

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA  
UESB**

Wellington Dias Ribeiro

**Quatro Conjecturas e muitas Tentativas:**

Problemas em aberto da Teoria de Números envolvendo Números Primos

**Vitória da Conquista - Bahia**

**Mai - 2022**

Wellington Dias Ribeiro

## **Quatro Conjecturas e muitas Tentativas:**

Problemas em aberto da Teoria de Números envolvendo Números Primos

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Júlio César dos Reis.

**Vitória da Conquista - Bahia**

**2022**

## Folha de aprovação

Wellington Dias Ribeiro

### **Quatro Conjecturas e muitas Tentativas:**

Problemas em aberto da Teoria de Números envolvendo Números Primos

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Júlio César dos Reis - UESB  
Orientador

---

Prof<sup>a</sup>. Clênia Andrade Oliveira de Melo  
UESB

---

Prof. Edson Patrício Barreta de Almeida  
IFBA

Vitória da Conquista - BA  
2022

*Dedico esta monografia à todos que me apoiaram e me incentivaram durante minha graduação.*

---

## RESUMO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, versa sobre quatro Conjecturas da Teoria dos Números, envolvendo os **Números Primos**. Cada um dos capítulos apresenta os enunciados, dá exemplos, conta a biografia de cada matemático autor da Conjectura em questão, traz um contexto histórico do ano em que foram publicadas e mostra algumas tentativas falhas de demonstrá-las. Conjecturas essas sendo a Conjectura de **Goldbach**, a mais antiga de todas, completando 280 anos no dia 07 de Junho de 2022; A Conjectura de **Legendre**, a mais ofuscada, não sendo tão conhecida, pois existe o Teorema dos **Números Primos** que, antes de ser demonstrado, carregava o mesmo nome por ser idealizada pela mesma pessoa; A Conjectura de **Oppermann**, a mais intrinsecamente conectada, onde sua própria demonstração resultaria na demonstração direta da Conjectura de **Legendre** e influenciará fortemente na demonstração da Conjectura de **Andrica**; E, por fim, a Conjectura de **Andrica**, a mais jovem das quatro, publicada em 1986. Dos vários métodos utilizados nas tentativas falhas de demonstração, o mais interessante foi o usado por um brasileiro, este, por sua vez, fez uma redução ao absurdo numa tentativa errônea e com vários furos em sua execução, mas, mesmo sendo um método simples, equivocado e corriqueiro, traz uma diversidade maior nas tentativas existentes.

**Palavras-chave:** Números Primos. Goldbach. Legendre. Oppermann. Andrica.

---

## ABSTRACT

In this Course Completion Work, it deals with four Conjectures of Number Theory, involving **Prime Numbers**. Each of the chapters presents the statements, gives examples, tells the biography of each mathematician author of the Conjecture in question, brings a historical context of the year in which they were published and shows some failed attempts to demonstrate them. These conjectures being the **Goldbach's** Conjecture, the oldest of all, completing 280 years on June 7, 2022; **Legendre's** Conjecture, the most obfuscated, is not so well known, as there is the Theorem of **Prime Numbers** which, before being demonstrated, carried the same name because it was devised by the same person; The **Oppermann's** Conjecture, the most intrinsically connected, where its own proof would result in the direct proof of the **Legendre's** Conjecture and will strongly influence the proof of the **Andrica's** Conjecture; And, finally, **Andrica's** Conjecture, the youngest of the four, published in 1986. Of the various methods used in failed demonstrations, the most interesting was the one used by a Brazilian, who, in turn, reduced to absurd in an erroneous attempt and with several holes in its execution, but, even being a simple, mistaken and common method, it brings a greater diversity in the existing attempts.

**Keywords:** Prime Numbers. Goldbach. Legendre. Oppermann. Andrica.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>1 Uma Breve noção dos Números Primos</b>	<b>7</b>
1.1 Formalizações . . . . .	7
1.1.1 Divisão Euclidiana . . . . .	7
1.1.2 Divisibilidade nos Inteiros . . . . .	7
1.1.3 Máximo Divisor Comum . . . . .	8
1.1.4 Congruência . . . . .	8
1.1.5 Números Primos . . . . .	9
1.2 Propriedades . . . . .	9
1.3 Teorema Fundamental da Aritmética . . . . .	11
1.4 Tipos de Primos . . . . .	12
1.4.1 Tamanho . . . . .	12
1.4.2 Lei de Formação . . . . .	12
1.5 Infinitude e Distribuição dos Números Primos . . . . .	13
1.5.1 Os Números Primos são Infinitos? . . . . .	13
1.5.2 Como é a Distribuição dos Números Primos entre os Naturais? . . . . .	14
1.6 Curiosidades . . . . .	15
<b>2 A conjectura de Goldbach</b>	<b>17</b>
2.1 Enunciado: . . . . .	17
2.2 Quem foi Goldbach? . . . . .	17
2.3 Contexto Histórico: . . . . .	20
2.4 Tentativas frustradas de Demonstração . . . . .	20
2.4.1 Usando a Teoria de Conjuntos . . . . .	21
2.4.2 Usando uma Releitura . . . . .	22
2.4.3 Reduzindo ao Absurdo . . . . .	23

<b>3</b>	<b>A conjectura de Legendre</b>	<b>27</b>
3.1	Enunciado: . . . . .	27
3.2	Quem foi Legendre? . . . . .	27
3.3	Contexto Histórico: . . . . .	31
3.3.1	1ª ed. do “ <i>Ensaio sobre a Teoria dos Números</i> ” (1798) . . . . .	31
3.3.2	2ª ed. do “ <i>Ensaio sobre a Teoria dos Números</i> ” (1808) . . . . .	32
3.3.3	“ <i>Teoria dos Números</i> ” (1830) . . . . .	32
3.4	Tentativas frustradas de Demonstração . . . . .	33
3.4.1	Usando um Complemento . . . . .	34
3.4.2	Reduzindo ao Absurdo . . . . .	36
<b>4</b>	<b>A Conjectura de Oppermann</b>	<b>41</b>
4.1	Enunciado: . . . . .	41
4.2	Quem foi Oppermann? . . . . .	41
4.3	Contexto Histórico: . . . . .	43
4.4	Tentativas frustradas de Demonstração . . . . .	44
4.4.1	Se “Aproximando” um pouco . . . . .	45
4.4.2	Partindo de um Pressuposto . . . . .	50
<b>5</b>	<b>A conjectura de Andrica</b>	<b>52</b>
5.1	Enunciado: . . . . .	52
5.2	Quem foi Andrica? . . . . .	53
5.3	Contexto Histórico: . . . . .	54
5.4	Tentativas frustradas de Demonstração . . . . .	56
5.4.1	Partindo de um Pressuposto . . . . .	56
5.4.2	Reduzindo ao Absurdo . . . . .	58
	<b>Conclusão</b>	<b>61</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>



# Introdução

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) tem como tema “Problemas em aberto da Teoria de Números envolvendo Números Primos”, onde a pergunta central é: “A Matemática responde todas as perguntas que dela surgem?”. A hipótese aqui estabelecida é que não, a Matemática não responde todas as perguntas que dela surgem e para isso o principal objetivo desta monografia é trazer a tona um panorama geral sobre quatro Conjecturas que se mantêm firmes e sem uma demonstração concreta e aceita na comunidade matemática e que envolvam os Números Primos. Sendo elas a Conjectura de Goldbach, que enuncia “todo número par maior que dois pode ser representado pela soma de dois números primos.”; A Conjectura de Legendre no qual diz “existe sempre um número primo entre  $n^2$  e  $(n + 1)^2$ , para qualquer  $n$  inteiro positivo.”; A Conjectura de Oppermann, que fala “ $\forall n \in \mathbb{Z}$  e  $n > 1$ , existe ao menos um número primo entre  $n(n - 1)$  e  $n^2$  e ao menos outro número primo entre  $n^2$  e  $n(n + 1)$ ”; E, por fim, a Conjectura de Andrica onde diz que “se  $P_n$  denota o  $n$ -ésimo número primo, então para todo  $n > 1$  a desigualdade  $\sqrt{P_{n+1}} - \sqrt{P_n} < 1$  é verdadeira”. Este panorama será constituído de enunciado, exemplos, biografia do idealizador, contexto histórico do ano, ou possível ano, de publicação e tentativas falhas de demonstrações.

Em consonância com os objetivos do TCC, foram usado diversas fontes para pesquisa, desde Revistas Científicas, livros acadêmicos, livros didáticos, artigos científicos de diversos autores espalhados pelo mundo, tudo com a intenção de fazer uma apuração mais esmiuçada o possível, realizando assim uma pesquisa bibliográfica. Já que se trata de Conjecturas de décadas e até séculos de idade, a precisão das informações se tornam cada vez mais difícil de se manter.

Uma vez pesquisadas todas as informações mais relevantes, interessantes e com maior certeza de veracidade, elas foram organizadas em cinco capítulos que compõem o corpo principal desta monografia.

O Primeiro Capítulo é responsável por, primeiramente, embasar e/ou relembrar o leitor sobre tanto o que é um Número Primo, quanto das suas principais aplicações e/ou propriedades, já que ele é o epicentro das quatro Conjecturas que são os tópicos de estudo deste trabalho. O capítulo um será dividido em seis sessões, sendo elas, respectivamente, Definição, Propriedades,

Teorema Fundamental da Aritmética, Tipos de Primos, Infinitude e Distribuição e, por fim, Curiosidades.

Os Tipos de Primos serão divididos em dois grupos, pela quantidade de dígitos, ou seja, o tamanho e pela lei de formação. A divisão em duas subseções também acontece para a Infinitude e Distribuição, onde cada subseção irá responder uma pergunta sobre o cada tema respectivamente.

Os quatro capítulos seguintes têm a mesma divisão em sessões, sendo elas Enunciado, Exemplos, Quem foi o autor, Contexto Histórico do ano, ou possível ano, de publicação e as tentativas frustradas de demonstração de cada uma destas Conjecturas. A ordem da disposição das Conjecturas por entre os capítulos é cronológica.

O Primeiro Capítulo trabalha a Conjectura de Goldbach que veio a público no dia 7 de Junho de 1742, em uma carta destinada à Leonhard Euler. Nesta mesma carta continha outra conjectura, esta segunda foi chamada de Conjectura Fraca de Goldbach, onde a Conjectura que é trabalhada neste capítulo seria a Conjectura Forte de Goldbach. Essa nomeação perdeu mais o uso, pois a fraca já foi analiticamente demonstrada, por isso, a Conjectura em questão será tratada simplesmente como Conjectura de Goldbach.

O Segundo Capítulo lida com a Conjectura de Legendre. Não se tem um ano certo de sua publicação, entretanto, todos os trabalhos da área de Teoria dos Números de Legendre foram organizados e comportados e três publicações, 1<sup>a</sup> ed. do *“Ensaio sobre a Teoria dos Números”* (1798), 2<sup>a</sup> ed. do *“Ensaio sobre a Teoria dos Números”* (1808) e *“Teoria dos Números”* (1830), esse último é a terceira edição do Ensaio, mas foi publicado com um novo nome.

O Terceiro Capítulo tem como epicentro a Conjectura de Oppermann, essa em questão tem, de certa forma, um papel de elo entre os capítulos 2 e 4 e as Conjecturas neles trabalhados. A Demonstração da Conjectura de Oppermann implicaria diretamente na veracidade da Conjectura de Legendre e daria um grande salto na demonstração da Conjectura de Andrica. Ela foi publicada no ano de 1882, em um artigo de nome *“Om vor Kundskab om Primtallenes Mængde mellem givne Grændser”*.

Por último, a mais jovem das quatro conjecturas trabalhadas nesta monografia, a Conjectura de Andrica. Idealizada pelo romeno Dorin Andrica e publicada no artigo *“Nota sobre uma conjectura na teoria dos números primos”* no ano de 1986. A Conjectura de Andrica diz sobre a distância de dois números primos, sua aplicação seria muitíssimo relevante na área de computação, mais especificadamente no campo de Criptografia.

Carregando vários percalços, estas quatro Conjecturas enfrentaram o tempo, mentes brilhantes, o esquecimento, o ressurgimento e a era da tecnologia em que se vive atualmente, mesmo assim se mantiveram como uma muralha praticamente intransponível. Todas envolvendo o objeto de estudo matemático mais simples e brilhante, o Número Primo.

# Capítulo 1

## Uma Breve noção dos Números Primos

Este capítulo é destinado à uma explicação mais aprofundada e detalhada sobre os **Números Primos**. Nele serão vistas as principais e mais relevantes propriedades e classificações que tratam do tamanho e da lei de formação destes números, que são usadas muitas das vezes na procura dos maiores exemplares existentes ou na procura de algum primo específico, para utilização em problemas e/ou algoritmos na área da Ciência da Computação. Ainda, este capítulo, traz algumas curiosidades e/ou fatos interessantes sobre eles.

### 1.1 Formalizações

Nesta sessão, será apresentado algumas definições e exemplos que serão de grande importância para que a leitura desta monografia ocorra sem maiores problemas e/ou dúvidas.

#### 1.1.1 Divisão Euclidiana

**Definição 1.1.1.** *Dados  $a$  e  $p$  dois inteiros não nulos, chamados de dividendo e divisor, respectivamente, existem  $q, r \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = p \cdot q + r$ , onde  $q$  e  $r$  são chamados de quociente e resto, respectivamente, unicamente determinados por  $a$  e  $p$ . Além disso têm-se que  $0 \leq r < |p|$ .*

**Exemplo:** Sendo  $a = 49$  e  $p = 5$ , existem  $q = 9$  e  $r = 4$ . Da mesma forma, pegando agora  $p = 8$ , temos  $q = 6$  e  $r = 1$ .

#### 1.1.2 Divisibilidade nos Inteiros

**Definição 1.1.2.** *Sejam  $a$  e  $b$  dois inteiros, com  $a \neq 0$ . Dizemos que  $a$  divide  $b$  se, e somente se, existe um inteiro  $q$  tal que  $b = a \cdot q$ . Logo, quando acontece o caso particular do resto da Divisão Euclidiana for igual a zero, ou seja,  $b = a \cdot q + 0$ , implica que  $a$  divide  $b$ . Se  $a$  divide*

*b dizemos que a é um divisor de b, que b é um múltiplo de a, que a é fator de b ou que b é divisível por a. A afirmação a divide b, será simbolizada por  $a \mid b$  e sua negação por  $a \nmid b$ .*

**Exemplo:** O número  $52 = 2 \cdot 26$ , então  $2 \mid 52$ . Já  $3 \nmid 52$ , pois não existe nenhum inteiro  $q$  tal que  $52 = 3 \cdot q$ .

**Proposição 1.** *Quaisquer que sejam os inteiros  $a, b$  e  $c$ . Tem-se:*

- (a)  $a \mid 0, 1 \mid a$  e  $a \mid a$ ;
- (b) Se  $a \mid 1$ , então  $a = \pm 1$ ;
- (c) Se  $a \mid b$  e se  $c \mid d$ , então  $ac \mid bd$ ;
- (d) Se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então  $a \mid c$ ;
- (e) Se  $a \mid b$  e se  $b \mid a$ , então  $a = \pm b$ ;
- (f) Se  $a \mid b$ , com  $b \neq 0$ , então  $|a| \leq |b|$ ;
- (g) Se  $a \mid b$  e se  $a \mid c$ , então  $a \mid (bx + cy), \forall x, y \in \mathbb{Z}$ .

### 1.1.3 Máximo Divisor Comum

**Definição 1.1.3.** *O Máximo Divisor Comum (mdc) entre  $a$  e  $b$ , denotado por  $\text{mdc}(a, b)$ , é o maior inteiro positivo  $d$  que é divisor comum de  $a$  e  $b$ , ou seja, é o maior inteiro positivo que divide  $a$  e  $b$  ao mesmo tempo. Se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , dizemos que  $a$  e  $b$  são primos entre si ou coprimos.*

**Exemplo:** O  $\text{mdc}(64, 48) = 16$ , pois  $64 = 4 \cdot 16$  e  $48 = 3 \cdot 16$ .

### 1.1.4 Congruência

**Definição 1.1.4.** *Dizer que  $a$  é congruente a  $b$  módulo  $m$  significa dizer que  $a$  e  $b$  deixam o mesmo resto quando divididos por  $m$ . De uma maneira mais formal, se  $a, b, m \in \mathbb{Z}$ , com  $m > 0$ , dizemos que  $a$  é congruente a  $b$  módulo  $m$  se  $m \mid (b - a)$ . Denotaremos essa situação por  $a \equiv b \pmod{m}$ .*

**Proposição 2.** *Sejam,  $a, b, c$  e  $m$  inteiros, com  $m > 0$ . Então:*

- (a)  $a \equiv a \pmod{m}$ ;
- (b) Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $b \equiv a \pmod{m}$ ;
- (c) Se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $b \equiv c \pmod{m}$ , então  $a \equiv c \pmod{m}$ .

**Exemplo:**  $21 \equiv 15 \pmod{6}$ , pois  $6 \mid (21 - 15) \Rightarrow 6 \mid 6$ . Observe que o resto da divisão do dois números por 6 é igual a 3.

### 1.1.5 Números Primos

**Definição 1.1.5.** *Seja  $a \in \mathbb{N}$  e  $a > 1$ , se seus únicos divisores são  $a$  e  $1$ , então  $a$  é chamado de Número Primo*

**Exemplo:** Os números 2, 29 e 127, são primos, já os números 125, 35 e 10, não são, pois são divisíveis por 5.

## 1.2 Propriedades

Para mostrar e demonstrar as propriedades mais relevantes e importantes dos Números Primos, vamos tomar  $p$  e  $q$  sendo números primos e  $a$  um número natural qualquer. Com isso temos que:

1. Se  $p \mid q$ , então  $p = q$ .

**Demonstração:** Como  $p \mid q$  e sendo  $q$  um número primo, implica que  $p = 1$  ou  $p = q$ . Entretanto, temos que, por definição de primo,  $p > 1$ . Resultando então que  $p = q$ .  $\square$

**Exemplo:** Se  $13 \mid p$  e  $p$  é primo, então  $p = 13$ .

2. Se  $p \nmid a$ , então  $\text{mdc}(p, a) = 1$ .

**Demonstração:** De forma direta, temos que, se  $\text{mdc}(p, a) = b$ , implica que  $b \mid p$  e  $b \mid a$ . Logo  $b = p$  ou  $b = 1$ , entretanto  $b \neq p$ , pois  $p \nmid a$ , resultando que  $b = 1$ .  $\square$

**Exemplo:**  $5 \nmid 42$ , então  $\text{mdc}(5, 42) = 1$ .

3. Sejam  $a, b, p \in \mathbb{N}^*$ , com  $p$  primo. Se  $p \mid ab$ , então  $p \mid a$  ou  $p \mid b$ .

**Demonstração:** De forma simples, somente é preciso mostrar que se  $p \mid ab$  e  $p \nmid a$ , isto é,  $\text{mdc}(p, a) = 1$ , implica diretamente que  $p \mid b$ . De forma análoga, mostra-se para  $p \mid ab$  e  $p \nmid b$ .  $\square$

**Exemplo:**  $7 \mid 84 = 7 \mid 12 \cdot 7 = 7 \mid 6 \cdot 14 = 7 \mid 3 \cdot 28 \rightarrow 7 \mid 7, 7 \mid 14, 7 \mid 28$ .

4. Se  $p, p_1, p_2, \dots, p_n$  são números primos e se  $p \mid p_1 \dots p_n$ , então  $p = p_i$  para algum  $i \in [1, n]$ .

**Demonstração:** Como  $p \mid p_1 \dots p_n$ , então, pela propriedade **3**, implica que existe algum  $p_i$ , com  $i \in [1, n]$ , em que  $p \mid p_i$ . Logo, como  $p_i$  é primo e pela propriedade **1**, temos que  $p = p_i$ .  $\square$

**Exemplo:** Para que a sentença  $3 \mid 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot p \cdot 13$ , da forma citada acima, seja verdadeira, temos que  $p = 3$ .

5. **Pequeno Teorema de Fermat:** Dados  $p$  primo e  $a \in \mathbb{Z}$ , com  $\text{mdc}(p, a) = 1$ . Temos que  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

*Demonstração:* Usando o método Binomial, temos que:

$$(a + 1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{p-k} 1^k$$

$$(a + 1)^p = \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!(p-k)!} a^{p-k}$$

$$(a + 1)^p = a^p + pa^{p-1} + p \frac{p-1}{2} a^{p-2} + \dots + pa + 1$$

Logo temos,

$$(a + 1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p} \tag{1.1}$$

pois,  $pa^{p-1} + p \frac{p-1}{2} a^{p-2} + \dots + pa \equiv 0 \pmod{p}$ , ou note que  $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$  para  $0 < k < p$ . Assim, subtraindo  $a + 1$  nos dois lados da congruência (1.1), temos:

$$(a + 1)^p - (a + 1) = a^p + 1 - (a + 1) \pmod{p}$$

$$(a + 1)^p - (a + 1) = a^p - a \pmod{p} \tag{1.2}$$

Vamos usar agora o Princípio de Indução Finita (PIF), para concluir o resultado. Primeiro verificamos em (1.2) se, para  $a = 1$ ,  $a^p - a$  é divisível por  $p$ , o que é verdade, já que  $1^p - 1 = 0$ .

Suponhamos que  $a^p - a$  é divisível por  $p$ . Assim, pela congruência (1.2),  $(a + 1)^p - (a + 1)$  também será divisível por  $p$  e, portanto, pelo PIF, temos que:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Assim, como  $\text{mdc}(p, a) = 1$ , podemos escrever essa congruência da forma:

$$a \cdot a^{p-1} \equiv a \cdot 1 \pmod{p}$$

resultando em:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

□

**Exemplo:** Dados  $p = 7$  e  $a = 4$ , temos que  $4^{7-1} \equiv 1 \pmod{7} \rightarrow 4^6 \equiv 1 \pmod{7} \rightarrow 4096 \equiv 1 \pmod{7}$ . Se colocarmos 4096 no algoritmo de divisão de Euclides, temos que  $4096 = 7 \cdot 585 + 1$ , com isso temos então que realmente  $4096 \equiv 1 \pmod{7}$ .

### 1.3 Teorema Fundamental da Aritmética

Sendo  $a \in \mathbb{Z}$  e  $a > 1$ ,  $a$  pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos, ou seja,  $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$ , onde  $p_i$  é primo e  $i = [1, n]$ .

**Demonstração:** Para esta demonstração, vamos usar a prova por absurdo. Então suponhamos que exista ao menos um inteiro maior que 1, que não possa ser representado por fatores primos. Tomando  $A$  o conjunto de todos esses números. Como  $A$  é um subconjunto dos inteiros, ele possui um elemento mínimo pelo Princípio da Boa Ordem e vamos pegar  $\alpha$  como este elemento. Como  $\alpha > 2$ , pois 2 é primo, e tem fatoração em fatores primos, então existem  $a$  e  $b$ , tais que  $\alpha = ab$ , com  $a < \alpha$  e  $b < \alpha$ , e como  $a, b \notin A$ , já que são menores que  $\alpha$  e  $\alpha$  é o menor elemento de  $A$ , eles possuem fatoração e, portanto,  $\alpha = ab$  também possui fatoração, chegando em um absurdo, pois  $\alpha \in A$ .

Logo,  $A$  não pode ter elemento mínimo, e, portanto,  $A = \emptyset$ , o que demonstra a veracidade da existência.

Agora para provar a unicidade deste produto de primos, vamos fazer uso da propriedade **3**, mas vamos lê-la da forma “Se  $p \mid a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ , com  $p$  primo, então  $p$  divide pelo menos um fator  $a_i$  do produto”.

Com isso, seguiremos da seguinte forma, vamos primeiro tomar  $\alpha = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_s$  duas fatorações de  $\alpha$ . Salientando que os  $p_i$ 's não são necessariamente distintos, da mesma forma os  $q_i$ 's.

Da igualdade, e da definição de divisibilidade, verificamos que  $p_1 \mid q_1 q_2 \dots q_s$  e, portanto, pelo lema, existe  $k$  tal que,  $p_1 \mid q_k \rightarrow p_1 = q_k$ , já que ambos são primos. Por extensão, para qualquer  $j > k$ , existe um  $i < n$ , tal que  $p_j \mid q_i \rightarrow p_j = q_i$ . Por fim, basta provar que  $n = k$ , que é trivial, já que, se  $n > k$  teríamos que  $q_1 q_2 \dots q_k \dots q_n = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_k$ , o que seria um absurdo, já que  $q > 1$ . Ou seja, o conjunto  $q_i$  deve ser idêntico ao de  $p_j$ .

Logo, somente existe uma única fatoração em um produto de números primos, a menos da ordem. □

**Exemplo:** Se pegarmos o número 173910, podemos escrever ele como  $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31$ .

## 1.4 Tipos de Primos

Dentro da vasta infinidade dos números primos, existem alguns tipos que são especiais e interessantes, descobertos por mentes brilhantes em momentos diversos da nossa história. Será dividido os tipos em dois grupos, pelo tamanho, ou seja, sobre o número de dígitos destes números primos e pela sua lei de formação, ou seja, a maneira em que eles podem ser generalizados.

### 1.4.1 Tamanho

- **Primos Titânicos:** São os primos com 1000 (mil) ou mais dígitos. Esse nome foi dado por Samuel Yates, que, em 1984, deu início à uma lista de nome “Os Maiores Primos Conhecidos”.
- **Primos Gigantes:** São os primos com 10000 (dez mil) ou mais dígitos. Com sua lista tomando proporções nunca imaginadas, Samuel Yates, na década de 90, criou uma nova denominação para comportar estes números imensos.
- **Megaprimos:** Os números primos que recebem esta classificação, têm nada mais nada menos do que no mínimo 1000000 (um milhão) de dígitos em sua composição.

### 1.4.2 Lei de Formação

- **Primos de Mersenne:** Podem ser escritos da forma  $2^n - 1$ .  
**Exemplo:** Os primos 3, 7, 31, 127 e 191 são os cinco primeiros Primos de Mersenne.
- **Primos de Fermat:** Sua generalização se acarreta da forma  $2^{2^n} + 1$ .  
**Exemplo:** Até hoje só são conhecidos cinco Primos de Fermat, que são: 3, 5, 17, 257 e 65537.
- **Primos Sophie Germain:** São os primos  $p$ , onde  $2p + 1$  também é um primo.  
**Exemplo:** Os vinte primeiros primos Sophie Germain são: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191, 233, 239, 251, 281, 293.
- **Primos de Wieferich:** São os números primos  $p$  em que  $p^2 \mid 2^{p-1} - 1$ .  
**Exemplo:** Os únicos Primos de Wieferich conhecidos são o 1093 e o 3511.
- **Primos de Wilson:** De maneira semelhante aos de Wieferrich, os primos de Wilson  $p$ , onde  $p^2 \mid (p - 1)! + 1$ .



**Exemplo:** Somente são conhecidos três Primos de Wilson, que são o 5, 13 e o 563.

- **Primos Fatoriais:** Como o próprio nome já diz, os primos fatoriais são da forma  $n! \pm 1$ .

**Exemplo:** Pegando  $p = n! - 1$  e os dez primeiros valores de  $n$  para que  $p$  seja primo, teremos  $n = 3, 4, 6, 7, 12, 14, 30, 32, 33, 38$ . Agora pegando  $p = n! + 1$  e os dez primeiros valores de  $n$  para que  $p$  seja primo, teremos  $n = 1, 2, 3, 11, 27, 37, 41, 73, 77, 116$ .

## 1.5 Infinitude e Distribuição dos Números Primos

Sobre os números primos, duas perguntas foram de suma importância. Tais perguntas seriam, primeiro, os números primos são infinitos? Ou seja, Existe um Conjunto infinito  $P$ , que engloba todos os números primos? E segundo, Como é a distribuição destes números por entre os elementos do Conjunto dos números naturais?

### 1.5.1 Os Números Primos são Infinitos?

Da profunda meditação sobre a primeira indagação, saíram as mais diversas justificativas para uma mesma resposta. Os gregos enxergavam tais números como “blocos de construção”, para que, usando deles, fosse possível construir todos os outros números. Euclides, em seu livro IX dos “Elementos”, provou de forma geométrica a infinitude dos números primos. Ele tomou cada número primo como se o mesmo fosse um segmento de reta com tamanho equivalente ao seu valor absoluto, por exemplo, o número 2 seria um segmento de reta com 2 unidades de medida, da mesma maneira os primos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , seriam associados à segmentos de reta com, respectivamente,  $a$ ,  $b$  e  $c$  unidades de medida.

Fazendo uma releitura da prova geométrica feita por Euclides, podemos reescrevê-la algebricamente. Suponhamos que exista somente uma quantidade finita  $n$  de números primos, denominados  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , basta provar que existe um certo número primo  $p_{n+1} > p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ . Juntamente com isso, seja  $P$  o produto de todos os números primos existentes somado a 1, ou seja,  $P = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$ , obviamente  $P$  é muito maior do que todos os números primos existentes. Nesta situação, se  $P$  for um número primo, então já poderíamos dizer que  $P = p_{n+1}$ , o que mostra que sempre existir um número primo maior do os conhecidos, implicando que existem infinitos números primos. Mas se  $P$  não for primo, então pelo Teorema Fundamental da Aritmética, temos que ele pode ser dividido por um número primo  $p_i < P$ . Entretanto,  $p_i$  não pertence ao conjunto finito de números primos, pois,  $\forall p_i \in \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  a divisão de  $P$  por  $p_i$  sempre terá resto 1. Logo, existe outro número primo  $p_i = p_{n+1} > p_n$ , implicando que sempre existe um número primo maior do que o anterior, ou seja, o conjunto de todos os números primos é infinito.

## 1.5.2 Como é a Distribuição dos Números Primos entre os Naturais?

Agora sobre uma Lei de Distribuição dos Números Primos, essa se mantém oculta das mentes humanas desde os tempos mais remotos. Se, para os matemáticos, esta lei seria ovacionada, “O tão esperado resultado”, o mais difícil e problemático de ser alcançado para a matemática pura, para a informática poderia ser o prelúdio de sérios problemas. Já que a Criptografia usa dos números primos para manterem seus sistemas seguros. O Sistema Criptográfico RSA (Rivest-Shamir-Adleman), usa da fatoração de um número natural em números primos, onde a chave pública é um natural absurdamente grande e a chave privada, usada como “senha”, são os primos resultantes da fatoração de tal natural. Se uma Lei de Distribuição dos Números Primos fosse realmente demonstrada e aceita, seria muitíssimo mais simples quebrar esse sistema criptográfico e assim muitas redes de transmissão e trocas de informações seriam afetadas e sua segurança seria gravemente afetada.

Existem diversas conjecturas que falam a cerca desse fato, mas nenhuma delas com perfeição, não demonstradas analiticamente pelo menos. É claro que vale ressaltar que existe leis para casos específicos, como por exemplo  $n^2 + n + 41$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , entretanto esta lei somente vale para  $n \leq 39$ , já que  $39^2 + 39 + 41 = 1601$  que é um número primo, mas  $40^2 + 40 + 41 = 1681$  que não é um primo.

Mas o que realmente vem à mente quando se pensa em uma Lei que fala sobre a Distribuição dos Números Primos, com toda certeza ela não teria restrições tão enormes quanto  $n^2 + n + 41$ . Entretanto de todas as idealizações, nenhuma foi firmemente e analiticamente provada até o dia de publicação dessa monografia. A mais imponente e poderosa Conjectura que já nasceu e diz sobre este assunto, foi a Hipótese de Riemann. A Hipótese diz que a função Zeta de Riemann tem seus zeros somente nos números pares negativos e em números complexos com a parte real  $\frac{1}{2}$ . Onde a função Zeta de Riemann é uma função especial de variável complexa, definida na Série de Dirichlet, quando  $a_n = 1$  e para o caso onde  $Re(s) > 1$ , resultando em:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Mas o que uma hipótese sobre os zeros de uma função complexa tem haver com os números primos que são números naturais? A fórmula de Riemann para o número de primos menores que um determinado número, em termos de uma soma sobre os zeros da função de Riemann, afirma que a magnitude das oscilações de primos sobre sua posição desejada é controlada pelas partes reais dos zeros da função zeta. somados à isso, ainda têm-se o fato de que o termo de erro do Teorema dos Números Primos está relacionado com a posição dos zeros da função zeta de Riemann. Teorema esse que diz que a função contagem de números primos

menores ou iguais a  $n$ ,  $\Pi(n)$ , é aproximadamente  $\frac{n}{\ln(n)}$ . Esse resultado foi demonstrado por Jacques Hadamard e Charles-Jean de La Vallée Poussin, através de estudos sobre a função zeta de Riemann. Diversos resultados saíram de estudos de tal função, entretanto ela não é a única Conjectura em aberto que fala sobre os números primos. Goldbach, Legendre, Oppermann e Andrica tiveram sua cota considerável de importância para com a relação de suas conjecturas e a distribuição dos números primos.

## 1.6 Curiosidades

Neste tópico, foi apresentado alguns fatos interessantes e/ou curiosidades, sobre os números primos.

- Seja  $p$  um número primo e seja  $p \neq 2$  e  $p \neq 5$ , o número  $\frac{1}{p}$  é sempre uma dízima periódica, contendo um período de  $p - 1$  ou um divisor de  $p - 1$ . Além disso, se trocarmos o numerador por um  $q$  qualquer e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , então a propriedade se mantém.

**Ex<sub>1</sub>:**  $\frac{1}{23} = 0,0434782608695652173913...0434782608695652173913...$

**Ex<sub>2</sub>:**  $\frac{12}{7} = 1.714285...714285...$

- O **Teorema de Wilson** é um teste de primariedade que diz que, tendo  $p \in \mathbb{Z}$  e  $p > 1$ , ele é um número primo se, e somente se,  $p \mid (p - 1)! + 1$ .

**Ex<sub>1</sub>:** Sendo  $p = 7$ , temos que  $(7 - 1)! + 1 = 6! + 1 = 721$  e  $721 = 7 \cdot 103$ , ou seja,  $7 \mid 721$ . Então 7 é primo.

**Ex<sub>2</sub>:** Sendo  $p = 6$ , temos que  $(6 - 1)! + 1 = 5! + 1 = 121$  e  $121 = 6 \cdot 20 + 1$ , ou seja,  $6 \nmid 121$ . Então 6 NÃO é primo.

- Pois em falar no Wilson, existe somente 3 *Primos de Wilson*, que são os primos da forma  $p$  primo, onde  $p^2 \mid (p - 1)! + 1$ , que é uma particularidade do teorema com seu nome. Estes poucos são o 5, o 13 e o 563.
- Da mesma maneira que, em 1909, Wieferich achou somente 2 números que eram da forma dos *Primos de Wieferich*, que satisfaz a expressão  $p^2 \mid 2^{p-1} - 1$ , sendo  $p$  primo. Essa dupla singular é o 1093 e 3511.
- Existe, atualmente, 51 números primos que são do tipo *Primos de Mersenne*, assim nomeados em homenagem ao monge francês Marin Mersenne.
- O **Postulado de Bertrand** diz que, se  $n \in \mathbb{Z}^+$ , então sempre existe um número  $p$ , sendo  $p$  primo, com  $n < p \leq 2n$ .

**Ex:** Tomando  $n = 42$ , como  $42 < p \leq 84$ , então  $p = \{43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83\}$ .

- Para cada um dos números primos existentes que são maiores que 2, existe um  $n \in \mathbb{N}$ , que satisfaz a igualdade  $p = 4n \pm 1$ . De maneira análoga, para primos maiores que 3, temos um  $n \in \mathbb{N}$ , que satisfaz a igualdade  $p = 6n \pm 1$ .

**Ex<sub>1</sub>:** Sendo este número primo em questão o 13, temos então que  $n = 3$ , pois  $13 = 4 \cdot 3 + 1$ . Também temos que, se o primo for 23, então  $n = 6$ , já que  $23 = 4 \cdot 6 - 1$ .

**Ex<sub>2</sub>:** Agora sendo  $p = 17$ , temos que  $n = 3$ , pois  $17 = 6 \cdot 3 - 1$ . Já no caso de  $p = 31$ , implica que  $n = 5$ , resultando que  $31 = 6 \cdot 5 + 1$ .

- Segundo o IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, o maior número primo já descoberto até agora, é o  $2^{82589933} - 1$ , apelidado carinhosamente de M82589933. Ele é o 51<sup>o</sup> *Primo de Mersenne* encontrado até agora, com nada mais nada menos do que 24862048 dígitos, mais de 1,5 milhão do que o recordista descoberto em 2017. O M82589933 foi descoberto no dia 7 de dezembro de 2019, entretanto só foi oficializado no dia 21 de dezembro, depois de passar duas semanas sofrendo testes e mais testes para comprovar sua primariedade.

# Capítulo 2

## A conjectura de Goldbach

Um dos problemas matemáticos que assolam a humanidade e que ainda permanece sem solução completa e aceita, é a **Conjectura de Goldbach**. Nascida em meio à uma troca de correspondências entre Christian Goldbach e Leonhard Euler, mais especificadamente em 7 de Junho 1742, mesmo com um prêmio de 1 milhão de dólares para quem conseguir prová-la, esta conjectura ainda traz pesadelo aos matemáticos de todo mundo.

### 2.1 Enunciado:

“Todo número par maior que dois pode ser representado pela soma de dois números primos.”

**Exemplo 1:** O número 120 pode ser representado pela soma  $59 + 61$ , sendo ambos números primos.

**Exemplo 2:** O número 1658 pode ser representado pela soma  $751 + 907$ , sendo ambos números primos.

**Exemplo 3:** O número 58642 pode ser representado pela soma  $29303 + 29339$ , sendo ambos números primos.

### 2.2 Quem foi Goldbach?

Segundo o portal de História da Matemática, MacTutor, criado e mantido por Edmund Robertson e John O'Connor da School of Mathematics and Statistics da Universidade de St. Andrews, a cidade de Königsberg, que também pode ser escrita como Conisberga, já conhecida pelo “Problema das Sete Pontes de Königsberg”, foi onde nasceu e cresceu Christian Goldbach,

onde o mesmo frequentou a universidade, estudando direito e medicina. Entretanto, em 1710, Christian partiu em peregrinação numa longa jornada pela Europa e essa viagem foi o epicentro dos motivos dele ter trilhado caminhos diferentes dos seus estudos em sua cidade natal.

Em meados de 1711, ele conheceu Gottfried Wilhelm Leibniz, polímata e filósofo alemão, além de ser uma das figuras centrais para a história da matemática e da filosofia. Mesmo após Goldbach se mudar, os dois ainda mantiveram correspondências, para ser exato, foram cinco cartas de Leibniz para Goldbach e seis cartas de Goldbach para Leibniz, todas escritas e mandadas entre os anos de 1711 e 1713 e escritas em latim.

Em 1712, Goldbach conheceu, em Oxford, Nicolau I Bernoulli (também conhecido por Nicolaus ou Nicolas), matemático suíço sócio da Academia de Berlim, Fellow (título honorífico concedido a cientistas notáveis e também é um tipo de afiliação da Royal Society) da Sociedade Real de Londres e Sócio da Academia de Bolonha, que também viajava pela Europa e visitava a Inglaterra. Goldbach era fascinado por matemática, mas entendia pouquíssimo do assunto, quando Bernoulli começou a discutir séries infinitas com ele, lhe foi confessado o total desconhecimento do assunto, foi então que ele lhe emprestou um livro que fala desse mesmo tópico, cujo autor era Jacob Bernoulli, tio de Nicolaus, entretanto Christian achou o tema muito difícil e, naquela época, desistiu de tentar entendê-lo.

Continuando sua viagem, Goldbach se encontrava em Veneza em 1721, onde ele conheceu Nicolau II Bernoulli (primo de Nicolau I Bernoulli), que também estava em turnê pelos países europeus e foi ele quem sugeriu que Goldbach começasse a se corresponder com seu irmão mais novo, Daniel Bernoulli, no ano de 1723 e assim se seguiu pelos sete anos adjacentes. Já em 1724, Christian tinha retornado à sua cidade natal e lá conheceu as duas pessoas que mudariam sua vida: Georg Bernhard Bilfinger (filósofo, matemático e político alemão) e Jakob Hermann (matemático suíço). Bilfinger havia sido professor de filosofia moral e matemática em Tübingen, mas tinha acabado de ser demitido com a acusação de ser ateu, acusação essa que nasceu através de sua associação com o filósofo Christian Wolff, que organizou para que Bilfinger fosse envolvido na criação da Academia Imperial de Ciência, que mais tarde ia ser chamada de St. Petersburg Academy of Sciences, tanto Bilfinger quanto Hermann estavam a caminho de São Petersburgo quando conheceram Goldbach.

Quando estava em Ringa, em julho de 1725, Christian escreveu à LL Blumentrost, o presidente eleito da nova Academia proposta, pedindo um cargo. Após a rápida e inicial rejeição, foi oferecido os cargos de professor de matemática e de historiador à Goldbach, em São Petersburg. Isso só foi possível pois ele havia retornado a empregar esforços em estudos na matemática, começando logo após ler o artigo de Leibniz sobre como calcular a área de um círculo em 1717, depois de entender e se maravilhar com esse novo universo, ele retornou ao estudo sobre séries infinitas e seu histórico como matemático melhorou consideravelmente. Em

1720, Goldbach publicou “*Specimen methodi ad summas serierum*” (“Um Exemplo de Método de Soma de Séries”) no *Acta Eruditorum* (Jornal da Educação) e em 1724, outro artigo foi publicado, com alguns outros trabalhos menores publicados anteriormente. Portanto, ele se tornou um matemático estabelecido, embora seus artigos não traziam um conteúdo muito inovador.

Goldbach mudou-se para Moscou depois de ser nomeado para o cargo de tutor do Imperador Pedro II da Rússia, filho de Pedro I, O Grande. A necessidade de se mudar para Moscou se deu ao fato de Pedro II ter transferido o tribunal para lá em 1728, já que, na época, a capital da Rússia era São Petersburgo. Após se mudar para Moscou, Goldbach iniciou uma troca de correspondência com Leonhard Euler em 1729, sendo que este se mudou pra lá em 17 de maio de 1727, esse importante período de correspondências durou cerca de 35 anos. Pedro II morreu em janeiro de 1730 de varíola, então Goldbach não era mais necessário como tutor, entretanto ele continuou servindo Anna Ivanovna que tinha se tornado Imperatriz da Rússia. Anna, em 1732, mudou a corte de volta para São Petersburgo e Goldbach voltou de volta para lá, novamente se tornando ativo na Academia, além de estar fortemente envolvido com o governo russo. Ele foi nomeado secretário correspondente da Academia em 1723 e em 1737 ele se tornou uma das duas pessoas responsáveis pela administração da Academia.

Goldbach, em 1740, solicitou que sua gama de deveres na Academia fosse reduzida e, assim que foi nomeado sênior no Ministério das Relações Exteriores, ele encerrou suas funções na Academia, continuando a subir em status, com belos aumentos de salário e ainda recebeu algumas terras. Em 1760 ele se tornou um conselheiro particular e foi convidado a estabelecer a orientação para a educação dos filhos reais.

Durante o período de correspondências com Euler, nasceu a Conjectura que leva seu nome e permanece em aberto até os dias de hoje. **A Conjectura de Goldbach** diz que todo número inteiro par maior que 2, pode ser representado como a soma de dois números primos. Goldbach também conjecturou que todo número ímpar é a soma de três primos, Vinogradov fez progresso nessa segunda conjectura em 1937. Também na correspondência Euler-Goldbach, eles discutem números de Fermat, números de Mersenne, números perfeitos, a representação de números naturais como a soma de quatro quadrados, problema de Waring, polinômios que representam vários números primos, o último teorema de Fermat e a representação de quaisquer números ímpares na forma  $2n^2 + p$ , onde  $p$  é primo.

A última conjectura foi feita por Goldbach em uma carta escrita a Euler em 18 de novembro de 1752. Euler respondeu em 16 dezembro, dizendo que havia verificado a Conjectura de Goldbach até 1000. Em uma carta de 3 de abril de 1753, Euler relatou que havia verificado até 2500. Na verdade, a segunda conjectura feita por Goldbach é falsa, em 1856, Moritz A Stern, professor de matemática em Göttingen (Cidade universitária da Alemanha) encontrou dois números que não podem ser escritos da forma  $2n^2 + p$ , onde  $p$  é primo, que são 5777 e

5993.

## 2.3 Contexto Histórico:

Contendo 52 semanas, o ano de 1742 do calendário gregoriano, 1191-1192 no armênio, 4438-4439 no chinês, 5502-5503 no judaico, 1120-1121 no persa, 1155-1156 no islâmico e, por fim, 1992 no calendário rúnico, foi o ano de surgimento da Conjectura de Goldbach, nascida em meio à uma troca de cartas dele com o matemático Euler.

Começando e se encerrando em uma segunda-feira, este ano trouxe alguns acontecimentos interessantes, por exemplo, neste ano, o navegador britânico Christopher Middleton recebeu a Medalha Copley pela comunicação sobre suas observações da tentativa de encontrar uma rota norte-oeste para as Índias através da Baía de Hudson.

Em 13 de Novembro de 1742, a Academia Real Dinamarquesa de Ciências foi fundada pelo rei Christian VI. Outro acontecimento marcante seria o estudo sobre a curva Trissetriz de Colin Maclaurin, cuja equação cartesiana era  $y^2(a+x) = x^2(3-x)$ , ou em coordenadas polar  $r = \frac{2a \cdot \text{sen}(3\theta)}{\text{sen}(2\theta)}$ , iniciado pela primeira vez naquele ano e foi estudada para fornecer uma solução para um antigo problema grego sobre a trisseção de um ângulo, daí vindo o nome da curva. Depois disso, veio a publicação de Maclaurin, denominada “Treatise on Fluxions”, que tinha como objetivo fornecer uma base rigorosa para o cálculo, apelando para os métodos de geometria grega, sendo a primeira exposição sistemática dos métodos de Newton, escrita em resposta ao ataque que George Berkeley cometeu ao cálculo por sua falta de fundamentos “rigorosos”, nas palavras dele.

Foi também em 1742 que Euler, em uma correspondência para Nicolau II Bernoulli e Goldbach, mostrou que o contraexemplo, para com o teorema central do limite, que Leibniz deu em 1702, era falso. Ao mesmo tempo ocorria a publicação de “As Obras Completas” de Johann Bernoulli por Cramer em quatro volumes.

## 2.4 Tentativas frustradas de Demonstração

A Conjectura de Goldbach foi passada pelos matemáticos no fim do século XVIII e por todo o XIX como uma conjectura de fácil entendimento e de prova praticamente impossível. Da família das conjecturas que passaram décadas sem serem provadas, um dos vários motivos para isso, é que alguns deles temem perder a credibilidade como matemático ao fracassar na demonstração de tal conjectura. Nos dias de hoje, esse tipo de pensamento ainda perpetua, entretanto com muito menos intensidade. O divisor de águas foi tanto a lista dos 23 problemas proposta por David Hilbert no Congresso Internacional de Matemática de Paris em 1900, quanto



os Problemas de Landau, publicada no Congresso de 1912, pelo matemático Edmund Landau. Nestas duas publicações, estava presente a Conjectura de Goldbach, na lista de Hilbert sendo o oitavo problema e nos Problemas de Landau sendo o primeiro dos quatro problemas.

Falando dela, após a publicação destas duas lista de problemas, as publicações de resultados relacionados com a Conjectura de Goldbach aumentaram de forma impressionante. Olhando de uma forma cronológica, o primeiro deles se deu no ano de 1919, onde o matemático norueguês Viggo Brun demonstrou que qualquer número par suficientemente grande é a soma de dois números, onde cada um deles tem no máximo nove fatores primos. Passando para o ano de 1923 com os matemáticos britânicos Godfrey Harold Hardy e John Edensor Littlewood, foi mostrado que, assumindo a Hipótese generalizada de Riemann, todo o número ímpar suficientemente grande é a soma de três números primos, e quase todos os números pares são a soma de dois números primos. Em 1930, seguindo com embasamento no resultado de Brun, Lev Schnirelman demonstrou que todo inteiro par maior ou igual à 2 é a soma de, no máximo, vinte números primos. Outro resultado relevante aconteceu em 1937, com o matemático russo Ivan Matveevich Vinogradov, que conseguiu retirar a dependência para com a Hipótese de Riemann, provando assim a conclusão que Hardy e Littlewood, entretanto não conseguiu determinar o que “suficientemente grande” queria dizer. Quase 30 anos depois em 1966, Chen Jingrm, matemático chinês, usou do resultado de Brun como base e demonstrou que todo número par suficientemente grande é a soma de um número primo e um produto de, no máximo, dois números primos. E a Conquista mais recente sobre esta Conjectura e, sem dúvidas, a mais promissora, é o Teorema de Ramaré, comprovada por Olivier Ramaré, ela diz que “Todo número par é a soma de, no máximo, seis números primos”, este teorema pode ser entendido como uma extensão do Teorema de Shnirelmann.

Mesmo depois de todas essas tentativas de demonstração, a Conjectura de Goldbach comemorará seu aniversário de 280 anos em 7 de Junho de 2022. Observando os resultados obtidos através das décadas, vemos o quão abundante são as formas de se abordar um único problema matemático, desde formas muitíssimo complicadas de se ler o problema, até belos exemplos de criatividade que os matemáticos deram pelo mundo a fora, para poder suprir a falta de caminhos a se seguir e assim engajar na técnica de prova que o próprio matemático melhor se adéqua. Sabendo disso, será mostrado três dessas abordagens mirabolantes e únicas.

### 2.4.1 Usando a Teoria de Conjuntos

Todos os números primos, exceto o 2, são ímpares, também é de conhecimento comum que a soma de dois números ímpares resulta em um número par, ou seja, tendo  $a = 2n - 1$  e  $b = 2m - 1$ , implica que  $a + b = 2n - 1 + 2m - 1 = 2(n + m - 1)$  que é um número par. Assim, se for mostrado que com a combinação de todos os números primos ímpares, somados dois

de cada vez, resultar no conjunto de todos os números pares maiores do que 4, a Conjectura de Goldbach estaria provada. Começando com a verificação para os números pares menores ou iguais a 100 e usando o Conjunto dos Números Primos ímpares  $P = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ , a primeira combinação será  $3 + p_i$ , com  $p_i \in P$ , isso resultará no subconjunto  $A \subset 2\mathbb{N}$ , com  $A = \{3 + p_i \mid p_i \in P\}$  e  $2\mathbb{N}$  o conjunto de todos os números naturais múltiplos de 2, assim sendo:

$$A = \{6, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 32, 40, 44, 46, 50, 56, 62, 64, 70, 74, 76, 82, 86, 92, 100\}$$

Assim, se fizer a união de  $A$  com o subconjunto  $B \subset 2\mathbb{N}$ , sendo  $B = \{5 + p_i \mid p_i \in P\}$ , resultará em:

$$A \cup B = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 32, 34, 36, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 56, 58, 62, 64, 66, \\ 70, 72, 74, 76, 82, 84, 86, 88, 92, 94, 100\}$$

Repetindo este mesmo processo, juntamente com o subconjunto  $C \subset 2\mathbb{N}$ , com  $C = \{7 + p_i \mid p_i \in P\}$ , nascerá:

$$A \cup B \cup C = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, \\ 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 100\}$$

Como se pode observar, ao combinar apenas 3, 5 e 7 com os demais primos, o único número par menor do que 100 que não apareceu a partir destas combinações, foi o 98, onde, pela Conjectura de Goldbach, pode-se ser representado por  $98 = 19 + 79$ . Agora, se for observado até os números par menores ou iguais do que 200, tem-se que o número  $128 = 19 + 109$ , se juntaria ao grupo de números “desaparecidos”, ao mesmo tempo, é possível perceber que todos os dois exemplares tem o primo 19, como possível parcela de soma, com isso seria necessário combinar todos os primos até o 19. Entretanto, esse caso leva à outro problema, levando em conta que isso pode se repetir para diversos números pares, requerindo o uso de outros diversos números primos, então é difícil concluir quantos subconjuntos serão necessários para gerar todos os pares até um determinado par.

## 2.4.2 Usando uma Releitura

A abordagem se baseia numa Conjectura que é equivalente à Conjectura de Goldbach, sendo tão parecida que é fácil de se classificar como uma releitura da original. A releitura diz que “Seja  $a$  um número par maior do que 2. Existe  $j$ , inteiro, de forma a que  $a = 2n = (n-j) + (n+j)$ ,”

com  $n - j$  e  $n + j$  primos”. Assim sendo que o objetivo é encontrar  $j$  inteiro, de forma a que  $n - j$  e  $n + j$  sejam primos. É claro que, como a Conjectura segue em aberto até o dia de finalização desta monografia, a abordagem não resultou na prova concreta e aceita. Entretanto, isso não quer dizer que foi um desperdício de tempo, desta visão e caminho, saiu o seguinte teorema:

**Teorema 1.** *Seja  $n$  um número inteiro maior ou igual a 2. Então, existe  $j$  inteiro tal que  $n - j$  e  $n + j$  não são divisíveis por  $2, 3, 5, \dots, p_k$ , sendo  $p_k$  o maior primo menor ou igual a  $\sqrt{2n}$ .*

**Demonstração:** Seja  $n$  um número maior ou igual a 2, e consideremos  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , os primos menores ou iguais a  $\sqrt{2n}$ . Consideremos  $a_i \not\equiv \pm n \pmod{p_i}$ , com  $1 \leq i \leq k$ . Pelo Teorema do Resto Chinês, existe uma solução módulo  $m$ , onde  $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ , para o seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} j \equiv a_1 \pmod{p_1} \\ j \equiv a_2 \pmod{p_2} \\ \dots \\ j \equiv a_k \pmod{p_k} \end{cases}$$

Então,  $j \equiv a_i \not\equiv \pm n \pmod{p_i}$ , e logo,  $n \pm j \not\equiv 0 \pmod{p_i}$  para  $1 \leq i \leq k$ . Assim,  $n + j$  e  $n - j$  não são divisíveis por  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Se  $n \pm j \leq 2n$ , então  $n \pm j$  é primo já que  $\sqrt{n \pm j} \leq \sqrt{2n}$  e  $n \pm j$  não é divisível por todos os números primos menores ou iguais a  $\sqrt{2n}$ . contudo,  $j$  é uma solução módulo  $m$ , logo,  $j$  pode ser maior do que  $n$ , o que implicaria que  $n + j > 2n$  e  $n - j < 0$ . Assim, se  $|j| \leq n - 2$ , então  $n + j$  e  $n - j$  são primos. Como o valor de  $j$  depende dos valores de  $a_i$  escolhidos, é necessário que estes sejam escolhidos de forma a que o valor de  $j$  encontrado torne  $n + j$  e  $n - j$  em números primos.

□

### 2.4.3 Reduzindo ao Absurdo

Confiando nos vários resultados obtidos por meio de algoritmos de contagem e pela própria fala de Leonard Euler quando o mesmo respondeu a carta de Goldbach que continha esta conjectura, dizendo que ela era sim verdadeira, mas ele não era capaz de demonstrá-la, o Mestre em Matemática, Adecio da Silva Santos, professor de Matemática no IFPI-SRN (Instituto Federal do Piauí - Campus São Raimundo Nonato), elaborou uma tentativa de demonstração usando o método de Redução ao Absurdo.

**Demonstração:** Note que todo número par maior que 2 é a soma de dois primos ou é a soma de um primo com um ímpar composto ou é a soma de dois ímpares compostos.

Pelo fato da verificação em computadores que mostraram para vários números pares em sequência e muito grandes que os mesmos são a soma de dois primos, iremos provar que

quaisquer somas de qualquer primo ímpar com qualquer ímpar composto ou a soma de quaisquer dois ímpares compostos, cuja as mesmas sejam maiores que 10, é a soma de dois primos.

Para tanto, suponhamos, por absurdo, que algum número par maior que 10 fosse a soma de um número primo,  $p_0$ , com um número ímpar composto,  $C_0$ , ou seja,  $p_0 + C_0$ , e esta soma nunca fosse a soma de dois primos. Além disso, note que todo número par maior que 10 admite um número ímpar composto, digamos  $C_x$ , com  $C_x + 2$  sendo primo.

Agora, tomemos o maior número ímpar composto, digamos  $C_x < p_0 + C_0$  com  $C_x + 2$  sendo primo e o menor primo, digamos  $p_x < p_0 + C_0$  tais que  $C_x + p_x < p_0 + C_0$ . Veja que  $p_0 + C_0 = C_x + 2 + p_x$ , contraria nossa suposição, pois  $p_x$  e  $C_x + 2$  são primos. Então, subtraindo o termo  $C_x + p_x$  em todos os membros da expressão  $C_x + p_x < p_0 + C_0 < C_x + 2 + p_x$  obtemos que  $0 < p_0 + C_0 - (C_x + p_x) < 2$ . Ou seja, o número par  $p_0 + C_0 - (C_x + p_x) = 1$ . **ABSURDO!**

Analogamente, suponhamos, por absurdo, que exista algum número par maior que 10 sendo a soma de dois números ímpares compostos, digamos  $C_0 + C_1$ , e esta soma nunca fosse a soma de dois primos. Além disto, podemos tomar um primo  $p_0 < C_0 + C_1$  admitindo números ímpares compostos menores que ele.

Vamos, agora, tomar o maior número ímpar composto menor do que  $C_0 + C_1$ , digamos  $C_x$ , e cujo seu sucessor ímpar seja primo e o menor primo (que admita ímpares compostos menores que ele), digamos  $p_x$ , menor do que  $C_0 + C_1$ , tais que  $C_x + p_x < C_0 + C_1$ . Isto implica, pela minimalidade de  $p_x$  e pelo maximal de  $C_x$  no seguinte resultado  $C_x + p_x < C_0 + C_1 < C_x + 2 + p_x$ , pois, se  $C_0 + C_1 = C_x + 2 + p_x$ , o fato de  $C_x + 2$  ser primo teríamos que a expressão  $C_0 + C_1$  seria a soma de dois primos, o que contraria nossa suposição. Finalmente, subtraindo o termo  $C_x + p_x$  em todos os membros da expressão  $C_x + p_x < C_0 + C_1 < C_x + 2 + p_x$  obtemos que  $0 < C_0 + C_1 - (C_x + p_x) < 2$ . Ou seja, o número par  $C_0 + C_1 - (C_x + p_x) = 1$ . **ABSURDO!**

Portanto, todo número par maior do que 10, pode ser representado pela soma de dois números primos, pois a mesma, como provamos acima, representa sempre a soma de um número primo com um ímpar composto ou é a soma de dois ímpares compostos. Além disto, temos que  $2 + 2 = 4$ ,  $3 + 3 = 6$ ,  $3 + 5 = 8$  e  $5 + 5 = 10$ . Então podemos concluir que todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.  $\square$

Infelizmente, esta Demonstração contém alguns erros, então não pode ser aceita como uma prova definitiva e sólida de que a Conjectura de Goldbach é verdadeira. No momento em que ele diz que “Além disso, note que todo número par maior que 10 admite um número ímpar composto, digamos  $C_x$ , com  $C_x + 2$  sendo primo.” é uma afirmação equivocada, facilmente podemos exemplificar números ímpares compostos que, somado a 2, não resulta em um número primo. Ainda podemos facilmente mostrar que nem todo número primo subtraído por 2 resulta em um número primo ímpar composto. Para o primeiro exemplo, pode-se pegar os números  $25 = 5 \cdot 5$ ,  $33 = 11 \cdot 3$  e  $49 = 7 \cdot 7$ , onde  $25 + 2 = 27$ ,  $33 + 2 = 35$  e  $49 + 2 = 51$ , resultando

todos em números ímpares também compostos,  $27 = 3^3$ ,  $35 = 5 \cdot 7$  e  $51 = 17 \cdot 3$ . De uma forma mais simples ainda, mesmo que sua infinitude ainda seja algo não provado, a existência dos Números Gêmeos é um claro exemplo de números primos subtraídos por 2 que resulta ainda em um número primo, por exemplo,  $\{3, 5\}$ ,  $\{11, 13\}$  e  $\{17, 19\}$ , onde  $5 - 2 = 3$ ,  $13 - 2 = 11$  e  $19 - 2 = 17$ . Ainda temos o fato de que, de todas as combinações possíveis para se somar um número primo ímpar e um número ímpar composto, nem todas resultaria em um composto ímpar que somado com 2 resultaria em um número primo. Se pegarmos o número 100, por exemplo, todas as combinações possíveis de somar dois números ímpares para resultar 100, seria:

3+97		5+95		7+93	
11+89	13+87	17+83	19+81		
23+77	29+71	31+69	37+63		
41+59	43+57	47+53	61+39		
67+33		73+27		79+21	

Avaliando essa mesma tabela, podemos separar estas somas entre três categorias, vermelho para a soma de dois números primos, a soma de um ímpar composto com um primo ímpar e ainda a soma de um ímpar composto que somado a 2 resulta um número primo e um primo ímpar.

3+97		5+95		7+93	
11+89	13+87	17+83	19+81		
23+77	29+71	31+69	37+63		
41+59	43+57	47+53	61+39		
67+33		73+27		79+21	

Com isso a generalização some por meio desta demonstração, uma escolha de números específicos com características específicas para demonstrar algo que engloba um todo, não é uma forma

correta de executar a prova. A Conjectura de Goldbach fala que todo número par maior do que 2 é a soma de dois números primos, isso acarreta em um gigantesco número de casos, onde uma generalização verdadeira, sólida e corretamente estruturada seja altamente necessária.

# Capítulo 3

## A conjectura de Legendre

Mesmo ofuscada pelo seu irmão mais famoso, a Conjectura de Legendre segue firme e forte, se mantendo inabalável mesmo com as muitas tentativas de demonstrá-la.

### 3.1 Enunciado:

“Existe sempre um número primo entre  $n^2$  e  $(n + 1)^2$ , para qualquer  $n$  inteiro positivo.”

**Exemplo 1:** Com  $n = 4$ , temos o intervalo  $[16, 25]$ , onde os números primos  $\{17, 19, 23\}$  pertencem ao intervalo.

**Exemplo 2:** Com  $n = 12$ , temos o intervalo  $[144, 169]$ , onde os números primos  $\{149, 151, 157, 163, 167\}$  pertencem ao intervalo.

**Exemplo 3:** Com  $n = 52$ , temos o intervalo  $[2704, 2809]$ , onde os números primos  $\{2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, 2741, 2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791, 2797, 2801, 2803\}$  pertencem ao intervalo.

### 3.2 Quem foi Legendre?

Existem pouquíssimos detalhes da infância de Adrien-Marie Legendre, segundo o Mac-Tutor, a maioria das evidências indica que seu nascimento se deu na cidade das luzes, Paris, entretanto existem alguns indícios de que ele nasceu em Toulouse e a família se mudou para a capital francesa quando ele ainda era muito jovem. Um ponto fixo entre todos os murmúrios e histórias de sua infância é que ele veio de família rica e recebeu uma educação de alta qualidade em matemática e física no Collège Mazarin em Paris, também conhecida como Collège des Quatre-Nations.

No ano de 1770, aos 18 anos, Legendre defendeu sua tese em matemática e física no Collège Mazarin, mas, naquela época, isso não era uma conquista tão impressionante quanto nos parece hoje, pois consistia mais em um plano de pesquisa do que uma tese concluída. Na tese, ele listou a literatura que estudaria e os resultados que pretendia provar. Sem necessidade de emprego para se sustentar, Legendre morou em Paris e se concentrou em tal pesquisa.

De 1775 a 1780, ele lecionou com Pierre-Simon Laplace na École Militaire, onde sua nomeação foi feita pelo Conselho de d'Alembert. Em 1782 ele decidiu se inscrever no prêmio em projéteis oferecido pela Academia de Berlim. A tarefa em questão era para determinar a curva descrita por balas e bombas, levando em consideração a resistência do ar e ainda fornecer regras para obter os intervalos correspondentes a diferentes velocidades iniciais e a diferentes ângulos de projeções. Seu ensaio "*Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants*" ganhou o prêmio e deu início à sua carreira de pesquisador. Ainda no ano de 1782, Joseph-Louis Lagrange era Diretor de Matemática na Academia de Berlim, após o anúncio do vencedor do prêmio, sua atenção caiu diretamente em Legendre, o que o fez escrever para Laplace pedindo mais informações sobre o jovem matemático premiado.

Em seguida, Legendre estudou a atração dos elipsoides. Ele deu uma prova de um resultado devido a Colin Maclaurin, que as atrações em um ponto externo situado no eixo principal de dois elipsoides confocais eram proporcionais às suas massas. Ele então introduziu o que chamamos hoje de funções de Legendre e as usou para determinar, usando séries de potências, a atração de um elipsoide em qualquer ponto exterior. Legendre submeteu seus resultados à Académie des Sciences em Paris, em janeiro de 1783, onde os mesmos foram bastante elogiados por Laplace em seu relatório entregue à Académie em março. Poucos dias depois da entrega deste relatório, Legendre foi nomeado adjunto na Académie des Sciences, preenchendo a vaga deixada por Laplace após ser promovido de adjunto para associado no início daquele ano.

Nos anos seguintes, Legendre publicou trabalhos em várias áreas. Em particular, ele publicou sobre a mecânica celeste com artigos como "*Recherches sur la figure des planètes*" em 1784, que contém os polinômios de Legendre; teoria dos números com "*Recherches d'analyse indéterminée*" em 1785, por exemplo; e a teoria das funções elípticas com artigos sobre integrações por arcos elípticos em 1786.

O artigo de 1785 sobre a teoria dos números contém uma série de resultados importantes, como a lei da reciprocidade quadrática para resíduos e os resultados de toda série aritmética com o primeiro termo coprimo para a diferença comum contém um número infinito de primos. É claro que hoje atribuímos a lei da reciprocidade quadrática a Gauss e o teorema sobre os primos em uma progressão aritmética a Dirichlet. Isso é justo, pois a prova de Legendre da reciprocidade era insatisfatória, ao passo que ele não ofereceu nenhuma prova do teorema sobre



os primos em uma progressão aritmética. No entanto, esses dois resultados são de grande importância e o crédito deve ir para Legendre por seu trabalho sobre eles, embora ele não tenha sido o primeiro a estabelecer a lei da reciprocidade quadrática, uma vez que ocorre na obra de Leonhard Euler de 1751 e também de 1783.

A carreira de Legendre na Académie des Sciences progrediu de forma satisfatória. Ele se tornou um associado em 1785 e depois em 1787 ele era um membro da equipe cuja tarefa era trabalhar com o Observatório Real de Greenwich, em Londres, em mediações da Terra envolvendo uma pesquisa de triangulação entre os observatórios de Paris e Greenwich. Esse trabalho resultou em sua eleição para a Royal Society of London em 1787 e também para uma importante publicação, o *“Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre”*, que contém o teorema de Legendre sobre os triângulos esféricos.

Em 13 de maio de 1791, Legendre tornou-se membro do comitê da Académie des Sciences com a tarefa de padronizar pesos e medidas. O comitê trabalhou no sistema métrico e realizou as observações astronômicas e triangulações necessárias para calcular o comprimento do metro. Nesta época, Legendre também estava trabalhando em seu texto principal, *“Eléments de Géométrie”*, que foi encorajado a escrever por Marie Jean Antoinette Nicolas de Caritat (Marquês de Condorcet). No entanto, a Académie des Sciences foi encerrada devido à Revolução de 1793 e Legendre teve dificuldades especiais visto que perdeu a capital que lhe proporcionou um rendimento confortável.

Após o trabalho do comitê sobre o sistema decimal no qual Legendre serviu, Gaspard de Prony em 1792 deu início a uma importante tarefa de produzir tabelas logarítmicas e trigonométricas, o Cadastro. Legendre e de Prony chefiaram a sessão matemática deste projeto junto com Nicolas Léonard Sadi Carnot e outros matemáticos. Tiveram entre 70 e 80 assistentes e a obra desenvolveu-se ao longo de vários anos, sendo concluída em 1801.

Em 1795, a Académie des Sciences foi reaberta como Institut National des Sciences et des Arts e, desde então, até 1806, reuniu-se no Louvre. Cada sessão do Institut continha seis lugares, e Legendre era um dos seis na sessão de matemática. Em 1803, Napoleão reorganizou o Institut e uma sessão de geometria foi criada e Legendre foi colocado nesta sessão. Legendre publicou um livro sobre a determinação das órbitas dos cometas em 1806. Seu método envolveu três observações feitas em intervalos iguais e ele presumiu que o cometa seguiu um caminho parabólico, de modo que acabou com mais equações do que incógnitas. Ele aplicou seus métodos aos dados conhecidos de dois cometas. Em um apêndice, Legendre apresentou o método dos mínimos quadrados para ajustar uma curva aos dados disponíveis. No entanto, Gauss publicou sua versão de método dos mínimos quadrados em 1809 e, embora reconhecendo que ele apareceu no livro de Legendre, Gauss ainda reivindicou prioridade para si mesmo. Isso magoou muito

Legendre, que lutou por muitos anos para ter sua prioridade reconhecida.

Em 1808, Legendre publicou uma segunda edição de sua *“Théorie des nombres”* o que foi uma melhoria considerável em relação à primeira edição de 1798. Por exemplo, Gauss provou a lei da reciprocidade quadrática em 1801 depois de fazer comentários críticos sobre a prova de Legendre de 1785 e a prova muito melhorada de Legendre de 1798 na primeira edição de *“Théorie des nombres”*. Gauss estava certo, mas podia-se entender o quão doloroso deve ter sido para Legendre receber um forte ataque a seus resultados por um homem tão jovem. É claro que Gauss não afirmou que estava melhorando o resultado de Legendre, mas sim reivindicou o resultado para si mesmo, já que foi a primeira prova era completamente rigorosa. Para seu critério, Legendre usou a prova de reciprocidade de Gauss na edição de 1808 de *“Théorie des nombres”*, dando o devido crédito a Gauss. A mesma edição também continha a estimativa de Legendre para  $\pi(n)$  o número primo  $\leq n$  tem-se  $\pi(n) = \frac{n}{\log(n) - 1,08366}$ . Mais uma vez, Gauss afirma que havia obtido a lei para a distribuição assintótica de primos antes de Legendre, mas certamente foi Legendre quem primeiro trouxe essas ideias à atenção dos matemáticos.

O principal trabalho de Legendre sobre funções elípticas nos *“Exercices du Calcul Intégral”* apareceu em três volumes, em 1811, 1817 e 1819. No primeiro volume Legendre introduziu as propriedades básicas das integrais elípticas e também das funções beta e gama. Mais resultados sobre funções beta e gama apareceram no segundo volume junto com as aplicações de seus resultados à mecânica, a rotação da Terra, a atração de elipsoides e outros problemas. O terceiro volume foi amplamente dedicado a tabelas de integrais elípticas.

Em novembro de 1824, ele decidiu reimprimir uma nova edição, mas não ficou feliz com esse trabalho. Em setembro de 1825, começou a publicação de seu novo trabalho *“Traité des Fonctions Elliptiques”* novamente em três volumes, em 1825, 1826 e 1830. Este novo trabalho abrangeu um material semelhante ao original, mas o material foi completamente reorganizado. No entanto, apesar de passar 40 anos trabalhando em funções elípticas, Legendre nunca superou o insight de Carl Gustav Jacob Jacobi e Niels Henrik Abel, o trabalho independente desses dois matemáticos estava tornando o novo trabalho de Legendre em três volumes obsoleto quase assim que foi publicado.

A tentativa de Legendre de provar o postulado paralelo estendeu-se por mais de 30 anos. No entanto, segundo ele, tudo falhou porque ele sempre se apoiava em proposições que eram “evidentes” do ponto de vista euclidiano.

Em 1824, Legendre recusou-se a votar no candidato do governo para o Institut National, como resultado dessa recusa, sua pensão foi suspensa e ele morreu na pobreza.

### 3.3 Contexto Histórico:

Não se sabe ao certo em que ano a Conjectura de Legendre foi publicada. Um dos motivos disso é que outra conjectura de sua autoria ganhou muito mais visibilidade, tanto pela grande importância, quanto pelo fato de que já foi rigorosamente provada em 1898 por Jacques Hadamard e Charles-Jean de La Vallée Poussin. Conhecido agora como a Teoria dos Números Primos, quando foi publicada em 1796, onde também era conhecida como Conjectura de Legendre.

Entretanto, Legendre organizou suas ideias, para com a área da Teoria dos Números, em 3 publicações mais relevantes. É claro que houve sim outras publicações na área, mas foram englobadas no “*Ensaio sobre a Teoria dos Números*”, tanto na primeira edição, quanto na segunda. Então, como não se sabe o ano exato de lançamento da conjectura que é o objeto de discussão deste capítulo, será exibido a visão do contexto histórico de cada ano do lançamento das três obras.

#### 3.3.1 1ª ed. do “*Ensaio sobre a Teoria dos Números*” (1798)

A primeira edição do Ensaio veio com intuito de reagrupar todos os seus estudos e publicações sobre a Teoria dos Números, também com o objetivo de complementar alguns pontos que estavam incompletos e/ou insatisfatórios para a comunidade de matemáticos da época ou mesmo para o próprio Legendre. Sendo publicado em 1798, veio em meio à um turbilhão de acontecimentos em seu país, já que a Revolução Francesa estava mais borbulhante do que nunca.

No âmbito da Revolução Francesa, os franceses ocuparam Roma em 11 de fevereiro daquele ano, fazendo o Papa Pio VI abandonar Roma quatro dias depois disso, onde o mesmo se estabeleceu em Valence, uma comuna francesa. Ao decorrer daquele ano, muitas idas e vindas ocorreram no cenário da guerra, como o vai e vem da mudança de quem controla Roma com o Reino Nápoles, que tomou a cidade em 29 de novembro, mas perde e o controle dela retornou para as mãos francesas. Esse ato, faz com que a França declare guerra para o Reino Nápoles no dia 4 de dezembro e o invada no mesmo dia que retoma o domínio de Roma.

Afunilando a visão para o mundo das ciências, o ano de 1798 foi, de certa forma, um ano parado e sem muitos eventos maiores, dado o fato de que a Revolução Francesa estava se arrastando para o Egito. Em 9 de Setembro Herschel descobriu a galáxia espiral conhecido nos tempos de hoje como a “Galáxia dos Fogos de Artifício”. No mesmo mês houve uma Comissão Internacional começou a trabalhar para substituir os valores provisórios por valores precisos calculados a partir dos dados coletados por Delambre e Méchain, onde Delambre fez medições de linha de base precisa em Melum, perto de Paris. Naquele mesmo ano George Atwood foi

premiado com a Medalha Copley da Royal Society pelo trabalho de nome Análise de um Curso de Palestras sobre os Princípios da Filosofia Natural. Por fim, um dos últimos acontecimentos nas ciências daquele ano, foi o isolamento do elemento químico Cromo.

### 3.3.2 2<sup>a</sup> ed. do “*Ensaio sobre a Teoria dos Números*” (1808)

A segunda edição do Ensaio, publicado em 1808, veio em meio à grandes expansões do exército francês comandado por Napoleon Bonaparte. Ela foi dividida em 5 partes, as três primeiras eram uma retomada dos conteúdos retratados na edição de 1798 e as outras duas com novas ideias que foram construídas nos anos que se passaram desde a primeira edição.

O ano de 1808 foi bem conturbado na Europa, com as investidas de Bonaparte seguindo firmes e a punho de ferro. Os franceses invadiram Portugal em janeiro, forçando a família real dos Bragança a se refugiarem no Brasil, mais especificadamente em Salvador, na Bahia. Em maio, a Espanha é totalmente tomada e a execução de grupo de insurgentes é retratada por Francisco Goya no quadro “O Três de Maio”.

Colocando o Brasil como foco, o ano de 1808 trouxe uma leva de mudanças para o país que ainda era colônia de Portugal. Com a vinda da família real portuguesa, fugida do exército francês que marchava à passos largos e contínuos pela Europa, foi criada a Intendência-Geral de Polícia que era a pioneira da Polícia Civil. Houve também, em Junho, a fundação do Jardim Botânico do Rio de Janeiro, por decreto de Don João VI. E, ainda naquele ano, aconteceu a criação do Banco do Brasil, o primeiro banco a nascer no Brasil e o primeiro do império Português.

Passando para a área das ciências, alguns acontecimentos foram de suma importância para os anos e décadas que vieram depois. A começar com o isolamento dos elementos químicos Bário, Boro, Cálcio, Estrôncio e Magnésio. Por fim, naquele ano, Marie-Sophie Germain faz uma importantíssima contribuição para o Último Teorema de Fermat, contribuição essa que Legendre chamou, e até hoje é chamado, de teorema de Germain, ele enuncia que seja  $n$  um número primo ímpar, se existir um número primo  $p$  auxiliar com as propriedades: *i*)  $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod p \Rightarrow x \equiv 0$  ou  $y \equiv 0$  ou  $z \equiv 0 \pmod p$ ; *ii*)  $x^n \pmod p$  é impossível; então vale o caso I do teorema de Fermat para  $n$ , ou seja, se nenhum dos  $x, y$  ou  $z$  for divisível por  $n$  então a equação  $x^n + y^n + z^n = 0$  não possui soluções inteiras sem ser a nula.

### 3.3.3 “*Teoria dos Números*” (1830)

O último trabalho a ser considerado como possível fonte de publicação da conjectura de Legendre é a terceira edição do Ensaio, publicado em 1830 e que levava um novo nome, “*Teoria dos Números*”, e é composta por dois volumes que foram divididos em seis partes e dois

apêndices. O primeiro volume continha as três primeiras partes da segunda edição e o segundo volume levava a quarta parte da edição de 1808 com vários acréscimos.

O ano de 1830 não carregou muitos acontecimentos marcantes, mas teve sim sua cota de destaque, por exemplo, quando Johann Heinrich Madler e Wihelm Beer produziram o primeiro mapa da superfície de Marte. Além disso, na química, este foi o ano em que houve o isolamento do elemento químico Vanádio. Charles Babbage, Siméon-Denis Poisson e George Peacock cometeram grandes feitos naquele ano, onde Babbage criou as primeiras tabelas atuariais precisas para uso em cálculos de seguros, já Poisson introduziu a “razão de Poisson” na eletricidade em que envolve tensões e deformações nos materiais e, por fim, Peacock publicou seu Tratado de Álgebra que tentou dar à álgebra um tratamento lógico comparável aos Elementos de Euclides.

### 3.4 Tentativas frustradas de Demonstração

A Conjectura de Legendre, como as conjecturas de mais de um século, sofre de um problema comum, o congelamento pelo tempo. Como foi na Conjectura de Goldbach, muitos matemáticos não ousaram anunciar publicamente que estavam trabalhando na demonstração de tais inabaláveis problemas matemáticos e, quando não conseguiam obter o resultado desejado, simplesmente enterravam essas ideias no fundo de suas almas e seguiam seus dias como se isso nunca tivesse acontecido. Entretanto, a Conjectura de Legendre, na qual diz que “Existe sempre um número primo entre  $n^2$  e  $(n+1)^2$ , para qualquer  $n$  inteiro positivo.”, enfrentou um problema diferente... Uma irmã mais famosa e que carregava o mesmo nome. Esta irmã, publicada em 1796, dizia:

**Teorema 2.** *Seja  $\Pi(n)$  a função de contagem dos números primos, que traz a quantidade de números primos entre 1 e  $n$ . Então o seguinte limite é válido:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi(n)}{n / \ln(n)} = 1 \quad (3.1)$$

Sendo este limite, equivalente a esse:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n / \ln(n)} = 1 \quad (3.2)$$

onde o  $p_n$  é o  $n$ -ésimo número primo. Assim, usando-se notação assintótica, pode-se reescrever o teorema da seguinte forma:

$$\Pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)} \quad (3.3)$$

O Teorema dos Números Primos ganhou esse nome após sua demonstração em 1898, quando essa, por sua vez, foi feita pelos matemáticos Jacques Hadamard e Charles-Jean de

La Vallée Poussin. Entretanto antes de tal demonstração, ela era conhecida também como Conjectura de Legendre, desde sua publicação, até o novo nome dado à ela se tornar comum entre os matemáticos, a existência dos números primos entre dois quadrados subsequentes, se mantinha com pouquíssima ou nenhuma atenção, enquanto era escondida pela sombra da irmã.

Novamente, seguindo o mesmo caminho que a Conjectura de Goldbach, a Conjectura de Legendre emergiu das sombras após a publicação dos Problemas de Landau. Sem mais estar nas sombras de sua irmã, agora já com nome novo, ela se pois à público e recebeu as honrarias e temerosidades dos quais merecem todas as conjecturas que permaneceram em aberto por tanto tempo.

Durante todas as décadas que se passaram desde 1912, com a publicação dos Problemas de Landau, a Conjectura de Legendre recebeu algumas tentativas corajosas. Não sendo tão numerosas quanto as tentativas acerca da Conjectura de Goldbach, as tentativas obtiveram resultados que, mesmo não conseguindo demonstrar o problema, trouxe novos teoremas e saberes. Assim sendo, o melhor resultado obtido foi em 1965 com o matemático chinês Chen Jingrum, no qual se provou que sempre existe um número primo ou um semi-primo entre  $n^2$  e  $(n+1)^2$ , sendo um semi-primo um produto de dois primos. E, a partir de tal prova, em 1984, os matemáticos Iwaniec e Pintz, demonstraram que sempre existe um número primo entre  $n - n^\theta$  e  $n$ , sendo  $\theta = \frac{23}{42}$ . E é claro que houve as tentativas que tiveram resultados bem interessantes.

### 3.4.1 Usando um Complemento

**Teorema 3.** *Para qualquer  $n$  inteiro positivo, existe sempre um número primo entre  $n^2$  e  $(n+1)^{2+\epsilon}$  onde  $\epsilon = 0,00011516865557559264$ .*

**Demonstração:** Os casos para  $n = 1, 2, \dots, 4407$  podem ser verificados diretamente pelo Teorema:

$$|\vartheta(x) - x| < \eta_k \frac{x}{\ln^k(x)} \tag{3.4}$$

para  $x \geq x_k$

$k$	0	1	1	2	2	2	2
$\eta_k$	1	1.2323	0.001	3.965	0.2	0.05	0.01
$x_k$	1	2	908 994 923	2	3 594 641	122 568 683	7 713 133 853

$k$	3	3	3	3	4
$\eta_k$	20.83	10	1	0.78	1300
$x_k$	2	32 321	89 967 803	158 822 621	2

Assim temos para todo  $x \geq 3594641$ :

$$|\vartheta(x) - x| < \frac{0.2x}{\log^2(x)}.$$

Seja  $n \geq 4408$  de modo que  $(n+1)^{2+\varepsilon} > n^2 > 3594641$ . Agora

$$\vartheta((n+1)^{2+\varepsilon}) - \vartheta(n^2) > \left( (n+1)^{2+\varepsilon} - \frac{0.2(n+1)^{2+\varepsilon}}{\log^2(n+1)^{2+\varepsilon}} \right) - \left( n^2 - \frac{0.2n^2}{\log^2 n^2} \right).$$

Considere as seguintes desigualdades equivalentes para  $n \geq 4408$ :

$$(n+1)^{2+\varepsilon} > n^2 + \frac{0.2(n+1)^{2+\varepsilon}}{\log^2(n+1)^{2+\varepsilon}} + \frac{0.2n^2}{\log^2 n^2},$$

$$1 > \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \cdot \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} + \frac{0.2}{(2+\varepsilon)^2 \cdot \log^2(n+1)} + \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \cdot \frac{0.05}{(n+1)^\varepsilon \cdot \log^2 n}$$

Agora o lado direito está diminuindo em  $n$  e então basta verificar o caso quando  $n = 4408$ .

Quando isso acontece, obtemos:

$$1 > \left( \frac{4408}{4409} \right)^2 \cdot \frac{1}{4409^\varepsilon} + \frac{0.2}{(2+\varepsilon)^2 \cdot \log^2 4409} + \left( \frac{4408}{4409} \right)^2 \cdot \frac{0.05}{4409^\varepsilon \cdot \log^2 4408}.$$

Portanto

$$\left( (n+1)^{2+\varepsilon} - \frac{0.2(n+1)^{2+\varepsilon}}{\log^2(n+1)^{2+\varepsilon}} \right) - \left( n^2 + \frac{0.2n^2}{\log^2 n^2} \right) > 0.$$

e, portanto,  $\vartheta((n+1)^{2+\varepsilon}) - \vartheta(n^2) > 0$  conforme desejado.  $\square$

**Teorema 4.** *Para qualquer  $n$  inteiro positivo, existe sempre um número primo entre  $n^2$  e  $(n+1)^{2,000001}$ .*

**Demonstração:** Os casos para  $n = 1, 2, \dots, 26014595$  pode ser verificado diretamente pelo teorema usado na demonstração anterior. Assim temos que para todo  $x \geq 7713133853$ , tem-se:

$$|\vartheta(x) - x| < \frac{0.01x}{\log^2 x} \tag{3.5}$$

Seja  $n \geq 26014596$  de modo que  $(n+1)^{2,000001} > n^2 > 7713133853$ . Agoratemos :

$$\vartheta((n+1)^{2,000001}) - \vartheta(n^2) > \left( (n+1)^{2,000001} - \frac{0.2(n+1)^{2,000001}}{\log^2(n+1)^{2,000001}} \right) - \left( n^2 - \frac{0.2n^2}{\log^2 n^2} \right).$$

Considere as seguintes desigualdades para  $n \geq 26014596$  :

$$(n+1)^{2.000001} > n^2 + \frac{0.01(n+1)^{2.000001}}{\log^2(n+1)^{2.000001}} + \frac{0.01n^2}{\log^2 n^2},$$

$$1 > \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{(n+1)^{0.000001}} + \frac{0.01}{2.000001^2 \cdot \log^2(n+1)} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{0.0025}{(n+1)^{0.000001} \cdot \log^2 n}.$$

Agora o lado direito está diminuindo em  $n$  e, então, basta verificar o caso quando  $n = 26014596$ .

Quando isso acontece, obtemos:

$$1 > \left(\frac{26014596}{26014597}\right)^2 \cdot \frac{1}{(26014597)^{0.000001}} + \frac{0.01}{2.000001^2 \cdot \log^2(26014597)} \\ + \left(\frac{26014596}{26014597}\right)^2 \cdot \frac{0.0025}{(26014597)^{0.000001} \cdot \log^2(26014596)}.$$

Logo

$$(n+1)^{2.000001} - \frac{0.2(n+1)^{2.000001}}{\log^2(n+1)^{2.000001}} - n^2 - \frac{0.2n^2}{\log^2 n^2} > 0.$$

e, portanto,  $\vartheta((n+1)^{2.000001}) - \vartheta(n^2) > 0$  conforme desejado.  $\square$

### 3.4.2 Reduzindo ao Absurdo

Sendo publicada no apêndice B da demonstração, por redução ao Absurdo, da Conjectura de Andrica, a demonstração da Conjectura de Legendre, idealizada pelo mesmo autor, foi feita também usando o método de redução por absurdo. Autor esse sendo o Mestre em Matemática, Adecio da Silva Santos, professor de Matemática no IFPI-SRN (Instituto Federal do Piauí - Campus São Raimundo Nonato).

**Demonstração:** Suponhamos que existe um número ímpar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que não exista número primos maiores que  $n_0^2$  e menores que  $(n_0 + 1)^2$  simultaneamente. Isto é, os números  $n_0^2, n_0^2 + 2, n_0^2 + 4, \dots, n_0^2 + 2n_0$  são todos ímpares compostos. Além disto, denotemos  $q_1 < q_2 < \dots < q_k \dots$  como sendo todos os primos maiores que  $(n_0 + 1)^2$ , isto é,  $(n_0 + 1)^2 < q_1 < q_2 < \dots < q_k \dots$

Definamos  $I =$  Conjunto dos Números Ímpares. Definamos, agora, o conjunto  $C \subset \mathbb{N}$  com a seguinte condição:  $C$  é o conjunto formado por todos os ímpares compostos maiores ou iguais a  $n_0^2$ . Definamos, também, o conjunto  $W$  com a condição:  $W$  é formado por todos os números ímpares que em sua composição em fatores primos, apresente pelo menos um primo  $q_k > (n_0 + 1)^2$ . Por fim, definamos o conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  como sendo  $X = \{n(n_0^2 + 2i) \mid n \in (I - W) \text{ e } i \leq n_0\}$ .

Tomemos, agora, o número  $x_0 = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k} \cdot q_k \in (C - X)$ , onde  $p_1, p_2, \dots, p_k$



são todos os primos ímpares menores que  $n_0^2$  e os expoentes  $n_1, n_2, \dots, n_k$  são todos maiores que os expoentes resultantes da decomposição em fatores primos de cada  $n_0^2 + 2i$ .

Portanto, tomando  $n_A$  como o menor natural satisfazendo que  $x_0 < n_A(n_0^2 + 2i)$ , para algum  $i \leq n_0$ , isto implica que  $(n_A - 1)(n_0^2 + 2i) < x_0 < n_A(n_0^2 + 2i)$ . Ou seja, temos o seguinte  $n_A - 1 < \frac{x_0}{n_0^2 + 2i} < n_A$ . Mas este último resultado é equivalente a desigualdade  $n_A - 1 < \frac{p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k} \cdot q_k}{n_0^2 + 2i} < n_A$ .

Porém, pela construção de  $x_0 = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k} \cdot q_k$  e pelo fato de  $(n_0^2 + 2i)$  ser um ímpar composto por alguns dos fatores primos  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , temos que  $(n_0^2 + 2i)$  divide  $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k} \cdot q_k$ . Logo  $\frac{p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k} \cdot q_k}{n_0^2 + 2i} \in \mathbb{N}$ . Ou seja, chegamos a conclusão que entre os números consecutivos  $n_A - 1$  e  $n_A$  existe um número natural. **ABSURDO!**

Entretanto, obtemos esta contradição por admitimos que exista um número ímpar  $n_0$  tal que não exista nenhum primo entre  $n_0^2$  e  $(n_0 + 1)^2$ . Portanto, sempre existe algum primo entre dois quadrados perfeitos sendo o menor deles ímpar.

Agora, tomando um número natural par  $m_0$  tal que não exista nenhum primo entre  $m_0^2$  e  $(m_0 + 1)^2$ , teríamos que  $m_0^2 + 1, m_0^2 + 3, m_0^2 + 5, \dots, m_0^2 + 2m_0 + 1$  seriam todos ímpares compostos. Denotemos  $q_1^* < q_2^* < \dots < q_k^*$  com todos sendo os primos maiores que  $(m_0 + 1)^2$ , isto é,  $(m_0 + 1)^2 < q_1^* < q_2^* < \dots < q_k^*$ .

Definamos, agora, o conjunto  $D \subset \mathbb{N}$  com a seguinte condição:  $D$  é o conjunto formado por todos os números ímpares compostos maiores ou iguais a  $(m_0 + 1)^2$ . Definamos, também, o conjunto  $W^*$  com a condição:  $W^*$  é formado por todos os números ímpares que em sua composição em fatores primos, apresenta pelo menos um primo  $q_k^* > (m_0 + 1)^2$ . Por fim, definamos o conjunto  $Y \subset \mathbb{N}$  sendo  $Y = \{n(m_0^2 + 2i - 1) \mid n \in (I - W^*) \text{ e } i \leq m_0 + 1\}$ .

Tomemos, agora, o número  $y_0 = (p_1^*)^{n_1} \cdot (p_2^*)^{n_2} \cdot (p_3^*)^{n_3} \cdot \dots \cdot (p_k^*)^{n_k} \cdot q_k^* \in (D - Y)$ , onde  $(p_1^*), (p_2^*), (p_3^*), \dots, (p_k^*)$  são todos os primos menores que  $m_0^2$  e os expoentes  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  são todos maiores que os expoentes resultantes da decomposição em fatores primos de cada  $m_0^2 + 2i - 1$ .

Portanto, tomando  $n_B$  como o menor natural satisfazendo que  $y_0 < n_B(m_0^2 + 2i - 1)$ , para algum  $i \leq m_0 + 1$ , isto implica que  $(n_B - 1)(m_0^2 + 2i - 1) < y_0 < n_B(m_0^2 + 2i - 1)$ . Isto é,  $n_B - 1 < \frac{y_0}{m_0^2 + 2i - 1} < n_B$ . Mas este último resultado é equivalente a desigualdade  $n_B - 1 < \frac{(p_1^*)^{n_1} \cdot (p_2^*)^{n_2} \cdot (p_3^*)^{n_3} \cdot \dots \cdot (p_k^*)^{n_k} \cdot q_k^*}{m_0^2 + 2i - 1} < n_B$ .

Porém, pela construção de  $y_0 = (p_1^*)^{n_1} \cdot (p_2^*)^{n_2} \cdot (p_3^*)^{n_3} \cdot \dots \cdot (p_k^*)^{n_k} \cdot q_k^*$  e pelo fato de  $(m_0^2 + 2i - 1)$  ser um ímpar composto por alguns dos fatores primos  $(p_1^*), (p_2^*), (p_3^*), \dots, (p_k^*)$ , temos que  $(m_0^2 + 2i - 1)$  divide  $(p_1^*)^{n_1} \cdot (p_2^*)^{n_2} \cdot (p_3^*)^{n_3} \cdot \dots \cdot (p_k^*)^{n_k} \cdot q_k^*$ . Logo  $\frac{(p_1^*)^{n_1} \cdot (p_2^*)^{n_2} \cdot (p_3^*)^{n_3} \cdot \dots \cdot (p_k^*)^{n_k} \cdot q_k^*}{m_0^2 + 2i - 1} \in \mathbb{N}$ . Ou seja, chegamos a conclusão que entre os números consecutivos  $n_B - 1$  e  $n_B$  existe um número

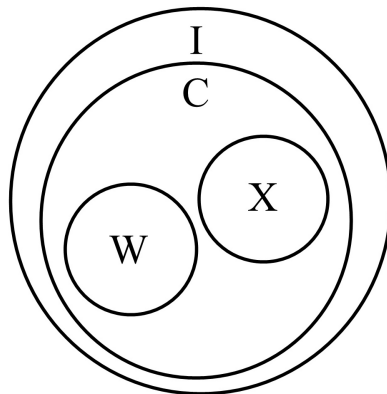
natural. **OUTRO ABSURDO!**

Porém, encontramos esta outra contradição por admitirmos que exista um número par  $m_0$  tal que não exista nenhum primo entre  $m_0^2$  e  $(m_0 + 1)^2$ . Logo, sempre existe algum primo entre dois quadrados perfeitos sendo o menor deles par.

Enfim, pelas conclusões expostas acima, independentemente se em dois quadrados consecutivos o menor deles é par ou ímpar, sempre existirá algum primo entre eles. Portanto, a Conjectura de Legendre é, de fato, verdadeira.  $\square$

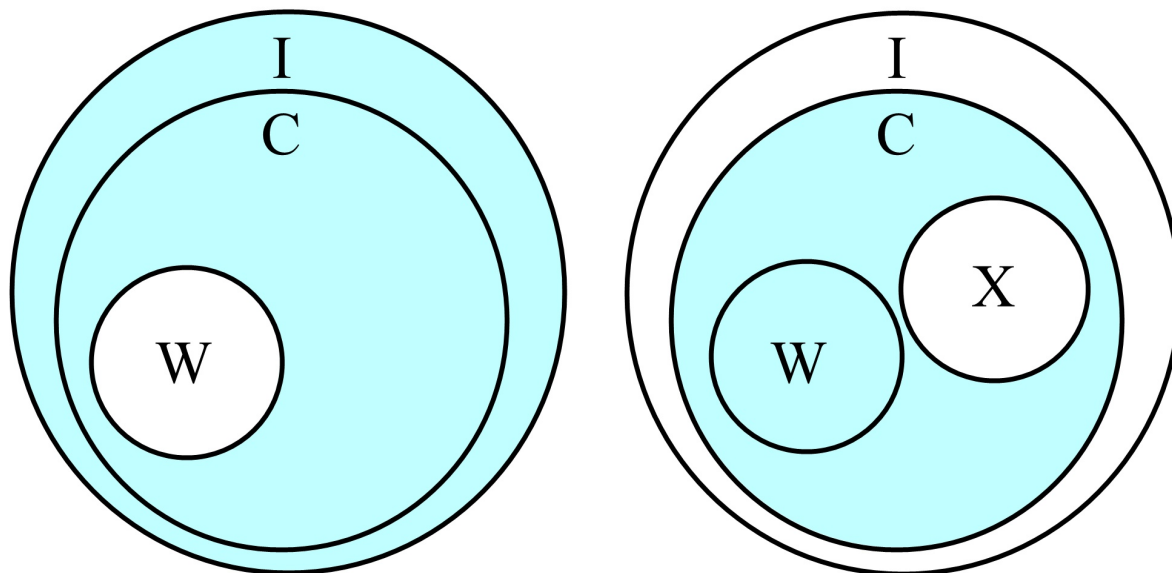
Observando as definições de cada um dos conjuntos, é fácil perceber que  $C \subset I$  e  $W \subset I$ , pois todos são conjuntos de números ímpares, com  $C$  e  $W$  tendo restrições, ou seja, são menores que  $I$ . Entretanto, sendo  $C$  o conjunto formado por todos os ímpares compostos maiores ou iguais a  $n_0^2$  e  $W$  o conjunto formado por todos os números ímpares que em sua composição em fatores primos, apresente pelo menos um primo  $q_k > (n_0 + 1)^2$ , têm-se que  $W \subset C$ , pois sendo  $a \in W$ , ele terá ao menos um fator  $q_k > (n_0 + 1)^2$ , implicando que  $a > (n_0 + 1)^2$  o que, por sua vez, diz que todo elemento de  $W$  é maior do que  $(n_0 + 1)^2$ , então sendo também maior do que  $n_0^2$ , ou seja,  $a \in C \Rightarrow W \subset C$ .

Observando agora  $I - W$ , ele seria o conjunto de todos os primos ímpares e dos primos compostos onde todos os seus fatores primos são menores ou iguais à  $(n_0 + 1)^2$ . Com isso, é possível definir  $X = \{n(n_0^2 + 2i) \mid n \in (I - W) \text{ e } i \leq n\}$ . Assim  $n$  poderia ser um primo ou um ímpar composto onde todos os seus fatores primos são menores ou iguais à  $(n_0 + 1)^2$ . O maior valor que  $n_0^2 + 2i$  poderia alcançar, seria  $n_0^2 + 2n_0$  obviamente  $n_0^2 + 2n_0 < n_0^2 + 2n_0 + 1 = (n_0 + 1)^2$  então ele poderia ser um número primo ímpar ou um ímpar composto onde todos os seus fatores primos são menores ou iguais à  $(n_0 + 1)^2$ . Portanto o produto  $n(n_0^2 + 2i)$  é, obviamente, um ímpar composto, mas ele não tem nenhum fator primo maior do que  $(n_0 + 1)^2$ , o que implica que  $W \cap X = \emptyset$ , entretanto, têm-se que  $n(n_0^2 + 2i) > n_0^2$ , ou seja  $X \subset C$ . Ao colocar estas relações de conjuntos e subconjuntos em um Diagrama de Venn, resulta na seguinte relação:



Olhando para o elemento  $x_0 = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k} \cdot q_k \in (C - X)$ , é fácil notar que existem

vários elementos em  $C - X$ , mas para que a igualdade seja verdadeira, têm-se que  $x_0 \in W$ , pois não pertence a  $X$  e tem um fator primo  $q_k$  que, pela própria construção da Demonstração, é maior do que  $(n_0 + 1)^2$ . Agora, das relações  $I - W$  e  $C - X$ , resulta nos seguintes diagramas respectivamente:



Com todas as definições dos conjuntos e suas relações muito bem detalhadas, é simples notar que esta Demonstração contém vários pontos que a torna equivocada. Estes erros aparecem de forma similar tanto ao tomar o menor quadrado como ímpar, quanto ao tomar o quadrado menor par, então ao expor um ponto na primeira parte da demonstração, na segunda parte o erro também existirá.

Começando na escolha dos conjuntos. Se na tese da redução ao absurdo diz que não tem nenhum número primo  $p$  entre  $n_0^2$  e  $(n_0 + 1)^2$ , propositalmente começar definindo  $C$  como o conjunto de todos os números primos **compostos** maior ou igual a  $n_0^2$  é simplesmente escolher o local propício para se chegar ao absurdo. E isso não melhora nos outros conjuntos, a ideia que se passa, é que tudo foi organizado de forma específica para que dê certo. Esta especificidade dos conjuntos faz com que ocorra uma perda enorme da generalização, já comprometendo toda a demonstração em si.

Olhando para os números primos definidos nesta demonstração, temos que  $p_1, p_2, \dots, p_k$  são todos os primos ímpares menores que  $n_0^2$  e  $q_1 < q_2 < \dots < q_k \dots$  sendo todos os primos maiores que  $(n_0 + 1)^2$ , ou seja, propositalmente não foi considerado todos os primos fora do intervalo entre  $n_0^2$  e  $(n_0 + 1)^2$ , e esse foi o único momento que a tese realmente foi usada. Toda a construção dos conjuntos e aplicação de seus elementos poderiam muito bem continuar sendo feitos ainda sim levando em conta que existe um número primo entre  $n_0^2$  e  $(n_0 + 1)^2$ , tendo esta relação mínima, a demonstração pode caminhar para lugares muito diferentes do que deveria.

Seguindo o decorrer da demonstração, mais especificadamente no momento onde toma-se o menor  $n_A$  possível, para que  $x_0 < n_A(n_0^2 + 2i)$ , o  $n_A$  é atrelado para algum  $i \leq n_0$ , ou seja, a partir daqui a desigualdade se torna  $x_0 < n_A(n_0^2 + 2i_0)$  onde  $i_0$  é algum  $i$  específico que torne esta desigualdade verdadeira. Novamente ocorrendo o uso de elementos específicos para que tudo ocorra bem.

Por fim, existe a pressuposição de que  $(n_0^2 + 2i)$ , que deveria ser  $(n_0^2 + 2i_0)$ , divide  $x_0$ , novamente ocorrendo o uso de um elemento específico para que todas as contas deem certo. Tudo isso diminui cada vez mais a generalização da demonstração. Escolher elementos específicos para que chegue em um resultado desejado não é uma demonstração, é um exemplo e exemplos não são suficientes para provar uma Conjectura.

# Capítulo 4

## A Conjectura de Oppermann

### 4.1 Enunciado:

A conjectura de Oppermann nos diz que “ $\forall n \in \mathbb{Z}$  e  $n > 1$ , existe ao menos um número primo entre  $n(n-1)$  e  $n^2$  e ao menos outro número primo entre  $n^2$  e  $n(n+1)$ ”. Também pode ser enunciada usando a Função de Contagem dos Números Primos:

$$\pi(n^2 - n) < \pi(n^2) < \pi(n^2 + n)$$

Para  $n > 1$  e sendo  $\pi(n)$  a quantidade de números primos menores ou iguais à  $n$ .

**Exemplo 1:** Para  $n = 6$ , temos os intervalos  $[30, 36]$  e  $[36, 42]$ , contendo os números primos  $31 \in [30, 36]$  e  $37, 41 \in [36, 42]$ .

**Exemplo 2:** Para  $n = 12$ , temos os intervalos  $[132, 144]$  e  $[144, 156]$ , contendo os números primos  $137, 139 \in [132, 144]$  e  $149, 151 \in [144, 156]$ .

**Exemplo 3:** Para  $n = 35$ , temos os intervalos  $[1190, 1225]$  e  $[1225, 1260]$ , contendo os números primos  $1193, 1201, 1213, 1217, 1223 \in [1190, 1225]$  e  $1229, 1231, 1237, 1249, 1259 \in [1225, 1260]$ .

### 4.2 Quem foi Oppermann?

Ludvig Henrik Ferdinand Oppermann, filho de Johan Carl Vicent Oppermann, professor de Hanover, e Johanne Margrethe Oxenboll, nasceu em 7 de setembro de 1817 em Ditlevslyst na Dinamarca. Ele foi admitido como estudante na Odense Cathedral School em 1829 e se formou em 1834. Ele então passou apenas meio ano na politécnica e depois estudou filosofia na Universidade de Copenhague recebendo o diploma em 1843.

Durante os anos de 1846 e 1851 ele trabalhou como professor titular na Aarhus Cathedral

School, lecionando línguas. Neste meio tempo, em 1849, tornou-se membro do Folketing, o Parlamento Dinamarquês, onde teve uma cadeira. Aconteceu uma pequena interrupção até 1861, onde ele se juntou ao Partido Liberal Nacional e durante 4 anos foi Auditor do Estado.

O profundo conhecimento que demonstrou ao serviço florestal do Reichstag fez com que, com a promessa da vaga de certo engenheiro florestal, obtivesse o acesso externo ao cursar o primeiro grau em 1852. Porém, não obteve o lugar, mas em vez disso ele se tornou, pouco tempo depois e ainda em 1852, Professor Associado de Língua e Literatura Alemã na Universidade, local que ocupou, a partir de 1855 com o título de Professor, até sua morte, em 17 de Agosto de 1883.

A promessa quebrada do lugar do guarda florestal foi uma decepção. O que, em sua opinião, outros escritores fizeram de sua “Introdução à Língua Dinamarquesa” (1844) e sua geometria, provocou alguma suspeita e amargura nele, o que tornou difícil de lidar com ele para aqueles que não haviam conquistado sua confiança, este fato o tornava um temido Examinador. A principal decepção, no entanto, talvez seja que sua vocação quase sempre estava fora da profissão para a qual ele foi estabelecido, ou seja, a vocação para a Matemática.

Somente em 1861 ele se tornou diretor matemático da State Annuities, e permaneceu neste cargo até 1870, sem ingressar na recém-organizada instituição de 1871. Além disso, foi matemático chefe e diretor do Fundo de Pensão Dinamarquês (Livrenteanstalten) de 1861 a 1870, mas não foi adquirido quando foi fundado em 1871. De 1872 até sua morte, ele foi consultor técnico da companhia de seguros de vida “Hafnia”. Em 1875 tornou-se membro Matemático da Sociedade de Ciências.

Dele vem à hipótese de Oppermann em Estatística. Ele também publicou em matemática estatística, estatística e matemática atuarial. Também publicou sob o pseudônimo de Ein Dilletant em Tidskrift para Matematik. Ele era matematicamente talentoso, mas tinha o hábito de não usar os métodos mais modernos, mas voltando a autores clássicos como Arquimedes, Newton e Gauss, que ele colocava acima de todos. As conversas com ele estimularam o trabalho de outros matemáticos dinamarqueses (Zeuthen, Heiberg). Ele calculou as tabelas de mortalidade para a Dinamarca e desenvolveu uma fórmula para elas, que Gram publicou. Jorgen Pedersen Gram é um de seus alunos. Em 1875, ele se tornou membro da Real Academia de Ciências da Dinamarca. Por fim, em 1882, Oppermann publicou o artigo “*Om vor Kundskab om Primtallenes Mængde mellem givne Grændser*” que trouxe ao mundo a Conjectura de Oppermann.

### 4.3 Contexto Histórico:

Voltando alguns anos no passado, têm-se que no calendário armênio é o ano de 1331-1332, no calendário chinês 4578-4579, no calendário judaico 5642-5643, no calendário persa 1260-1261, no calendário islâmico 1299-1300, no calendário rúnico 2132 e, por fim, no calendário Gregoriano, contendo a letra dominical A, na Era de Cristo, começando e terminando em um domingo, temos o ano de 1882, ano no qual foi proposta, por Ludvig Oppermann, a Conjectura de Oppermann.

Um ano comum sem grandes acontecimentos, mas carrega seus pontos relevantes. Em 1882 aconteceu o primeiro Ano Polar Internacional, mundialmente conhecido como International Polar Year (IPY), é um evento internacional e colaborativo tendo como tema central as Regiões Polares. Idealizado pelo oficial austro-húngaro Karl Weyprecht, tendo uma segunda edição em 1932. O IPY inspirou o Ano Internacional da Geofísica, evento colaborativo da ONU, que aconteceu no ano de 1957.

No Brasil, os acontecimentos mais marcantes foram à fundação dos municípios de São Paulo de Olivença, no atual estado do Amazonas, e da cidade de Rio Branco, atual capital do estado do Acre, quando ainda era território boliviano. Somado à isso têm-se a Exposição Antropológica de 1882, um dos eventos de maior importância do século XIX no Brasil, realizado pelo Museu Nacional do Rio de Janeiro. Neste mesmo ano, nasceram duas pessoas de grande importância para os acontecimentos subsequentes da história do Brasil, Monteiro Lobato em 18 de Abril e Getúlio Vargas em 19 de Abril. Por fim, neste ano também houve a primeira edição de Papéis Avulsos, livro de contos escrito por Machado de Assis.

Já no campo das Ciências, o citologista Walther Flemming demonstrou e estabeleceu que a mitose ocorre nas células vivas e que o número de cromossomos duplicava antes da célula se dividir em duas. Foi também nesse ano que aconteceu o isolamento do elemento químico Césio, um dos cinco únicos metais que podem ser encontrados na forma líquida em temperatura ambiente, pois seu ponto de fusão é de 28,44 °C.

Focando agora na área da matemática, o ano de 1882 se iniciou com a mudança da presidência da London Mathematical Society, passando o cargo de Samuel Roberts para Olaus Magnus Friedrich Erdmann Henrici. Carl Louis Ferdinand von Lindemann provou que  $\pi$  é transcendental, provando de forma consequente que é impossível construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado, usando régua e compasso. A Medalha Copley é o prêmio de maior prestígio que a Royal Society of London delega no campo das ciências e foi em 1882 que o matemático britânico Arthur Cayley, foi contemplado com ela. Cayley foi o idealizador da multiplicação de matrizes, do teorema de Cayley, contribuiu com o teorema de Cayley-Hamilton e foi o primeiro a definir o conceito de Conjunto da mesma forma que é usada até os dias de hoje. Ainda falando da Royal Society, neste ano, John William Strutt, também conhecido como

Lord Raleigh, recebeu a Royal Medal por suas contribuições em matemática e em física.

Em 1882, um importante artigo de Dedekind e Heinrich Weber realizou duas coisas; relacionou ideias geométricas com anéis de polinômios e ampliou o uso de módulos. O mais impressionante é que, mesmo os anéis de polinômios e anéis de números estarem sendo estudados, levariam mais de 40 anos para que uma teoria axiomática de anéis comutativos juntasse essas teorias. Em 1882 o início da teoria de grupos combinatórios se deu com Walther von Dyck no artigo Gruppentheoretische Studien, nele contém a primeira aparição de uma apresentação de grupos como é usada nos dias de hoje.

## 4.4 Tentativas frustradas de Demonstração

Muitos indícios fazem com que uma Conjectura não seja analiticamente demonstrada, tantos que é até difícil contabilizar. Entretanto, o mais gritante e, sem dúvida, um dos pontos que os matemáticos mais levam em conta é a grandeza da Conjectura em si. É muito simples um indivíduo simplesmente dizer que vai demonstrar um problema que está à séculos rodando pelas mentes mais brilhantes que já passou por esta terra, mas é inversamente proporcional à enorme dificuldade que é realmente executar esta ação.

No entanto, de tempos em tempos, surgem pessoas dispostas à colocar seu corpo à ferro e fogo e tentar mostrar ao mundo seus resultados. Tais pessoas estão sempre correndo entre a insanidade em não se importar com os contras e as consequências que virão se seus resultados estiverem errados, e a grande coragem de se colocar à prova e sem medo do perigo e do desconhecido que assola esta área intocada da Matemática.

Como está intimamente ligada à Conjectura de Legendre, a Conjectura de Oppermann carrega um tesouro muitíssimo cobiçado. A demonstração dela implica na veracidade da de Legendre, pois se existe ao menos um número primo entre  $n(n - 1)$  e  $n^2$  e ao menos outro número primo entre  $n^2$  e  $n(n + 1)$ , então existe sim um número primo entre  $n^2$  e  $(n + 1)^2$ . Então não só sua demonstração provaria a veracidade de uma Conjectura de mais de um século em aberto, mas sim de duas.

Não necessariamente é preciso demonstrar algo para que seus resultados sejam levados em consideração. Chegar um pouco mais perto da verdade, passo após passo, já é algo que se deve ser posto na mesa e discutido. Resultados como esse podem esconder “brechas” na muralha quase intransponível que são as velhas e inquebráveis Conjecturas. Então porquê não usar de uma aproximação? Ou ainda, porquê não tomar algo como verdade para assim chegar à um resultado diferente?



### 4.4.1 Se “Aproximando” um pouco

Neste Resultado Heurístico e aproximado, idealizado por Salman Mahmud, aluno do Government Azizul Haque College, Bogura, Bangladesh, foi gerado primeiramente uma fórmula para calcular a quantidade aproximada de múltiplos de um  $p_n$  menor ou igual que um número  $k$  que não é múltiplo dos números primos  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ . Logo depois, foi gerado outra fórmula para calcular a quantidade de números primos menores ou iguais a  $k$ , se os primos menores que  $\sqrt{n}$  forem dados onde  $\sqrt{n} \leq k \leq n$ . E, usando essas fórmulas e o conceito central delas, apresentar o resultado. Com isso, começando pela primeira fórmula, tem-se:

$$\frac{k}{p_n} \prod_{r=1}^{n(p)-1} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Aqui  $n(p)$  é o número de números primos. Ao usar esta fórmula, pode ser gerada outra fórmula para calcular o número de primos menor ou igual a um número  $k$  se os números primos menores ou iguais a  $\sqrt{n}$  forem dados onde  $\sqrt{n} \leq k \leq n$ . Suponha que o número de números primos menores ou iguais a  $\sqrt{n}$  seja  $q > 1$  e o  $q$ -ésimo primo seja  $p_q$ . Então, a quantidade de números primos menor ou igual a  $k$  será:

$$\pi(k) = n(p) - 1 + k \prod_{r=1}^{n(p) < \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Usando esta fórmula, podemos mostrar que existe, aproximadamente, pelo menos um número primo entre  $n(n-1)$  e  $n^2$  e outro primo entre  $n^2$  e  $n(n+1)$ . Usando o mesmo método, podemos mostrar que existe pelo menos um número primo entre  $n$  e  $2n$ , onde  $n > 1$ , que é conhecido como postulado de Bertrand. Como sabemos que este postulado está correto, assim podemos dizer que a solução heurística e aproximada para a Conjectura de Oppermann é lógica e faz sentido.

O primeiro passo para concretizar este resultado é gerar a primeira fórmula. Suponha que existam alguns números primos  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , onde  $p_n \leq k$ . Agora temos que calcular o número aproximado de múltiplos de um número primo  $p_n \leq k$  que não são múltiplos dos números primos  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ . Suponha que existam dois números primos  $p_1$  e  $p_2$ . Agora temos que calcular o número aproximado de múltiplos de  $p_2 \leq k$  que não são os múltiplos de  $p_1$ . Agora, o número aproximado de múltiplos de  $p_1$  e  $p_2$  será respectivamente:

$$\frac{k}{p_1}, \frac{k}{p_2}$$

Agora suponha que  $A = \{x \mid x \text{ múltiplo de } p_1\}$  e  $B = \{y \mid y \text{ múltiplo de } p_2\}$ . Portanto, o número aproximado de múltiplos de  $p_2 \leq k$  que não são múltiplos de  $p_1$  será:

$$n(B) - n(A \cap B) = \frac{k}{p_1} - \frac{k}{p_1 \cdot p_2} = \frac{k(p_1 - 1)}{p_1 \cdot p_2}$$

Novamente, suponha que existem três números primos  $p_1, p_2$  e  $p_3$ . Agora, número aproximado de múltiplos de  $p_1, p_2$  e  $p_3$  serão respectivamente:

$$\frac{k}{p_1}, \frac{k}{p_2}, \frac{k}{p_3}$$

Agora suponha que  $A = \{x \mid x \text{ múltiplo de } p_1\}$ ,  $B = \{y \mid y \text{ múltiplo de } p_2\}$  e  $C = \{z \mid z \text{ múltiplo de } p_3\}$ . Portanto, o número aproximado de múltiplos de  $p_3 \leq k$  que não são múltiplos de  $p_1$  e  $p_2$  será:

$$n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = \frac{k}{p_3} - \frac{k}{p_1 p_3} - \frac{k}{p_2 p_3} + \frac{k}{p_1 p_2 p_3} = k \cdot \left( \frac{p_1 p_2 - p_2 - p_1 + 1}{p_1 p_2 p_3} \right) =$$

$$\frac{k(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1 p_2 p_3}$$

Podemos ver que aqui temos um belo padrão. Agora, suponha que o número de primos seja  $n$  e números primos sejam  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , onde  $p_n \leq k$ . De acordo com o padrão, o número aproximado de múltiplos de  $p_n \leq k$  que não são os múltiplos de  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ , será:

$$\frac{k(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots (p_{n-1} - 1)}{p_1 p_2 p_3 \dots p_n} = \frac{k}{p_n} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_{n-1}}\right)$$

Chamamos, então, de  $n(p)$  o número de números primos. Assim, podemos escrever a fórmula da seguinte maneira:

$$\frac{k}{p_n} \prod_{r=1}^{n(p)-1} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Agora temos que gerar uma fórmula para calcular o número de números primos menores ou iguais a um número  $k$  se os números menores ou iguais a  $\sqrt{n}$  forem dados de forma que  $\sqrt{n} \leq k \leq n$ . Suponha que este número, que a fórmula gera, seja  $q$  de tal forma que os números primos sejam  $p_1, p_2, \dots, p_q$ . De acordo com o método de divisão experimental, se quisermos deduzir se um número  $n$  é primo, temos que apenas testar os fatores primos até  $\sqrt{n}$ . Então, se quisermos deduzir que um número  $k$  é primo, onde  $\sqrt{n} \leq k \leq n$ , basta testar os fatores primos até  $\sqrt{n}$ . Isso significa que todos os números compostos de 2 a  $k$  serão os múltiplos dos números primos menores ou iguais a  $\sqrt{n}$ . Novamente, se  $k$  é um número inteiro, então

podemos escrever,  $k = (1 + \text{número de números primos } \leq k) + (\text{número de números compostos } \leq k)$ . Como sabemos, 1 não é um número primo e também não é um número composto. Agora podemos escrever que o número de números primos menores ou iguais a  $k$ , será  $\pi(k) = k - 1 - (\text{número de Múltiplos compostos de } p_1) - (\text{número de múltiplos compostos de } p_2 \text{ que não são múltiplos de } p_1) - (\text{número de múltiplos compostos de } p_3 \text{ que não são múltiplos de } p_1, p_2) - (\dots) - (\text{número de múltiplos compostos de } p_q \text{ que não são múltiplos de } p_1, p_2, \dots, p_{q-1})$ . Arrumando essas diferenças, temos:

$$\pi(k) = k - 1 - \frac{k}{p_1} + 1 - \frac{k(p_1 - 1)}{p_1 p_2} + 1 - \frac{k(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1 p_2 p_3} + 1 - \dots - \frac{k(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_{q-1} - 1)}{p_1 p_2 p_3 \dots p_q} + 1$$

Agora podemos escrever:

$$\pi(k) = k - 1 + n(p) - \frac{k}{p_1} - k \cdot \sum_{r=1}^{n(p)-1} \frac{\prod_{a=1}^r (p_a - 1)}{\prod_{a=1}^{r+1} p_a}$$

Esta fórmula pode ser usada em pequenos intervalos de inteiros positivos, pois a operação é muito complicada. Mas podemos derivar uma versão simplificada desta fórmula. Suponha que haja um número primo  $p_1 \leq \sqrt{n}$ . Assim,

$$\pi(k) = k - 1 + n(p) - \frac{k}{p_1}$$

Novamente suponha que existem dois números primos  $p_1, p_2 \leq \sqrt{n}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \pi(k) &= k - 1 + n(p) - \frac{k}{p_1} - \frac{k(p_1 - 1)}{p_1 p_2} \\ \pi(k) &= k - 1 + n(p) - k \left\{ \frac{1}{p_1} + \left( \frac{(p_1 - 1)}{p_1} - \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1 p_2} \right) \right\} \\ \pi(k) &= k - 1 + n(p) - k \left( \frac{(1 + p_1 - 1)}{p_1} - \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1 p_2} \right) \\ \pi(k) &= k - 1 + n(p) - k \left( 1 - \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1 p_2} \right) \\ \pi(k) &= n(p) - 1 + k \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1 p_2} \\ \pi(k) &= n(p) - 1 + k \left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{p_2} \right) \end{aligned}$$

Novamente podemos ver um padrão. Suponha que o número de número primos menores ou iguais a  $\sqrt{n}$  seja  $q > 1$  e os números primos são  $p_1, p_2, \dots, p_q$ . Seja  $n(p)$  o número de número

primos menores ou iguais a  $\sqrt{n}$ . Então o número de números primos menores ou iguais a  $k$  será:

$$\pi(k) = n(p) - 1 + k \prod_{r=1}^{n(p) < \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

A operação ainda é muito complicada, mas esta fórmula nos dará uma melhor aproximação do que as outras funções de contagem de primos, como o Teorema dos Números Primos.

Agora temos que provar que existe, aproximadamente, pelo menos um primo entre  $n(n-1)$  e  $n^2$ , e pelo menos outro primo entre  $n^2$  e  $n(n+1)$ , onde  $n > 1$ . Podemos ver que quando  $n = 2, 3, 4$  a Conjectura de Oppermann é verdadeira. Agora, só temos que mostrar que esta conjectura pode ser verdadeira quando  $n > 4$ .

Em primeiro lugar, mostraremos que existe aproximadamente pelo menos um primo entre  $n(n-1)$  e  $n^2$ . Suponha que o número de números primos menores que  $n(n-1)$  seja  $q$  e o  $q$ -ésimo número primo seja  $p_q$ . Agora podemos escrever,  $n(n-1) = p_q + x$ , onde  $x$  é um número inteiro positivo. Então  $n^2 = p_q + x + n$ . Novamente,

$$n(n-1) < n^2 < \{n(n-1)\}^2, \text{ quando } n > 4$$

Então, de acordo com a nossa fórmula,

$$\begin{aligned} \pi(n^2) - \pi(n^2 - n) &= q - 1 + n^2 \cdot \prod_{r=1}^q \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) - q \\ \pi(n^2) - \pi(n^2 - n) &= -1 + \frac{(p_q + x + n)(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_q - 1)}{p_1 p_2 \dots p_q} \\ \pi(n^2) - \pi(n^2 - n) &= -1 + \left(1 + \frac{x}{p_q} + \frac{n}{p_q}\right) \frac{(p_q + x + n)(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_q - 1)}{p_1 p_2 \dots p_q} \end{aligned}$$

Aqui,  $(p_1 - 1) = 1$ ,  $(p_2 - 1) > p_1$ ,  $(p_3 - 1) > p_2$ , ...,  $(p_q - 1) > p_{q-1}$ . Então,

$$\frac{(p_q + x + n)(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_q - 1)}{p_1 p_2 \dots p_q} > 1$$

Novamente,

$$\frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{p_1} < \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)}{p_1 p_2} < \dots < \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots (p_q - 1)}{p_1 p_2 p_3 \dots p_{q-1}}$$

Novamente, quando  $n = 4$ , os números primos menores que  $4(4-1)$  são 2, 3, 5, 7, 11. Isso significa que  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11$ . Aqui,

$$\frac{(2-1)(3-1)(5-1)(7-1)(11-1)}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} > 2$$

Então, quando  $n > 4$ ,

$$\frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\dots(p_q-1)}{p_1 p_2 p_3 \dots p_{q-1}} > 2$$

Logo,

$$\left(1 + \frac{x}{p_q} + \frac{n}{p_q}\right) > 1$$

Então,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{p_q} + \frac{n}{p_q}\right) \frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\dots(p_q-1)}{p_1 p_2 p_3 \dots p_q} > 2 \\ \Rightarrow & -1 + \left(1 + \frac{x}{p_q} + \frac{n}{p_q}\right) \frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\dots(p_q-1)}{p_1 p_2 p_3 \dots p_q} > 2 \end{aligned}$$

Assim, mostrando que existe, aproximadamente, um primo entre  $n(n-1)$  e  $n^2$ . Agora suponha que o número de números primos menores que  $n^2$  seja  $q$  e o  $q$ -ésimo número primo seja  $p_q$ . Podemos escrever  $n^2 = p_q + x$ , onde  $x$  é um inteiro positivo. Então,  $n(n+1) = p_q + x + \sqrt{p_q + x}$ . Logo,

$$n^2 < n(n+1) < n^4, \text{ quando } n > 4$$

Então, de acordo com a fórmula,

$$\pi(n^2 + n) - \pi(n^2) = q - 1 + (n^2 + n) \cdot \prod_{r=1}^q \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) - q$$

$$\pi(n^2) - \pi(n^2 - n) = -1 + \frac{(p_q + x + \sqrt{p_q + x})(p_1 - 1)(p_2 - 1)\dots(p_q - 1)}{p_1 p_2 \dots p_q}$$

$$\pi(n^2) - \pi(n^2 - n) = -1 + \left(1 + \frac{x}{p_q} + \frac{\sqrt{p_q + x}}{p_q}\right) \frac{(p_q + x + n)(p_1 - 1)(p_2 - 1)\dots(p_q - 1)}{p_1 p_2 \dots p_q}$$

Então, quando  $n > 4$ ,

$$\frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\dots(p_q-1)}{p_1 p_2 p_3 \dots p_{q-1}} > 2$$

Logo,

$$\left(1 + \frac{x}{p_q} + \frac{\sqrt{p_q + x}}{p_q}\right) > 1$$

Então,

$$\left(1 + \frac{x}{p_q} + \frac{\sqrt{p_q + x}}{p_q}\right) \frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\dots(p_q-1)}{p_1 p_2 p_3 \dots p_q} > 2$$

$$\Rightarrow -1 + \left(1 + \frac{x}{p_q} + \frac{\sqrt{p_q + x}}{p_q}\right) \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)\dots(p_q - 1)}{p_1 p_2 p_3 \dots p_q} > 2$$

Então, o número de números primos entre  $n(n - 1)$  e  $n^2$  e  $n^2$  e  $n(n + 1)$  são aproximadamente maiores que 1. É por isso que podemos dizer que existe aproximadamente pelo menos um número primo entre  $n(n - 1)$  e  $n^2$  e pelo menos outro primo entre  $n^2$  e  $n(n + 1)$ , onde  $n > 1$ . Outra coisa interessante que podemos ver aqui é que, se aumentarmos o valor de  $n$ , o número de números primos entre estes intervalos, também aumentará

#### 4.4.2 Partindo de um Pressuposto

A Conjectura de Legendre, trabalhada no capítulo anterior, nos diz que sempre existe um número primo entre  $n^2$  e  $(n + 1)^2$ , para qualquer  $n$  inteiro positivo. Se tal conjectura for verdadeira, podemos relacionar ela com a Conjectura de Firoozbakht que diz que tendo dois primos subsequentes,  $p_n$  e  $p_{n+1}$ , a inequação  $n+1\sqrt{p_{n+1}} < \sqrt{p_n}$ , para  $n \geq 1$ , é verdadeira. Desta relação temos:

$$p_{k+1} - p_k < (\log p_k)^2 - \log p_k - 1 < (\log p_k)^2$$

A partir deste resultado, vamos relacioná-lo com a Conjectura de Oppermann, então seja  $p_k$  o maior primo imediatamente antes de  $n^2 - n$ , então  $p_{k+1}$  deve estar entre  $n^2 - n$  e  $n^2$ . Portanto,

$$p_k < n^2 - n$$

Suponha que  $p_{k+1}$  não exista entre  $n^2 - n$  e  $n^2$ , então

$$p_{k+1} < n^2$$

Da primeira inequação para a segunda, temos

$$n < p_{k+1} - p_k < (\log p_k)^2$$

Por outro lado, a partir da primeira inequação, temos

$$\log p_k < \log(n^2 - n)$$

E então

$$(\log p_k)^2 < (\log n + \log(n - 1))^2$$

Para  $k > 9$  ou  $p_k \geq p_{10} = 29$ . Se  $29 \leq p_k \leq n^2 - n$ , então  $n \geq 6$ . Trivialmente,

$\log n + \log(n - 1) < 2$  e  $(\log n + \log(n - 1))^2 < 4(\log n)^2$ . apenas provamos que

$$(\log n + \log(n - 1))^2 < 4(\log n)^2 < n$$

para  $n \geq 75$ .

Considere  $2\log n < \sqrt{n}$  para  $n \geq 75$ .

Deixe  $y = \sqrt{x} - 2\log x$ , então  $y' = \frac{\sqrt{x}-4}{2x}$  que implica  $y' > 0$  para  $x > 16$ . Também sabemos que  $y > 0$  para  $x \geq 75$ . Portanto vale para a ultima inequação  $n \geq 75$ .

Portanto, mantendo o resultado das ultimas três inequações, nos leva a uma contradição e nossa suposição, que afirma que  $p_{k+1}$  não existe entre  $n^2 - n$  e  $n^2$  é incorreta para  $n \geq 75$ . Isso Significa que a Conjectura de Oppermann é verdadeira para todo  $n \geq 75$ . A Conjectura de Oppermann vale trivialmente para  $2 \leq n < 75$  e, conseqüentemente, vale para  $n \geq 2$ .

A segunda parte da Conjectura de Oppermann também vale facilmente e de forma semelhante supondo que, seja  $p_k$  o maior número primo imediatamente antes de  $n^2$ , então  $p_{k+1}$  deve estar entre  $n^2$  e  $n^2 + n$ . Suponha que  $p_{k+1}$  não exista entre  $n^2$  e  $n^2 + n$ , então  $p_{k+1} > n^2 + n$ . Da mesma forma, temos

$$n < p_{k+1} - p_k < (\log p_k)^2 - \log p_k - 1 < (\log p_k)^2 < 4(\log n)^2$$

para  $k > 9$  ou  $p_k \geq p_{10} = 29$ , onde nos leva a  $n < 4(\log n)^2$ . Mas isso é uma contradição, pois  $n > 4(\log n)^2$  para  $n \geq 75$ . Isso significa que  $p_{k+1}$  existe entre  $n^2$  e  $n^2 + n$  e a Conjectura de Oppermann vale para  $n \geq 75$  e, conseqüentemente, para  $n \geq 2$ .

# Capítulo 5

## A conjectura de Andrica

Como uma das mais jovens Conjecturas da matemática moderna que segue aberta até os dias de hoje e sendo publicada pela primeira vez em 1986, a conjectura de Andrica diz sobre a diferença das raízes quadradas de dois números primos consecutivos e recebeu esse nome em homenagem ao Prof. Dr. Dorin Andrica.

### 5.1 Enunciado:

“Se  $P_n$  denota o  $n$ -ésimo número primo, então para todo  $n > 1$  a desigualdade é verdadeira:”

$$\sqrt{P_{n+1}} - \sqrt{P_n} < 1$$

**Exemplo 1:** Se pegarmos  $n = 4$ , teremos os primos 7 e 11. Com isso temos que:

$$\sqrt{11} - \sqrt{7} < 1 \Rightarrow 3,3166 - 2,6457 < 1 \Rightarrow 0,6709 < 1$$

**Exemplo 2:** Se pegarmos  $n = 18$ , teremos os primos 61 e 67. Com isso temos que:

$$\sqrt{67} - \sqrt{61} < 1 \Rightarrow 8,1853 - 7,8102 < 1 \Rightarrow 0,3751 < 1$$

**Exemplo 3:** Se pegarmos  $n = 112$ , teremos os primos 613 e 617. Com isso temos que:

$$\sqrt{617} - \sqrt{613} < 1 \Rightarrow 24,8394 - 24,7588 < 1 \Rightarrow 0,0806 < 1$$



## 5.2 Quem foi Andrica?

Segundo sua própria página na universidade de “Babes-Bolyai”, Dorin Andrica nasceu 12 de março de 1956, na cidade de Hunedoara, no distrito de mesmo nome, na região da Transilvânia, na Romênia. Formado em Bacharelado pela Universidade “Babes-Bolyai” na Romênia em 1980, tendo Mestrado e Doutorado na mesma universidade nos anos de 1981 e 1992 respectivamente. Em sua carreira profissional, podemos resumir em cinco momentos: Entre os anos de 1981 e 1986, ele foi professor no Colégio Nacional Andrei Muresanu, na cidade de Dej, no distrito de Judet, na região da Transilvânia, Romênia; 1986-1990 foi professor assistente na Universidade Babes-Bolyai, Faculdade de Matemática e Ciência da Computação, localizada na cidade Cluj-Napoca, um importante centro comercial da Romênia; Ainda na mesma universidade ele teve mais três cargos, entre os anos de 1990 e 1993 foi Professor Conferencista, logo depois, até o ano de 1996, foi Professor Associado Doutor e ainda no mesmo ano até os dias de hoje, Dorin Andrica é Professor Doutor.

Membro do Conselho Editorial das revistas e jornais: Studia Univ. "Babeş-Bolyai-Mathematica, Bakan Journal of Geometry, Gazeta Matemática, Acta Matemática Apulensis, Buletin of Calcutta Mathematical Society, General Mathematics, Mathematics Education. Atualmente interessado na Teoria do Ponto Crítico e Aplicações, Análise Não-linear, Teoria das Aproximações, Teoria dos Números, Matemática Elementar em Olimpíadas e Concursos.

Foi convidado e visitante nas seguintes instituições de ensino superior:

1. Canadá - SUA Mathcamp, 2001 - 2005
2. AwesomeMath 2006 - 2011, Universidade do Texas em Dallas, Universidade de Santa Cruz
3. Universidade de Nebraska (Lincoln) - AMC (outubro de 2001 a janeiro de 2002)
4. Universidade de Ancona, Itália (novembro de 1999)
5. Universidade de Heidelberg, Alemanha (maio-junho de 1997), Universidade de Utrecht, Holanda (maio de 1997)
6. Fern Universität Hagen, Alemanha (dezembro de 1993)
7. Middle East Technical University of Ankara, Turquia (julho de 1990)
8. Columbus State University, Columbus, Geórgia, EUA (agosto - dezembro de 2014).

Durante toda sua carreira acadêmica, ele produziu e publicou mais de 60 artigos científicos e/ou documentos, entretanto, dois deles tiveram uma maior repercussão e, por assim dizer, mais impacto para a carreira dele. O primeiro deles trata do uso de duas variantes do

Método de Fermat da Decida Infinita em Equações Diofantinas, lembrando que este método é uma técnica de Prova que usa o fato de que há um número finito de inteiros positivos menores do que qualquer inteiro positivo dado. O método baseia-se no fato de que o conjunto de inteiros não negativos segue o Princípio da Boa Ordem, de modo que apenas um número finito de inteiros não negativos é menor do que qualquer um. Em outras palavras, não existe uma sequência infinita de inteiros não negativos estritamente decrescentes. O artigo nomeado como “*On a Diophantine Equation and Its Ramifications*” tem como autores Titu Andreescu e o próprio Dorin Andrica e foi publicado Número 1 do Volume 35 do The College Mathematics Journal em janeiro de 2004. Já o segundo artigo, foi publicado no Journal of The London Mathematical Society, em 2004, entre as páginas 783 e 800 daquela edição e tem como coautor Louis Funar. O artigo, com título de “*On smooth maps with finitely many critical points*”, trata sobre o número mínimo de pontos críticos de um mapa suave de codimensão pequena entre duas variedades.

Por fim, o seu maior feito, ou mais reconhecido, até os dias de hoje pelo menos, foi a Conjectura de Andrica, publicada em 1986 e pela Studia University Babes-Bolyai Math no artigo “*Note on a Conjecture in Prime Number Theory.*”. Tal Conjectura permanece em aberto até o presente momento.

### 5.3 Contexto Histórico:

Nascida de um artigo que levava o nome de “*Nota sobre uma conjectura na teoria dos números primos*” publicada no ano de 1986, a conjectura de Andrica veio ao mundo num ano de acontecimentos díspares. Como por exemplo, naquele ano o Cometa Halley cruzou os céus, mas na Ucrânia, ocorreu o acidente nuclear de Chernobyl ao mesmo tempo, no Brasil, ocorreu a greve geral contra o Plano Cruzado de José Sarney.

Em falar no Brasil, naquele ano, os acontecimentos seguia a regência do nível mundial e se tornavam cada vez mais diferentes. Um exemplo claro disso é que em fevereiro o Plano Cruzado foi lançado, ele estabelecia o congelamento dos preços e a moeda nacional passava a se chamar de Cruzado, valendo mil Cruzeiros. Já em março, da 8<sup>a</sup> Conferência Nacional de Saúde, nascia o Sistema Único de Saúde, o SUS. Hora os brasileiros se preocupavam e rangiam os dentes contra o presidente Sarney com essa diferença gritante dos números que valiam seu dinheiro, quem antes tendo 40000 cruzeiros, agora tinha 40 cruzados. Hora o chamariz da centelha de felicidade crescia forte ao saber que teria acesso à saúde. Ainda haviam àqueles, uma minoria é claro, comemoravam e aplaudiam o lançamento do segundo satélite de comunicações brasileiro, o Brasilsat A2, que foi lançado por um foguete europeu, Ariane 3, na base de lançamento de Kourou, na Guiana Francesa.

Visando a exploração espacial, que estava no seu auge, pois a Guerra Fria ainda estava vigente e impulsionando a corrida espacial, os acontecimentos se tornam mais interessantes, como por exemplo a aparição do cometa Halley em 9 de fevereiro, ele por sua vez corta os céus do planeta Terra a cada 75-76 anos, sendo o Halley o único cometa de curto período que é regularmente visível a olho nu, podendo aparecer duas vezes em uma única geração humana. Foi descoberto, naquele ano, o asteroide 8000 Isaac Newton por Henri Debehogne, junto do momento em que a Voyager 2 visitava o planeta Urano. No mesmo ano houve tragédias também, como a explosão do ônibus espacial americano Challenger, explosão essa causada por um defeito nos tanques de combustível, ela ocorreu 73 segundos após a decolagem e matou sete pessoas, incluindo a primeira civil a participar de um voo espacial, a professora Christa McAuliffe.

Em falar de explosões, naquele ano, mais especificadamente no dia 26 de abril, ocorre em Chernobyl, na Ucrânia, um dos piores desastres nucleares da história. Um reator da central de Chernobyl explodiu e liberou uma imensa nuvem radioativa contaminando pessoas, animais e todo o meio ambiente de uma vasta extensão. O acidente de Chernobyl teve 400 vezes mais radiação do que a bomba atômica de Hiroshima.

Seguindo para o ramo das ciências, o Último Teorema de Fermat saía de uma curiosidade sem importância na teoria dos números e passava à ter relação com as propriedades fundamentais do espaço, tudo isso por conta da conexão entre a Conjectura de Shimura-Taniyama-Weil, também conhecido como teorema da modularidade, sendo um teorema matemático que estabelece uma importante relação entre as formas modulares, certas funções holomórficas e as curvas elípticas. O teorema permite que certos problemas da geometria algébrica sejam resolvidos com técnicas da teoria dos números e unifica dois compôs distintos da matemática.

Finalizando essa retomada, será focada a vasta gama de premiações que ocorreram no ano de 1986. Começando com a Medalha Albert Einstein, recebida pelo físico alemão, Rudolf Ludwig Mossbauer. A Medalha Arthur L. Day, recebida pelo Geólogo chinês, com cidadania estadunidense, E-Na Zen. A Medalha Bruce, recebida pelo astrônomo estadunidense Fred L. Whipple. A Medalha Copley, recebida pelo físico britânico Rudolf Peierls. A Medalha Davy, recebida pelo bioquímico Alexander George Ogston. A Medalha Fields, recebida pelos matemáticos Simon Donaldson (britânico), Gerd Faltings (alemão) e Michel Freedman (estadunidense). A Medalha Guy, sendo a de ouro recebida pelo estatístico britânico Bernard Benjamin; a de prata recebida pelo professor de estatística Richard Peto; e a de bronze pelo economista britânico David Forbes Henry. O Prêmio Nobel recebidos nas áreas de: Física por Gerd Binnig, Heinrich Rohrer e Ernst Ruska; Química por Dudley R. Herschbach, Tuan T. Lee e John C. Polanyi; Medicina por Stanley Cohn e Rita Levi-Montalcini; Economia por James M. Buchanan Jr.. O Prêmio de Turing recebido por John Hopcroft e Robert Tarjan. E, por fim, o Prêmio

Wolf de Matemática recedido por Samuel Eilenberg e Atle Selberg.

## 5.4 Tentativas frustradas de Demonstração

Sendo a mais jovens das Conjecturas trabalhadas nesta monografia, a Conjectura de Andrica carrega o fardo das dificuldades para ser demonstrada, juntamente com o pouquíssimo tempo que teve para que os matemáticos de todo mundo trabalhassem e chegassem em resultados que os satisfizessem o suficiente para que ocorra a publicação.

Juntamente com a Conjectura de Oppermann, por não ter tanta repercussão quanto as de Goldbach e de Legendre, suas idealizações se mantiveram navegantes e à deriva nas profundas e turbulentas águas da Teoria de Números. Entretanto, como está, por sua vez, intimamente relacionada com a distribuição de números primos, existe pontos que puxam a atenção de pessoas dispostas a desbravar este caminho desconhecido. Portanto, à aqueles que se interessam mais pela distância entre os números primos que ela trabalha.

### 5.4.1 Partindo de um Pressuposto

Se Conjectura de Legendre, for verdadeira, podemos relacionar ela com a Conjectura de Firoozbakht que diz que tendo dois primos subsequentes,  $p_n$  e  $p_{n+1}$ , a inequação  $\sqrt[n+1]{p_{n+1}} < \sqrt[n]{p_n}$ , para  $n \geq 1$ , é verdadeira. Temos ainda que a conjectura de Andrica afirma que a desigualdade  $\sqrt{p_{n_0+1}} - \sqrt{p_{n_0}} < 1$  vale para  $\forall n \in \mathbb{N}$  onde  $p_n$  é o  $n$ -ésimo número primo. Se manipularmos a desigualdade, muda para  $p_{k+1} - p_k < 2\sqrt{p_k} + 1$  (1).

**Demonstração:** Se relacionarmos as duas conjecturas mencionadas acima com (1), devemos provar (2):

$$p_{k+1} - p_k < (\log p_k)^2 < 2\sqrt{p_k} + 1$$

**A primeira Solução:** Seja  $p_k$  substituído por  $x \in \mathbb{R}$ , então mostramos  $(\log x)^2 < 2\sqrt{x} + 1$  para  $x \geq 121$ . Seja, agora,  $y = 2\sqrt{x} - (\log x)^2 + 1$  uma função da variável  $x$  definida para  $x \geq 121$ .  $y(121) = 0,000393$ . Facilmente provamos que a derivada de  $y$  é positiva para todo  $x \geq 121$ , isto é,  $y' > 0$ , para (3):

$$y' = \frac{\sqrt{x} - 2\log x}{x}$$

e  $y'(121) = 0,0116$ . Apenas mostramos que o numerador de (3), isto é,  $\sqrt{x} - 2\log x > 0$  para  $c \geq 121$ . Novamente, seja  $z = \sqrt{x} - 2\log x$  e  $z' = \frac{\sqrt{x}-4}{2x}$ . Portanto,  $z' > 0$  para  $x > 16$ , e então  $z'(0) > 0$  para  $x \geq 121$  e  $z(x) > z(121) > 0$ , para todo  $x \geq 121$  e a desigualdade  $(\log p_k)^2 < 2\sqrt{p_k} + 1$  certamente vale para  $p_k \geq 121$ . A Conjectura de Andrica também vale para todo  $p_k < 121$ . Portanto, vale pra todo  $k$ .

**A segunda Solução:** Mostramos que, se substituirmos  $p_k$  por um inteiro positivo  $n$  em (2), resulta em (4):

$$(\log n)^2 < 2\sqrt{n} + 1$$

para  $n \geq 190$ .

Facilmente,  $(\log n)^2 - 1 < 2\sqrt{n}$ , então  $(1 - \frac{1}{(\log n)^2}) < \frac{2\sqrt{n}}{(\log n)^2}$ . Elevando por  $(\log n)^2$  nos dois lados, temos (5):

$$\left(1 - \frac{1}{(\log n)^2}\right)^{(\log n)^2} < \left(\frac{2\sqrt{n}}{(\log n)^2}\right)^{(\log n)^2}$$

Trivialmente, análogo com  $(1 - \frac{1}{n})^n < \frac{1}{e}$  para  $n \geq 1$ , nos temos  $\left(1 - \frac{1}{(\log n)^2}\right)^{(\log n)^2} < \frac{1}{e}$ , para  $n > e$ .

Facilmente, mostramos que  $\left(\frac{2\sqrt{n}}{(\log n)^2}\right)^{(\log n)^2} > \frac{1}{e}$  ou  $\left(\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^2}\right)^{(\log n)^2} > \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{(\log n)^2}}$ , para  $n \geq 190$ . Desde que  $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{(\log n)^2}} < \frac{1}{2}$  para todo número natural e  $\frac{\sqrt{190}}{(\log 190)^2} = 0,50066 > 0,5$ , devemos provar que  $\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^2} > \frac{\sqrt{190}}{(\log 190)^2}$  para  $n > 190$ .

Isso significa que devemos provar que a sequência  $\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^2}$  é estritamente crescente para  $n \geq 190$ . Um cálculo simples mostra que a sequência é crescente para todos os números naturais entre 190 e 320. Só precisamos mostrar que é correto para  $n \geq 321$ . Mostramos que a desigualdade (6):

$$\frac{\sqrt{n+1}}{(\log(n+1))^2} > \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^2}$$

vale para  $n \geq 321$ .

Manipulando (6),  $\sqrt{n+1}(\log n)^2 > \sqrt{n}(\log(n+1))^2$  e  $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} > \left(1 + \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log n}\right)^2$ , elevando por  $n$  dos dois lados,temos (7):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} > \left(1 + \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log n}\right)^{2n}$$

então temos (8):

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{2}} > \left\{\left(1 + \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log(1 + \frac{1}{n})}}\right\}^{\frac{2n \log(1 + \frac{1}{n})}{\log n}}$$

trivialmente,  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^{\frac{1}{2}} > 2^{\frac{1}{2}}$  para  $n \geq 1$ . Assim, precisamos provar (9):

$$\left\{ \left(1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \right\}^{\frac{2n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}} < 2^{\frac{1}{2}}$$

para  $n \geq 321$ . Trivialmente,  $\left\{ \left(1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \right\}^{\frac{2n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}} < e^{\frac{2}{\log n}} < 2^{\frac{1}{2}}$  para  $n \geq 321$ .

Portanto, (9), (8), (7) e, conseqüentemente, (6) vale para  $n \geq 321$  e (4) vale para  $n \geq 190$  ou  $p_k \geq 190$ . Logo, a Conjectura de Andrica, vale para todo  $p_k \geq 190$ . Portanto, vale para todo  $k \geq 1$ . □

### 5.4.2 Reduzindo ao Absurdo

Esta tentativa de demonstração foi idealizada pelo Mestre e Graduado em Matemática Adecio da Silva Santos, professor de Matemática no IFPI-SRN (Instituto Federal do Piauí - Campus São Raimundo Nonato). Ela foi pensada com o fato de que trabalhos acadêmicos em português para com Conjecturas deste portes são muito raras. Ela usada do método de redução ao absurdo para mostrar a veracidade da Conjectura.

**Demonstração:** Suponha, por absurdo, que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sqrt{p_{n_0+1}} - \sqrt{p_{n_0}} \geq 1$ , onde  $p_{n_0}$  é o  $n_0$ -ésimo primo.

Analisando o caso  $\sqrt{p_{n_0+1}} - \sqrt{p_{n_0}} = 1$ . Note que existe um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $p_{n_0+1} = p_{n_0} + 2k$ . Portanto, podemos ter  $\sqrt{p_{n_0+1}} - \sqrt{p_{n_0}} = \sqrt{p_{n_0} + 2k} - \sqrt{p_{n_0}} = 1$ , daí  $\sqrt{p_{n_0} + 2k} = 1 + \sqrt{p_{n_0}}$ , elevando ao quadrado os membros da última igualdade fica  $(\sqrt{p_{n_0} + 2k})^2 = (1 + \sqrt{p_{n_0}})^2$ , então obtemos  $p_{n_0} + 2k = 1 + 2\sqrt{p_{n_0}} + p_{n_0} \Rightarrow 2k = 1 + 2\sqrt{p_{n_0}}$  o que, por sua vez, acarreta em  $2k - 1 = 2\sqrt{p_{n_0}}$ . Ou seja, o número irracional  $2\sqrt{p_{n_0}} \in \mathbb{N}$ . **ABSURDO!**

Note, ainda, pelo Teorema do Número Primo, que as distâncias entre os números primos tendem a ficarem cada vez maiores, salvo os casos dos primos gêmeos, à medida que os números naturais crescem. Em outras palavras, a densidade dos primos no conjunto  $\mathbb{N}$  tende para 0 quando  $n \rightarrow \infty$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ .

Baseado-nos nesta evidência e pelo fato do conjunto dos números primos ser infinito, podemos considerar que  $\sqrt{p_{n_0+1}} - \sqrt{p_{n_0}} = 1$  nunca é verdade por maior que seja a distância entre  $\sqrt{p_{n_0+1}}$  e  $\sqrt{p_{n_0}}$ . Mas como sempre existe um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $p_{n_0+1} = p_{n_0} + 2k$ , mesmo que este  $k$  seja muito grande, jamais tornará a igualdade  $\sqrt{p_{n_0} + 2k} - \sqrt{p_{n_0}} = 1$  verdadeira. Em outras palavras, mesmo que  $k$  seja do “tamanho” do infinito, ainda assim não poderemos considerar  $\sqrt{p_{n_0} + 2k} - \sqrt{p_{n_0}} = 1$  verdadeira.

Levando em consideração o que foi exposto acima, podemos analisar, agora, o caso  $\sqrt{p_{n_0+1}} - \sqrt{p_{n_0}} > 1$ . E esta desigualdade acarreta  $\frac{(\sqrt{p_{n_0+1}} - \sqrt{p_{n_0}})(\sqrt{p_{n_0+1}} + \sqrt{p_{n_0}})}{(\sqrt{p_{n_0+1}} + \sqrt{p_{n_0}})} > 1$ , mas isso implica que  $\frac{p_{n_0+1} - p_{n_0}}{\sqrt{p_{n_0+1}} + \sqrt{p_{n_0}}} > 1$  (1). Note, ainda, que (1) implica  $1 > \frac{\sqrt{p_{n_0+1}} + \sqrt{p_{n_0}}}{p_{n_0+1} - p_{n_0}}$  (2).

Logo, por (1), (2) e pela propriedade transitiva obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{p_{n_0+1} - p_{n_0}}{\sqrt{p_{n_0+1}} + \sqrt{p_{n_0}}} > 1 > \frac{\sqrt{p_{n_0+1}} + \sqrt{p_{n_0}}}{p_{n_0+1} - p_{n_0}}$$

Porém, note que existe um número  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $p_{n_0+1} = -p_{n_0} + 2k$ . Daí, obtemos as desigualdades  $\frac{p_{n_0+2k} - p_{n_0}}{\sqrt{p_{n_0+2k}} + \sqrt{p_{n_0}}} > 1 > \frac{\sqrt{p_{n_0+2k}} + \sqrt{p_{n_0}}}{p_{n_0+2k} - p_{n_0}} \Rightarrow 4k^2 > (\sqrt{p_{n_0} + 2k} + \sqrt{p_{n_0}})^2 > 0$ . Então ao dividirmos todos os membros do nosso último resultado pelo termo  $4k^2$  encontramos  $1 > \frac{(\sqrt{p_{n_0} + 2k} + \sqrt{p_{n_0}})^2}{(2k)^2} > 0$ , ao simplificar fica  $1 > \left(\frac{\sqrt{p_{n_0} + 2k} + \sqrt{p_{n_0}}}{2k}\right)^2 > 0 \Rightarrow 1 > \left(\frac{\sqrt{p_{n_0} + 2k}}{2k} + \frac{\sqrt{p_{n_0}}}{2k}\right)^2 > 0$ , porém isto acarreta que  $1 > \left(\sqrt{\frac{p_{n_0} + 2k}{4k^2}} + \sqrt{\frac{p_{n_0}}{4k^2}}\right)^2 > 0 \Rightarrow 1 > \left(\sqrt{\frac{p_{n_0}}{4k^2}} + \frac{2}{4k} + \sqrt{\frac{p_{n_0}}{4k^2}}\right)^2 > 0$ , o que implica que  $0 > \left(\sqrt{\frac{p_{n_0}}{4k^2}} + \frac{2}{4k} + \sqrt{\frac{p_{n_0}}{4k^2}}\right)^2 - 1 > -1$ , multiplicando todos os membros da desigualdade anterior pelo termo  $(-1)$  obtemos o seguinte resultado  $0 < 1 - \left(\sqrt{\frac{p_{n_0}}{4k^2}} + \frac{2}{4k} + \sqrt{\frac{p_{n_0}}{4k^2}}\right)^2 < 1$ . Finalmente, fazendo  $k \rightarrow \infty$ , temos pelo Teorema do Número primo, que  $1 < 1$ , mas isto é um **ABSURDO!**

Mas só chegamos nessas contradições por admitirmos a existência de um número natural  $n_0$  tal que  $\sqrt{p_{n_0+1}} - \sqrt{p_{n_0}} \geq 1$ , onde  $p_{n_0}$  é o  $n_0$ -ésimo primo. Ou seja, não existe nenhum par de primos  $(p_{n_0+1}, p_{n_0})$  que contradiz a Conjectura de Andrica. Portanto ela é verdadeira  $\forall n \in \mathbb{N}$ . □

Entretanto, infelizmente, esta demonstração contém um erro. Para ser mais específico, no momento em que ele coloca  $k \rightarrow \infty$  é que está errado. A constante  $k$  foi idealizada para ser  $k \in \mathbb{N}$ , tal que  $p_{n_0+1} = p_{n_0} + 2k$ , ou seja,  $k$  é uma constante que mostra que a distância de dois primos subsequentes maiores do que 2, esta distância sempre será um número par, pois, excluindo o 2, todos os números primos são ímpares. Escolhidos os primos subsequentes, a distância entre os dois sempre será a mesma, por exemplo, se pegarmos os números primos 617 e 613, a distância dos dois sempre será 4, onde  $k = 2$ , pensando em um exemplo mais simples ainda, se pegarmos 11 e 13, a distância entre os dois sempre será 2, onde  $k = 1$ . Então  $k$  é uma constante fixa para cada par de números primos subsequentes. Se  $k \rightarrow \infty$  então é a mesma coisa que dizer que, tendo um intervalo de números primos suficientemente distâtes,  $\sqrt{p_{n_0+2k}} - \sqrt{p_{n_0}} \geq 1$ , isso é verdade, e realmente levaria à um absurdo. Mas a Conjectura de Andrica trabalha exclusivamente com números primos subsequentes, então não podemos pegar um intervalo suficientemente grande. Logo, ao colocar  $k \rightarrow \infty$  para que chegue em um absurdo, ele está saindo da Conjectura de Andrica e entrando numa nova Conjectura, que diz “Sendo

$p_{n_0+2k}$  e  $p_{n_0}$  dois números primos suficientemente distâtes,  $\sqrt{p_{n_0+2k}} - \sqrt{p_{n_0}} < 1$ ”, perdendo assim, toda a generalização e abrangência da Conjectura Original.



# Conclusão

Muito além de uma narrativa ancorada na História da Matemática e na Teoria dos Números, a simples e direta amostragem dos enunciados e exemplos, o aprofundamento na história e a elucidação das tentativas falhas de demonstração são pontos que podem parecer simples, mas podem ser usados para mostrar como a Matemática é complexa. Ideias tão simples que se mostram tão determinadamente focadas em mostrar ao mundo a mais clara disparidade que um enunciado pode ter com a sua demonstração.

Ao observar os objetivos expostos na introdução do presente trabalho, é notório perceber que a Matemática é algo muito mais profundo e expansivo do que os estudantes, do ensino básico e até mesmo da graduação, pensam que realmente é. Tendo em vista cada um dos aspectos abordados, pode-se dizer filosoficamente que a maravilha do indagar-se somente por poder o fazer é um dos efeitos colaterais deste trabalho. Onde ao decorrer de suas páginas, vai se solidificando o pensamento, quase que inconsciente, de que algo pífio como a soma de dois primos que resulta em um número par, pode desencadear a avalanche desenfreada que é a Conjectura de Goldbach, por exemplo.

Objetivando analisar as quatro Conjecturas e compreender desde suas nuances mais simples, até os pontos mais impactantes de suas abordagens e análises, é fácil notar que este trabalho cumpriu para com seus objetivos citados em sua introdução. Portanto pode-se confirmar que a hipótese se mostrou verdadeira, não a Matemática realmente não responde todas as perguntas que dela surge. Para chegar nesta conclusão, cada uma das Conjecturas trabalhadas foi destrinchada e catalogada pelos mesmos métodos e sessões.

Começando com os enunciados, expostos da forma mais clara possível, e passando para os exemplos, onde foi sempre exposto três aplicações reais de cada enunciado, desde números pequenos, até número com mais de 4 dígitos, sempre com o objetivo de ser muito bem entendível.

As sessões nomeadas como “*Quem foi...?*” teve o papel de humanizar tais conjecturas, mostrando que não somente são enunciados matemáticos frios e soltos ao vento. Cada um deles veio de uma pessoa com sua história própria com a Matemática. Alguns deles não iniciaram sua carreira acadêmica diretamente na Matemática como o Legendre, o Goldbach primeiramente se apaixonou por esta ciência, para depois sim empregar todos os seus esforços nela. Ainda

temos que cada um teve sua cota de tristeza e felicidade, Legendre nasceu em uma família abastada, mas mesmo assim morreu na pobreza, assim como Oppermann que teve seus últimos dias em meio à angústias e arrependimentos. Já Goldbach veio de uma família mais simples, mas terminou sua vida no auge de sua carreira, igualmente Andrica que, mesmo vindo de um país pequeno e esquecido da Europa, se tornou conhecido pelo mundo e viajou por ele palestrando em várias universidades renomadas. A Matemática não é uma ciência fria, ela carrega as ambições de cada um de seus autores, assim como as Conjecturas que carregam o nome de seus autores.

De forma parecida, o Contexto Histórico veio para mostrar, de forma breve e sucinta, como estava o mundo no ano, ou possível ano, de publicação de cada uma das Conjecturas. Com isso, pode-se ter uma pequena ideia de como estava o mundo ao redor do autor quando ele estava escrevendo seu trabalho. Por exemplo, Legendre publicava suas várias edições do *“Ensaio sobre a Teoria dos Números”* enquanto respondia seus desentendimentos com Gauss e enquanto a Europa irrompia em batalhas no âmbito da Revolução Francesa. Já no ano de publicação da Conjectura de Andrica Chernobyl havia explodido, enquanto todo o mundo se preocupava com os danos estrondosos que a radiação causaria naquela região, os brasileiros se dividiam em odiar o Plano Cruzado e sentir a luz da esperança quando ouviam que o Sistema Único de Saúde iria ofertar acesso gratuito à saúde.

A última sessão de cada um dos capítulos, que trabalhavam as quatro Conjecturas que são o epicentro desta monografia, eram sempre *“Tentativas frustradas de Demonstração”*, essa pergunta sempre era feita para tentar mostrar as mais variadas Demonstrações, mais especificadamente as tentativas delas, seguiam durante os anos. Sendo bem mais simples mostrar essas tentativas nas conjecturas mais antigas e populares, como a de Goldbach, por exemplo. Nela é muito simples ver como cada uma das tentativas, mesmo que falhas, serviu de alicerce para que outro matemático com uma ideia um pouco diferente usasse como base de suas próprias tentativas, fazendo com que um “caminho” surgisse. Caminho esse que ficou muito mais obscuro com Conjecturas tão jovens quanto a de Andrica e/ou tão desconhecidas quanto a de Oppermann. Entretanto isso não impede de ter uma noção de como está a demonstração, em que pé a comunidade matemática está, o quão perto de uma demonstração analítica, rigorosa e aceita os matemáticos estão.

Em suma, até o presente momento da publicação desta monografia, nenhuma das Conjecturas trabalhadas obteve uma real demonstração firme, rigorosa e analítica. Houve inúmeras tentativas, desde abordagens dentro da Teoria de Conjuntos, onde o ponto de falha foi simplesmente a infinidade de conjuntos que teria que ser formados para comportar todos os números pares, até o uso da comum e simples redução para o absurdo. Redução essa feita por um brasileiro, mesmo que todas as três tentativas, aqui analisadas, dele tenham sido feitas de

forma desorganizada e construída passagem por passagem com escolhas prontas e feitas exclusivamente para que as contas chegassem num resultado desejado, a simples existência de um brasileiro nesta corrida mundial de que é o primeiro a derrotar estes monstros poderosos e deixar seu nome na história, é algo a se impressionar.

Por fim, observando de um ponto de vista geral, este trabalho serviu principalmente para elucidar uma questão que pode ser a muralha que impede que novos acadêmicos da área de Matemática mergulhem de cabeça em seus estudos. Mesmo com toda sua complexidade, mesmo com todas as regras e jargões, a Matemática é a escrita formal que usamos para explicar os fenômenos do universo. Entretanto isso não significa que ela é algo aterrorizante e somente os mais treinados ou os ditos “talentosos” podem desbravar. A Matemática é amistosa para àqueles que a tratam também de forma amistosa. Noções complicadíssimas são usadas em tentativas falhas de demonstrações de algo simples como a soma de dois números que resulta em um número par, e, ao mesmo tempo, coisas tão incrivelmente complicadas como a infinitude dos Números Primos, podem ser facilmente demonstrado só usando multiplicação, divisão e um pouquinho de interpretação.

Assim sendo, este TCC cumpriu com todos os seus objetivos e ainda é um exemplo real e atual de que o universo é um lugar grande, não sabemos onde e quando alguma destas Conjecturas receberá sua demonstração, assim como ela merece, mas sabemos que em algum lugar do globo, com toda certeza, existe alguém, neste exato momento, tentando veemente transformar suas ideias e sonhos em cálculos e símbolos. A humanidade sempre tenta evoluir para algum lugar, o mesmo é com a Matemática, ela sempre está em desenvolvimento, melhorando e atualizando a si mesma, fechando furos e abrindo mais e mais portas para melhor entender o universo em que existimos.

# Referências Bibliográficas

A. Page, On the number of primes in an arithmetic progression, Proc. London Math. Soc. (2) 39 (1935), 116–141.

ABEL, N. H. Lettre de Abel à Legendre. Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, vol. 6, 1828, rééd. Paris: Gauthier-Villars, 1864, p. 271-279.

ANDERSEN, Jens Kruse. Primes in Arithmetic Progression Records. 2017. Disponível em: <<http://primerecords.dk/aprecords.htm>>. Acesso em 03 de Abril de 2022.

BACHRAOUI, M. El. Prime in the Interval  $[2n, 3n]$ . International Journal Of Contemporary Mathematical Sciences, Morocco, v. 1, n. 13, p. 617-621, 2006.

BALLIET, Kyle D.. On The Prime Numbers In Intervals. 2015. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/317356877-On-The-Prime-Numbers-In-Intervals>>. Acesso 01 de Março de 2022.

BOOKS, H. (2011). Conjectures about Prime Numbers. Hephaestus Books, Nova Iorque, EUA.

BOYER, C. B. História da Matemática. Trad. Elza Gomide. 2a ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BOYER, Christian. Some notes on the magic squares of problem. The Mathematical Intelligencer, [s.l.], v. 27, n. 2, p. 52-64, 2005.

CAMPELLO, Antonio Carlos. LEAL, Isabel. Monografia: Um algoritmo para solução de congruências do tipo  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ . 2007. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/ant.pdf>>. Acesso em: 20 de Agosto de 2021.

CHEN, Jingrun and Wang Tianze, “On the odd Goldbach problem”, *Acta Math. Sin.* 32 5 (1989), 702-718.

D. Andrica, Note on a conjecture in prime number theory, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.* 31(1986) 44-48

DUSART, Pierre. Estimates of Some Functions Over Primes without R.H.. 2010. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1002.0442>>. Acesso em: 17 de Fevereiro de 2022.

E. Bombieri, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions to large moduli, *Acta Math.* 156 (1986), 203–251.

E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., Oxford University Press, 1986.

E. Robertson (2006). Christian Goldbach biographie. Universidade de St Andrews, Escócia. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Goldbach.html>>. Acesso em: 27 de Novembro de 2021.

ELLMAN, Roger (2000). A Proof of Goldbach’s conjecture. Santa Rosa, EUA. Disponível em: <<http://arxiv.org/ftp/math/papers/0005/0005185.pdf>>. Acesso em: 27 de Novembro 2021.

FARLEY, Bernard (2005). Two Approaches to Proving Goldbach’s Conjecture. EUA. Disponível em: <<http://www.math.vt.edu/people/plinnell/Ugresearch/farley.pdf>>. Acesso em: 27 de Novembro de 2021.

FINE, Benjamin; Rosenberger, G. (2007). *Number Theory, An Introduction via the Distribution of Primes*. Birkhauser Publishing, Boston, EUA.

FLIEGEL, Henry F.; Robertson, D. S. (1989). Goldbach’s Comet: the numbers related to Goldbach’s Conjecture. *Journal of Recreational Mathematics*, volume 21, EUA.

G. H. Hardy, On Dirichlet’s divisor problem, *Proc. London Math. Soc.* (2) 15 (1916), 1–25.

G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed, Clarendon Press, Oxford, 1979

GOUVEIA, Rosimar. Números Primos. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/numeros-primos/>>. Acesso em: 15 de Junho de 2021.

GUY, R.K. (1994). *Unsolved Problems in Number Theory*. Second Edition. Springer Verlag, New York.

HARDY, G. H. and Wright, E. M., *An introduction to the theory of numbers*. Edited and revised by D. H. Heath-Brown and J. H. Silverman. With a foreword by Andrew Wiles. 6th ed. Oxford: Oxford University Press. xxi, 621 p. (2008). MSC(2000): 11-01-11Axx-11Mxx, Reviewer: Karl-Bernhard Gundlach (Malburg). Zbl 1159.11001

HASSANI, M. Counting primes in the interval  $(n^2; (n + 1)^2)$ . arXiv Preprint, 2006. arXiv:math/0607096

HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2016.

HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2006.

HEFEZ, Abramo. *Introdução Matemática - OBMEP.2009*. Disponível em <<http://www.obmep.org.br/doc/apostila4.pdf>>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2022

HELFGOTT, H. A. The ternary Goldbach conjecture is true. arXiv Preprint, 2013. arXiv:1312.7748

I. M. Vinogradov, Sur la distribution des résidus et non résidus de puissances, *Perm Univ. Fiz.-Mat. Zh.* 1 (1918), 18–24.

IMPA. Descoberto número primo com quase 25 milhões de dígitos. 2019. Disponível em: <<https://impa.br/noticias/descoberto-numero-primo-com-quase-25-milhoes-de-digitos/>>. Acesso em: 30 de Julho de 2021.

IOAN, C.A. Ioan, A.C. (2015). About Andrica's conjecture. *Acta Universitatis Danubius Oeconomica*, nr. 1, vol. 11, pp. 149-153.

J. R. Chen, On the representation of large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes, *Sci. Sinica* 16 (1973), 157–175.

J. R. Chen. On the Distribution of Almost Primes in an Interval. *Sci. Sinica*, 18:611–627,

1975.

LEMOS, Manoel. Criptografia, Números Primos e Algoritmos. 4. ed. Recife: Impa, 2010. Disponível em: <<https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/PM-04.pdf>>. Acesso em: 30 de Janeiro de 2022

LIMA, Elon Lages et al. A Matemática do Ensino Médio - Volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 1997.

LOO, Andy. On the Primes in the Interval  $[3n, 4n]$ . International Journal Of Contemporary Mathematical Sciences, Hong Kong, v. 6, n. 38, p.1871-1882, 2011.

L. Oppermann, Om vor Kunskab om Primtallenes Maengde mellem givne Graendser, Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes... (1882) 169-179

MAHMUD, Salman. A Heuristic and Approximate Solution to the Oppermann's Conjecture. 2021. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/353428780-A-Heuristic-and-Approximate-Solution-to-the-Oppermann's-Conjecture>>. Acesso em: 17 de Março de 2022.

MOL, R. S. Introdução à História da Matemática. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2013.

MORIMOTO, Ricardo Minoru. Números Primos: Propriedades, Aplicações e Avanços. 2014. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/108812>> Acesso: 07 de Julho de 2021.

O. Ramaré and Y. Saouter, "Short effective intervals containing primes", Journal of Number Theory, vol. 98 (2003) pp. 10-33.

OPPERMANN, L. (1882), Om vor Kundskab om Primtallenes Mængde mellem givne Grændser, Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandling og dets Medlemmers Arbejder: 169–179

P. Dusart. Estimates of Some Functions Over Primes Without R. H. <http://arxiv.org/abs/1002.0442>. arXiv:1002.0442v1 [math.NT], 2010.

R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz. The difference between consecutive primes, II. Proc. of the London Math. Soc., 83(3):532–562, 2001.

SABIHI, Ahmad. On solutions of some of unsolved problems in number theory, specifically on the distribution of primes. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1605.01722>>. Acesso em: 15 de Fevereiro de 2022.

SANTOS, Adecio da Silva. Demonstração da Conjectura de Andrica. 2019. Revista Científica Núcleo do conhecimento. Disponível em: <<https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/conjectura-de-andrica>>. Acesso em: 25 de Novembro de 2021.

SANTOS, Adecio da Silva. Demonstração da Conjectura (Forte) de Goldbach. 2019. Revista Científica Núcleo do conhecimento. Disponível em: <<https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/demonstracao-da-conjectura>>. Acesso em: 15 de Novembro de 2021.

SILVA, T. O. Goldbach conjecture verification. Disponível em: <<http://sweet.ua.pt/tos/goldbach.html>>. Acesso em: 7 set. 2019.

WANG, Y.: The Goldbach Conjecture, vol. 4. [S.l.]. World scientific, 2002.

WOON, M. S. (2000). On Partitions of Goldbach's Conjecture. Cambridge University, Reino Unido. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/math/0010027v1.pdf>>. Acesso em: 27 de Novembro de 2021.

VINOGRADOV, I. M. The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers (em russo). Trav. Inst. Math. Steklo 10, 1937.

YUAN, W. (2002). The Goldbach Conjecture. World scientific, Singapore.

ZHANG, Yitang. Bounded gaps between primes. 2013. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.308.998rep=rep1tupe=pdf>>. Acesso: 12 de Dezembro de 2021.