de construção de uma reta nessa rodada é a reta B_2D_2, uma vez que os 6 pontos restantes na partida são separados de maneira igual nos dois semi-planos formados após a construção da reta mencionada. A configuração mencionada para a partida atual encontra-se exemplificada na Figura 3.7 a seguir.

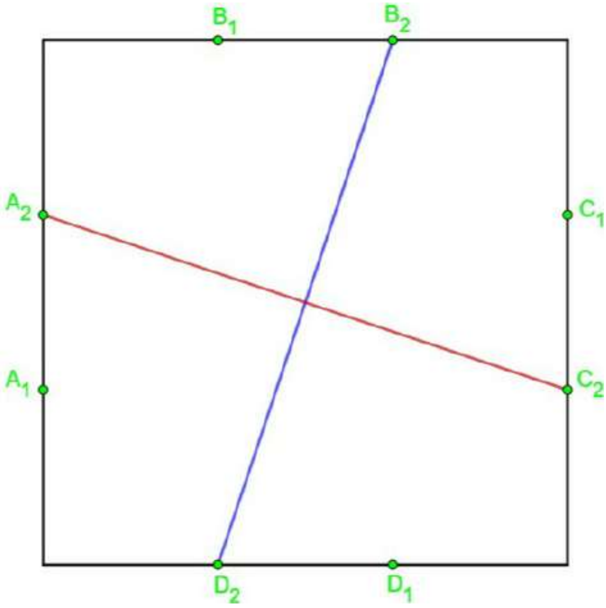
Figura 3.7: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: 6 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Na rodada seguinte é a vez do jogador Vermelho realizar a construção de uma reta. Esse jogador, seguindo a premissa básica da sua estratégia de realização de jogadas boas, pode escolher construir a reta A_2C_2, uma vez que essa reta separa o número de pontos finais nos dois semi-planos formados de maneira igual. Essa situação atual para a partida está apresentada na Figura 3.8 abaixo.

Figura 3.8: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: 4 pontos distribuídos igualmente

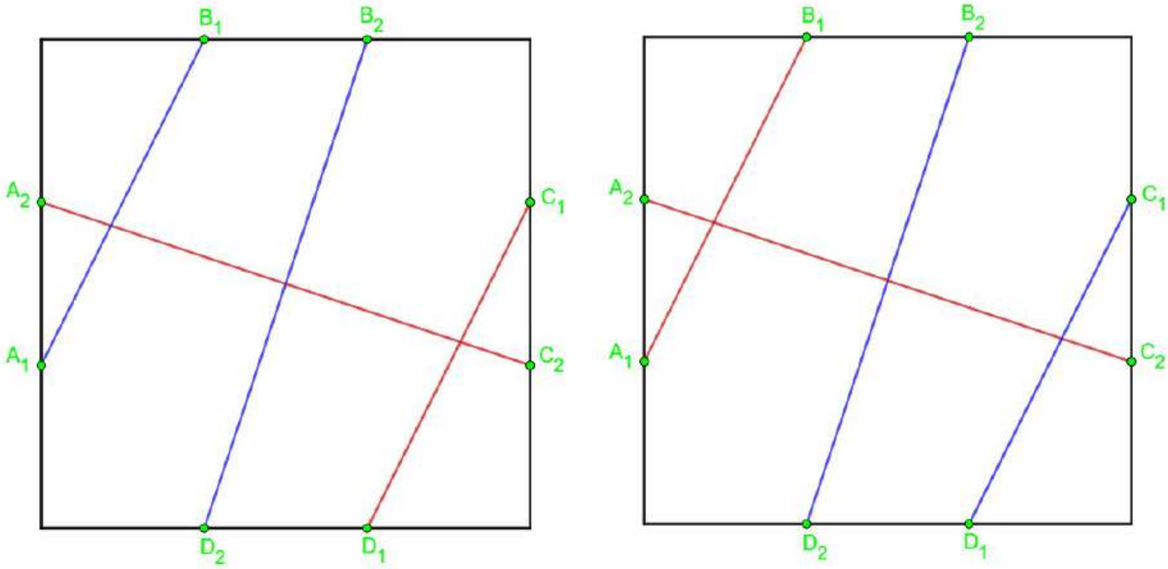


Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a disputa está no momento em que o jogador Azul possui a chance de analisar o cenário da partida e decidir qual será a sua última jogada e, consequentemente, a de seu adversário. Existem três possíveis análises para o cenário apresentado. Vejamos a primeira.

Se o jogador Azul criar a reta A_1B_1, resta a seu adversário escolher a reta C_1D_1. Essa reta permite ao jogador Vermelho obter um cruzamento a mais do que o jogador Azul e, com isso, vencer a partida. A mesma justificativa e o mesmo resultado acontecem caso a opção do jogador Azul seja a reta C_1D_1. A Figura 3.9 mostra as situações descritas.

Figura 3.9: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: jogador Vermelho vence



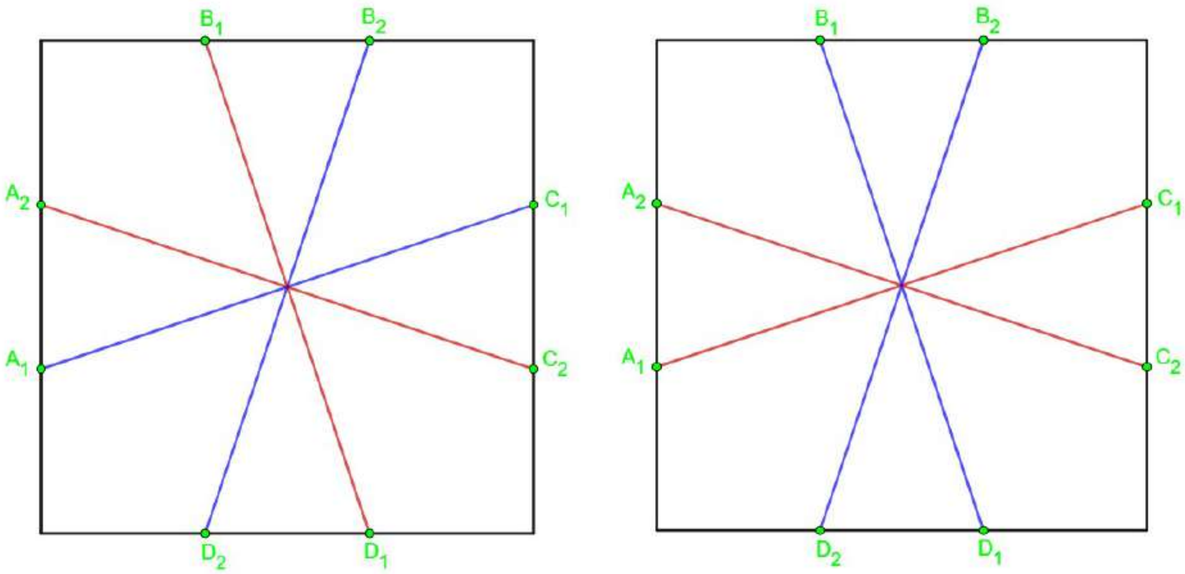
Fonte: elaborado pelos autores

Podemos observar que o jogador Azul deve evitar escolher as retas apresentadas nesse momento final do jogo, pois ambas proporcionam a vitória para o jogador Vermelho.

Observamos a primeira análise para o cenário atual. Vejamos agora a segunda análise possível para a situação atual.

Se o jogador Azul construir a reta A_1C_1 ou a reta B_1D_1, seu adversário é obrigado a escolher a reta B_1D_1 ou a reta A_1C_1, respectivamente. Em ambos os contextos o resultado para a partida será o empate, pois ambos os jogadores conseguem a mesma pontuação. Essa conclusão pode ser verificada na Figura 3.10.

Figura 3.10: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

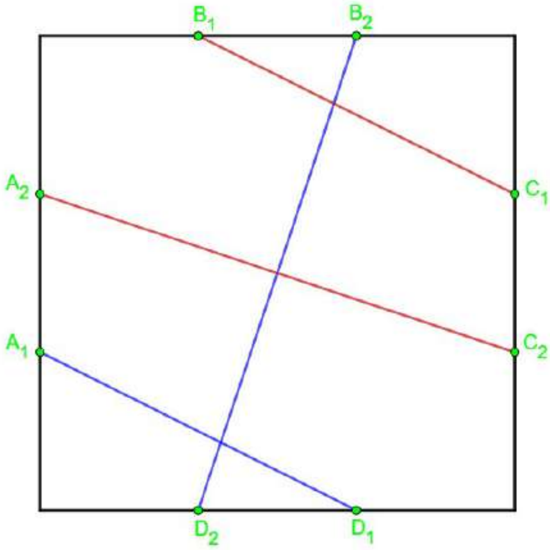
Assim, podemos notar que a escolha do jogador Azul por qualquer uma das duas retas mencionadas acima resulta no resultado de empate entre os jogadores.

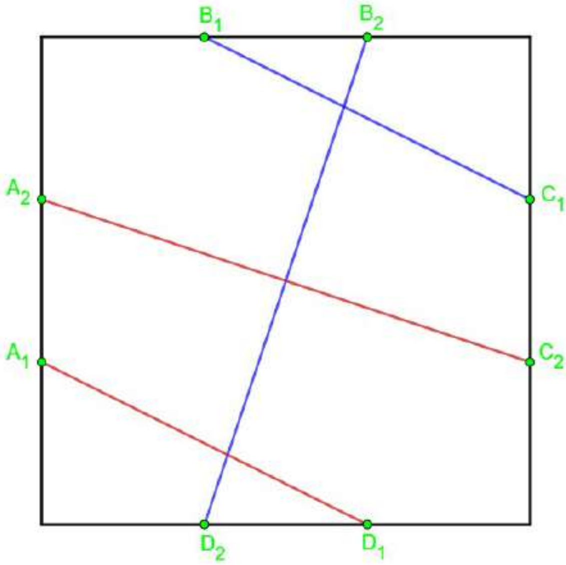
Acabamos de observar a segunda possibilidade de análise para o cenário atual. Vejamos agora a terceira e última análise possível.

Se o jogador Azul optar por construir a reta A_1D_1 ou a reta B_1C_1, resta ao seu adversário escolher a reta B_1C_1 ou a reta A_1D_1, respectivamente. Em ambas as situações, o jogador Azul consegue uma interseção a mais do que o seu oponente, pois as retas vermelhas formadas não realizam interseções entre si.

Desse modo, a partida termina com a vitória para o jogador Azul, pois esse jogador obteve uma pontuação maior do que o jogador Vermelho. Isso significa que as duas retas mencionadas são escolhas adequadas para o jogador Azul, pois ambas lhe concedem a vitória. Esse cenário está exemplificado na Figura 3.11.

Figura 3.11: Quadrado de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: jogador Azul vence





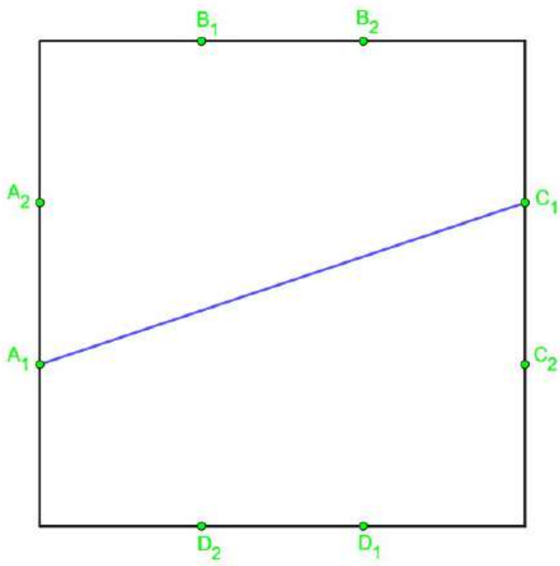
Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de visualizar as duas possíveis análises que podem ser feitas próximas do término do jogo para o *Caso (1,1,1,1) - derrota, empate ou vitória*. Observamos que esse caso concede ao jogador Azul os três resultados possíveis para uma partida.

3.1.2 O Caso 2,2

O jogador Azul, ao seguir a estratégia ideal adotada, pode escolher como primeira jogada a reta A_1C_1, pois essa construção separa os 6 pontos restantes de forma igual nos dois semi-planos formados. Essa situação é mostrada na Figura 3.12.

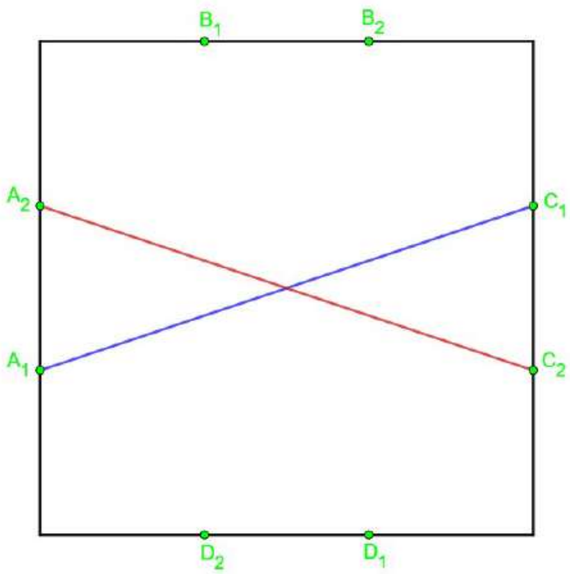
Figura 3.12: Quadrado de 2 pontos, caso 2,2: 6 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

A rodada seguinte pertence ao jogador Vermelho. Esse pode criar a reta A_2C_2, pois essa reta divide igualmente os pontos finais nos lados opostos criados, como visto na Figura 3.13.

Figura 3.13: Quadrado de 2 pontos, caso 2,2: 4 pontos distribuídos igualmente

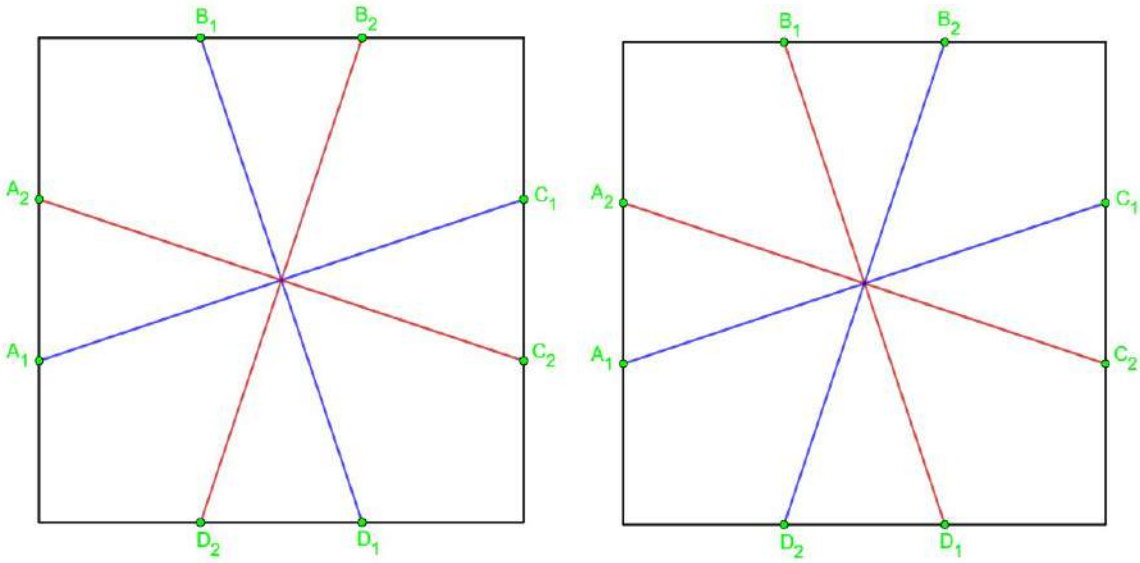


Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a configuração atual do jogo permite ao jogador Azul prever o resultado final para a disputa. Note também que a forma como está a partida é semelhante ao *Caso 2,2 - empate* visto na tela Triângulo de 4 pontos. Isso significa que o resultado para a disputa é o empate, independemente da opção de jogada. Vejamos:

Se a reta escolhida pelo jogador Azul for a reta B_1D_1, seu adversário deve criar a reta B_2D_2. Caso a opção seja a reta B_2D_2, resta ao jogador Vermelho criar a reta B_1D_1. Nas duas situações, a partida possui como resultado o empate. A Figura 3.14 mostra ambas as situações.

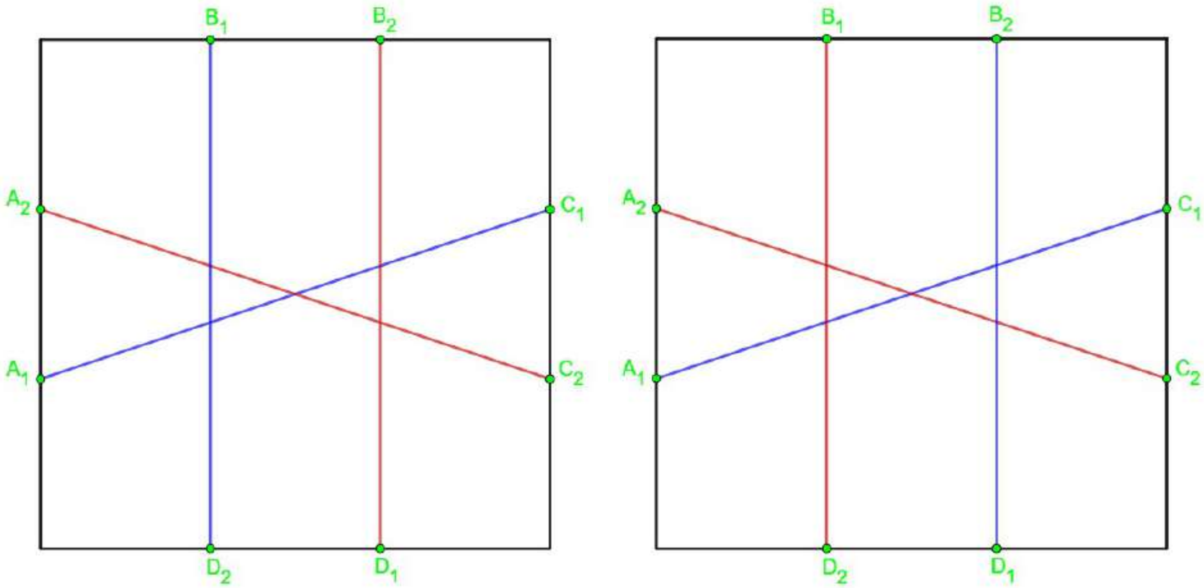
Figura 3.14: Quadrado de 2 pontos, caso 2,2: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, caso a escolha do jogador Azul seja a reta B_1D_2 ou a reta B_2D_1, resta ao jogador Vermelho construir a reta B_2D_1 ou a reta B_1D_2, respectivamente. Em ambas as situações, a partida termina empatada, como se verifica na Figura 3.15.

Figura 3.15: Quadrado de 2 pontos, caso 2,2: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Podemos notar que o *Caso 2,2* trabalhado acima possui como resultado para a partida somente o empate, assim como foi apresentado anteriormente para partidas jogadas na tela inicial Triângulo de 4 pontos.

Acabamos de observar os dois possíveis casos de configurações finais para uma partida jogada no Quadrado de 2 pontos. Cada caso permite ao jogador Azul a chance de prever qual será o resultado final para a partida.

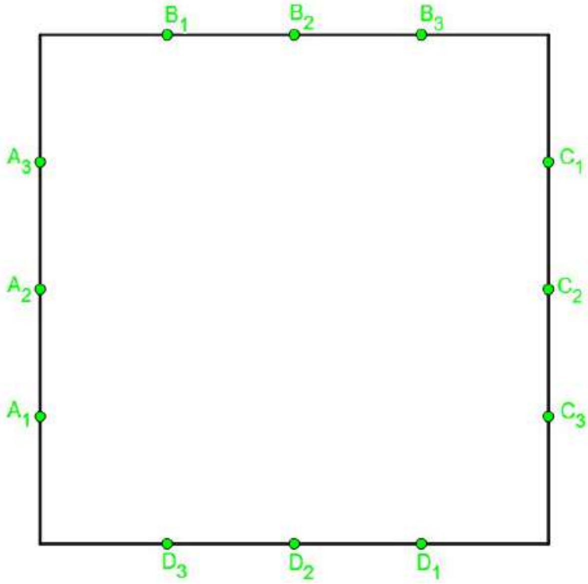
Em ambas as situações descritas, ao se adotar a estratégia ideal trabalhada, é garantido ao jogador Azul a chance de empate ou vitória, sendo que a conclusão final decorre das escolhas feitas pelo jogador.

Além disso, foi possível observar também que os resultados para o *Caso 2,2 - empate* no polígono base Quadrado de 2 pontos são os mesmos quando se trabalha esse caso na tela inicial Triângulo de 4 pontos. Já o *Caso 1,1,1,1* é um caso que aparece pela primeira vez na tela Quadrado de 2 pontos.

3.2 Quadrado de 3 pontos

Considere a tela inicial do jogo escolhida como sendo o Quadrado contendo 3 pontos em cada um dos seus lados, como mostra a Figura 3.16.

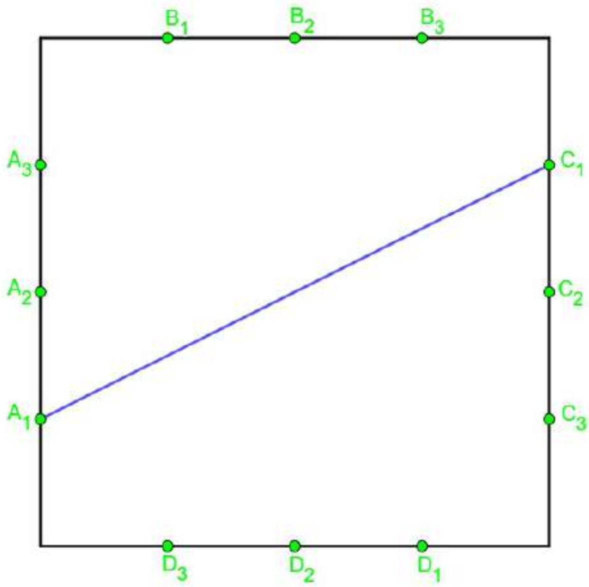
Figura 3.16: Tela inicial Quadrado de 3 pontos



Fonte: elaborado pelos autores

Vamos assumir que o jogador Azul fará uso da estratégia ideal, enquanto o seu oponente irá realizar sempre jogadas boas. Admitindo essa premissa, uma possibilidade de primeira escolha de construção realizada pelo jogador Azul pode ser a reta A_1C_1, pois os 10 pontos restantes são distribuídos igualmente nos dois semi-planos formados. A Figura 3.17 mostra essa situação.

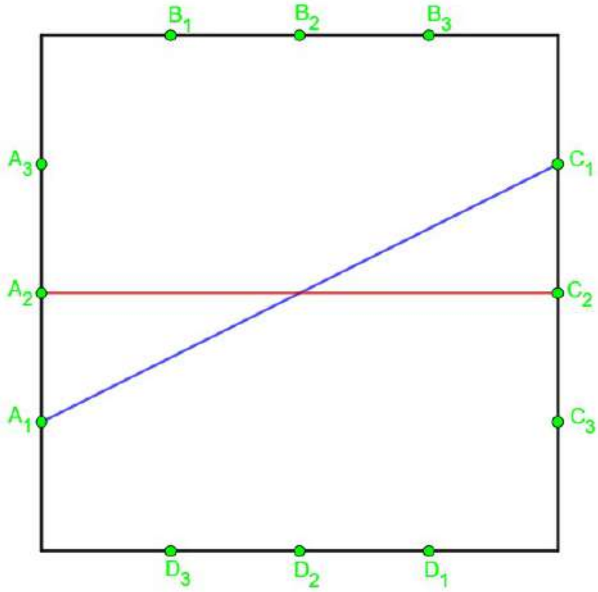
Figura 3.17: Quadrado de 3 pontos: 10 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

Na rodada seguinte, o jogador Vermelho pode optar por criar a reta A_2C_2, uma vez que essa reta separa os 8 pontos restantes de forma igual em ambos os semi-planos formados. A Figura 3.18 mostra esse cenário.

Figura 3.18: Quadrado de 3 pontos: 8 pontos distribuídos igualmente



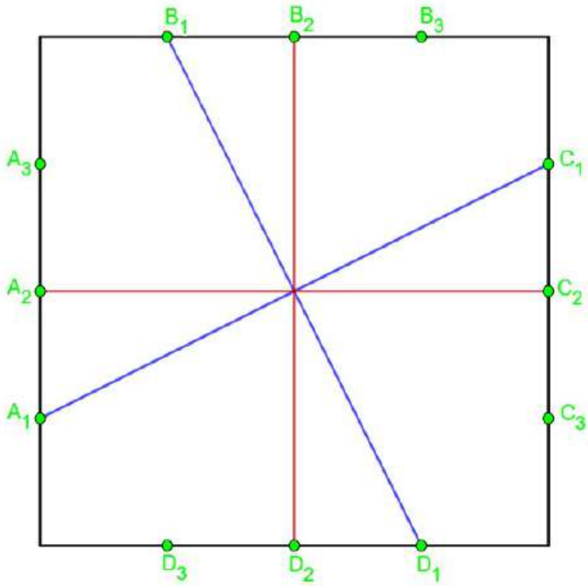
Fonte: elaborado pelos autores

Ambos os jogadores irão continuar a criar retas de acordo às estratégias estabelecidas anteriormente. Nesse sentido, após duas rodadas (uma para cada jogador), existem, basicamente, quatro possíveis configurações finais quando restam 4 pontos em jogo, ou seja, as diferentes combinações de retas construídas ao longo das duas rodadas implicam em quatro configurações finais diferentes. Vejamos as possibilidades.

Possibilidade 1: Caso 1,1,1,1 - empate

A primeira possibilidade de situação final é apresentada na Figura 3.19.

Figura 3.19: Quadrado de 3 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente

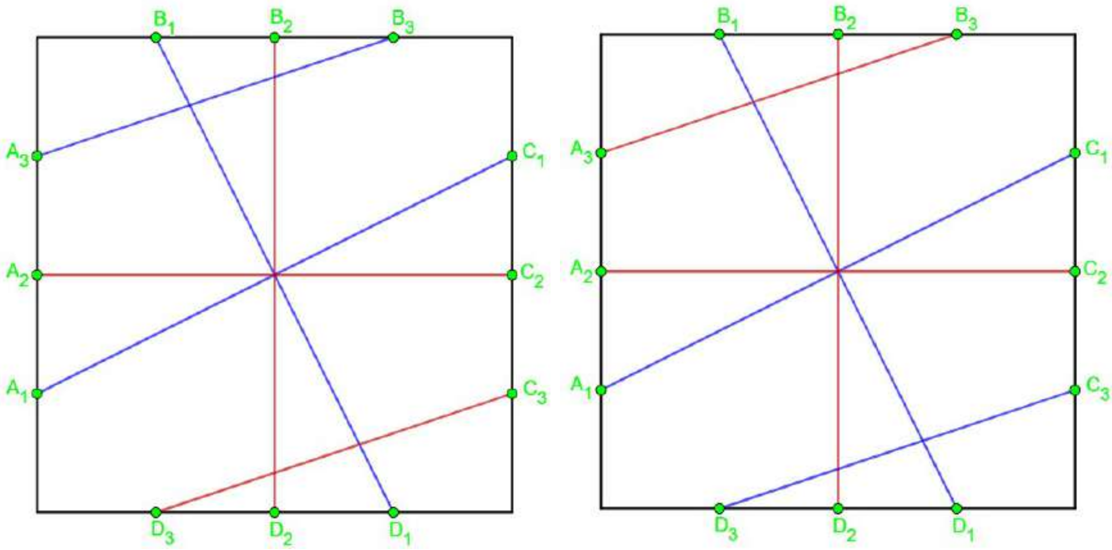


Fonte: elaborado pelos autores

Note que o cenário acima é semelhante ao *Caso 1,1,1,1 - empate* visto no Quadrado de 2 pontos. Assim, ao analisarmos as possíveis jogadas finais para o jogador Azul e o Vermelho, concluiremos que os resultados encontrados são iguais aos obtidos no caso já abordado. Vejamos:

A Figura 3.20 mostra o resultado da partida caso o jogador Azul opte pela reta A_3B_3 ou a reta C_3D_3, enquanto que seu adversário é obrigado a escolher a reta C_3D_3 ou a reta A_3B_3, respectivamente. Nas duas situações o resultado final é o empate.

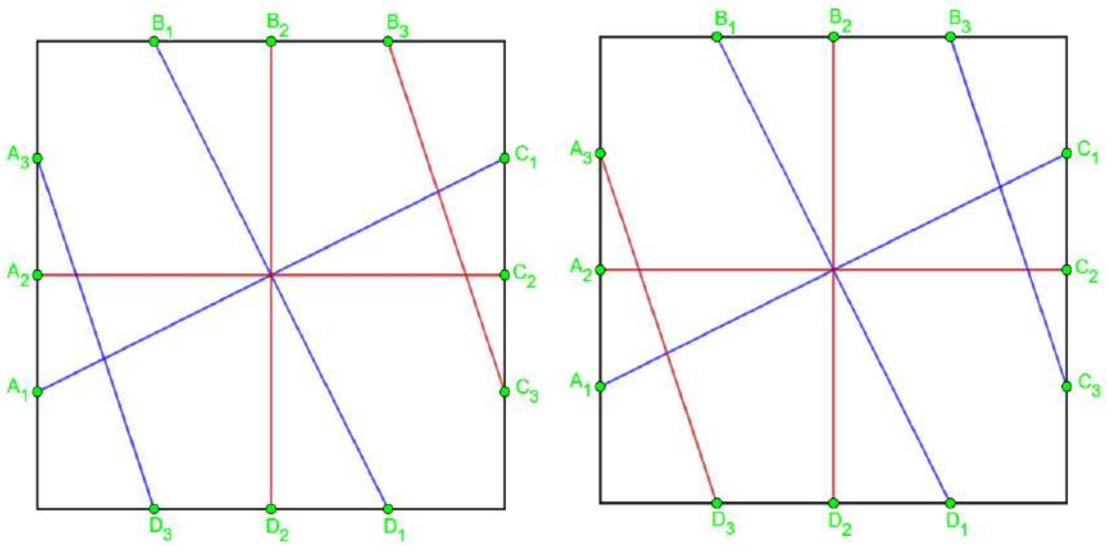
Figura 3.20: Quadrado de 3 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

De modo análogo, se o jogador Azul criar a reta A_3D_3 ou a reta B_3C_3 o jogador Vermelho deve criar a reta B_3C_3 ou a reta A_3D_3, respectivamente. Novamente, em ambas as situações a conclusão para a disputa é o empate entre os jogadores, como visto na Figura 3.21.

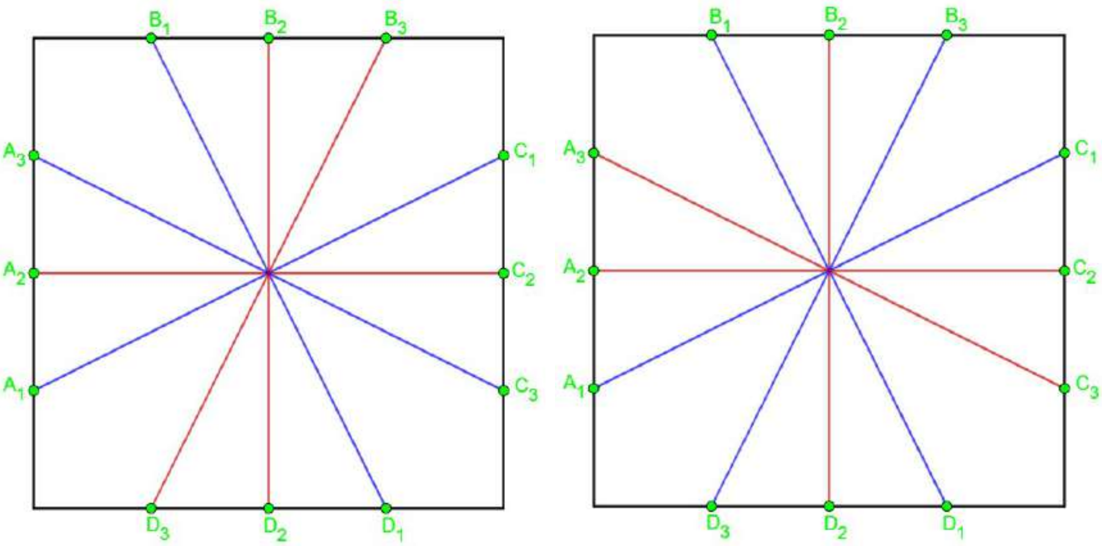
Figura 3.21: Quadrado de 3 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Por fim, caso o jogador Azul escolha construir a reta A_3C_3 ou a reta B_3D_3, resta ao jogador Vermelho escolher a reta B_3D_3 ou a reta A_3C_3, respectivamente. Ambas as escolhas implicam no empate como resultado para a partida. A Figura 3.22 apresenta essa situação.

Figura 3.22: Quadrado de 3 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 3° resultado de empate



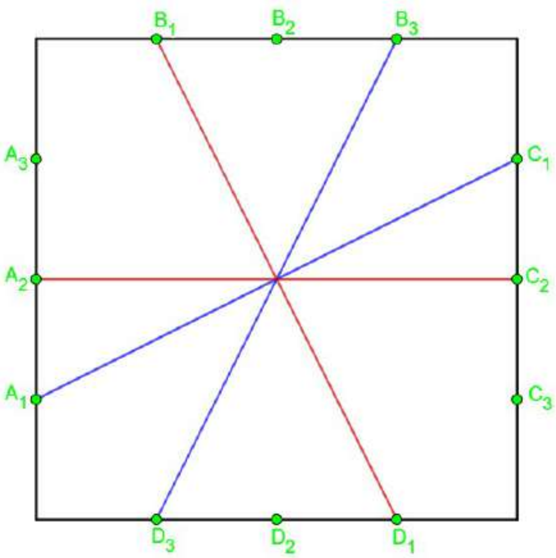
Fonte: elaborado pelos autores

Anteriormente, dissemos que existem quatro possibilidades de situações finais para o Quadrado de 3 pontos. A primeira possibilidade acabou de ser apresentada. Vejamos a próxima.

Possibilidade 2: Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou derrota

A segunda possibilidade de cenário final quando restam 4 pontos é vista na Figura 3.23.

Figura 3.23: Quadrado de 3 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: 4 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

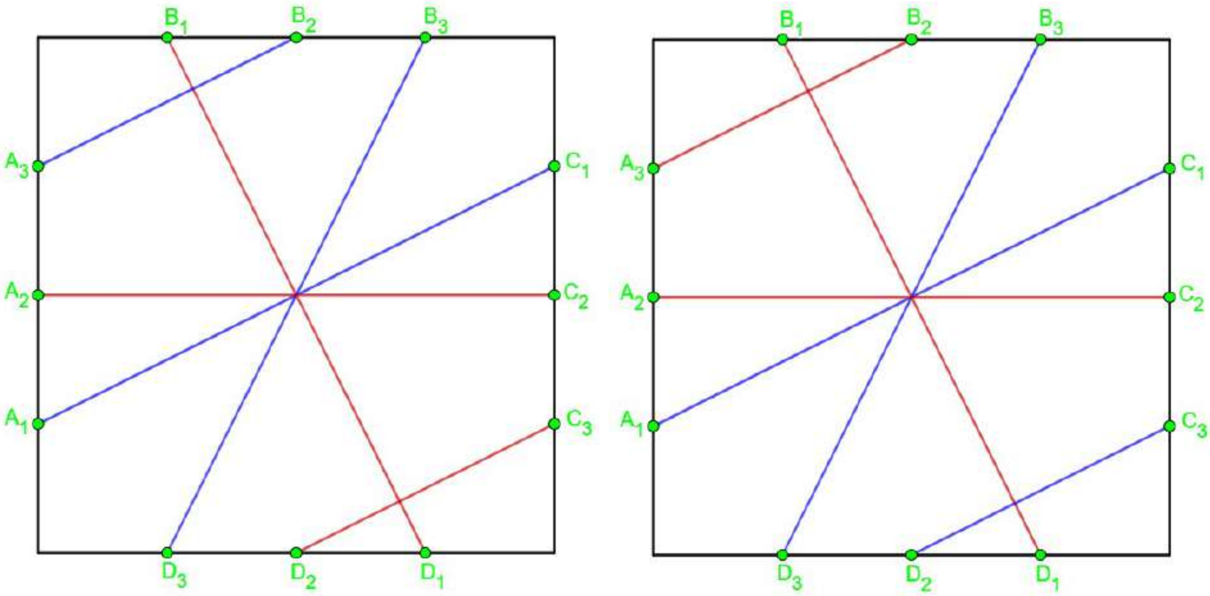
Perceba que a situação apresentada é semelhante a um dos casos mostrados para o Quadrado de 2 pontos, em particular, ao *Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória.* Nesse sentido, ao analisarmos os possíveis resultados finais para essa configuração, encontraremos os mesmos resultados já mencionados anteriormente. Vejamos.

Se o jogador Azul optar em construir a reta A_3B_2 ou a reta C_3D_2, resta ao seu adversário escolher a reta C_3D_2 ou a reta A_3B_2, respectivamente. Nas duas situações, o vencedor da partida será o jogador Vermelho.

Esse resultado ocorre devido ao fato da reta azul criada em qualquer um das situações acima não realiza intersecções com outra retas da mesma cor, ao passo que a reta vermelha realiza cruzamentos com outras retas vermelhas, deixando assim o jogador Vermelho com uma intersecção a mais que o jogador Azul.

Veja na Figura 3.24 disponibilizada a seguir a exemeplicação da configuração da partida mencionada acima.

Figura 3.24: Quadrado de 3 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: jogador Vermelho vence

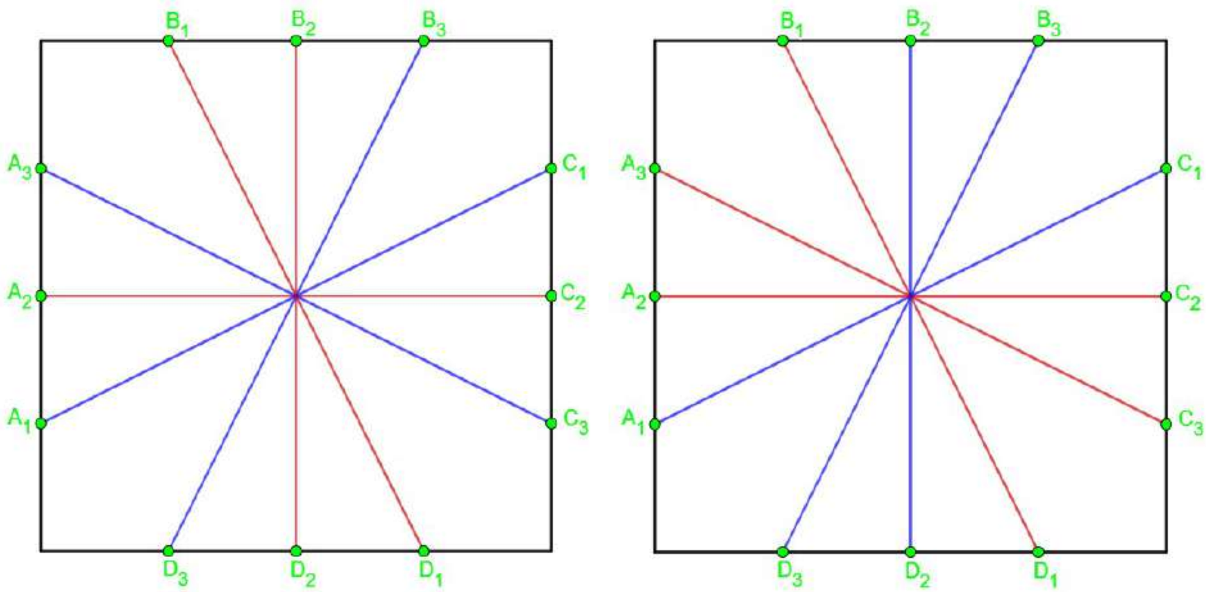


Fonte: elaborado pelos autores

Se o jogador Azul escolher construir a reta A_3C_3 ou a reta B_2D_2, resta para o jogador Vermelho escolher criar a reta B_2D_2 ou a reta A_3C_3, respectivamente. Nas duas situações mencionadas acima o resultado final para a partida disputada será o empate entre os dois jogadores.

Esse resultado acontece devido ao fato de que ambos os jogadores conseguem a mesma quantidade de intersecções entre as retas de suas respectivas cores. A Figura 3.25 apresentada a seguir exemplifica o cenário descrito acima.

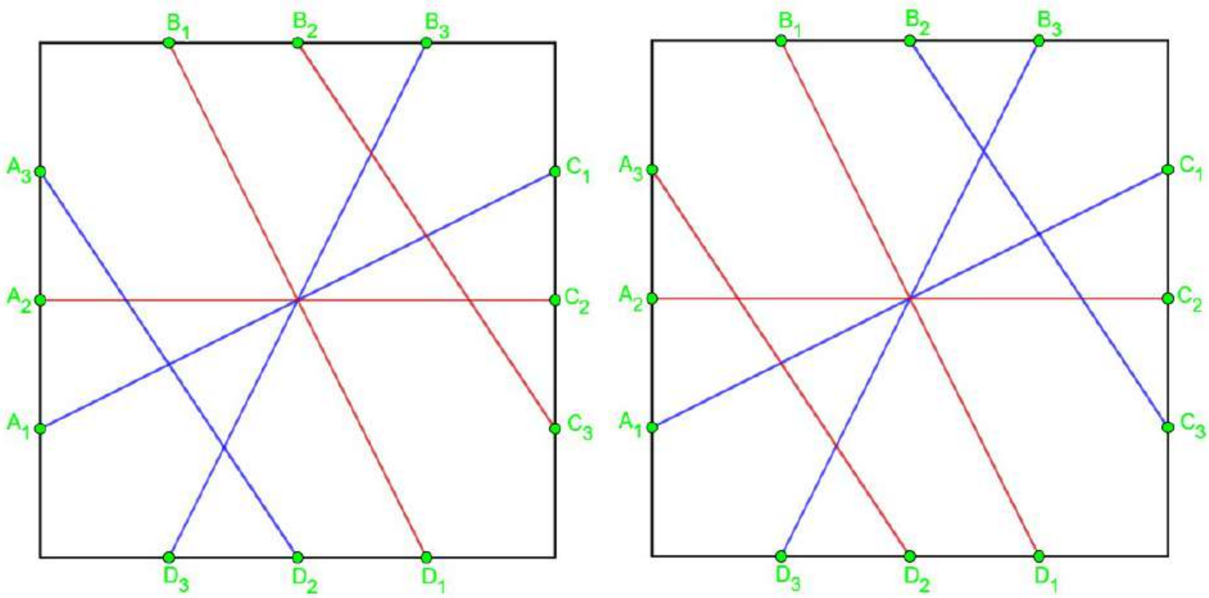
Figura 3.25: Quadrado de 3 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Caso a escolha do jogador Azul ocorra pela reta A_3D_2 ou pela reta B_2C_3, seu adversário é obrigado a construir a reta B_2C ou a reta A_3D_2, respectivamente. Nas duas situações a partida terá como vencedor o jogador Azul, pois ele consegue uma intersecção a mais do que o seu oponente. A Figura 3.26 mostra essa situação.

Figura 3.26: Quadrado de 3 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: jogador Azul vence



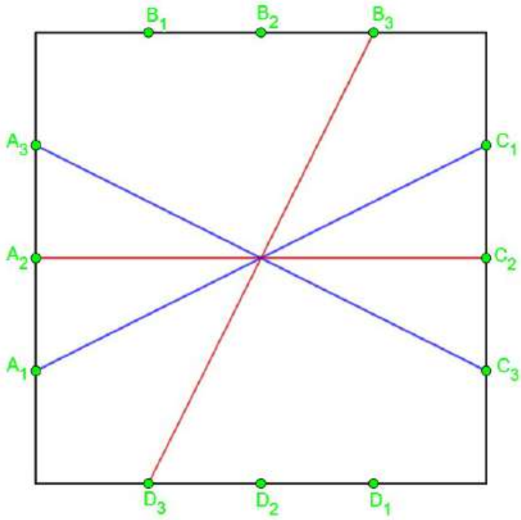
Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de observar a segunda possibilidade de configuração final para a tela Quadrado de 3 pontos. Vejamos a próxima.

Possibilidade 3: Caso 2,2 - empate

A Figura 3.27 apresenta a terceira possibilidade.

Figura 3.27: Quadrado de 3 pontos, caso 2,2 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente

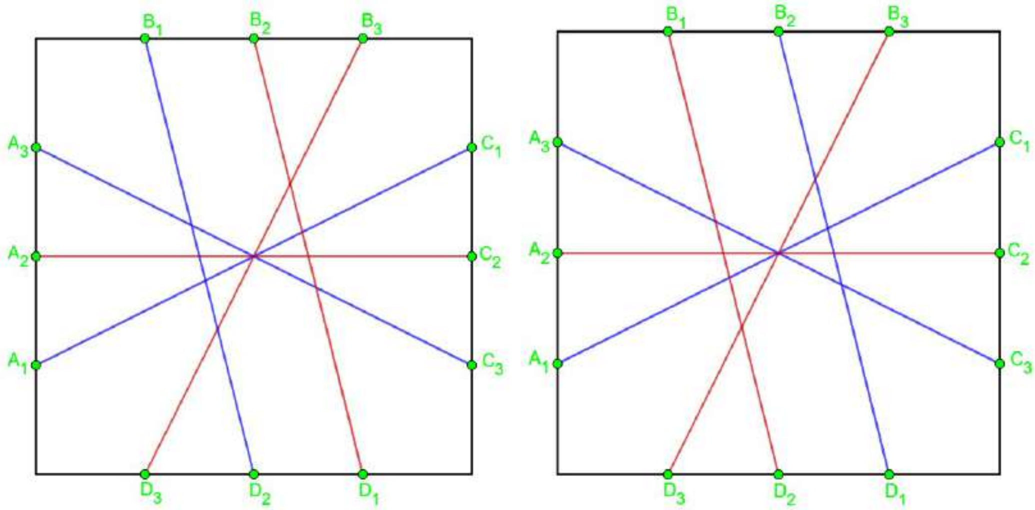


Fonte: elaborado pelos autores

Note que a situação acima é semelhante ao *Caso 2,2 - empate* visto anteriormente na tela Triângulo de 4 pontos. Isso significa que a configuração atual possui os mesmos resultados mostrados para esse caso quando trabalhado na tela mencionada. Vejamos as análises.

Se o jogador Azul criar a reta B_1D_2 ou a reta B_2D_1 o jogador Vermelho deve criar a reta B_2D_1 ou a reta B_1D_2, respectivamente. Nas duas situações a partida acaba empatada, pois os jogadores conseguem o mesmo número de cruzamentos entre retas, como visto na Figura 3.28.

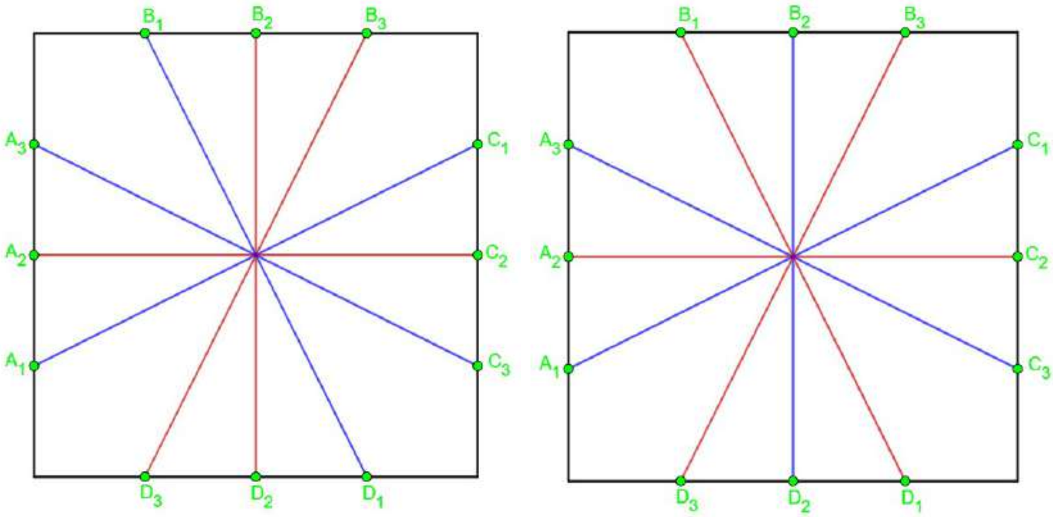
Figura 3.28: Quadrado de 3 pontos, caso 2,2 - empate: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, se o jogador Azul criar a reta B_1D_1 ou a reta B_2D_2, o jogador Vermelho é obrigado a construir a reta B_2D_2 ou a reta B_1D_1, respectivamente. Nas duas ocasiões, a partida possui como resultado final o empate, pois ambos os jogadores conseguem a mesma quantidade de intersecções entre suas retas. Essa situação é exemplificada na Figura 3.29.

Figura 3.29: Quadrado de 3 pontos, caso 2,2 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos a apresentação da terceira possibilidade de configuração final para a tela Quadrado de 3 pontos. Vejamos agora a quarta e última situação possível.

Possibilidade 4: Caso 2,2 - especial

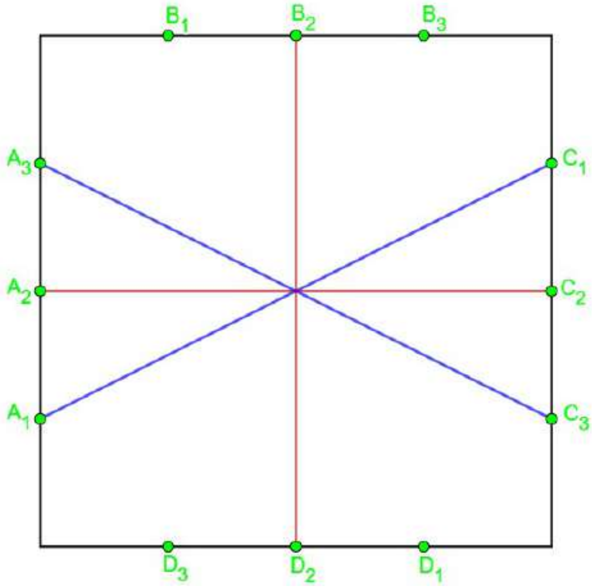
Observamos anteriormente na tela Triângulo de 8 pontos que esse caso ocorre quando existem retas azuis e/ou vermelhas entre os dois pares de pontos finais. Sabemos também que a distribuição de retas de uma mesma cor dentro desse espaço é a ideia relevante a ser analisada nesse caso. Além disso, à medida que aumentamos o número de pontos ou o número de lados da figura inicial, mais retas podem existir entre os dois pares de pontos restantes.

Assim, as análises que podemos fazer para esse caso na tela Quadrado de 3 pontos são semelhantes às considerações realizadas anteriormente na tela Triângulo de 8 pontos. Nessa perspectiva, vejamos a seguir exemplificações referentes a cada uma das possíveis situações que podemos encontrar para esse caso.

É importante destacar que a tela base considerada é o Quadrado de 3 pontos, o que significa que o número máximo de retas que podemos encontrar dentro dos dois pares de pontos finais é de apenas uma reta. Vejamos a seguir as duas situações possíveis para esse caso.

A primeira situação a ser exemplificada é quando existe uma reta vermelha dentro do espaço considerado. A Figura 3.30 apresenta esse cenário.

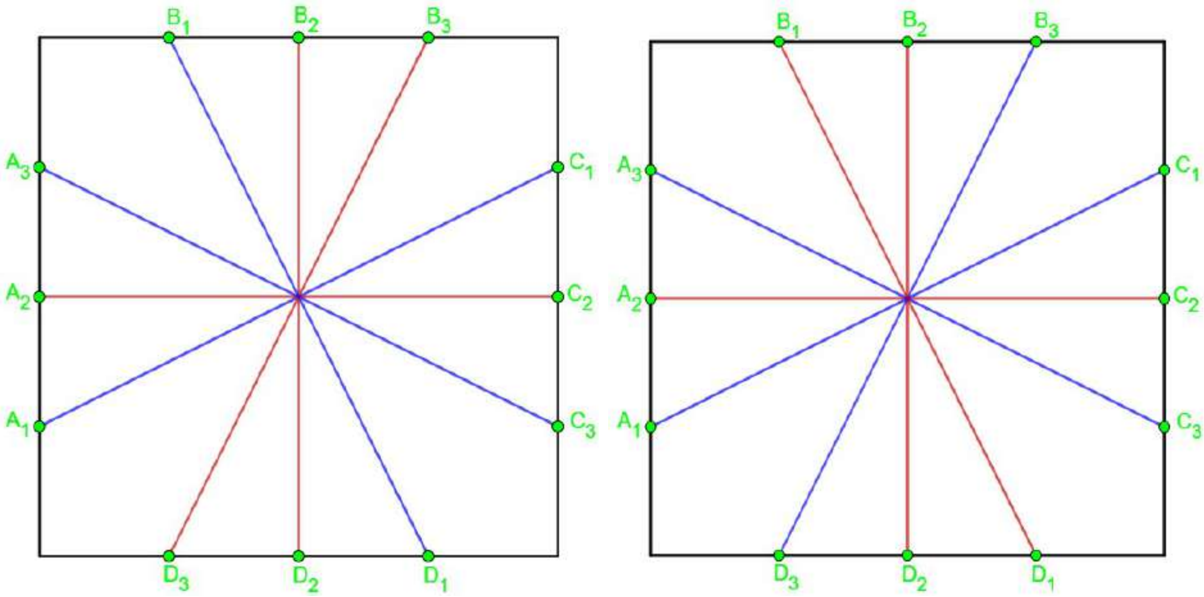
Figura 3.30: Quadrado de 3 pontos, caso 2,2 - especial: 1 reta vermelha e 0 retas azuis



Fonte: elaborado pelos autores

Caso a opção do jogador Azul seja pela reta B_1D_1 ou pela reta B_3D_3, seu adversário é obrigado a escolher a reta B_3D_3 ou a reta B_1D_1, respectivamente. Em ambas as configurações o resultado para a partida é o empate, pois ambos os jogadores conseguem a mesma quantidade de intersecções entre as suas respectivas retas. A Figura 3.31 apresenta esse cenário.

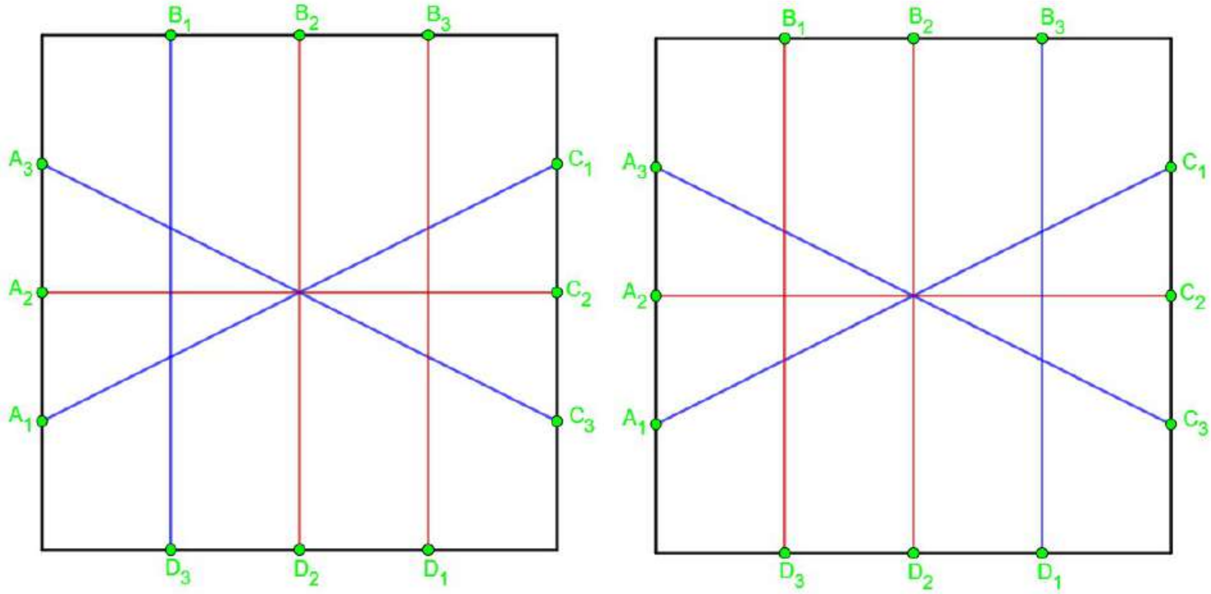
Figura 3.31: Quadrado de 3 pontos, caso 2,2 - especial: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que se o jogador Azul criar a reta B_1D_3 ou a reta B_3D_1, seu oponente é obrigado a escolher a reta B_3D_1 ou a reta B_1D_3, respectivamente. Nas duas possibilidades o resultado para a partida é a vitória do jogador Azul, pois ele consegue uma intersecção a mais do que o seu adverário, como mostra a Figura 3.32.

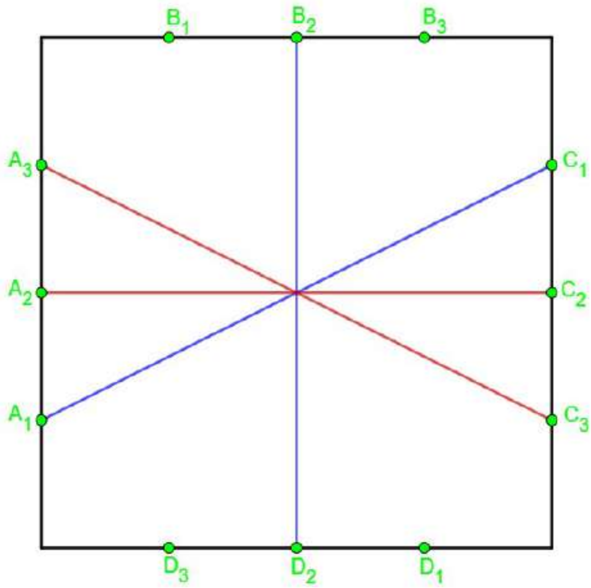
Figura 3.32: Quadrado de 3 pontos, caso 2,2 - especial: jogador Azul vence



Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos a exemplificação do *Caso 2,2 - especial* quando existe uma reta da cor vermelha entre os dois pares de pontos finais. Vejamos agora a exemplificação para esse caso quando existe uma reta de cor azul dentro do espaço considerado. A Figura 3.33 apresenta essa situação.

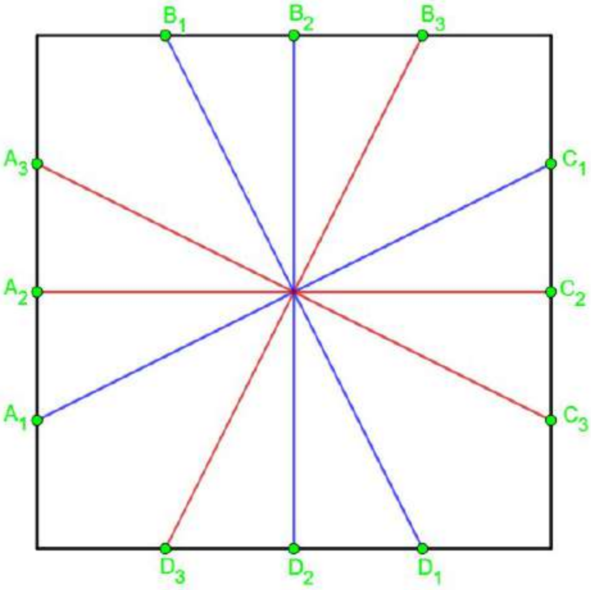
Figura 3.33: Quadrado de 3 pontos, caso 2,2 - especial: 1 reta azul e 0 retas vermelhas



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que se o jogador Azul construir a reta B_1D_1 ou a reta B_3D_3, seu adversário é obrigado a criar a reta B_3D_3 ou a reta B_1D_1, respectivamente. Nas duas situações a partida possui como resultado final o empate, como se observa na Figura 3.34.

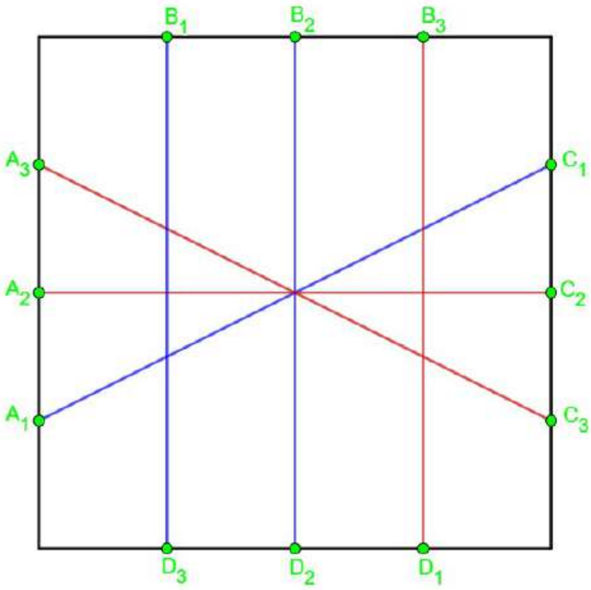
Figura 3.34: Quadrado de 3 pontos, caso 2,2 - especial: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se a escolha do jogador Azul for pela reta B_1D_3 ou pela reta B_3D_1, resta ao seu oponente construir a reta B_3D_1 ou a reta B_1D_3, respectivamente. Em ambas situações o vencedor da partida será o jogador Vermelho, pois esse consegue uma intersecção a mais do que o jogador Azul. A Figura 3.35 exemplifica esse cenário.

Figura 3.35: Quadrado de 3 pontos, caso 2,2 - especial: jogador Vermelho vence



Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de apresentar as duas situações possíveis para o *Caso 2,2 - especial* no Quadrado de 3 pontos. Foi possível observar que as análises realizadas para cada distrubuição são as mesmas àquelas apresentadas anteriormente durante a tela Triângulo de 8 pontos. Nesse sentido, quando existem mais retas de uma mesma cor dentro do espaço considerado para o *Caso 2,2 - especial* o jogador correspondente a essa cor não possui a chance de obter a vitória. E caso as quantidades de retas sejam iguais a partida termina empatada.

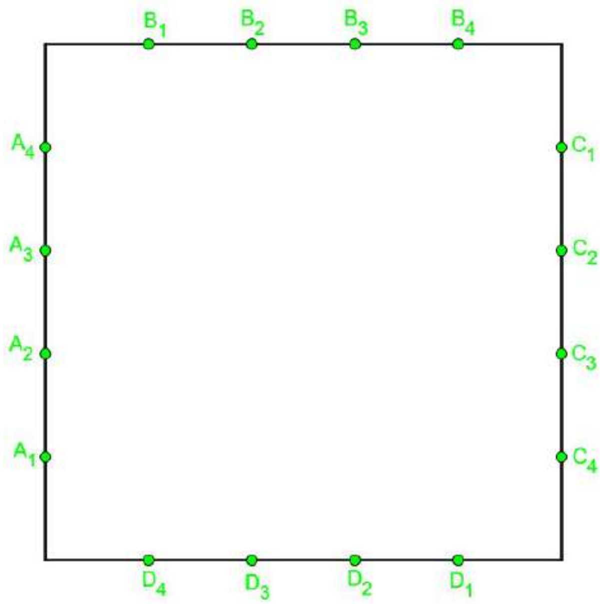
É válido destacar que não apresentamos um exemplo em que o número de retas azuis e vermelhas dentro dos dois pares de pontos finais são iguais, pois o *Caso 2,2 - especial* na tela Quadrado de 3 pontos comporta, no máximo, uma reta.

Assim, concluímos a observação das quatro possibilidades de configurações finais para as partidas disputadas no Quadrado de 3 pontos. Podemos observar que as situações apresentadas, bem como os resultados encontrados são semelhantes àqueles trabalhados anteriormente nas telas Triâgulo de 4 pontos, Triângulo de 8 pontos e Quadrado de 2 pontos.

3.3 Quadrado de 4 pontos

Considere a tela inicial escolhida para a partida como sendo o Quadrado contendo 4 pontos em cada um de seus lados, como se observa na Figura 3.36.

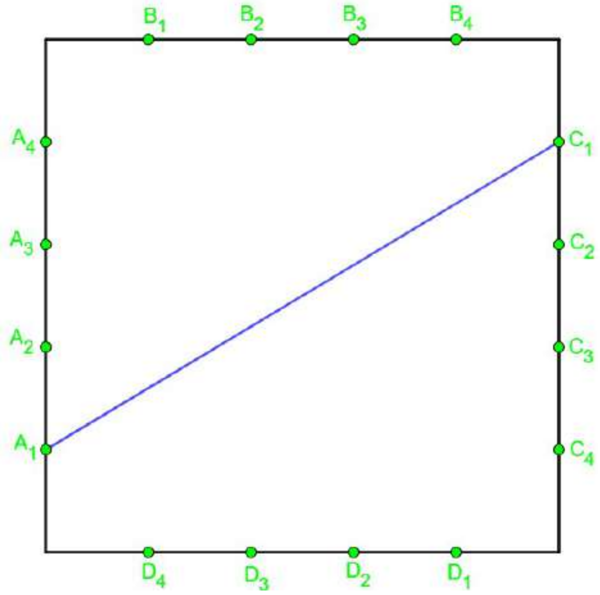
Figura 3.36: Tela inicial Quadrado de 4 pontos



Fonte: elaborado pelos autores

Vamos considerar que o jogador Azul fará uso da estratégia ideal, enquanto que o seu adversário fará sempre jogadas boas. Partindo dessa premissa, uma primeira construção a ser realizada pelo jogador Azul pode ser a reta A_1C_1, pois os 14 pontos restantes são distribuídos igualmente nos dois semi-planos formados. A Figura 3.37 exemplifica esse cenário.

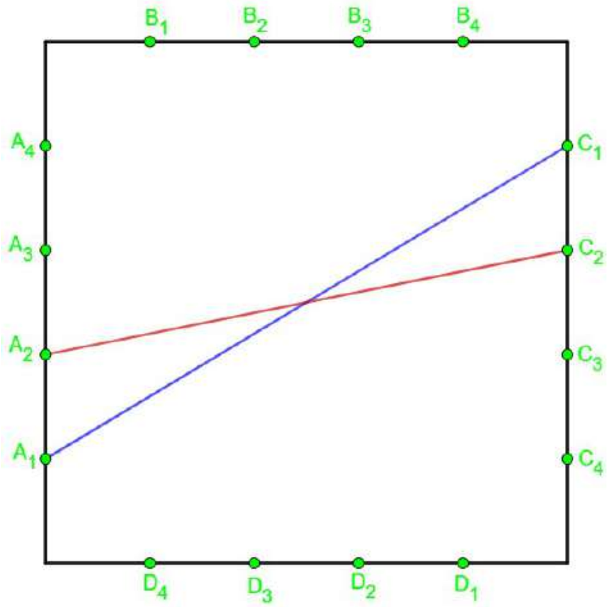
Figura 3.37: Quadrado de 4 pontos: 14 pontos distribuídos igualmente



Fonte: elaborado pelos autores

A rodada seguinte pertence ao jogador Vermelho. Esse, por sua vez, pode optar em construir a reta A_2C_2, já que esta reta separa os 12 pontos restantes de forma igual em ambos os semi-planos formados. A Figura 3.38 apresenta esse cenário.

Figura 3.38: Quadrado de 4 pontos: 12 pontos distribuídos igualmente



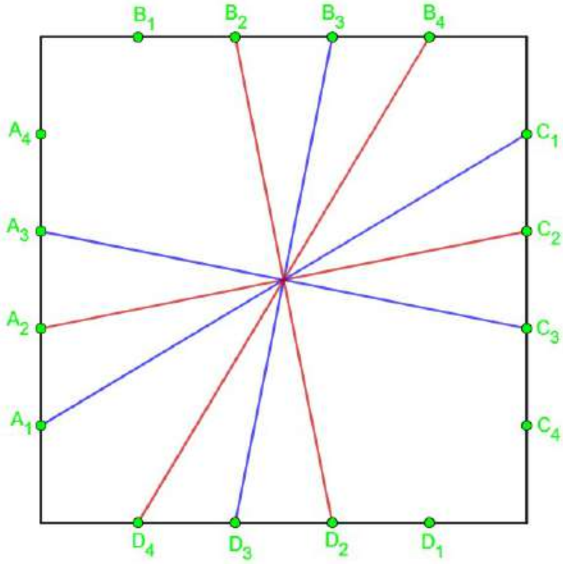
Fonte: elaborado pelos autores

Ambos os jogadores irão continuar a construir retas seguindo às estratégias estabelecidas anteriormente. Nesse contexto, após quatro rodadas (duas para cada jogador), existem, assim como na tela Quadrado de 3 pontos, quatro possíveis configurações finais para a partida quando restam 4 pontos. Isso significa que as diferentes combinações de retas construídas ao longo das quatro rodadas implicam em quatro situações finais diferentes. Vejamos as possibilidades.

Possibilidade 1: Caso 1,1,1,1 - empate

A primeira possibilidade de configuração final é apresentada na Figura 3.39.

Figura 3.39: Quadrado de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente

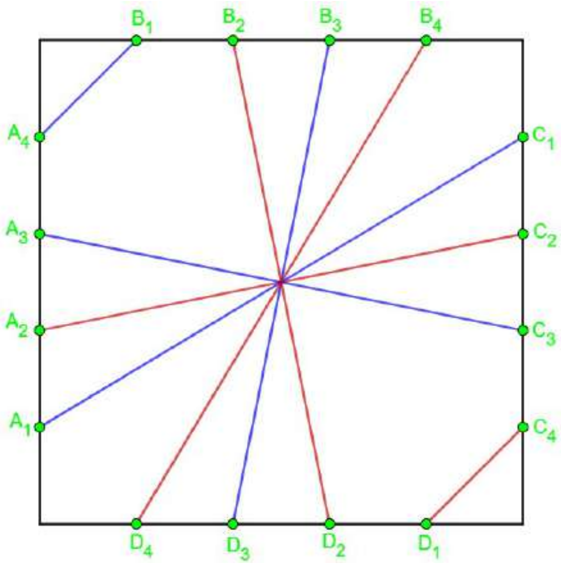


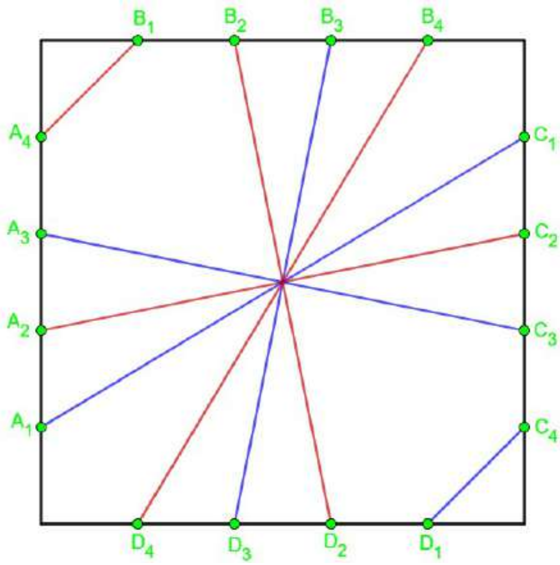
Fonte: elaborado pelos autores

Note que a configuração acima é semelhante ao *Caso 1,1,1,1 - empate* trabalhado anteriormente na tela Quadrado de 2 pontos. Isso significa que ao analisarmos as possibilidades de jogadas finais para o jogador Azul e, em seguida, para o Vermelho, concluíremos que os resultados encontrados são os mesmos obtidos para o caso mencionado anteriormente. Vejamos:

Se o jogador Azul escolher a reta A_4B_1 ou a reta C_4D_1, resta ao seu adversário criar a reta C_4D_1 ou a reta A_4B_1, respectivamente. Nos dois cenários a partida acaba empatada, pois ambos os jogadores conseguem o mesmo número de cruzamentps, como visto na Figura 3.40.

Figura 3.40: Quadrado de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 1° resultado de empate

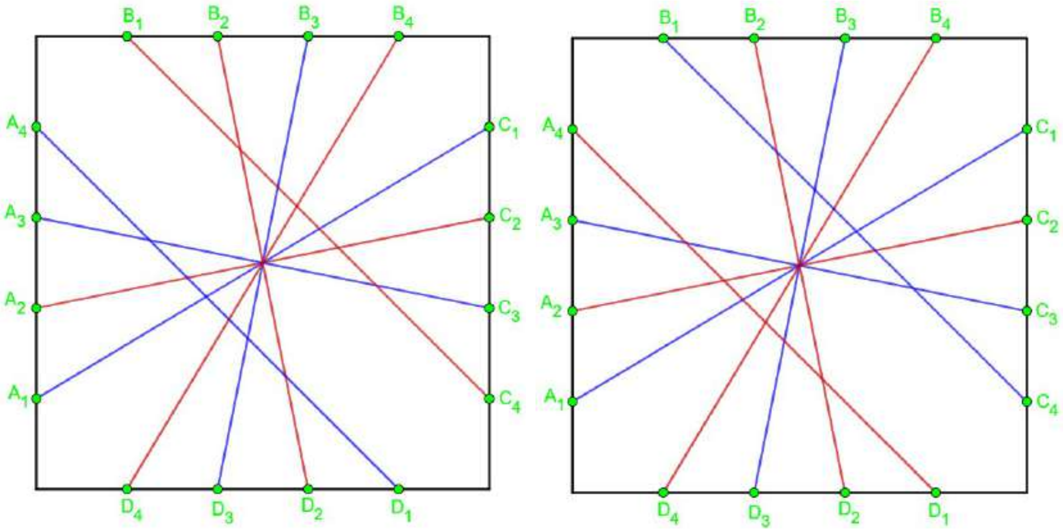




Fonte: elaborado pelos autores

Da mesma forma, caso a opção do jogador Azul seja pela reta A_4D_1 ou pela reta B_1C_4, seu adversário é obrigado a escolher a reta B_1C_4 ou a reta A_4D_1, respectivamente. Nas duas escolhas o resultado da partida é o empate, como se verifica na Figura 3.41.

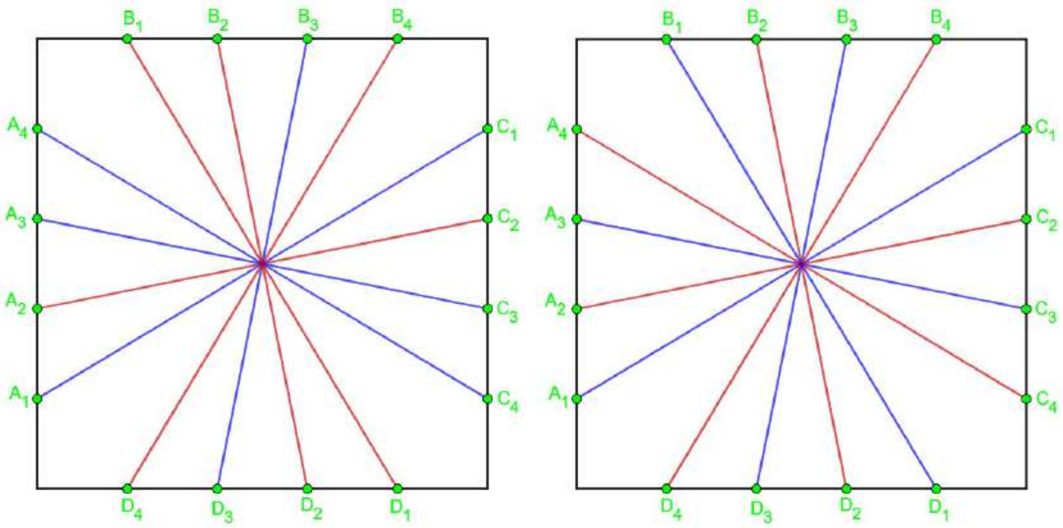
Figura 3.41: Quadrado de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Por fim, se o jogador Azul escolher a reta A_4C_4 ou a reta B_1D_1, resta ao seu oponente escolher a reta B_1D_1 ou a reta A_4C_4, respectivamente. Em ambas as situações o resultado para a partida é o empate, como se observa na Figura 3.42.

Figura 3.42: Quadrado de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - empate: 3° resultado de empate



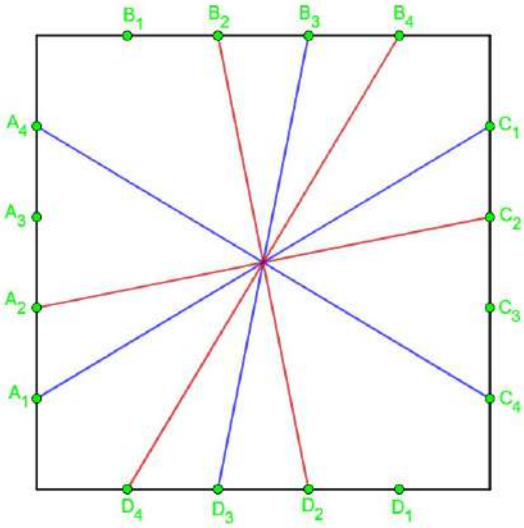
Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de observar a primeira das quatro possibilidades de situações finais para a tela Quadrado de 4 pontos. Vejamos a próxima.

Possibilidade 2: Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória

O segundo cenário para a partida quando restam 4 pontos é mostrado na Figura 3.43.

Figura 3.43: Quadrado de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: 4 pontos distribuídos igualmente

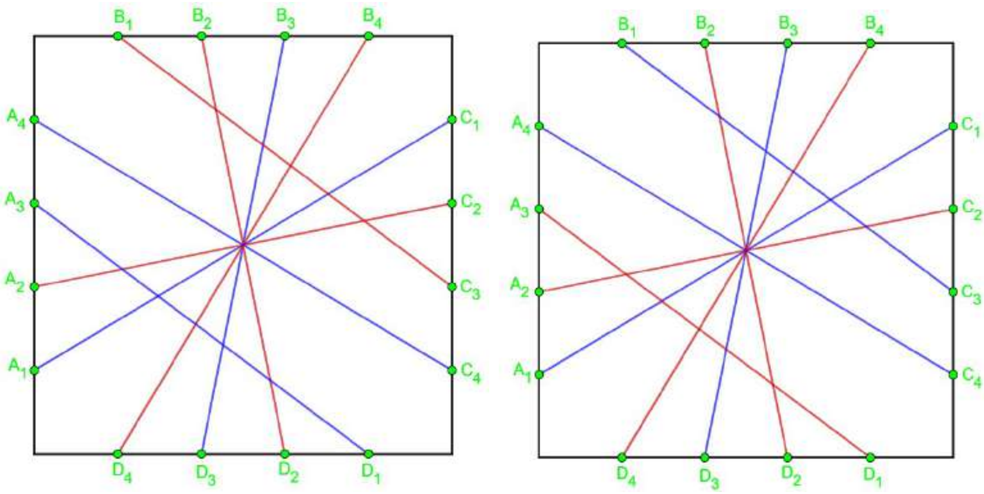


Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a situação apresentada é semelhante ao *Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória* trabalhado na tela Quadrado de 2 pontos. Isso significa que ao analisarmos a situação atual encontraremos os mesmos resultados já mencionados anteriormente. Vejamos:

Se a escolha do jogador Azul for a reta A_3D_1 ou a reta B_1C_3, seu adversário deve criar a reta B_1C_3 ou a reta A_3D_1, respectivamente. Nas duas ocasiões a partida possui como resultado a vitória do jogador Vermelho, uma vez que a reta azul criada realiza uma intersecção a menos do que a reta vermelha construída, como se observa na Figura 3.44.

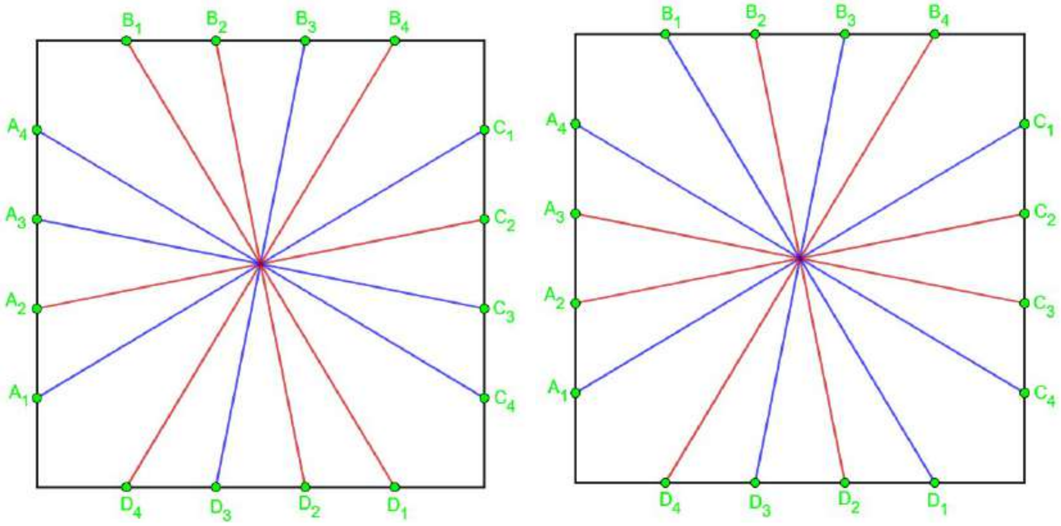
Figura 3.44: Quadrado de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: jogador Vermelho vence



Fonte: elaborado pelos autores

Caso o jogador Azul opte em construir a reta A_3C_3 ou a reta B_1D_1, resta ao seu adversário construir a reta B_1D_1 ou a reta A_3C_3, respectivamente. Nas duas situações a partida possui como resultado o empate, já que os dois jogadores conseguem a mesma quantidade de intersecções, como se verifica na Figura 3.45.

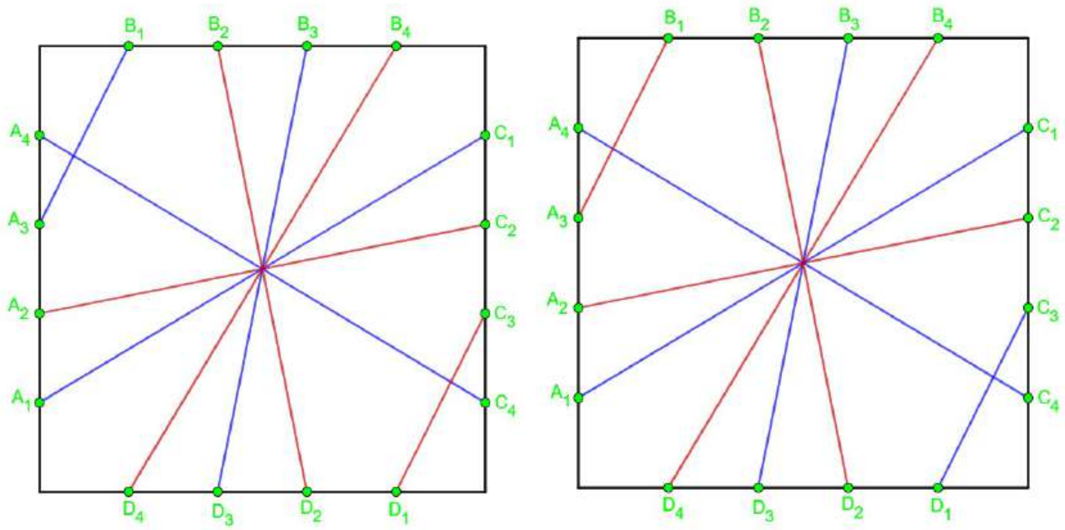
Figura 3.45: Quadrado de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Por fim, caso o jogador Azul opte em criar a reta A_3B_1 ou a reta C_3D_1, resta ao jogador Vermelho escolher a reta C_3D_1 ou a reta A_3B_1, respectivamente. Nas duas situações o vencedor é o jogador Azul, pois esse consegue uma intersecção a mais do que o seu oponente. A Figura 3.46 apresenta esse cenário.

Figura 3.46: Quadrado de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória: jogador Azul vence



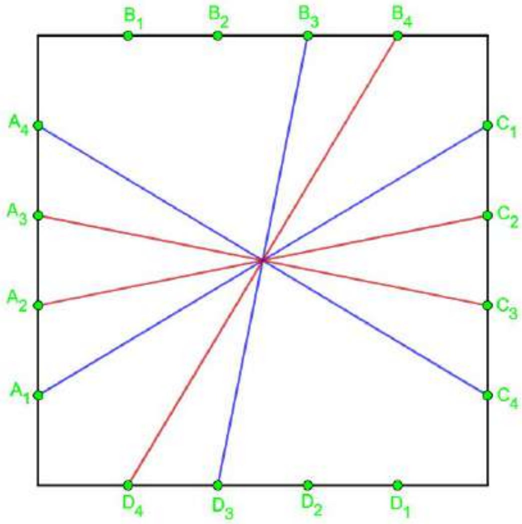
Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de apresentar a segunda possibilidade de situação final para a partida disputada na tela Quadrado de 4 pontos. Vejamos a próxima.

Possibilidade 3: Caso 2,2 - empate

A terceira possibilidade é exemplificada na Figura 3.47.

Figura 3.47: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - empate: 4 pontos distribuídos igualmente

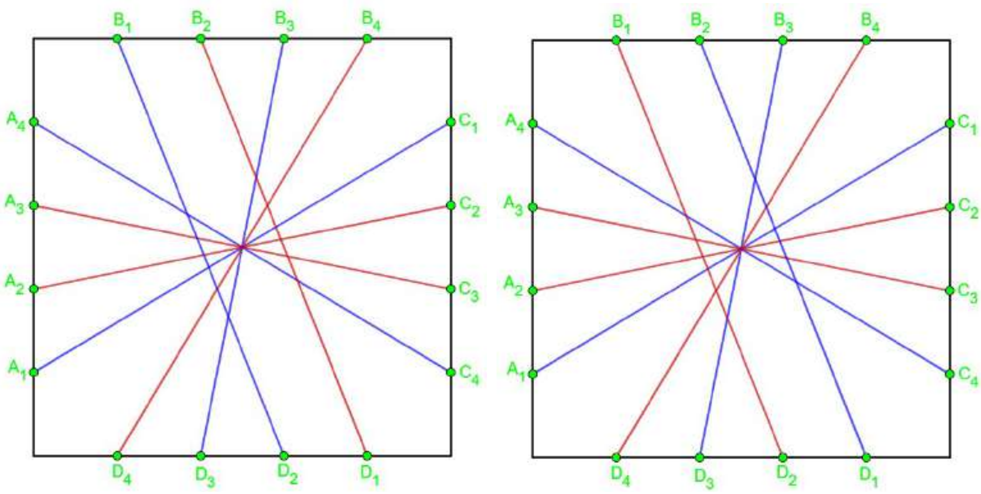


Fonte: elaborado pelos autores

Note que a situação apresentada é semelhante ao *Caso 2,2 - empate* trabalhado anteriormente na tela Triângulo de 4 pontos. Isso significa que os resultados já mostrados para esse caso na tela anterior são os mesmos que podemos encontrar para a situação atual. Vejamos:

Se o jogador Azul criar a reta B_1D_2 ou pela reta B_2D_1, seu adversário deve escolher a reta B_2D_1 ou a reta B_1D_2, respectivamente. Nas duas ocasiões o resultado é o empate, pois ambos os jogadores conseguem a mesma pontuação. A Figura 3.48 mostra esse cenário.

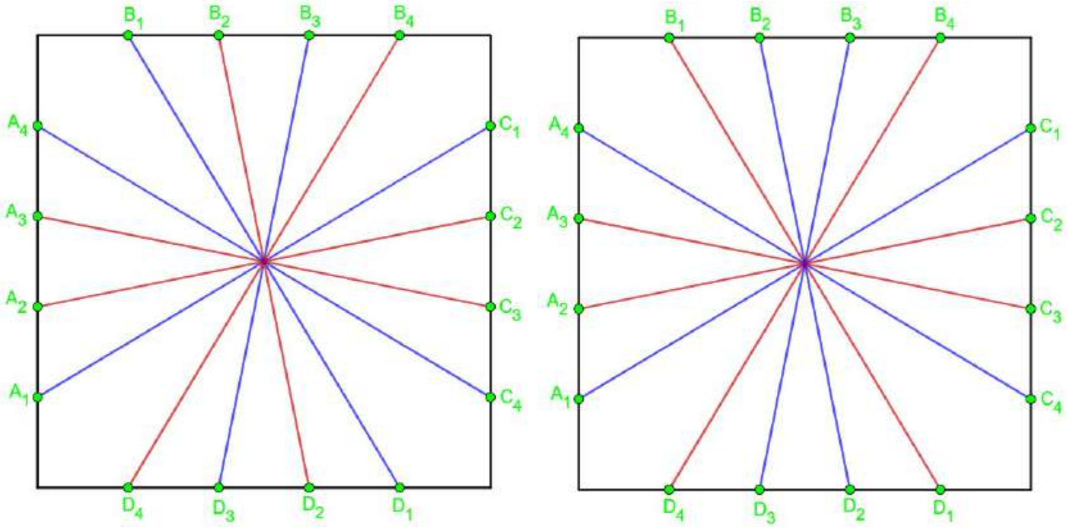
Figura 3.48: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - empate: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, se a reta escolhida pelo jogador Azul for a reta B_1D_1 ou a reta B_2D_2, resta ao jogador Vermelho construir a reta B_2D_2 ou a reta B_1D_1, respectivamente. Em ambas as situações o resultada para a partida é o empate, como se observa na Figura 3.49.

Figura 3.49: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - empate: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de exemplificar a terceira possibilidade de situações finais para a tela Quadrado de 4 pontos. Vejamos agora a quarta e última possibilidade.

Possibilidade 4: Caso 2,2 - especial

Como observado anteriormente na tela Triângulo de 8 pontos, sabemos que esse caso acontece quando existem retas azuis e/ou vermelhas entre os dois pares de pontos finais. Isso significa que a ideia principal a ser analisada nesse caso é a distribuição das cores das retas que se encontram dentro desse espaço.

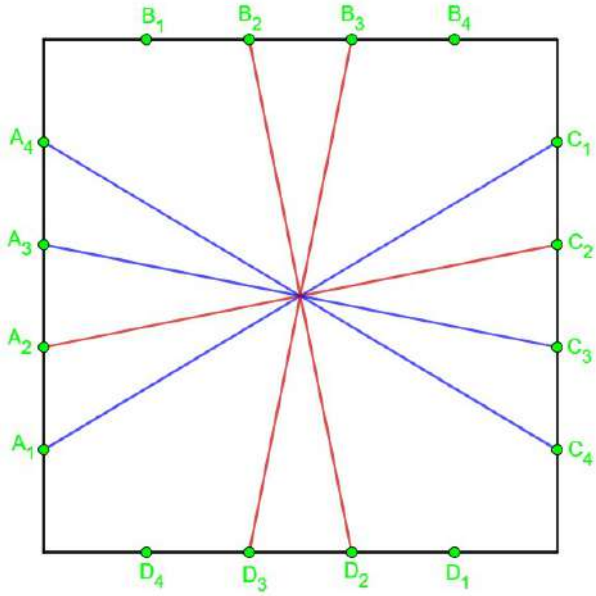
Assim, as análises que podem ser desenvolvidas para esse caso na tela Quadrado de 4 pontos são as mesmas que já realizamos anteriormente na tela Triângulo de 8 pontos. É válido destacar que a tela base considerada é o Quadrado de 4 pontos, o que significa que o número máximo de retas que podem existir dentro dos dois pares de pontos restantes é duas retas.

Sabemos também que telas com maior número de lados, bem como maior quantidade de pontos permitem mais retas dentro do espaço mencionado. Isso quer dizer que a distribuição de retas azuis pode ser menor, maior ou igual à quantidade de retas vermelhas.

Nesse contexto, iremos apresentar um exemplo relacionado a cada uma das configurações possíveis. Vale destacar que os resultados para outras distribuições que respeitem essa premissa são os mesmos para as situações apresentadas.

A primeira situação a ser exemplificada é quando o número de retas azuis entre os dois pares de pontos finais é menor do que a quantidade de retas vermelhas. A Figura 3.50 apresenta esse cenário.

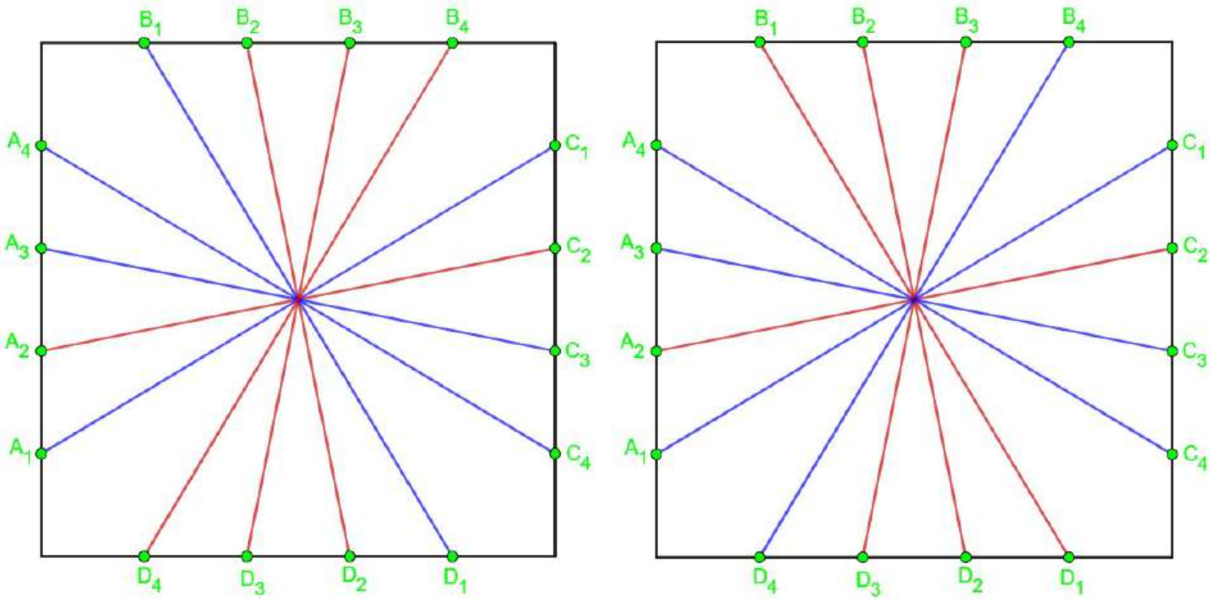
Figura 3.50: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - especial: mais retas vermelhas do que azuis



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que se o jogador Azul construir a reta B_1D_1 ou a reta B_4D_4, resta ao seu adversário criar a reta B_4D_4 ou a reta B_1D_1, respectivamente. Nas duas ocasiões a partida termina empatada, como se verifica na Figura 3.51.

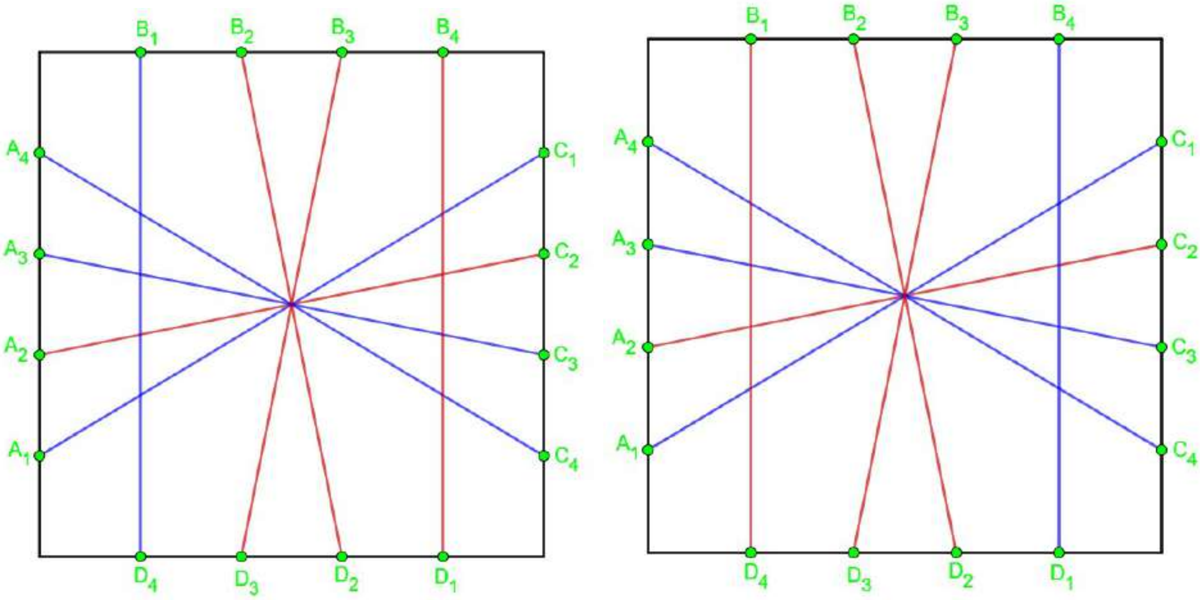
Figura 3.51: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - especial: 1° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Caso a opção do jogador Azul seja pela reta B_1D_4 ou pela reta B_4D_1, seu adversário é obrigado a escolher a reta B_4D_1 ou a reta B_1D_4, respectivamente. Em ambas as situações o vencedor é jogador Azul, pois este consegue duas intersecções a mais do que o jogador Vermelho. A Figura 3.52 apresenta esse cenário.

Figura 3.52: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - especial: jogador Azul vence

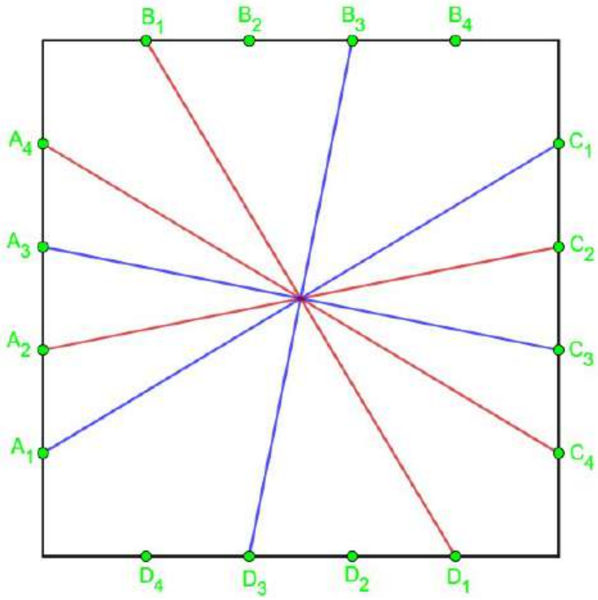


Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos de observar um exemplo para o *Caso 2,2 - especial* em que há mais retas vermelhas dentro do espaço considerado do que retas azuis. As análises apresentadas mostram que essa distribuição não possibilita ao jogador Azul o resultado de derrota, assim como já trabalhado anteriormente na tela Triângulo de 8 pontos.

Vejamos agora a segunda situação possível, ou seja, quando existem mais retas azuis do que vermelhas dentro dos dois pares de pontos finais. A Figura 3.53 exemplifica esse cenário.

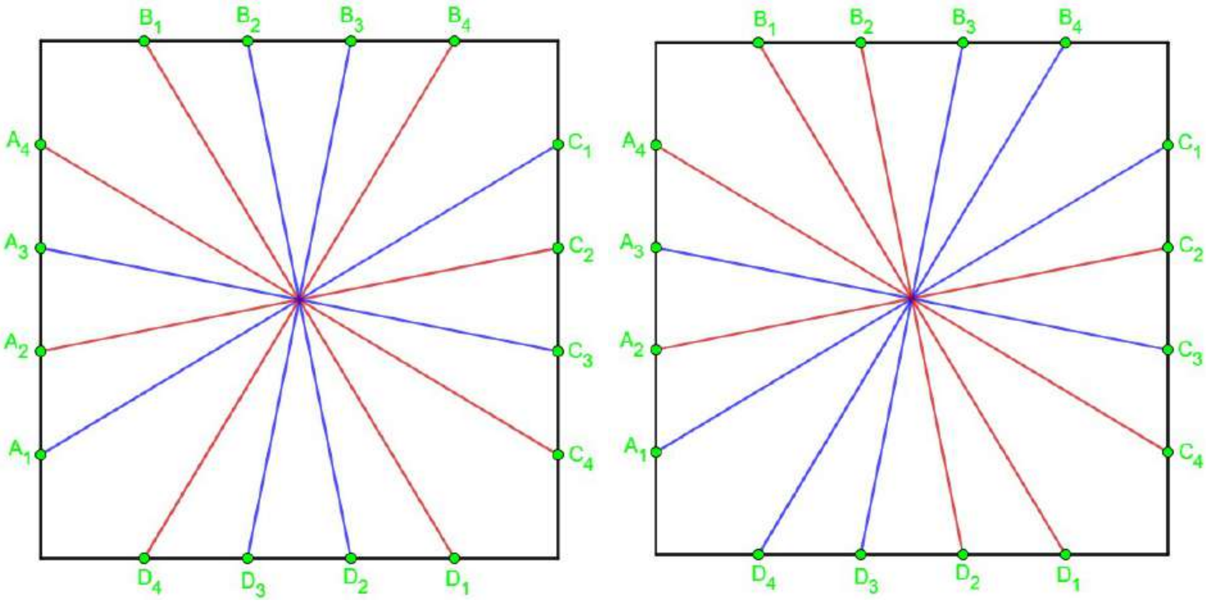
Figura 3.53: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - especial: mais retas azuis do que vermelhas



Fonte: elaborado pelos autores

Note que se a escolha do jogador Azul for a reta B_2D_2 ou a reta B_4D_4, resta ao seu adversário construir a reta B_4D_4 ou a reta B_2D_2, respectivamente. Nas duas situações o resultado para a partida é o empate, como se verifica na Figura 3.54.

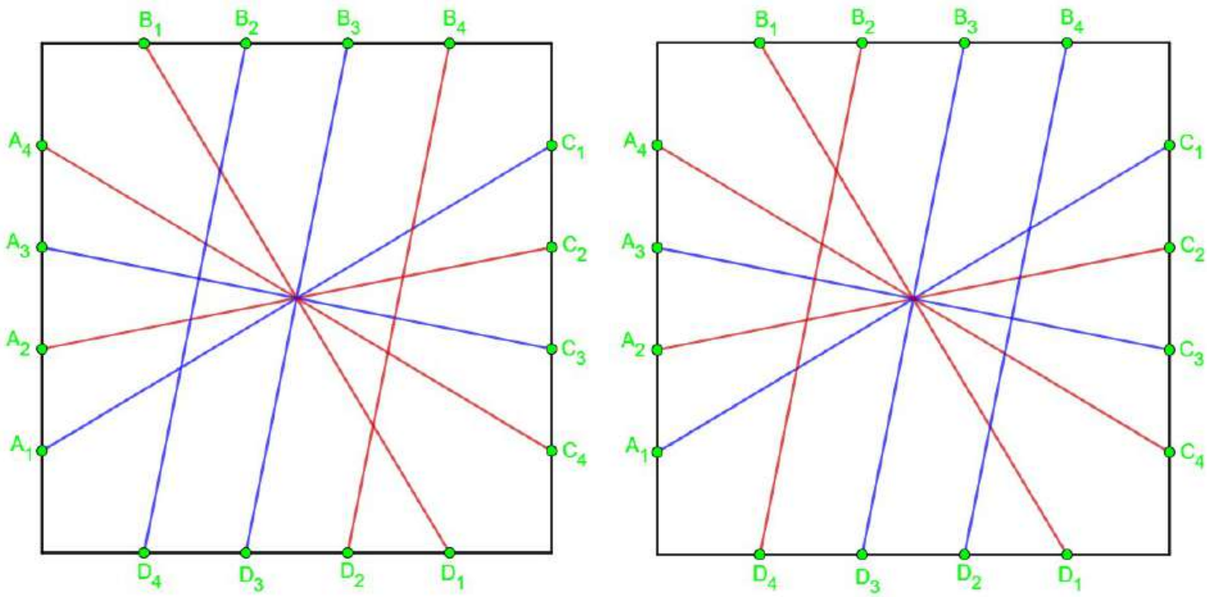
Figura 3.54: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - especial: 2° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Se a escolha do jogador Azul for construir a reta B_2D_4 ou a reta B_4D_2, resta ao seu oponente criar a reta B_4D_2 ou a reta B_2D_4, respectivamente. Veja que ambas as escolhas fazem com que o vencedor da partida seja o jogador Vermelho, pois esse possui uma intersecção a mais do que o jogador Azul. A Figura 3.55 apresenta esse cenário.

Figura 3.55: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - especial: jogador Vermelho vence

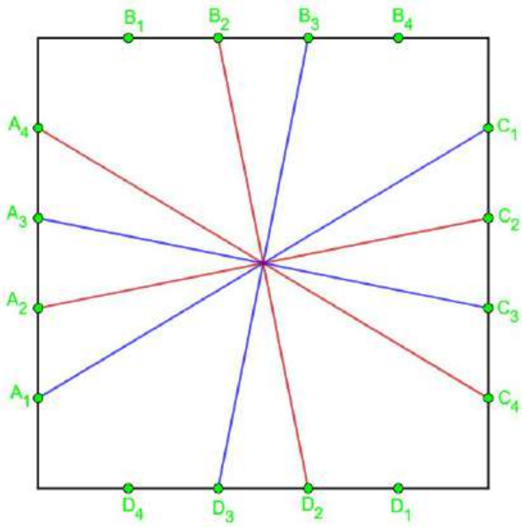


Fonte: elaborado pelos autores

Finalizamos a exemplificação do *Caso 2,2 - especial* quando existem mais retas azuis do que vermelhas entre os dois pares de pontos restantes. Notamos que essa distribuição não possibilita ao jogador Azul o resultado de vitória, assim como apresentado anteriormente na tela Triângulo de 8 pontos.

Vejamos agora a terceira configuração possível, ou seja, quando existem o mesmo número de retas azuis e vermelhas dentro dos dois pares de pontos finais. Esse cenário é exemplificado na Figura 3.56.

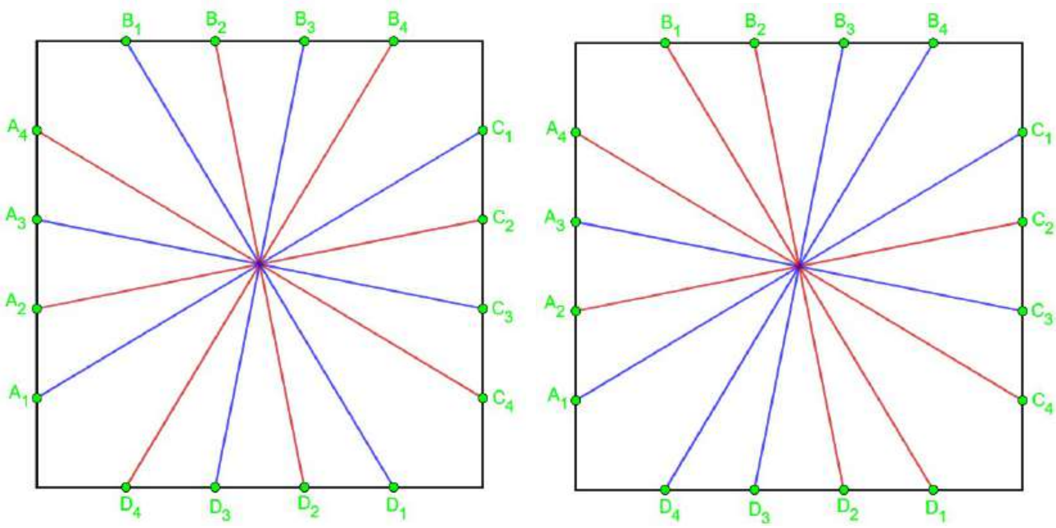
Figura 3.56: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - especial: mesmo número de retas azuis e vermelhas



Fonte: elaborado pelos autores

Se a escolha do jogador Azul for a reta B_1D_1 ou a reta B_4D_4, seu adversário deve escolher a reta B_4D_4 ou a reta B_1D_1, respectivamente. Veja na Figura 3.57 que o resultado para a partida é o empate.

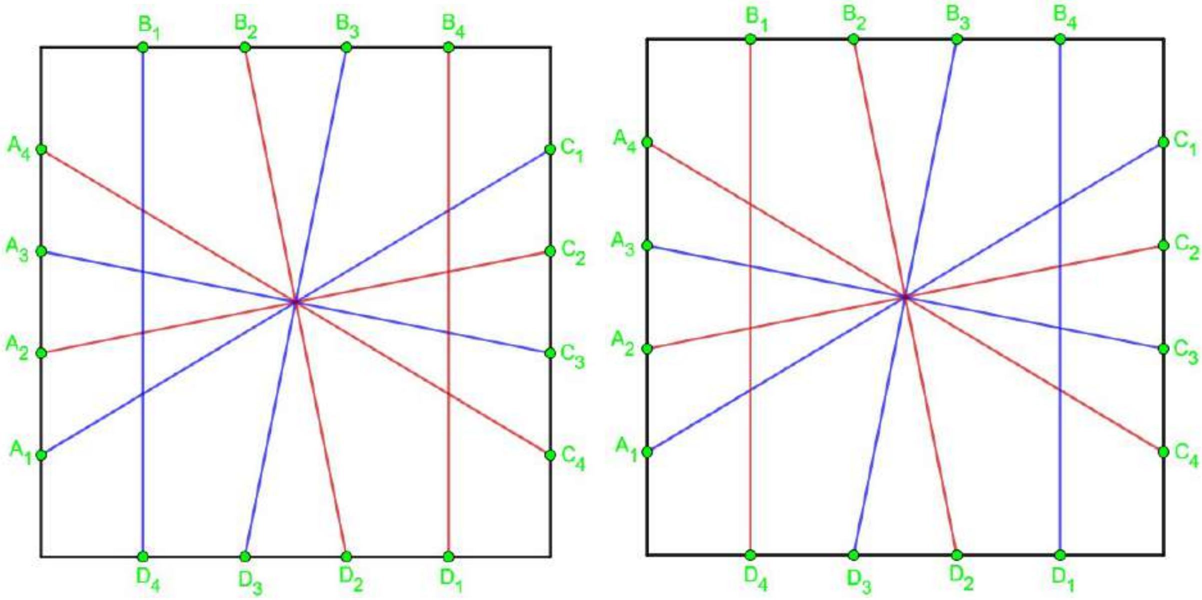
Figura 3.57: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - especial: 3° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Do mesmo modo, se o jogador Azul optar pela reta B_1D_4 ou pela reta B_4D_1, resta ao seu adversário construir a reta B_4D_1 ou a reta B_1D_4, respectivamente. Nas duas situações a partida termina empatada, como se verifica na Figura 3.58.

Figura 3.58: Quadrado de 4 pontos, caso 2,2 - especial: 4° resultado de empate



Fonte: elaborado pelos autores

Acabamos a exemplificação do *Caso 2,2 - especial* quando existem a mesma quantidade de retas azuis e vermelhas entre os dois pares de pontos finais. Notamos que essa distribuição possibilita para a partida apenas o resultado de empate, assim como trabalhado anteriormente na tela Triângulo de 8 pontos.

Finalizamos as exemplificações das três possíveis situações envolvendo a quantidade de retas azuis e/ou vermelhas durante o *Caso 2,2 - especial* na tela Quadrado de 4 pontos. Foi possível observar que as análises desenvolvidas para cada situação são iguais àquelas apresentadas para esse caso na tela Triângulo de 8 pontos.

Isso significa que quando existem mais retas de uma mesma cor dentro do espaço considerado, o jogador correspondente a essa cor não possui a chance de obter a vitória. E caso as quantidades de retas forem iguais a partida termina empatada.

Assim, concluímos a apresentação das quatro possibilidades de configurações finais para as partidas disputadas no Quadrado de 4 pontos. Podemos observar que as situações trabalhadas e os resultados encontrados são semelhantes àqueles vistas anteriormente nas telas Triâgulo de 4 pontos, Triângulo de 8 pontos e Quadrado de 2 pontos.

Capítulo 4

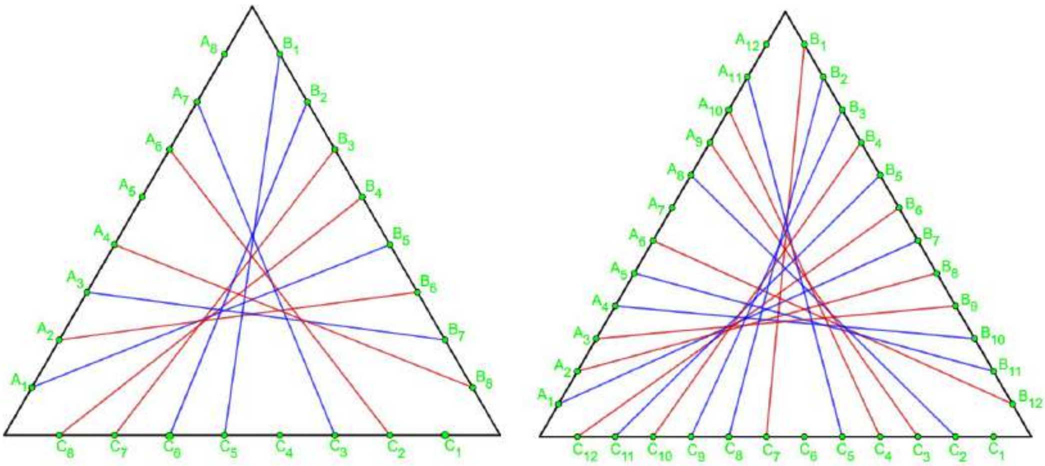
Contagem de retas para o caso 2,2

Ao escolhermos uma tela inicial para a partida, o número de lados e pontos existentes nessa figura influencia na quantidade máxima de retas que podemos encontrar durante o *Caso 2,2 - especial*. Nesse sentido, vejamos a seguir as quantidades máximas de retas que podemos encontrar para esse caso em cada situação.

É importante destacar que as configurações finais das partidas que serão apresentadas foram obtidas através da utilização de jogadas boas por parte dos dois jogadores em cada uma de suas rodadas. Isso significa que cada reta construída por ambos os jogadores separa igualmente a quantidade de pontos restantes nos dois semi-planos formados.

A Figura 4.1 apresenta as quantidades máximas de retas que podemos obter para *Caso 2,2 - especial* quando a tela inicial escolhida é o Triângulo de 8 pontos ou o Triângulo de 12 pontos, respectivamente.

Figura 4.1: Máximo de retas nas telas Triângulos de 8 e 12 pontos, caso 2,2 - especial

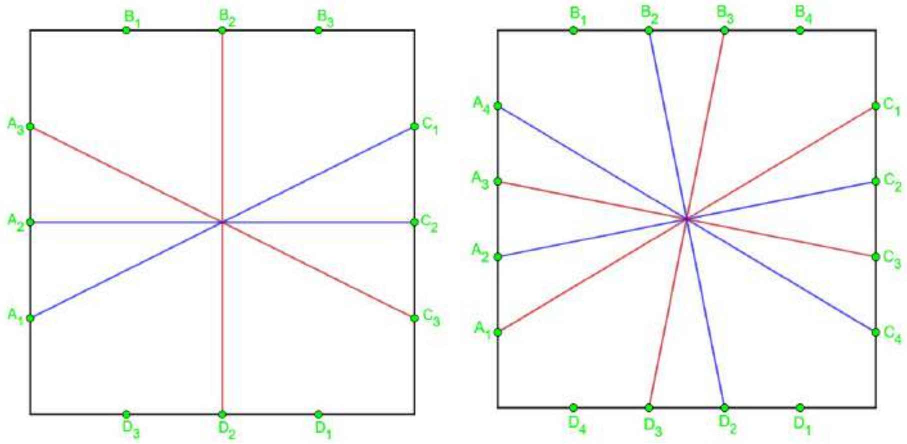


Fonte: elaborado pelos autores

Podemos observar que a tela inicial Triângulo de 8 pontos possui, no máximo, 2 retas entre os dois pares de pontos restantes. Isso ocorre porque as outras retas que poderiam fazer parte do caso que estamos trabalhando são formadas a partir da ligação entre pontos dos lados A e B, o que não está de acordo com a nossa proposta, pois os dois lados restantes considerados são os lados A e C. Pelo mesmo motivo, notamos que para a tela inicial Triângulo de 12 pontos a quantidade máxima é de 4 retas

Vejamos agora as quantidades máximas de retas que podemos encontrar quando a tela inicial do jogo é o Quadrado de 3, 4, 5 ou 6 pontos. A Figura 4.2 mostra as quantidades máximas para o Quadrado de 2 pontos e o Quadrado de 3 pontos, respectivamente.

Figura 4.2: Máximo de retas nas telas Quadrados de 3 e 4 pontos, caso 2,2 - especial

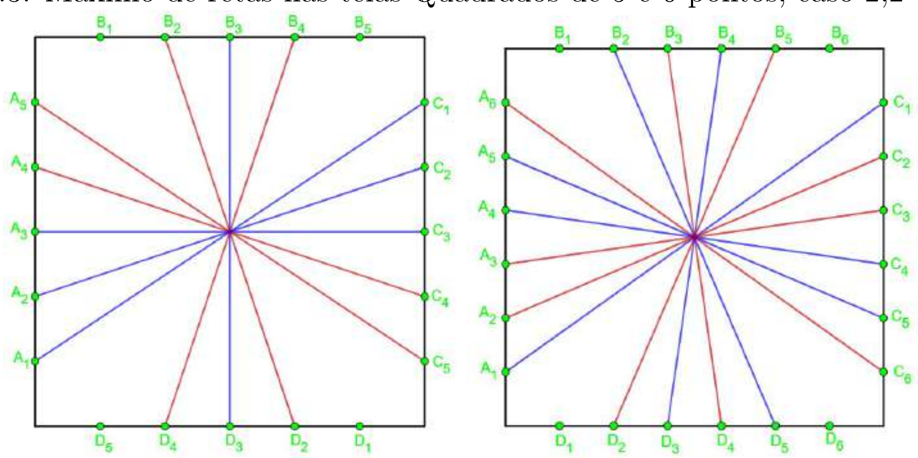


Fonte: elaborado pelos autores

Podemos visualizar que a tela inicial Quadrado de 3 pontos possui, no máximo, 1 reta entre os dois pares de pontos finais. Isso ocorre porque os lados considerados para a construção desse caso são os lados B e D e as outras retas existentes são formadas por meio da ligação de pontos que não se encontram nesses dois lados. Pelo mesmo motivo, podemos concluir que na tela inicial Quadrado de 4 pontos o número máximo é de 2 retas.

A Figura 4.3 apresenta as quantidades máximas de retas quando as telas inicias escolhidas são os Quadrados de 5 e 6 pontos, respectivamente.

Figura 4.3: Máximo de retas nas telas Quadrados de 5 e 6 pontos, caso 2,2 - especial

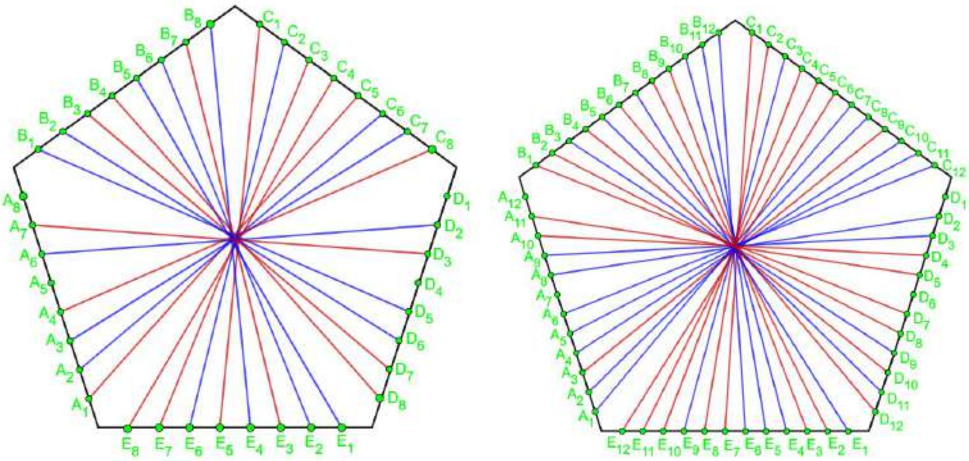


Fonte: elaborado pelos autores

É possível observar que na tela inicial Quadrado de 5 pontos existem no máximo 3 retas entre os pares de pontos finais, enquanto que no Quadrado de 6 pontos o máximo é de 4 retas. A justificativa para essas quantidades é a mesma apresentada para o Quadrado de 3 pontos.

Vejamos agora as quantidades máximas de retas que podem existir para as tela iniciais Pentágono de 8 pontos ou o Pentágono de 12 pontos. A Figura 4.4 mostra esse cenário.

Figura 4.4: Máximo de retas nas telas Pentágonos de 8 e 12 pontos

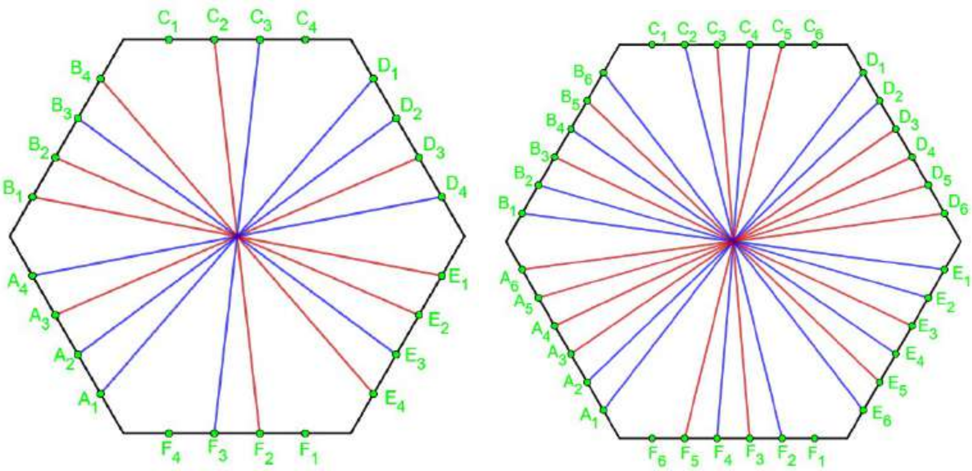


Fonte: elaborado pelos autores

Podemos observar que no Pentágono de 8 pontos existem no máximo 2 retas entre os pares de pontos finais, enquanto que para o Pentágono de 12 pontos o número máximo é de 4 retas. A justificativa para essas quantidades é a mesma que apresentamos para o Triângulo de 8 pontos, alterando-se apenas os dois lados trabalhados ao término da partida.

Vejamos agora o número máximo de retas que podemos encontrar na tela inicial Hexágono de 4 pontos ou o Hexágono de 6 pontos. A Figura 4.5 apresenta essa situação.

Figura 4.5: Máximo de retas nas telas Hexágonos de 4 e 8 pontos



Fonte: elaborado pelos autores

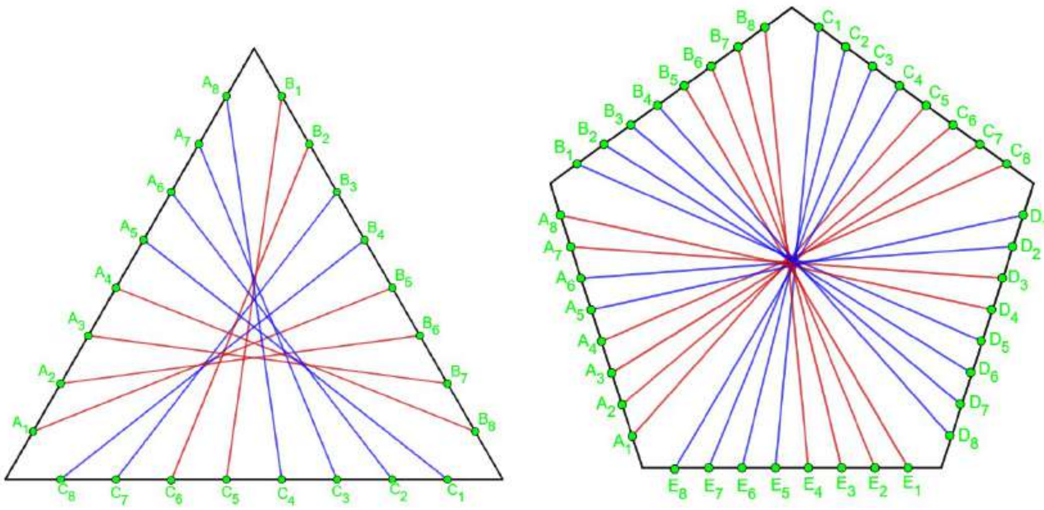
Podemos visualizar que no Hexágono de 4 pontos, existem no máximo 2 retas entre os dois pares de pontos finais, enquanto que no Hexágono de 6 pontos o número máximo é de 4 retas. A justificativa para essas quantidades de retas é a mesma que apresentamos anteriormente para o Quadrado de 3 pontos, alterando-se apenas os dois lados trabalhados ao fim de cada partida.

4.1 Uma possível generalização

4.1.1 Figuras ímpares

Após a apresentação das situações acima, podemos observar que as telas Triângulo de 8 ou 12 pontos e as telas Pentágono de 8 ou 12 pontos não possuem lados completamentes opostos uns aos outros, já que existe a necessidade de dividir a quantidade de pontos em cada lado da figura em metades iguais. Isso é necessário para permitir que todos os pontos sejam ligados aos seus respectivos correspondentes. A Figura 4.6 exeplifica o exposto acima.

Figura 4.6: Divisão dos lados de figuras ímpares em metades iguais



Fonte: elaborado pelos autores

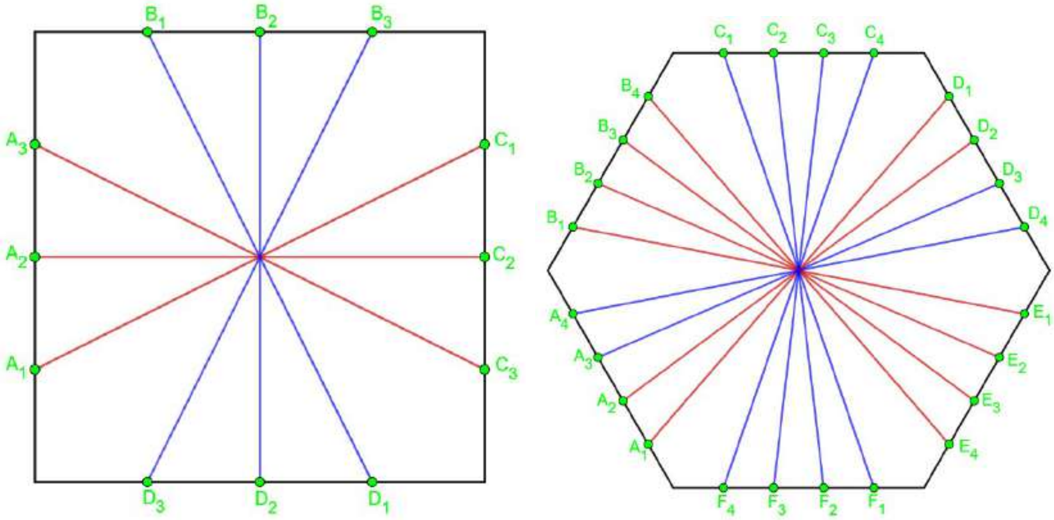
Note que cada reta de uma mesma cor faz a união entre duas metades opostas correspondentes. Assim, partindo deste pressuposto, para formar o *Caso 2,2 - especial* em figuras cujo número de lados é **Ímpar** devemos escolher como pontos finais os 4 pontos localizados nos extremos de duas metades opostas que sejam correspondentes entre si.

Nessa perspectiva, se o número de lados da tela inicial for ímpar, então a quantidade máxima m de retas que podem existir entre os dois pares de pontos finais é dada pela expressão $m = \frac{n}{2} - 2$, na qual n é o número de pontos iniciais em um mesmo lado da figura. Veja que a parcela $\frac{n}{2}$ representa a divisão do total de pontos iniciais de um mesmo lado da figura em duas metades iguais, enquanto que a parcela (-2) representa os dois pares de pontos localizados nos extremos de duas metades que irão fazer parte do caso trabalhado.

4.1.2 Figuras pares

De modo semelhante, é possível observar que a tela Quadrado de 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos e a tela Hexágono de 4 e 6 pontos possibilitam que todos os pontos de um mesmo lado sejam ligados aos seus respectivos pontos correspondentes no lado oposto. Isso significa que essas telas permitem a associação de lados opostos dois a dois. A Figura mostra o exposto acima.

Figura 4.7: Divisão dos lados de figuras pares em metades iguais



Fonte: elaborado pelos autores

Note que cada reta de uma dada cor realiza a união entre duas metades opostas correspondentes. Assim, seguindo essa premissa, para formar o *Caso 2,2 - especial* em figuras cujo número de lados é **Par** devemos escolher como pontos finais os 4 pontos localizados nos extremos de dois lados que são opostos entre si.

Nessa perspectiva, se o número de lados da tela inicial for par, então a quantidade máxima m de retas que podem existir entre os dois pares de pontos finais é dada pela expressão $m = n - 2$, na qual n é o número de pontos em um mesmo lado da figura. Veja que a parcela n representa o número de pontos iniciais em lado da figura, enquanto que a parcela (-2) representa os dois pares de pontos localizados nos extremos de dois lados opostos que irão formar o caso trabalhado.

4.1.3 Fórmula de contagem

Ao unirmos as duas ideias trabalhadas para as figuras geométricas ímpares e pares podemos construir uma expressão que nos permita determinar a quantidade máxima de retas que se pode encontrar no *Caso 2,2 - especial* em qualquer figura. A expressão matemática mencionada é descrita por:

$$m = \frac{n}{2^r} - 2$$

na qual:

m : representa a quantidade máxima de retas que podemos encontrar;

n : é o número de pontos em um mesmo lado da figura base da partida;

r : é o resto da divisão do número de lados da figura base por 2.

Vejamos agora alguns exemplos em que podemos utilizar a expressão acima para determinar a quantidade máxima de retas que podem existir para o *Caso 2,2 - especial*.

Exemplo 1

Considere a tela inicial Triângulo de 12 pontos. Veja que a quantidade máxima de retas que podemos encontrar dentro do espaço que forma o caso atual é

$$m = \frac{n}{2^r} - 2 = \frac{12}{2^1} - 2 = \frac{12}{2} - 2 = 6 - 2 = 4$$

ou seja, podem existir, no máximo, 4 retas entre os dois pares de pontos finais.

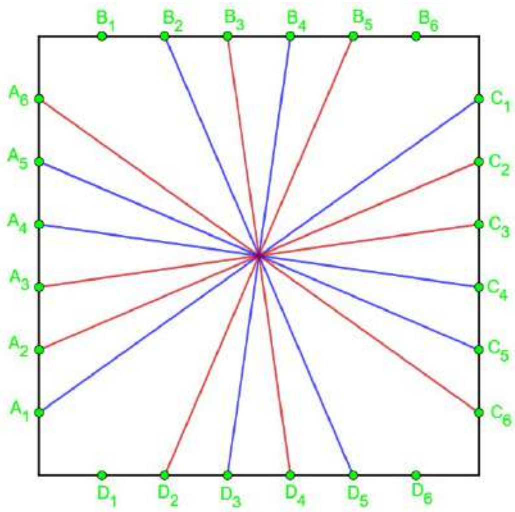
Exemplo 2

Considere a tela inicial Quadrado de 6 pontos. Note que o número máximo de retas que podemos obter entre os dois pares de pontos restantes é

$$m = \frac{n}{2^r} - 2 = \frac{6}{2^0} - 2 = \frac{6}{1} - 2 = 6 - 2 = 4$$

ou seja, podem existir no máximo 4 retas dentro do espaço que forma o caso atual. Na Figura 4.8 é possível observarmos esse fato.

Figura 4.8: Quadrado de 6 pontos: maximo de 4 retas no caso 2,2 - especial



Fonte: elaborado pelos autores

Exemplo 3

Anteriormente, dissemos que as telas iniciais Triângulo de 4 pontos e Quadrado de 2 pontos não comportavam o *Caso 2,2 - especial*. Vamos utilizar a fórmula apresentada para visualizar numericamente o porquê disso acontecer.

Para a tela Triângulo de 4 pontos temos que:

$$m = \frac{n}{2^r} - 2 = \frac{4}{2^1} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 2 - 2 = 0$$

Para a tela Quadrado de 2 pontos temos que:

$$m = \frac{n}{2^r} - 2 = \frac{2}{2^0} - 2 = \frac{2}{1} - 2 = 2 - 2 = 0$$

Nas duas situações acima podemos observar que o valor encontrado é de 0 (zero) retas existentes entre os dois pares de pontos finais, o que demonstra o porquê dessas telas iniciais não comportarem esse caso.

4.1.4 Análise para o Caso 2,2 - especial

A forma como podemos analisar o *Caso 2,2 - especial*, em qualquer tela inicial com qualquer quantidade de pontos, ocorre da seguinte maneira:

- Utilizamos a expressão apresentada anteriormente para determinar a quantidade máxima de retas que podemos encontrar para esse caso;
- Olhamos para a distribuição das retas azuis e vermelhas;
- O jogador que possuir mais retas de sua cor entre as retas existentes entre os dois pares de pontos finais não possui a chance de vencer;
- Se as quantidades de retas azuis e vermelhas forem iguais, então a partida termina em empate.

Nesse sentido, seguindo os passos apresentados acima, é possível compreendermos como o *Caso 2,2 - especial* ocorre nas diferentes telas iniciais.

Finalizamos a exposição da maneira como podemos analisar o *Caso 2,2 - especial* nas telas iniciais ímpares e pares. A fórmula da contagem apresentada permite determinar o número máximo de retas que podem existir dentro dos dois pares de pontos finais que formam o caso mencionado.

Assim, de posse dessa quantidade, observando a distribuição das cores das retas que se encontram dentro do espaço trabalhado e a partir das considerações realizadas anteriormente, é possível estabelecer quais serão os desfechos para as partidas jogadas nas diferentes telas.

Capítulo 5

Análise dos polígonos base Pentágono e Hexágono: uma generalização possível

Veremos neste capítulo as possíveis análises que podemos realizar quando escolhemos a tela inicial do jogo como sendo o Pentágono ou o Hexágono. As ideias que serão apresentadas também são válidas se aumentarmos a quantidade de pontos em cada figura. É importante destacar que as situações abordadas aqui foram obtidas através da utilização contínua da estratégia ideal por parte do jogador Azul e de jogadas boas pelo jogador Vermelho.

Vamos observar também que os casos trabalhados nas telas desse capítulo se reduzem aos casos já apresentados anteriormente. Mais do que isso, podemos reduzir os casos abordados nas telas maiores (mais lados) aos casos já vistos nas telas anteriores. Isso significa que as análises para os casos possíveis nas telas maiores como o Pentágono e o Hexágono, podem ser reduzidas às mesmas interpretações realizadas nas telas Triângulo e Quadrado. Nesse sentido, as telas bases são os Triângulos de 4 e de 8 pontos e o Quadrado de 2 pontos.

Vejamos a seguir como os três casos existentes e suas respectivas variações ocorrem nas telas Pentágono de 4 pontos e Hexágono de 2 pontos. A primeira tela pode ser compreendida como uma representante das figuras ímpares, enquanto que a segunda tela corresponde às figuras geométricas pares.

5.1 Casos nas figuras ímpares

No que se refere às telas iniciais cujo número de lados é ímpar, todas as sete variações dos casos existentes ocorrem nessas figuras. Nesse contexto, as possibilidades são:

- Caso 1,1,2 - empate;
- Caso 1,1,2 - empate ou vitória;
- Caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória;
- Caso 2,2 - empate;
- Caso 2,2 - especial;

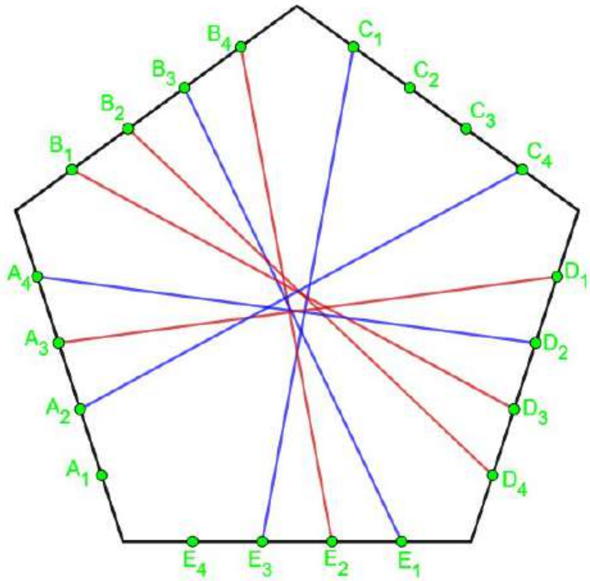
- Caso 1,1,1,1 - empate;
- Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória

Vejamos agora exemplificações de cada um dos casos mencionados acima para a tela Pentágono de 4 pontos. Como exposto anteriormente, essa tela é uma representante para as figuras ímpares, o que significa que os casos apresentados, bem como os resultados encontrados são os mesmos para qualquer tela com número ímpar de lados.

Primeiro exemplo: Caso 1,1,2 - empate

A Figura 5.1 apresenta o primeiro caso a ser exemplificado.

Figura 5.1: Tela inicial Pentágono de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate



Fonte: elaborado pelos autores

Perceba que a configuração apresentada acima é semelhante ao *Caso 1,1,2 - empate* trabalhado na tela Triângulo de 4 pontos. Isso significa que o resultado possível para o jogador Azul nessa situação é somente o empate.

De fato, se o jogador Azul cosntruir a reta A_1C_3 ou a reta C_2E_4, seu adversário é obrigado a criar a reta C_2E_4 ou a reta A_1C_3, respectivamente. As duas escolhas implicam no resultado de empate, pois ambos os jogadores ficam com o mesmo número de intersecções.

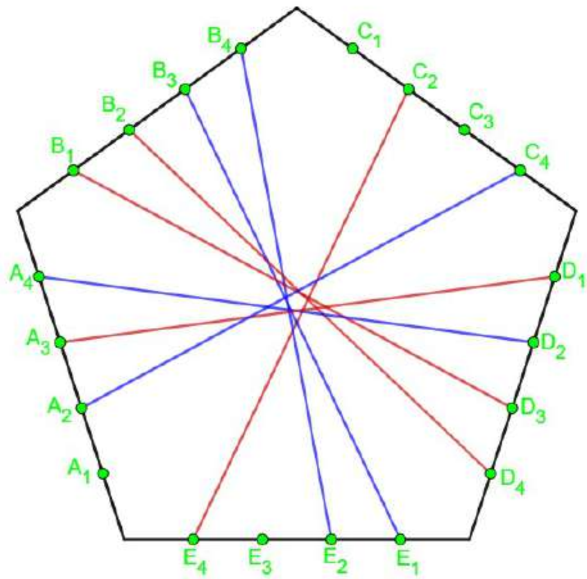
Pela mesma justificativa, o empate é o resultado para a partida se a opção do jogador Azul for a reta A_1C_2 ou a reta C_3E_4, já que resta a seu oponente optar pela reta C_3E_4 ou pela reta A_1C_2, respectivamente. O mesmo resultado ocorre se a opção do jogador Azul for a reta A_1E_4, uma vez que essa reta não possibilita intersecção entre retas azuis.

Assim, acabamos de visualizar no Pentágono de 4 pontos a primeira exemplificação dos casos conhecidos para as telas com número ímpar de lados. Vejamos agora um exemplo referente ao segundo caso.

Segundo exemplo: Caso 1,1,2 - empate ou vitória

A Figura 5.2 apresenta uma configuração que exemplifica o segundo caso mencionado.

Figura 5.2: Tela inicial Pentágono de 4 pontos, caso 1,1,2 - empate ou vitória



Fonte: elaborado pelos autores

Note que a situação apresentada acima é semelhante ao *Caso 1,1,2 - empate ou vitória* trabalhado no Triângulo de 4 pontos. Isso sginifica que os resultados possíveis de serem encontrados pelo jogador Azul para o cenário atual são o empate ou a vitória.

De fato, se o jogador Azul criar a reta A_1C_3 ou a reta C_1E_3, seu adversário é obrigado a construir a reta C_1E_3 ou a reta A_1C_3, respectivanmente. Nas duas situações, a partida termina em empate, já que ambos os jogadores conseguem o mesmo número de intersecções. Da mesma forma, a partida termina empatada caso o jogador Azul escolha a reta A_1E_3, pois essa reta não cruza nenhuma reta azul e com isso os dois jogadores alcançam o mesmo número de intersecções.

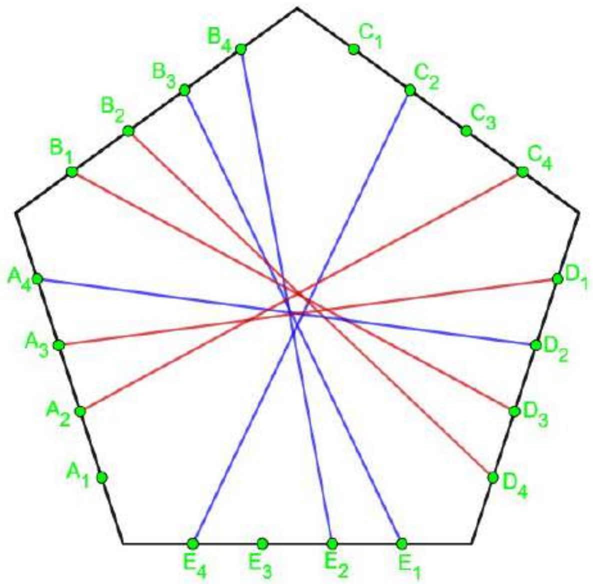
Além disso, se a opção do jogador Azul for pela reta A_1C_1 ou pela reta C_3E_3, resta ao jogador Vermelho criar a reta C_3E_3 ou a reta A_1C_1, respectivamente. As duas escolhas implicam na vitória do jogador Azul, uma vez que este consegue uma intersecção a mais do que o seu adversário.

Assim, acabamos de observar no Pentágono de 4 pontos a segunda exemplificação dos casos conhecidos que podem ocorrer nas figuras com número ímpar de lados. Vejamos agora um exemplo referente ao terceiro caso.

Terceiro exemplo: Caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória

A Figura 5.3 apresenta uma situação que exemplifica o terceiro caso mencionado.

Figura 5.3: Tela inicial Pentágono de 4 pontos, caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a configuração apresentada é semelhante ao *Caso 1,1,2 - derrota, empate ou vitória* trabalhado no Triângulo de 4 pontos. Isso significa que os possíveis resultados para o jogador Azul na partida atual são a derrota, o empate ou a vitória.

De fato, o jogador Azul obtém o resultado de derrota caso escolha construir a reta A_1C_1 ou a reta C_3E_3, já que resta ao seu adversário criar a reta C_3E_3 ou a reta A_1C_1, respectivamente e com isso o jogador Vermelho teria uma intersecção a mais do que o jogador Azul.

Já o empate ocorre se o jogador Azul optar pela reta A_1C_3 ou a reta C_1E_3, pois o seu oponente é obrigado a escolher a reta C_1E_3 ou a reta A_1C_3, respectivamente e com isso ambos os jogadores obtém a mesma quantidade de intersecções.

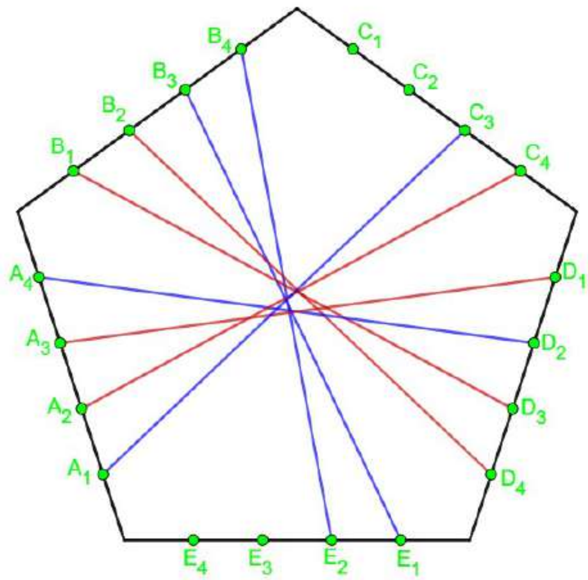
Por fim, a vitória é possibilitada ao jogador Azul caso a reta criada seja a reta A_1E_3, pois o jogador Vermelho não possui reta para construir e com isso o jogador Azul vence a partida por obter mais intersecções.

Assim, acabamos de apresentar o terceiro exemplo dos casos conhecidos que podem acontecer em telas que possuem número ímpar de lados. Vejamos agora o quarto caso a ser exemplificado na tela Pentágono de 4 pontos.

Quarto exemplo: Caso 2,2 - empate

Veja na Figura 5.4 a situação que exemplifica o quarto caso mencionado anteriormente.

Figura 5.4: Tela inicial Pentágono de 4 pontos, caso 2,2 - empate



Fonte: elaborado pelos autores

Perceba que a configuração apresentada acima é semelhante ao *Caso 2,2 - empate* visto no Triângulo de 4 pontos. Isso significa que o único resultado possível para o jogador Azul na situação atual é o empate.

De fato, se a opção do jogador Azul for a reta C_1E_3 ou a reta C_2E_4, resta ao seu adversário construir a reta C_2E_4 ou a reta C_1E_3, respectivamente. As duas escolhas implicam no resultado de empate, já que ambos os jogadores conseguem a mesma quantidade de intersecções.

Pela mesma justificativa o resultado é o empate caso o jogador Azul opte pela reta C_1E_4 ou a reta C_2E_3, pois resta ao jogador Vermelho criar a reta C_2E_3 ou a reta C_1E_4, respectivamente.

Assim, o quarto exemplo dos casos conhecidos foi apresentado. Vejamos agora uma exemplificação referente ao quinto caso possível de acontecer em telas que possuem número ímpar de lados.

Quinto exemplo: Caso 2,2 - especial

A tela inicial que estamos considerando para compor os exemplos é o Pentágono de 4 pontos. Nesse contexto, ao utilizarmos a fórmula apresentada no capítulo 4 que permite determinar a quantidade máxima de retas que podemos encontrar dentro do espaço que forma o *Caso 2,2 - especial* temos o seguinte resultado:

$$m = \frac{n}{2^r} - 2 = \frac{4}{2^1} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 2 - 2 = 0$$

Note que o número máximo de retas que podemos encontrar entre os dois pares de pontos finais na tela Pentágono de 4 pontos é de zero retas. Uma exemplificação desse caso é a situação apresentada na Figura 5.4, uma vez que essa imagem mostra dois pares de pontos distribuídos em dois lados do Pentágono e nenhuma reta existente entre eles.

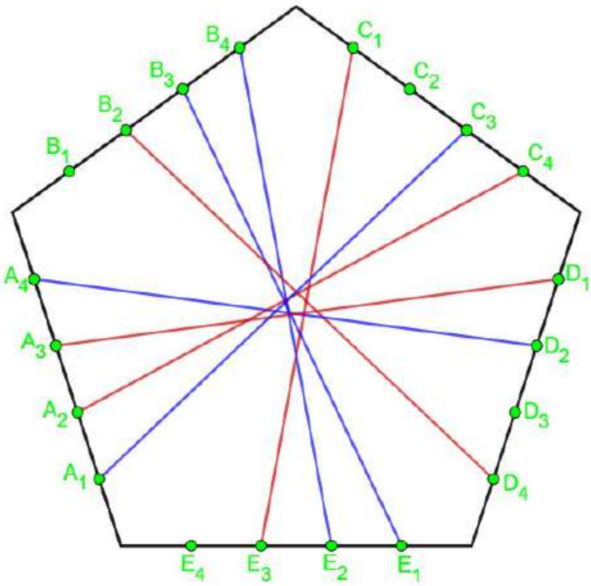
Assim, como mencionado durante a apresentação desse caso na tela Triângulo de 8 pontos, se o número de retas azuis e vermelhas dentro do espaço considerado é o mesmo, então a partida termina empatada. Esse resultado é o encontrado no *Caso 2,2 - empate.*

Acabamos de apresentar a quinta exemplificação referente aos casos mencionados anteriormente. Vejamos agora na tela Pentágono de 4 pontos o sexto exemplo.

Sexto exemplo: Caso 1,1,1,1 - empate

A Figura 5.5 apresenta uma situação que exemplifica o sexto caso possível.

Figura 5.5: Tela inicial Pentágono de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - empate



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a configuração atual da partida é semelhante ao *Caso 1,1,1,1 - empate* visto no Quadrado de 2 pontos. Isso significa que o único resultado possível para o jogador Azul nessa situação é o empate.

De fato, caso o jogador Azul escolha construir a reta B_1C_2 ou a reta D_3E_4, resta ao seu adversário criar a reta D_3E_4 ou a reta B_1C_2, respectivamente. As duas escolhas implicam na mesma quantidade de intersecções e com isso a partida termina empatada.

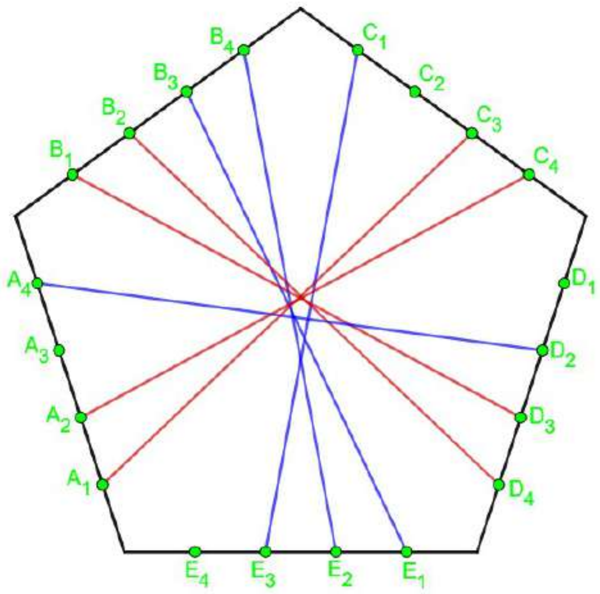
Pela mesma justificativa o resultado da partida é o empate caso o jogador Azul opte pela reta B_1D_3 ou a reta C_2E_4, pois o seu adversário é obrigado a escolher a reta C_2E_4 ou a reta B_1D_3, respectivamente. O mesmo acontece se a opção fosse pela reta B_1E_4 ou a reta C_2D_3, já que o jogador Vermelho é obrigado a criar a reta C_2D_3 ou a reta B_1E_4, respectivamente.

Assim, acabamos de observar o sexto exemplo referente aos casos mencionados. Vejamos agora a exemplificação do sétimo e último caso possível de acontecer no Pentágono de 4 pontos e, mais geral, em qualquer figura de número ímpar de lados.

Sétimo exemplo: Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória

Observe na Figura 5.6 a situação que exemplifica o sétimo e último caso possível de ocorrer em telas de número ímpar de lados.

Figura 5.6: Tela inicial Pentágono de 4 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória



Fonte: elaborado pelos autores

Perceba que essa configuração é semelhante ao *Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória* apresentado no Quadrado de 2 pontos. Isso significa que os possíveis resultados da partida para o jogador Azul são a derrota, o empate ou a vitória.

O resultado de derrota acontece caso o jogador Azul opte em construir a reta A_3E_4 ou a reta C_2D_1, já que seu adversário é obrigado a escolher a reta C_2D_1 ou a reta A_3E_4, respectivamente. Com isso, o jogador Vermelho irá obter duas intersecções a mais do que o jogador Azul e assim vencer a partida.

Já o resultado de empate ocorre se o jogador Azul criar a reta A_3D_1 ou a reta C_2E_4, pois resta ao seu oponente construir a reta C_2E_4 ou a reta A_3D_1, respectivamente. As duas escolhas implicam no empate, já que ambos os jogadores obtém a mesma quantidade de intersecções.

Por fim, o jogador Azul vence a disputa com duas intersecções a mais caso opte pela reta A_3C_2 ou pela reta D_1E_4, uma vez que o seu adversário é obrigado a criar a reta D_1E_4 ou a reta A_3C_2, respectivamente.

Assim, acabamos de visualizar o sétimo exemplo referente aos casos possíveis de ocorrer no Pentágono de 4 pontos, bem como em qualquer figura de número ímpar de lados.

Finalizamos a apresentação das situações que exemplificam como os casos trabalhados anteriormente nas telas Triângulo de 4 pontos e Quadrado de 2 pontos ocorrem na tela Pentágono de 4 pontos. Como destacado inicialmente, a tela escolhida aqui exemplifica os casos analisados para qualquer tela inicial que tenha um número ímpar de lados.

5.2 Casos nas figuras pares

No que tange às figuras cujo número de lados é par do total de variações para os casos possíveis, somente quatro deles são encontrados nessas figuras. Assim, as possibilidades são:

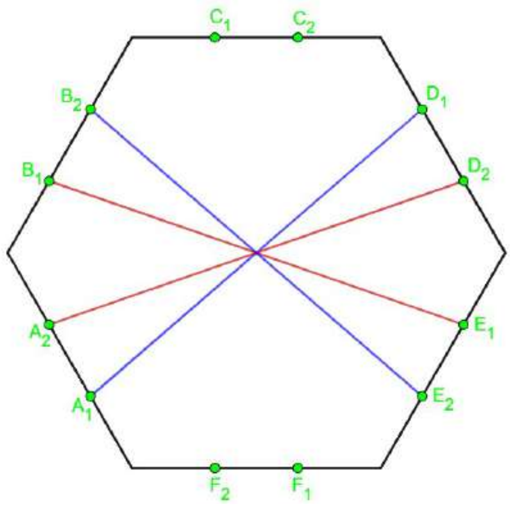
- Caso 2,2 - empate;
- Caso 2,2 - especial;
- Caso 1,1,1,1 - empate;
- Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória

Vejamos agora exemplos de cada um dos casos mencionados acima para a tela Hexágono de 2 pontos. Como dito anteriormente, essa tela representa as figuras pares, o que significa que os casos apresentados e os resultados encontrados são os mesmos para qualquer tela que tenha um número par de lados.

Primeiro exemplo: Caso 2,2 - empate

A Figura 5.7 apresenta uma situação que exemplifica o primeiro caso a ser trabalhado na tela Hexágono de 2 pontos.

Figura 5.7: Tela inicial Hexágono de 2 pontos, caso 2,2 - empate



Fonte: elaborado pelos autores

Veja que a configuração mostrada acima é semelhante ao *Caso 2,2 - empate* trabalhado no Triângulo de 4 pontos. Isso significa que o único resultado possível para a situação atual é o empate entre os jogadores.

De fato, se o jogador Azul criar a reta C_1F_1 ou a reta C_2F_2, resta ao seu adversário construir a reta C_2F_2 ou a reta C_1F_1, respectivamente. Nas duas configurações a partida termina empatada, pois ambos os jogadores conseguem a mesma quantidade de intersecções.

Pela mesma justificativa a partida acaba empatada caso o jogador Azul opte pela reta C_1F_2 ou a reta C_2F_1, já que seu oponente deve criar a reta C_2F_1 ou a reta C_1F_2, respectivamente.

Assim, acabamos de observar a primeira exemplificação referente aos casos mencionados. Vejamos agora o exemplo relacionado ao segundo caso.

Segundo exemplo: Caso 2,2 - especial

A tela inicial que estamos considerando para formar os exemplos é o Hexágono de 2 pontos. Nesse contexto, ao fazermos uso da fórmula apresentada no capítulo 4 que possibilita determinar o número máximo de retas que podemos encontrar dentro dos dois pares de pontos finais no *Caso 2,2 - especial* temos o seguinte resultado:

$$m = \frac{n}{2^r} - 2 = \frac{2}{2^0} - 2 = \frac{2}{1} - 2 = 2 - 2 = 0$$

Veja que a quantidade máxima de retas que podemos encontrar dentro do espaço que forma o caso que estamos trabalhando na tela Hexágono de 2 pontos é de zero retas. Um exemplo desse caso é a configuração apresentada na Figura 5.7, visto que essa imagem mostra dois pares de pontos distribuídos em dois lados do Hexágono e nenhuma reta entre eles.

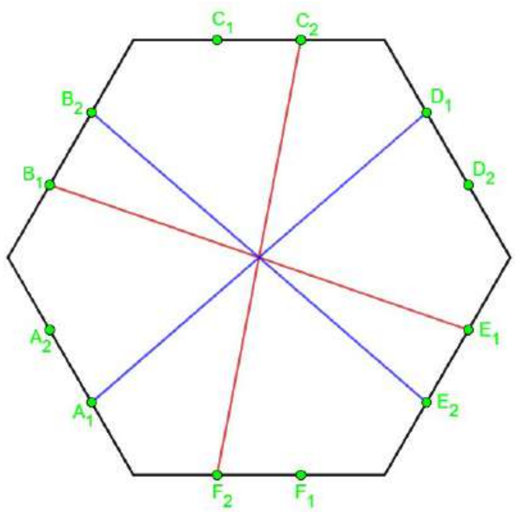
Assim, como mencionado anteriormente na apresentação desse caso na tela Triângulo de 8 pontos, quando o número de retas azuis e vermelhas dentro do espaço considerado é o mesmo, então a partida acaba empatada. Esse resultado é o encontrado no *Caso 2,2 - especial*.

Acabamos de apresentar o segundo exemplo relacionado aos possíveis casos de ocorrer em telas com número par de lados. Vejamos agora uma situação que exemplifica o terceiro caso mencionado.

Terceiro exemplo: Caso 1,1,1,1 - empate

A Figura 5.8 apresenta a situação que exemplifica o terceiro caso possível de ocorrer nas figuras de número par de lados.

Figura 5.8: Tela inicial Hexágono de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - empate



Fonte: elaborado pelos autores

Note que a configuração atual da partida é semelhante ao *Caso 1,1,1,1 - empate* trabalhado no Quadrado de 2 pontos. Isso significa que o único resultado possível de acontecer para o jogador Azul nessa situação é o empate.

De fato, a partida possui como conclusão o empate, pois caso o jogador Azul escolha a reta A_2C_1 ou a reta D_2F_1, resta ao seu adversário criar a reta D_2F_1 ou a reta A_2C_1, respectivamente. Com isso, ambos os jogadores conseguem a mesma quantidade de intersecções.

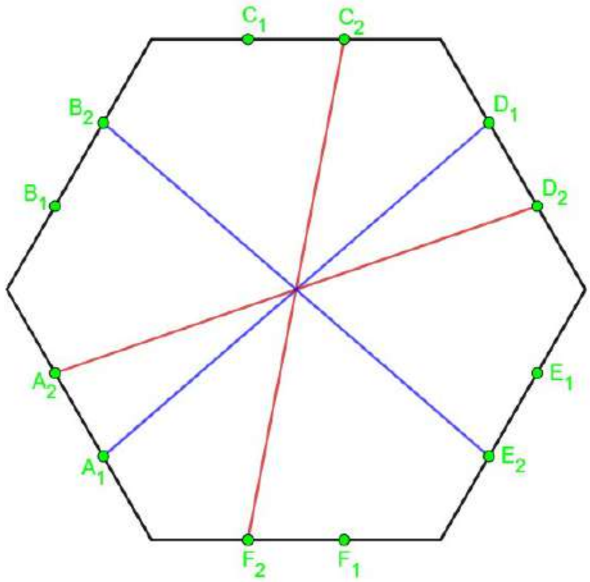
A mesma justificativa é válida se o jogador Azul escolher a reta A_2D_2 ou a reta C_1F_1, uma vez que o seu adversário deve construir a reta C_1F_1 ou a reta A_2D_2, respectivamente. Do mesmo modo, a partida acaba empatada se o jogador Azul criar a reta A_2F_1 ou a reta C_1D_2, já que seu oponente deve criar a reta C_1D_2 ou a reta A_2F_1, respectivamente.

Assim, acabamos de observar o terceiro exemplo relacionado aos casos mencionados. Vejamos agora a exemplificação do quarto e último caso possível de ocorrer no Hexágono de 2 pontos e, mais geral, em qualquer figura com número par de lados.

Quarto exemplo: Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória

Veja na Figura 5.9 a configuração que exemplifica o quarto e último caso mencionado anteriormente.

Figura 5.9: Tela inicial Hexágono de 2 pontos, caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória



Fonte: elaborado pelos autores

Perceba que a situação apresentada acima é semelhante ao *Caso 1,1,1,1 - derrota, empate ou vitória* visto no Quadrado de 2 pontos. Isso significa que os possíveis resultados para a partida na configuração atual são a derrota do jogador Azul para o Vermelho, o empate entre os jogadores ou a vitória do jogador Azul.

O resultado de derrota para o jogador Azul ocorre caso escolha criar a reta B_1F_1 ou a reta C_1E_1, pois o jogador Vermelho deve construir a reta C_1E_1 ou a reta B_1F_1, respectivamente.

Com isso, o jogador Vermelho obtém uma intersecção a mais do que o jogador Azul e assim vence a disputa.

Já o resultado de empate acontece caso o jogador Azul opte pela reta B_1E_1 ou a reta C_1F_1, uma vez que resta ao seu adversário criar a reta C_1F_1 ou a reta B_1E_1, respectivamente. Nas duas possibilidades, ambos os jogadores conseguem a mesma quantidade de intersecções e com isso a partida acaba empatada.

Por fim, o terceiro resultado possível de ocorrer é possibilitado se o jogador Azul construir a reta B_1C_1 ou a reta F_1E_1, pois o jogador Vermelho é obrigado a criar a reta F_1E_1 ou a reta B_1C_1, respectivamente. Com isso, o jogador Azul consegue uma intersecção a mais do que o seu oponente e vence a partida.

Assim, acabamos de observar o último exemplo referente aos casos que podem acontecer no Hexágono de 2 pontos e em qualquer figura com número par de lados.

Finalizamos a presentação das configurações que exemplificam como os casos abordados anteriormente nas telas Triângulo de 4 pontos e Quadrado de 2 pontos ocorrem na tela Hexágono de 2 pontos. Como mencionado inicialmente, a tela escolhida aqui exemplifica os casos analisados para qualquer tela inicial que tenha uma quantidade par de lados.

Considerações finais

Sabe-se que metodologias voltadas para o ensino de Matemática são recursos indispensáveis para a promoção de uma Educação de qualidade. Abordagens educacionais como as Tecnologias Digitais e a Teoria de Jogos são relevantes campos de estudos e de produção acadêmica atualmente. O objetivo central de tais perspectivas de ensino é promover e facilitar o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes que, historicamente, carece de técnicas e meios voltados para esse propósito.

Nesse contexto, a inserção de Jogos Digitais no contexto escolar se apresenta como uma alternativa pedagógica significativa para ser implementada em sala de aula. É válido mencionar que as perspectivas de ensino precisam ser desenvolvidas de maneira planejada e consciente pelo professor. Além disso, as ações didáticas devem ser realizadas de modo que os objetivos educacionais estejam bem definidos e possam ser alcançados efetivamente.

Ao pensarmos nas metodologias de ensino citadas anteriormente, o jogo eletrônico Duelo das Retas se apresenta como uma ferramente tecnológica que pode ser utilizada para trabalhar conteúdos matemáticos em sala de aula. Assuntos como geometria plana e analítica, plano cartesiano, sistema de coordenadas e raciocínio lógico são alguns exemplos de temas possiveis de serem abordados a partir da utilização do jogo.

Foi observado que o jogo Duelo das Retas é a evolução do jogo inicial Intersecting Lines. Nesse sentido, as principais ideias relacionadas à primeira versão do aplicativo refletem-se na segunda versão. O objetivo central em realizar a maior quantidade de intersecções entre retas de uma mesma cor, as regras, a pontuação, as cores dos pontos e das retas criadas pelos jogadores são alguns exemplos das semelhanças entre os dois jogos digitais.

Além disso, foi possível verificar na segunda versão do aplicativo o acréscimo de novas figuras geométricas, bem como distribuições de pontos específicas para cada polígono base. Foram observadas também generalizações referentes a elaboração de uma estratégia ideal que garante a vitória ou o empate ao jogador que a utilizar. Soma-se a isso, a criação de uma expressão matemática que permite a contagem do número máximo de retas que podem existir para um dos casos abordados durante as análises das partidas apresentadas.

É válido mencionar que durante o desenvolvimento das ideias acerca do presente trabalho, cogitou-se a possibilidade de incluir pontos nos vértices dos polígonos base escolhidos para as partidas. Essa perspectiva de jogo teria como efeito a provável alteração na dinâmica do jogo e nas considerações que foram realizadas a partir da estrutura definida para a análise. Isso significa que tal vertente de jogo caracteriza um campo de pesquisa que anseia por novos estudos e investigação.

Ademais, é possível pensarmos em algumas possibilidades de implementações futuras para o jogo Duelo das Retas. O uso de um cronômetro para a delimitação do tempo que cada jogador terá para realizar a sua jogada, bem como a proposta de partidas disputadas de forma online por dois jogadores são exemplos de possíveis inovações para o aplicativo.

Referências Bibliográficas

[1] BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Coleção tendências em Educação Matemática, Autêntica, 2001.

[2] CARNEIRO, Reginaldo Fernando; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades**. Revista Eletrônica de educação, v. 8, n. 2, p. 101-119, 2014.

[3] EDITORA ABRIL. Coleção completa Superinteressante. **Cruzamentos Perigosos** por Luiz Dal Monte Neto, 1996.

[4] GEOGEBRA, software de geometria dinâmica. Version 5.0.216.0. [S.I]: Markus Hohenwarter, 2001. Disponível em <http://www.geogebra.org/>. Acesso em: 06 de agosto de 2023.

[5] GRANDO, Regina Célia et al. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000.

[6] MIORIM, M. A., FIORENTINI, D. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM-SP, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

[7] PINGUAD, F.; GERME, J. F. 50 Jeux avec du Papier et des Crayons. Du Rocher, 1984.

[8] QUEIROZ, Micaeli Meira. **Intersecting Lines: um Jogo de Raciocínio**, Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista (BA), 2021.