Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
UESB
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas-DCET
Licenciatura em Matemática

Grupos de Simetrias e Caixas de Permutações

Orientando: Adriano do Nascimento Santos

Orientador: Prof. Júlio César dos Reis

Vitória da Conquista/BA
2020

Adriano do Nascimento Santos

Grupos de Simetrias e Caixas de Permutações

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção da Graduação.

Trabalho aprovado em 03 de Março de 2020

BANCA EXAMINADORA

Júlio César dos Reis

Prof. Dr. Júlio César dos Reis
UESB
(Orientador)

Clênia Andrade Oliveira de Melo

Profª. Drª Clênia Andrade Oliveira de Melo
UESB

Prof. Dr. André Nagamine
UESB

Vitória da Conquitsa-BA
2020

As ilusões de um menino não são a base para a vida de um homem.

Agradecimentos

Antes de tudo devo agradecer primeiramente a Deus, por ter me dado vida saúde e discernimento para que eu possa lutar pelos meus objetivos de vida. Agradeço a minha mãe, Elza Libarino do Nascimento Santos e ao meu pai Adenilton Dias dos Santos, se hoje sou um homem honrado e de valor, todo o mérito é de vocês, por terem me ensinado, instruído e acima de tudo dando exemplo do caminho certo a ser seguido, afinal "A Palavra convence, e o exemplo arrasta". Sempre me motivaram a não desanimar, às vezes diretamente com frases de apoio, e às vezes indiretamente, porque depois de viajar quase 140 km por dia, me aventurar em bairros desconhecidos, me superar a cada dia em sala de aula e ainda cumprir (ou tentar) com as obrigações da graduação, e ainda assim chegar em casa e ver o brilho nos olhos de uma família ao ver o primeiro membro da casa a estudar em uma universidade, essa sensação é indescritível e me faz ter a certeza do dever cumprido, afinal como consta nos mandamentos:

"Honrar teu pai e tua mãe, a fim de que tenhas vida longa na terra que o Senhor teu Deus, te dá.
Êxodo 20:12

Agradeço ao meu irmão Gustavo do Nascimento Santos por todos os conselhos que orientações que me deste, apesar de ser muito jovem demonstra uma maturidade rara entre os jovens dos dias atuais. Agradeço à minha avó Ormezinda Libarino Nascimento, por todos seus ensinamentos e toda sua sabedoria, e também a toda minha família, tios, tias, primos e etc. Muitas vezes chegava em casa extremamente exausto, tarde da noite, níveis de estresse elevadíssimos, mas bastava observar o carinho e o esmero com que estavam me esperando e me apoiando logísticamente também. Essa conquista não é apenas minha mas de todos nós da família Santos, não importa para onde eu vá, jamais me esquecerei de onde eu vim.

Agradeço aos meus colegas de turma da graduação, especialmente à turma 2016.1 que sempre estiveram prontos a me ajudarem no que fosse necessário, com máxima humildade e prontidão, ali foi formada uma família na qual todos se apoiaram e se ajudaram, a eles meu máximo e eterno respeito, principalmente ao colega de turma Aelson Dias, que se voluntariou a ajudar na aplicação da oficina. Agradeço aos universitários conterrâneos, da cidade de Poções/BA, mais precisamente aos associados do ônibus UESB/VESPERTINO, pelas dicas e amizades feitas ali.

Agradeço também ao Laboratório de Matemática da UESB, na pessoa da professora Eridan da Costa Santos Maia, por ter colaborado com o empréstimo de materiais para a confecção das caixas, tais como, estilete, pistola de cola quente e etc. Agradeço também a professora Roberta D'Angela Menduni Bortolotti, por ter cedido um horário de sua aula para que pudesse ministrar a oficina, e também a turma do 3º semestre (2018.1) de Licenciatura em Matemática da UESB, por terem participado voluntariamente da oficina que apliquei e terem colaborado para o bom andamento desse trabalho.

Por último e não menos importante agradeço ao professor Júlio César , professor orientador desse trabalho, agradeço a paciência e as dicas valiosas. Foi uma experiência ímpar e cheia de obstáculos obviamente, motivos para desistir foram muitos, mas essa palavra raramente é usada em meu vocabulário, foi um período em que trabalhei sobre pressão, porém nos momentos da minha vida em que fui mais exigido foram justamente os

momentos em que tive os maiores resultados no meu desenvolvimento pessoal. E encerro recitando um trecho da *Canção do Expedicionário*, que simboliza bem o meu sentimento ao pegar a estrada todos os dias para cumprir um nobre e honrosa missão, formar futuros cidadãos para a nossa nação.

"Deixei lá atrás meu terreno,
Meu limão, meu limoeiro,
Meu pé de jacarandá ,
Minha casa pequenina
Lá no alto da colina,
Onde canta o sabiá. "

Sumário

Introdução

O objetivo é criar um exemplo concreto para os Grupos de Simetrias, com o qual poder-se-á ministrar oficinas ou até mesmo aulas sobre esse assunto, que para muitos é um dos mais complexos da Álgebra Abstrata Moderna . Esse exemplo é intitulado de *Caixas de Permutações* que básicamente é uma adaptação das *Caixas de Funções*, proposta na dissertação, CAIXAS DE FUNÇÕES: Uma proposta com material concreto e manipulável, proposto por Sergiana Alves Cangusçu Miranda. Que está no Banco de Dissertações PROFMAT:
http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=UESBtitulo=aluno=.

Essa monografia, está organizada em 4 capítulos. No capítulo 1,será feito um estudo sobre a *Teoria dos Grupos*, desde aspectos históricos, os problemas e estudos que induziram sua formulação, até chegar a parte principal desse trabalho, os *Grupos de Permutações*, que servirá de base fundamental para o desenvolver dos próximos capítulos.

No capítulo 2, será desenvolvida uma proposta de intervenção, para o trabalhar a ideia dos *Grupos de Permutações*, que foi intitulada de **Caixas de Permutações**. Antes de detalhar essa proposta, faz-se uma analogia com uma proposta semelhante, porém voltada para o ensino de funções, chamada de **Caixas de Funções**, realizada por Sergiana Alves Cangusçu.

No capítulo 3, após fazer a proposta de intervenção, serão propostas atividades a serem aplicadas com o uso dessas caixas, a fim de trabalhar implicitamente as proporiedades dos *Grupos de Permutações*, tais como, associatividade, elemento neutro, elemento inverso, e etc. Lembrando que se tratam de propostas de atividades, tal que o leitor que quiser aplicar atividades diferentes, fica a seu critério. Além disso, trazemos o objetivo de cada questão, ou seja, qual propriedade queremos deixar explícita com a resolução daquela questão, bem como o gabarito.

O capítulo 4, trará o passo-a-passo da montagem das caixas, os materiais necessários, as quantidades, além de detalhar como foi sua aplicação, desde a preparação da oficina, a execução e os resultados obtidos na mesma. Além disso serão expostas as dificuldades encontradas.

Ao final,a monografia traz ainda, em anexos, as propostas de atividades citadas no capítulo 4 separadas em forma de fichas, além de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, para uma eventual necessidade.

Capítulo 1

Teoria básica dos Grupos

1.1 Aspectos históricos

Nesta seção falamos sobre alguns aspectos históricos da teoria dos Grupos. Entre 1500 e 1515, o matemático italiano Scipione del ferro (1456-1526) descobriu um procedimento para resolver a equação cúbica $x^3 + px - q(p, q > 0)$. Del Ferro, mostrou que é possível expressar as raízes da equação cúbica considerada em termos de seus coeficientes usando apenas adições, subtrações, multiplicações, divisões e radiciações.
Como já se sabia desde muito antes, que as equações de grau 1, e as de grau 2 (quádricas) são resolúveis por radicais, a solução de Del Ferro levantou um desafio para algebristas do mundo inteiro: É possível resolver qualquer equação algébrica por meio de radicais?
Entre (1770-1771) o ítalo-francês Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) na sua obra *Reflexions sur résolution algébrique des équations* (reflexões sobre a resolução algébrica de equações) começou a esclarecer essa questão, ele percebeu que a teoria das permutações era de grande importãncia para a resolução de equações.
Em 1824, o matemático Niels Henrik Abel (1802-1829) provaria aquilo que Lagrange suspeitava fortemente, que não há nenhuma fórmula geral para resolver equações de grau maior ou igual a 5, por meio de radicais. Ainda assim, uma questão permanecia em pé: já que as equações de grau igual ou maior que 5 não são resolúveis por meio de radicais, mas alguns tipos são, o que caracteriza matematicamente estas últimas?
A resposta a essa pergunta seria dada pelo matemático francês Evariste Galois (1811-1832), em cuja obra aparece pela primeira vez o termo **Grupo**. Basicamente a ideia era associar a cada equação um grupo formado por permutações de suas raízes e condicionar a resolubilidade por radicais a uma propriedade do grupo. Com o tempo, verificou-se que a ideia de grupo era um instrumento dos mais importantes para o estudo das estruturas algébricas da Matemática, um exemplo é a teoria das simetrias, importantíssima para a Cristalografia e a Química.

1.2 Grupos

Nessa seção iremos definir um conceito muito importante, o conceito de **Grupos**, no decorrer da seção iremos conhecer a definição de **Grupo Abeliano**, e o que diferencia ele dos demais grupos, conceito de extrema importância para a Álgebra Abstrata Moderna.
Um conjunto G com uma operação

G x G $\rightarrow$ G
(a,b) $\rightarrow$ a.b

É um grupo se as condições seguintes são satisfeitas:

(i) A operação é associativa, isto é

a.(b.c)=(a.b).c, $\forall$ a,b,c $\in$ G

(ii) Existe um elemento neutro, isto é:

$\exists$ e $\in$ G tal que e.a=a.e=a, $\forall$ a $\in$ G

(iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é

$\forall$ a $\in$ G, $\exists$ b $\in$ G tal que a.b=b.a=e

Definição 2: Dizemos que um grupo é *Comutativo* ou *Abeliano* se além de atendidas as propriedades que definem um grupo, ele possuir também a propriedade da **Comutatividade**, ou seja, se a lei (a,b) $\rightarrow$ a.b for comutativa.
Obs 1.
1)O elemento neutro é único. De fato, se *e,e'* $\in$ G são elementos neutros de G, então:
e=e.e'=e
2)O elemento inverso é único, para cada elemento $a_i \in G$. De fato, seja a $\forall$ G, e sejam *b,b'* $\forall$ G dois elementos inversos de a; temos
$b = b.e = b.(a.b') = (b.a).b' = e.b' = b'$
logo:
b=b'
Grupos importantes:
a) **Grupo Aditivo dos Complexos:** Grupo (C,+) onde a adição é a ususal.
b) **Grupo Multiplicativo dos Complexos:** É o grupo (C*,.), sendo a multiplicação a usual.
c) **Grupo Aditivo das Matrizes:** Grupo (M,+), onde o elemento neutro é a matriz Nula.
d) ***Grupo Linear Complexo de grau n***. O Conjunto GL_n (C) das matrizes complexas n x n com determinantes não nulo, tem uma estrutura de grupo em relação à multiplicação de matrizes.
(i) Seja A,B $\in GL_n(C) \longrightarrow$ det (A.B) = det(A) . det(B) $\neq 0 \longrightarrow A.B \in GL_n(c)$

(ii) A multiplicação das matrizes é associativa.

(iii) $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$ é o elemento neutro.

*Obs 2: O **Grupo Multiplicativo das Matrizes** (M, $\bullet$) apesar de ter a propriedade associativa, existência de elemento neutro (Matriz Identidade) e elemento inverso (Matriz

Inversa), não é um Grupo Abeliano (Comutativo) pois a multiplicação de matrizas não comuta.
Se a lei considerada for a adição, diremos que o grupo é Grupo Aditivo, se a lei for uma multiplicação, diremos que é um Grupo Multiplicativo. Concluímos então que dado um conjunto qualquer, ele será Grupo se todas as condições supracitadas forem devidamente atendidas, respectivamente, Associatividade, Existência de elemento neutro, Existência de elemento inverso.
Exemplos
Quais dos conjuntos abaixo são grupos em relação à operação indicada?
a) Z_- , em relação à adição
Solução: Note que $Z_- \subset Z$ e também que Z_- é um conjunto não vazio e fechado para a adição. Então vamos supor por absurdo que $(Z_-, +)$ é um grupo , logo o seu elemento neutro é o mesmo de Z ou seja, 0. Porém $0 \notin Z_-$. Logo, podemos concluir que $(Z_-, +)$ não é um grupo pois não contempla todas as condições para ser grupo.

b) A= $\{x \in Z | x$ é par $\}$, em relação à adição

Solução: Vamos verificar a existência ou não da associatividade:
Um número par é um número da forma $2k | k \in Z$, assim suponha três números x, y e z $\in$ A, logo eles são da forma 2a, 2b e 2c; respectivamente. Logo a adição entre eles é da forma:

$$
\begin{gathered}
x + (y + z) = \\
2a + (2b + 2c) = \\
2a + (2(b + c)) = \\
2a + 2(b + c) = \\
2\ (a + (b + c)) = \\
2\ ((a + b) + c) = \\
(2(a + b) + 2c) = \\
2(a + b) + 2c = \\
(2a + 2b) + 2c = \\
(x + y) + z
\end{gathered}
$$

Como vimos, $x + (y + z) = (x + y) + z$ conjunto A tem a associatividade.

Agora iremos conferir a existência do elemento neutro.
Seja x = 2a, e e tal que:
x + e = 2a + e = 2a
Da mesma forma
e + x = e + 2a = 2a
Logo e é o elemento neutro de A.

Existência de elemento inverso.
x + x' = e
x = e - x'
x = -x'
Logo -x' é o elemento inverso (Aditivo) $\forall x \in$ A.

Como as três condições acima são satisfeitas então (A, +) tem estrutura de grupo.

1.3 Homomorfismo de Grupos.

Definição 3: Dados dois grupos (G, *) e (H, $\triangle$) dizemos que uma aplicaçâo Φ , definida por:

$$\Phi : G \longrightarrow H$$

É um *homomorfismo de G em H* se :
$(\forall a, b \in G), \Phi(a * b) = \Phi(a) \triangle \Phi(b)$
Isto é, Φ é compatível com as leis de G e H.

Isomorfismo
Sejam (G,*) e (J, Δ) dois grupos. Uma aplicação f: G $\longrightarrow$ J é chamada de *Isomorfismo de (G,*) em (J)* se:

- (i)f é injetiva, ou seja:

$$\forall a, b \in G,\ tal\ que\ a \neq b\, então\ f(a) \neq f(b)$$

- (ii) $(\forall a, b \in G) f(a * b) = f(a) \Delta f(b)$

- (iii)f é sobrejetiva, ou seja:

$$f\ :\ G \longrightarrow J\ tal\ que\ \forall\ a\ \in G,\ \exists b \in J;\ f(a) = b$$

1.4 Subgrupos

Definição 4: Seja (G, .) um grupo; um subconjunto não vazio H de G é um *subgrupo* de G (denotamos H $<$ G) quando as condições seguintes são satisfeitas:
(i) $\forall$ h_1,h_2 $\in$ H, temos $h_1.h_2$ $\in$ H
(ii) $\forall$ h_1,h_2,h_3 $\in$ H, temos $h_1.(h_2.h_3)$=$(h_1.h_2).h_3$
(iii) $\exists$ e $\in$ H tal que, e.h=h.e=h $\forall$ h $\in$ H
(iv) Para cada h $\in$ H, existe k $\in$ H tal que h.k=k.h=e.

Diante dessa definição podemos afirmar que um Subgrupo é também um grupo, pois, por definição de subgrupo, é associativo, existe elemento neutro e_n, e qualquer de seus elementos pertencentes a H também pertence ao grupo G, sendo que o grupo G por definição tem a propriedade do elemento inverso para cada um de seus elementos, logo $\forall h \in G \exists h^-1 \in G$ talque $h.h^-1 = e_n$.

Proposição 1:Seja H um subconjunto não-vazio do grupo G. Então H é um subgrupo de G se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

(i) $\forall$ h_1,h_2 $\in$ H, temos $h_1.h_2 \in$ H

(ii) $\forall$ h $\in$ H, temos h^{-1} $\in$ H

Exemplo
O grupo dos Inteiros H = (Z,+) é um subgrupo do grupo dos Reais (R,+) pois $\forall h_1 h_2 \in Z$ temos $h_1 + h_2 \in H$, temos a existência da associatividade, a existência dos elementos neutro e elemento inverso. Denota-se

$$(Z, +) < (R, +)$$

Exemplo Verique se A é subgrupo do grupo multiplicativo de R, supondo $p \in N$ um número primo dado.

$$A = \{ a + b \sqrt{p} \ ; a, b \in Q \}$$

Solução
Sejam a + b $\sqrt{p}$ e c + d $\sqrt{p}$ $\in$ A. Como c + d $\sqrt{p}$ $\in$ A, então também pertence a (R,+), que é um grupo, logo (-c)(-d)$\sqrt{p}$ é o elemento inverso. Fazendo:
a + b $\sqrt{p}$ + (-c) + (-d) $\sqrt{p}$ = (a-c) + (b-d) $\sqrt{p}$ $\in$ A.

Logo A é subgrupo de R, ou em notação:

$$(A, +) < (R, +)$$

Definição 5:A ordem de um grupo G é o número de elementos em G e a denotamos por $|G|$.
exemplos: $|Z| = \infty$, $|Z/nZ|$ = n , etc

Definição 6:A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda se chama o *índice* de H em g e é denotado por (G:H).

exemplo Dado o subgrupo H = id, (2 3) de $S_3 = id, (123), (132), (23), (13), (12)$,obter elementos $a_1, a_2, \Delta\Delta\Delta, a_k \in S_3$tal que:

$$S_3 = a_1 H \bigcup a_2 H \bigcup ... \bigcup a_k H$$

seja uma união disjunta.
Solução. As classes laterais distintas são:

- H = id, (2 3)

- (1 2 3)H = (1 2 3), (1 3)

- (1 3 2)H = (1 3 2), (1 2).

Então, podemos escolher a_1= id, a_2 = (1 2 3) e a_3 = (1 3 2), e temos que:

$$S_3 = a_1H\bigcup a_2H\bigcup a_3H$$

é uma união disjunta. Portanto $(S_3 : H) = 3$.

1.5 Teorema de Lagrange

Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G. Então vale que:

$$|G| = |H|.(G : H)$$

Ou seja, a ordem de G é igual a ordem de H "vezes"o índice de H em G.

1.6 Grupos de Permutações

Nessa seção iremos abordar e explorar o conceito de *Permutação* e *Grupo de permutação.* Ao longo da seção notaremos que esse grupo não é um grupo Abeliano, ou seja, não conta com a comutatividade. Veremos também a definição de ciclos.

Definição: Seja E um conjunto não vazio. chama-se permutação de E toda aplicação bijetora do tipo:

$$\mathrm{F : E \longrightarrow E}$$

Assim por exemplo as permutações E={1, 2, 3}, que podem ser chamadas de S_3 são as aplicações:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} F_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para representar o S_3 na forma matricial procedemos de seguinte forma:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ou da seguinte forma:
$S_3 = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}$

De modo geral, se E=$\{1, 2, 3, ..., n\}$ indicamos uma permutação F de E com:

F= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ F(1) & F(2) & F(3) & ... & F(n) \end{pmatrix}$

Proposição 2: O conjunto S(E) das permutações de E (E $\neq \emptyset$) dotado da operação de composição de aplicações é um grupo.

Definição: Chama-se *grupo das permutações sobre E* ou *grupo de simetria* o grupo (S(E), $\circ$) das permutações de E. Se E = $\{$1, 2, ..., n$\}$, ao invés de usarmos S(E), adotamos a notação S_n para o grupo simétrico. Uma observação importante a se fazer, que o S_n tem n! elementos.

Exemplo 3.1 A composição entre elementos de um grupo de simetria é feita da seguinte forma:

Sejam F_i e $F_j \in S_n$, na composição $F_i \circ F_j$ primeiro fazemos a permutação de F_j e em seguida aplicamos o resultado na permutação F_i. Em linguagem comum, a composição se faz da direita para a esquerda.
Por exemplo, dadas as permutações em S_3:

Vamos encontrar as composições:
(i) $F_2 \circ F_3$ e $F_3 \circ F_2$
(ii) $F_1 \circ F_2$,
(iii) ${F_6}^2 = F_6 \circ F_6$.

(i) Se fizermos $F_2 \circ F_3$ tal que:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

,

$$F_2 \circ F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Começamos a composição com a permutação à direita, e cada imagem servirá como Domínio para a permutação à esquerda, em F_3 a imagem do 1 é 2, logo após operarmos em F_3 iremos utilizar a imagem 2 para Domínio em F_2 obtendo em seguida o resultado 3.

$$F_2 \circ F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & ? & ? \end{pmatrix}$$

Em F_3 a imagem do 2 é 1, logo após operarmos em F_3 iremos utilizar a imagem 1 para Domínio em F_2 obtendo em seguida o resultado 1.

$$F_2 \circ F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

Em F_3 a imagem do 3 é 3, logo após operarmos em F_3 iremos utilizar a imagem 3 para Domínio em F_2 obtendo em seguida o resultado 2.

$$F_2 \circ F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se procedermos de maneira análoga para a composição $F_3 \circ F_2$ emcontraremos o seguinte resultado:

$$F_3 \circ F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Notamos que $F_2 \circ F_3 \neq F_3 \circ F_2$, logo concluímos que o grupo das permutações não é um Grupo Abeliano, pois não é necessariamente comutativo.

(ii) Já na composição $F_1 \circ F_2$, temos

$$F_1 \circ F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Começamos com a permutação à direita,e cada imagem servirá como Domínio para a permutação à esquerda, em F_2 a imagem do 1 é 1, logo após operarmos em F_2 iremos utilizar a imagem 1 para Domínio em F_1 obtendo em seguida o resultado 1.

$$F_1 \circ F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & ? & ? \end{pmatrix}$$

Continuando com o mesmo raciocínio para os Domínios 2 e 3 de F_2 e aplicando as imagens como Domínios para F_1 obteremos o seguinte resultado dessa composição.

$$F_1 \circ F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii) De forma análoga encontramos.

$$F_6^2 = F_6 \circ F_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Em (ii) percebemos que $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$ mas isso não é uma regra, como foi visto em (i) $F_2 \circ F_3$ e $F_3 \circ F_2$.

Definição 9: Ciclos Seja x $\in$ E, e F $\in$ S(E). Dizemos que F deixa x fixo se F(x) = x; caso contrário F movimenta x. Os 2-ciclos são também chamados de transposições.

Exemplo 4.1
Nas permutações em S_4:

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, F_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} F_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

F_α é um 3-ciclo e pode ser escrito em notação cíclica do seguinte modo, F_α=(1,2,3), de modo análogo, F_β é um 2-ciclo que em notação cíclica é escrito como F_β=(1,2) e F_γ é um 4-ciclo, que pode ser escrito F_γ=(1,2,3,4).

1.7 Permutações disjuntas:

Nessa seção iremos abordar o conceito de Permutações Disjuntas.
Definição: Duas operações α e β em S(E) são disjuntas quando todo x que é movimentado por uma, é fixo pela outra. em símbolos:
$\alpha(x) \neq$ x $\Longrightarrow \beta(x) =$ x
$\beta(x) \neq$ x $\longrightarrow \alpha(x) =$ x

Dizemos que várias permutações são disjuntas quando são duas a duas disjuntas. Por exemplo, as permutações.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

São disjuntas.

Capítulo 2

Caixas de Permutações

2.1 Introdução

Nesse capítulo irei trabalhar as idéias das permutações em um contexto de funções, tudo isso de forma lúdica, com as caixas das funções. Baseado em uma proposta de atividade aparentemente voltada para o ensino de funções e composições. Com base nessa proposta, iremos elaborar um material muito semelhante, porém voltado para o estudo e ensino de **Grupos de Permutações**, conceito esse apresentado, abordado e exemplifcado no capítulo anterior

2.2 Caixas de Permutações

Nesta seção irei relatar resumidamente o passo-a-passo da construção das Caixas de Funções. Sergiana Alves Cangusçu Miranda, em sua Dissertação de Mestrado intitulada **CAIXA DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA COM MATERIAL CONCRETO E MANIPULÁVEL** , propôs uma atividade voltada ao ensino de funções, essa atividade era também muito eficiente para o ensino de composição de funções.
No capítulo 3 de sua dissertação, ela descreve o processo de construção de referida caixa, os erros, os acertos, e a versão que ela considerou mais bem sucedida, os materiais (tabelas 3.2 e 3.2), as medidas, etc. Uma das preocupações principais da autora, desde o início, foi a utilização de materiais relativamente barato, pois ela propunha essa atividade para ser utilizada por professores do ensino básico.

Tabela 2.1: Material utilizado para confecção de uma caixa de função.

Material Utilizado	Quantidade
Placa de Papelão 51x55 cm	6
Luva de PVC soldável 3/4”	36
Conduíte corrugado amarelo 3/4”	2 m
Conduíte corrugado verde 3/4”	2 m
Conduíte corrugado Preto 3/4”	2 m
Bisnaga de cola quente	3
Tubo grande de cola branca	1
Tinta acrílica verde	1
Tinta acrílica preta	1
Tinta acríclica amarela	1
Tinta acrílica branca	1
Bolinha de PVC	18
Placa de isopor	1/2
Copinho de doce para festa	18
Spray prata	2

Tabela 2.2: Ferramentas utilizadas para a confecção das caixas.

FERRAMENTAS UTILIZADAS
Estilete grande
Estile pequeno 3/4”
Compasso
Régua 50 cm
Lápis preto
Pistola de cola quente

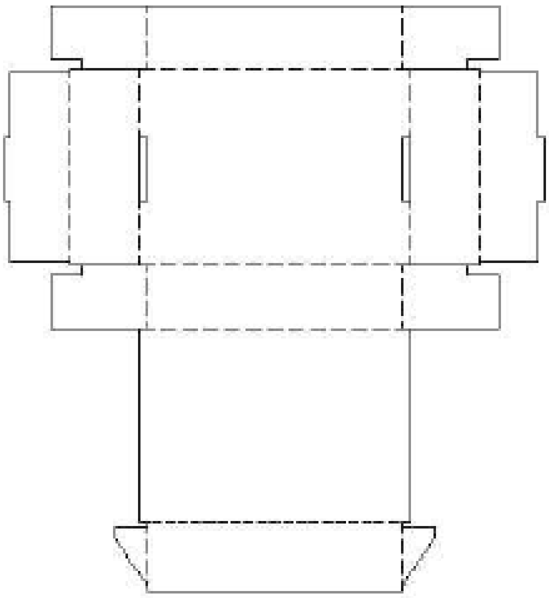
Percebe-se diante dessas listas que, apesar de terem sido utilizados materiais relativamente baratos e de fácil acesso, são em grande quantidade, o que acaba aumentando o valor final para a confecção das caixas, levando em consideração que a autora trabalhou com caixas de três entradas e três saídas, o que fez com que fossem elaboradas 6 caixas com todas as combinações possíveis de entradas e saídas.
Se observar cuidadosamente, verá uma relação entre o cálculo da quantidade de caixas em relação as quantidades de entradas, e suspeita-se que ela provavelmente utilizou noções de Grupos de Simetria, visto que as caixas construídas por ela são o grupo S_3, e como vimos no capítulo 1, a quantidade de elementos de um grupo de permutação S_n é igual a $n!$, no caso do $S_3 = 3! = 3.2.1 = 6$, seis elementos ou seis caixas.
Se fizermos caixas para trabalhar com o grupo S_2 teremos 2 caixas, o que não seria muito empolgante nem para quem aplica a atividade, nem pra os alunos. Se queremos trabalhar com o grupo de permutação S_4 teríamos 24 elementos, ou 24 caixas e então teremos que multiplicar por quatro cada um dos elementos da Tabela 2.1, o que deixaria a atividade ainda mais custosa, financeiramente falando, logo o S_3 é um grupo razoável para se trabalhar.
A montagem das caixas foi relatada passo-a-passo na dissertação, como foi uma ex-

periência inédita para a autora, óbviamente houveram muitas tentativas, acertos e erros, até chegar a versão final (Figura 3.1).

Figura 2.1: Caixa de funções.

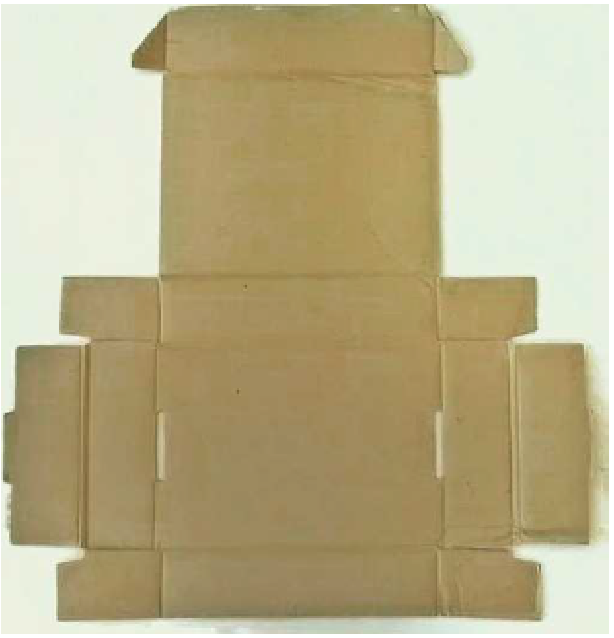
Na figura pode-se notar um papel branco na caixa, esse papel é usado para os alunos identificarem com qual caixa estão trabalhando, visto que são seis no total, todas com comportamentos diferentes. Vemos também alguns conduítes salientando-se, em três cores, essas são as entradas as saídas estão do lado esquerdo da foto. Durante a composição entre caixas, esses conduítes servem para serem encaixados nas entradas da outra caixa. Na Figura 3.2, vemos o protótipo, de como a placa de papelão deveria ficar.

Figura 2.2: Protótipo da caixa.



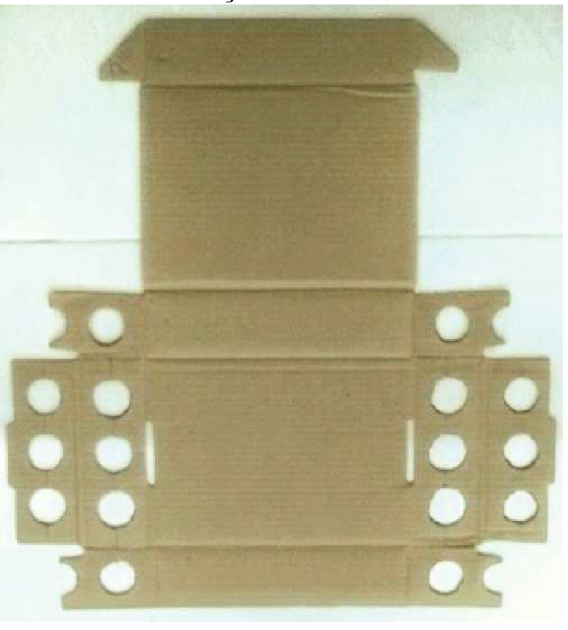
Na Figura 3.3, vemos o modelo idealizado, de como a placa de papelão deveria ser cortada, para depois ser dobrada.

Figura 2.3: Planificação da caixa em papelão.



Já na figura 3.4 vemos a placa de papelão já moldada e recortada, falta agora os recortes por onde encaixamos os conduítes.

Figura 2.4: Planificação da caixa com recortes.



Depois disso é só dobrar a placa em formato de caixa, feito isso vem um passo importante, soldar os conduítes dentro da caixa, são eles que irão conduzir a bola de uma certa entrada para uma certa saída, tudo dependendo da caixa.

Figura 2.5: Interior da caixa.

Vemos na figura 3.5 o interior de todas as seis caixas utilizadas, é visível a diferença entre as combinações de entradas e saídas de todas elas. Na saída de cada caixa (ou na saída da combinação entre elas) foi colocado um copo da cor do conduíte para que possa ser feita a análise do comportamento da bolinha de isopor em cada caixa.

2.3 Proposta de adaptação

Ao analisar a dissertação foi visível que o objetivo dessa versão caixa era uma aula investigativa de introdução as funções, muito provavelmente para uma turma de ensino médio. Mas percebemos também que é possível, com base nessa caixa criar uma versão adaptada para uma oficina de ***Grupos de Permutações*** para uma turma iniciante ao ensino superior, por exemplo, ou até mesmo uma oficina para alunos do ensino médio, porém sem usar termos tais como, *grupo*, *grupo abeliano*, *grupo de simteria*, S_3 e etc; totalmente fora do cotidiano deles, apenas explorando mais os números e menos as cores, já que o uso de cores é extremamente importante nas séries iniciais, mas como se tratam de jovens com 15, 16 anos ou mais, não vimos problemas em explorar mais o conhecimento aritmético deles.

A adaptação que imaginamos, não foge muito do que foi feito por Sergiana, autora da dissertação. As principais diferenças são:

- Entradas e saídas enumeradas lateralmente de 1 a 3.

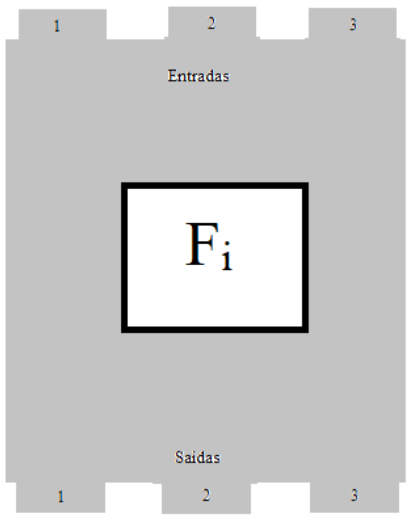
- Identificação da saída e entrada da caixa, para que os alunos não confundam ambas.

- Não necessidade de conduítes coloridos.

- Não necessidade de copos coloridos.

O principal objetivo dessa adaptação é que os alunos percebam que a bola ao ser solta na entrada 1 da caixa F_1 (Identidade), irá sair na saída 1, mas que o mesmo não ocorre se soltarmos a mesma bola na entrada 1 da caixa F_5 por exemplo.

Figura 2.6: Proposta de caixa adaptada.



Uma das principais diferenças entre a caixa elaborada por Sergiana, e a nossa, é que a primeira faz uso das cores tanto nas entradas quanto nas saídas das caixas, sendo que algum aluno mais curioso e perspicaz pode descobrir antecipadamente onde a bola irá sair apenas olhando a cor da entrada e a cor da saída.
Já a proposta (Figura 3.6), por usar conduítes da mesma cor, eles só saberão por onde a bola irá sair testando e associando as entradas às saídas que estão enumeradas, ou abrindo a caixa, o que não será permitido. Outro diferencial consiste em, a versão proposta por nós, além de visualmente ter suas entradas e saídas enumeradas na mesma ordem, tem identificado onde são as entradas e onde são as saídas, o que facilita um pouco o trabalo do aplicador de tal atividade, pois não precisará ficar explicando oralmente tais detalhes.

Capítulo 3

Atividades envolvendo as caixas

3.1 Introdução

Nesse capítulo vamos analisar os resultados obtidos através das atividades propostas após a intervenção com as Caixas. As atividades tem por objetivo magno, avaliar a assimilação e o entendimento do conteúdo por parte dos alunos, após as instruções com as caixas. As atividades se dividem em duas fases, a primeira em que os alunos avaliam o funcionamento das caixas, e a segunda em que eles irão ter o contato com as composições entre elas.
Diante da análise do trabalho desta colega, observamos que o funcionamento de tal material se assemelha bastante a teoria dos Grupos, abordada no capítulo 1, em especial o grupo das permutações.
Irei descrever agora os materiais utilizados para a construção e confecção das caixas, bem como as medidas, e o modelo de como deverá ser a caixa, tudo com base nos escritos de Sergiana.

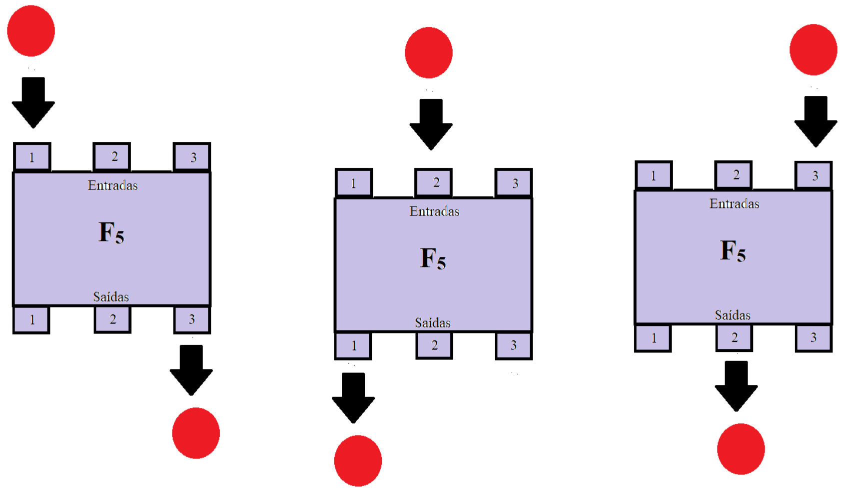
3.2 Atividades

Segue nessa seção, sugestões de atividades a serem aplicadas com o uso das respectivas caixas. Todas enolvendo as propriedades dos *Grupos de Permutações*.

1) Dadas as caixas $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ todas com entradas enumeradas de 1 à 3, utilize a bola em suas mãos para testar cada uma das caixas, anote os resultados.

.

Figura 3.1: Caixa F_5

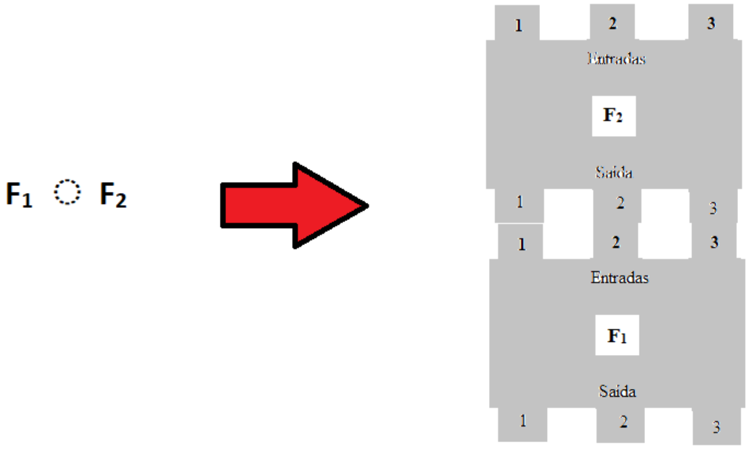


	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
Caixa F_1	1		Caixa F_2	1	
	2			2	
	3			3	
	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
Caixa F_3	1		Caixa F_4	1	
	2			2	
	3			3	
	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
Caixa F_5	1		Caixa F_6	1	
	2			2	
	3			3	

2) Considerando que a notação $F_1 \circ F_2$ equivale a dizer que a caixa F_2 está encaixada acima da caixa F_1, como mostra a Figura 1, agora realize as seguintes combinações e anote os resultados:

$$F_1 \circ F_1, F_1 \circ F_2, F_1 \circ F_3, F_1 \circ F_4, F_1 \circ F_5, F_1 \circ F_6$$

Figura 3.2: F_1 composta com F_2



	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_1$	1		$F_1 \circ F_2$	1	
	2			2	
	3			3	

	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_3$	1		$F_1 \circ F_4$	1	
	2			2	
	3			3	

	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_5$	1		$F_1 \circ F_6$	1	
	2			2	
	3			3	

3)Com base nos resultados anteriores, responda:

a) Qual o resultado da combinação $F_1 \circ F_2$? Preencha a tabela para a composição $F_1 \circ F_2$, e preencha tabela para a composição $F_2 \circ F_1$, em seguida compare os resultados.

Figura 3.3: F_1 composta com F_2

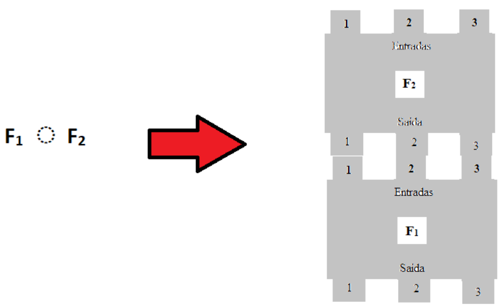
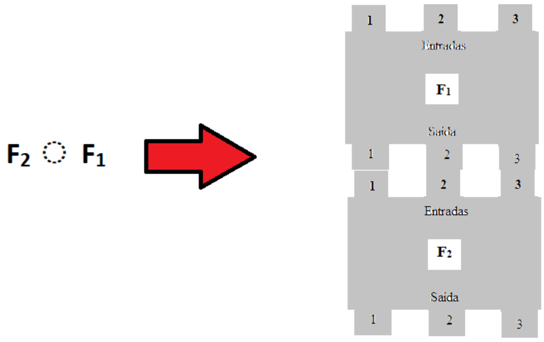


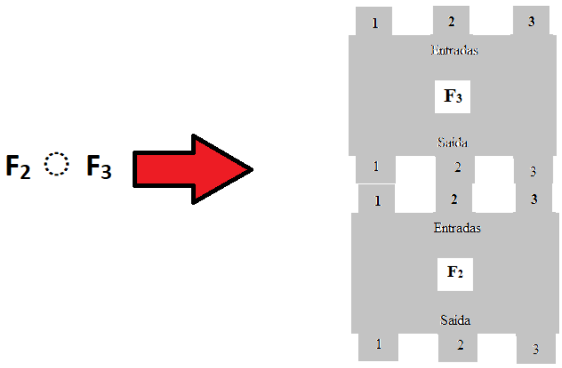
Figura 3.4: F_2 composta com F_1



	Entrada	Saída		Entrada	Saída
$F_1 \circ F_2$	1		$F_2 \circ F_1$	1	
	2			2	
	3			3	

3) b) $F_2 \circ F_3 = F_3 \circ F_2$? Quais os resultados de uma e os resultados da outra?

Figura 3.5: F_2 composta com F_3



	Entrada	Saída		Entrada	Saída
$F_2 \circ F_3$	1		$F_3 \circ F_2$	1	
	2			2	
	3			3	

3) c) Se encaixarmos duas caixas do tipo F_6 qual seria o resultado da combinação $F_6 \circ F_6$? Compare o resultado dessa combinação, com o comportamento das outras caixas.

Figura 3.6: F_6 composta com F_6

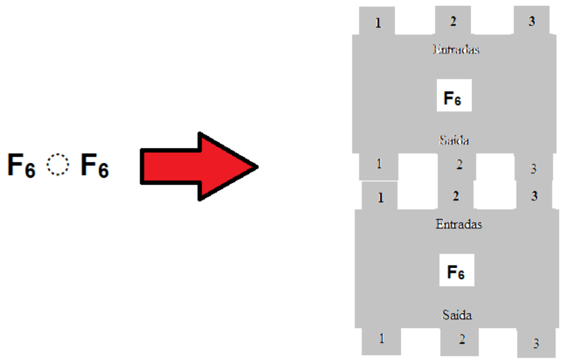
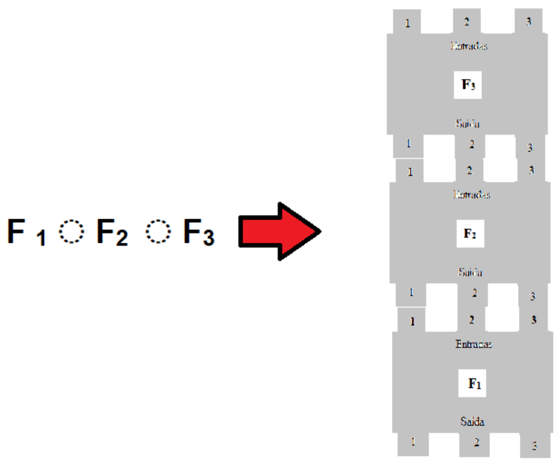


Tabela 3.1: Caixa $F_6 \circ F_6$

ENTRADA	SAÍDA
1	
2	
3	

3) d)Considere a combinação $F_1 \circ F_2 \circ F_3$, se colocarmos a bola na entrada 3 da caixa que está no topo (caixa F_3) , onde a bola sairá na última caixa (caixa F_1)? Analise o comportamento dessa composição e anote os resultados na tabela abaixo.

Figura 3.7: $F_1 \circ F_2 \circ F_3$



	ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_2 \circ F_3$	1	
	2	
	3	

3) e) Se colocarmos a bola na entrada 2 da combinação $F_3 \circ F_4$ teremos o mesmo resultado se colocarmos a bola na entrada 1 da combinação $F_4 \circ F_3$?

Figura 3.8: F_3 composta com F_4

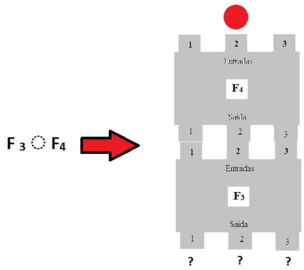
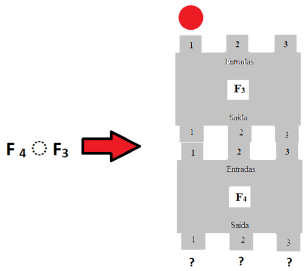


Figura 3.9: F_4 composta com F_3



	Entrada	Saída		Entrada	Saída
$F_3 \circ F_4$	1		$F_4 \circ F_3$	1	
	2			2	
	3			3	

3) f) Se tivéssemos 3 caixas do tipo F_5 e colocássemos uma em cima da outra ($F_5 \circ F_5 \circ F_5$), onde a bola sairia se a colocássemos na entrada 3 da caixa que está no topo? (Use suas anotações!)

4) Realize as combinações e em seguida responda:

$$F_2 \circ F_6 \text{ e } F_4 \circ F_4$$

têm o mesmo comportamento?

5) Dada as caixas F_5 e F_1, tal que:

Figura 3.10: $F_5 \circ F_5 \circ F_5$

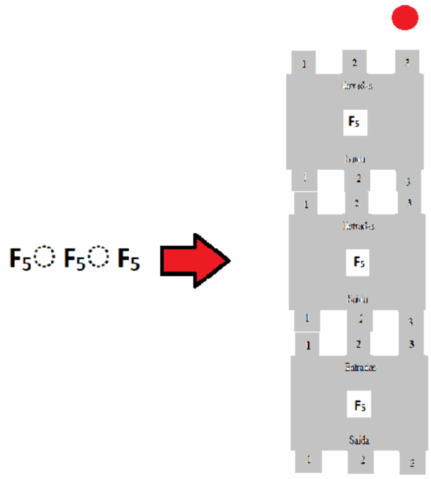
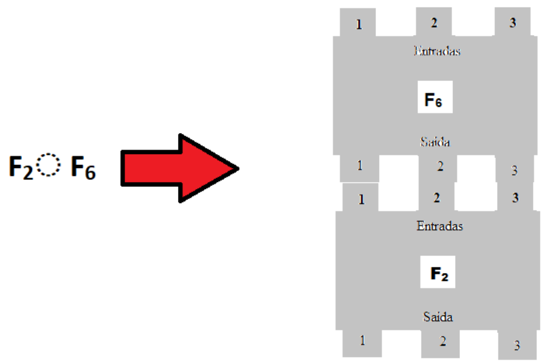


Figura 3.11: $F_2 \circ F_6$



$\mathrm{F}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Descubra qual a caixa F_x tal que;
$F_5 \circ F_x = F_1$

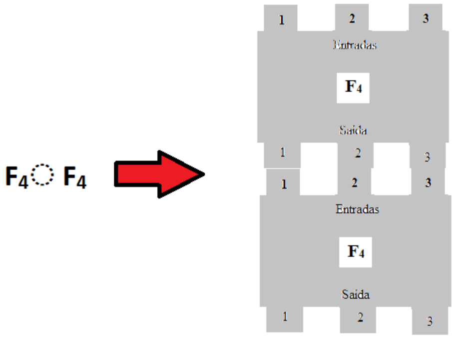
3.3 Objetivo das questões

Cada questão proposta foi minuciosamente preparado para se alcançar certos objetivos. Na questão 1 temos como objetivo dessa atividade, levar os alunos a reconhecerem o funcionamento das caixas.

Na questão 2, o nosso objetvo é apresentar a composição entre as caixas sobre o título de "combinação entre caixas", com isso teremos condições de futuramente trabalhar a possibilidade de comutação ou não, além de levá-los a reconhecer a caixa F_1 como a caixa identidade.

A questão 3a, tem como objetivo induzir os alunos a realizarem combinações entre as caixas. enquanto a questão 3b queremos levar os alunos a perceberem a não comutatividade da maioria dos elementos.

Figura 3.12: $F_4 \circ F_4$



Na questão 3c, queremos que eles deduzam através de raciocínio lógico o resultado da combinação $F_6 \circ F_6$ é igual a caixa F_1, com isso eles perceberão que todas as combinações tem o resultado de uma caixa já existente.

Na questão 3d, queremos que eles notem que podemos ter combinações de mais de 2 caixas.
Na questão 3f, almejamos que eles utlilizem a informação de que a combinação entre duas (ou mais) caixas, podem ser representadas por uma caixa já existente, e realizem a combinação.
Na questão 4 objetivamos que eles percebam a associatividade nas combinações, por exemplo:

$F_2 \circ (F_3 \circ F_4)$ ao fazer a combinação que está dentro do colchete, eles perceberão que $F_3 \circ F_4 = F_6$, logo $F_2 \circ (F_3 \circ F_4) = F_2 \circ F_6 = F_5$, de forma análoga, em $(F_2 \circ F_3) \circ F_4$ ao fazer a combinação $F_2 \circ F_3$ eles percebrão que $F_2 \circ F_3 = F_4$, logo $(F_2 \circ F_3) \circ F_4 = F_4 \circ F_4 = F_5$, comparando os resultados percebemos que $F_2 \circ (F_3 \circ F_4) = (F_2 \circ F_3) \circ F_4$

A questão 5, quremos que os alunos sigam o caminho "inverso", que eles já tendo o resultado da composição, proponham uma estratégia para descorir quais caixas foram compostas para se chegar a tal resultado.

3.4 Gabarito das questões

Na **questão 1**, queremos que os alunos reconheçam o funcionamento de todas as caixas.

	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
Caixa F_1	1	1	Caixa F_2	1	2
	2	2		2	1
	3	3		3	3
	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
Caixa F_3	1	1	Caixa F_4	1	2
	2	3		2	3
	3	2		3	1
	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
Caixa F_5	1	3	Caixa F_6	1	3
	2	1		2	2
	3	2		3	1

Essa questão é justamente a primeira, pelo fato de ser a questão que induz os alunos a conhecerem o funcionamento das caixas.

Na **questão 2**, tem-se por objetivo dar ênfase a propriedade de elemento neutro da caixa F_1. Espera-se que se obtenham as seguintes respostas:

	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_1$	1	1	$F_1 \circ F_2$	1	2
	2	2		2	1
	3	3		3	3
	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_3$	1	1	$F_1 \circ F_4$	1	2
	2	3		2	3
	3	2		3	1
	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_5$	1	3	$F_1 \circ F_6$	1	3
	2	1		2	2
	3	2		3	1

Na **questão 3a** é proposto que eles construam duas tabelas para as combinações $F_1 \circ F_2$ e $F_2 \circ F_1$, de modo que eles percebam que a caixa F_1 é neutra, independente da forma como é composta:

	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_2$	1	1	$F_2 \circ F_1$	1	1
	2	2		2	2
	3	3		3	3

Existe o risco de após a questão 3a, alguém pensar erroneamente que as combinações entre as caixas serão sempre iguais independente da ordem, pensamento esse que será desconstruído na **questão 3b**:

	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
$F_2 \circ F_3$	1	2	$F_3 \circ F_2$	1	3
	2	3		2	1
	3	1		3	2

Percebe-se que a combinação $F_2 \circ F_3$ tem como resultado justamente o funcionamento da caixa F_4, bem como a combinação $F_3 \circ F_2$ tem como resultado o funcionamento da caixa F_5. Uma propriedade dos grupos, pois a combinação entre elementos de um grupo, tem como resultado um elemento do mesmo grupo, ou seja, é fechado para a operação.
A **questão 3c** irá fazer que os alunos percebam que a combinação $F_6 \circ F_6$ tem como resultado justamente a caixa F_1, a caixa neutra. Em linguagem de grupos equivale a dizer que o elemento F_6 é o seu próprio elemento inverso:

$$F_6 \circ F_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = F_1$$

A **questão 3d** exige que os alunos realizem a combinação $F_1 \circ F_2 \circ F_3$, espera-se que eles enocntrem o seguinte resultado:

$$F_1 \circ F_2 \circ F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = F_4$$

Ou seja, não importa a quantidade de elementos combinados, sempre haverá um elemento que o represente.

Questão 3e espera-se que eles obtenham o seguinte resultado.

$$F_3 \circ F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = F_6$$

$$F_4 \circ F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = F_2$$

A **Questão 3f**

$$F_5 \circ (F_5 \circ F_5) = F_5 \circ F_4 = F_1$$

Nessa questão espera-se que eles notem que apesar de não posuírem 3 caixas do tipo F_5, a combinação $(F_5 \circ F_5)$ pode ser substituída por F_4 que tem o mesmo funcionamento, e daí em diante proceder como as questões anteriores.

A **Questão 4**, teremos:

$$F_2 \circ F_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = F_5$$

$$F_4 \circ F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = F_5$$

Logo, espera-se que percebam a possibilidade de combinações entre elementos diferentes terem resultados iguais.

Finalmente a **Questão 5** a resposta será:
$F_5 \circ F_x = F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

A saída "a"da F_x precisa estar alinhada com a entrada 2 da F_5, analogamente a saída "b"com a entrada 1 e a saída "c"com a entrada 2, dessa forma a=2, b=3 e c=1, ou seja, a caixa $F_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = F_4$.

Capítulo 4

Intervenção

4.1 Introdução

Nesse capítulo iremos descrever o passo-a-passo, da preparação da Oficina, desde a procura dos materiais para a construção das caixas, a construção propriamente dita, a aplicação da oficina e os resultados obtidos pelas resoluções dos exercícios propostos.
De início a principal dificuldade foi encontrar as placas de papelão, necessárias para a construção das *Caixas de Permutações*, após procurar em vários estabelecimentos e não obter êxito, decidimos em adaptar as *Caixas de Funções* construídas por Sergiana, visto que estas adaptações necessárias para que tais caixas atendessem as necessidades da oficina planejada, não provocariam danos estruturais as características iniciais das caixas de permutações.

4.2 Montagem da caixa adaptada

Desde o início o objetivo era montar as caixas do zero, com um semelhança apenas estrutural em relação as caixas de funções da Sergiana, logo, deveria adquirir os mesmos materiais que ela utilizou para construir as suas caixas, e uma das principais dificuldades desde o início foi encontrar as placas de papelão.

Ao todo foram procurados em 9 estabelecimentos (3 em Poções/BA e 6 em Vitória da Conquista/BA), não obtendo êxito nas buscas, tanto em papelarias quanto em lojas especializadas em embalagens.

Daí a alternativa foi utilizar uma caixa de papelão comum (de fogão, máquina de lavar, etc.), planificá-la e recortar com as mesmas medidas da caixa de funções. Para isso, antes de fazer os recortes, e para evitar e consequentes desperdícios (que seriam terríveis, visto que o simples fato de encontrar o papelão já um desafio a parte), foi feito um molde de cartolina, com as mesmas dimensões da caixa de funções planificada (figura 3.3), com isso no momento de recortar o papelão, bastava posicionar o molde sobre o mesmo.

Com a referida caixa de papelão foi possível fabricar três caixas com tais dimensões, e de cara já percebemos que a espessura desse papelão era diferente do papelão utilizado pela Sergiana em suas caixas, com isso ficava mais difícil de dobrar e modelar o papelão até tomar o formato de caixa, porém foi possível montar, mas com um problema que literalmente saltava aos olhos: a caixa não ficava fechada, justamente pelo fato de o papelão ser mais duro, ou melhor dizendo, mais resistente a dobraduras.

Logo a solução improvisada foi montar a caixa por completo, inclusive por dentro, e depois lacrar com fita adesiva do tipo 45 mm x 45 m (Fita adesiva larga)

Para montar o interior não houveram muitos percauços, com isso utilizamos conduítes e luvas do mesmo tipo que os usados para montar as caixas de funções, 6 luvas 3/4 lisas três para as entradas e três para as saídas, e também 3 conduítes corrugados 3/4.

Foi utilizado cola quente para colar as luvas nos orifícios das caixas. Após a secagem da cola, foi feito encaixe dos conduítes nas luvas, etapa em que também não houve problemas, após isso veio a etapa de pintura da caixa, procurei spray de tinta prata, porém na loja não tinha essa cor, logo a cor que mais se assemelhava era o cinza, então esse foi o spray de tinta escolhido.

Ao pintar a caixa com uma demão percebi que apesar de cinza a cor ficou muito semelhante ao prata das caixas de funções, após a tinta secar ao ar livre por 4 horas apliquei outra demão de tinta cinza. Feita a primeira caixa parti para o processo de construção das outras duas que eram possíves ser feitas com aquele papelão disponível no momento, seguindo os mesmos passos descritos nas construção da caixa anterior, obtendo êxito.

Figura 4.1: Todas as 12 caixas enumeradas

Foram colados números nas entradas e nas saídas de todas as doze caixas, tanto em uma lateral quanto "detrás"das caixas, foram colados também um papel para identificar a caixa (Figuras 5.1 e 5.2).

No momento de testar seu funcionamento, inicialmente tentamos utilizar bola de gude (Figura 5.3) nas caixas, mas em alguns casos a bola de gude ficava entalada no meio do conduíte, fato esse que se ocorresse durante a oficina poderia causar grandes transtornos.

Logo foi sugerido que tentasse utilizar esferas de rolamento de bicicleta (Figura 5.4),

Figura 4.2: Numerações atrás das caixas

que eram consideravelmente menores que uma bola de gude. Como era mais fácil trocar a bola que seria utilizada na oficina do que trocar todos os conduítes, então escolhemos a primeira opção e encontramos facilmente as esferas, que podem ser encontradas em qualquer loja de peças de bicicletas com um preço bastante baixo. O kit com 7 esferas novas custou R$ 1,00, porém algumas lojas simplesmente doam esferas utilizadas e que estão em bom estado de conservação.

Figura 4.3: Bolas de gude do tipo pequena

Figura 4.4: Esferas de rolamento de bicicleta

Nas saídas de cada caixa foram encaixados copos para que as esferas não caíssem no chão, o que seria bastante desconfortável na aplicação da oficina.

Figura 4.5: Copos para acomodar as esferas

4.3 Pré-aplicação

Antes de aplicar a atividade envolvendo as caixas, foi necessário escolher o público-alvo. Como não haveria tempo para aplicarmos uma oficina com uma turma de primeiro semestre de Matemática que estivesse ingressando no curso. Alternativa foi aplicar com uma turma de outro semestre (de preferência que não tenha cursado a disciplina de Álgebra II) ou em último caso, aplicar com uma turma de ensino médio. A aplicação deve ocorrer da seguinte forma:

Planejamento da Oficina

1º Momento: Após apresentar-me para a turma, iremos dividir a turma em 6 grupos, o número de integrantes vão variar de acordo com a quantidade de alunos na sala. Em seguida iremos entregar uma caixa para cada grupo, o primeiro grupo receberá a caixa F_1 , o segundo a caixa F_2 e assim successsivamente. Após todos os grupos terem recebido uma caixa, será entregue uma ficha com a questão 1 para todos os grupos.
O grupo 1 que tem a posse da caixa F_1, irá testar o funcionamento da referida caixa e divulgarão o resultado para o restante da turma, de modo que eles possam a preencher as tabelas de acordo com o comportamento da caixa. Em seguida, será a vez do grupo 2 testar o funcionamento da caixa F_2, e em seguida divulgarão seus resultados, será feito isso com todos os grupos de modo que todas as caixas tenham seu funcionamento testado e anotado.

2º Momento: Após isso, todos os grupos recebem a atividade 2, que se procede da seguinte forma, o grupo 1, que ainda detém a caixa F_1 recebe outra caixa de funcionamento análogo, e testa a composição destas duas ($F_2 \circ F_2$), e anota o resultado, bem como divulgar para os demais da turma.

Em seguida , as duas caixas do tipo F_1 serão recolhidas do grupo 1 e serão entregues aos grupos 2 e 3 respectivamente, estes dois grupos irão testar os funcionamento das composições ($F_1 \circ F_2$ e $F_1 \circ F_3$), e irão além de anotar, divulgar os resultados com os demais grupos (inclusive o grupo 1), após isso as duas caixas F_1 serão recolhidas e entregues aos grupos 4 e 5, que irão testar o comportamento das composições $F_1 \circ F_4$ e $F_1 \circ F_5$, respectivamente, que irão em seguida divulgar os resultados com o resultante da turma. Por fim as duas caixas do tipo F_1 serão recolhidas e entregues aos grupos 1 e 6, porém só o grupo 6 irá testar a composição $F_1 \circ F_6$ e irá divulgar o comportamento para o restante da turma.

3º Momento: A seguir iremos realizar a atividade 3)a , os grupos 1 e 2 irão escolher dois integrantes cada, para ir até a mesa com as caixas F_1 e F_2 e realizarão as composições $F_1 \circ F_2$ e $F_2 \circ F_1$, esta atividade será feita na mesa pois assim toda a turma poderá acompanhar o desevolvimento, e anotarão simultaneamente o resultado.

4º momento: A seguir iremos realizar a atividade 3)b , os grupos 2 e 3 irão escolher dois integrantes cada, para ir até a mesa com as caixas F_2 e F_3 e realizarão as composições $F_2 \circ F_3$ e $F_3 \circ F_2$, os integrantes do grupo 2 devem ser diferentes dos que foram na atividade anterior, e novamente será na mesa para que toda a turma possa acompanhar o desevolvimento, e anotem simultaneamente o resultados, com isso espera-se que eles percebam que as combinações entre as caixas não é necessariamnete comutativa.

5º momento: Na questão 3)c o grupo 6 irá receber uma caixa semelhante à que eles tem (F_6) e irão realizar a composição $F_6 \circ F_6$, após terem feito isso, a turma inteira será convidada a analisar o comportamento dessa composição e comparar com o comportamento das caixas anotado na atividade 1.

6º momento: A mesma proposta será feita na questão 3)d, os grupos 4 e 5 (que ainda não foram à mesa), irão receber as caixas F_1, F_2 e F_3, será realizado por um integrante de cada grupo. Após terem feito isso, a turma inteira será convidada a analisar o comportamento dessa composição e comparar com o comportamento das caixas anotado na atividade 1.

7º momento: Na atividade 3)e iremos agora convidar os grupos 3 e 4 a escolhrerem mais dois integrantes (diferentes dos anteriores), para realizar as composições $F_3 \circ F_4$ e $F_4 \circ F_3$, na frente da sala (na mesa) com as caixas de modo que todos os grupos possam observar e anotar o resultado.

8º momento: Na atividade 3)f o grupo 5 irá propor uma alternatiiva para "prever"o comportamento da combinação $F_5 \circ F_5 \circ F_5$, visto que temos apenas duas caixas do tipo F_5

9º momento: A questão 4 será realizada pelos grupos 1 e 2, que realizarão as combinações $F_2 \circ F_6$ e $F_4 \circ F_4$, e irão comparar os resultados de amabas as composiçõe e dirão se têm o mesmo comportamento ou não.

10º momento: A questão 5 irá exigr um pouco mais do raciocínio deles, de modo que eles de posse dos resultados obtidos em mãos irão propor uma caixa que seja a solução da combinação.

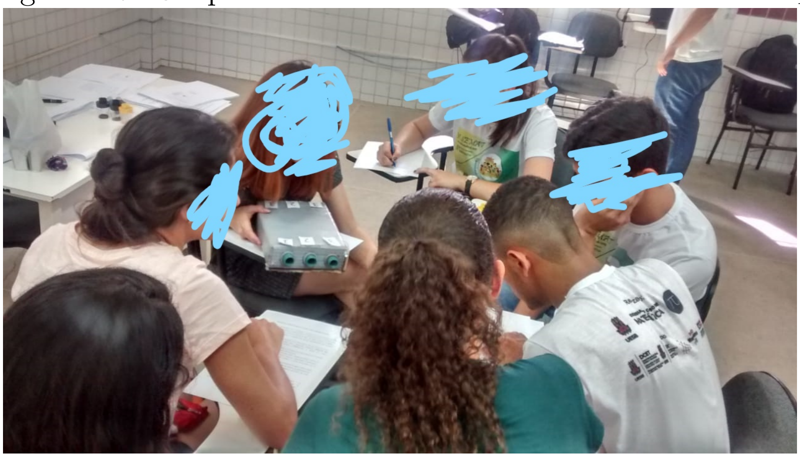
4.4 Aplicação

A Oficina foi aplicada com uma turma de 3º semestre do curso de Licenciatura em Matemática (2018.1), contou com a presença de 22 alunos 3º semestre, 3 do 5º semestre e 3 do 7º semestre, totalizando 28 alunos. Porém, ao início da oficina a sala continha apenas 12 alunos, então tinha apenas 3 grupos de 4 alunos. O primeiro grupo recebeu as caixas F_1 e F_2, o grupo 2 recebeu as caixas F_3 e F_4, e por fim o grupo 3 recebeu as caixas F_5 e F_6.

Na primeira atividade, o grupo 1 que estava com as caixas F_1 e F_2, testou o funcionamento de ambas as caixas, primeiro da F_1. Em seguida da F_2, anotando os resultados. Em seguida foi a vez do grupo 2 fazer o mesmo com as caixas F_3 e F_4, e por fim o grupo 3 proceder analogamente com as caixas F_5 e F_6.

Após todos os três grupos testarem suas caixas foi a vez de divulgarem os resultados para que os demais grupos anotassem o funcionamento das caixas que eles não tinham em mãos, por exemplo, o grupo 1 divulgou o funcionamento das caixas F_1 e F_2, e os grupos 3 e 4 anotaram os resultados, em seguida foi a vez do grupo 2 divulgar o comportamento das caixas F_3 e F_4 para que os grupos 1 e 3 anotassem, e por fim o grupo 3 divulgou os funcionamentos das caixas F_5 e F_6, para que os grupos 1 e 2 anotassem em suas fichas.

Figura 4.6: Grupo 1 avaliando o funcionamento da caixa F_1

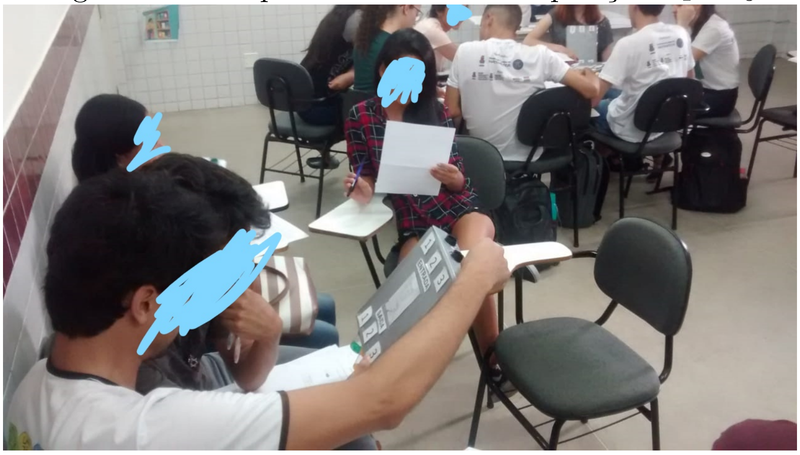


Na atividade 2, o grupo 1 recebeu outra caixa do tipo F_1, e testou as composições $F_1 \circ F_1$ e $F_1 \circ F_2$, e anotaram na tabela que estava na atividade, após testarem recolhi as duas caixas do tipo F_1 desse grupo e entreguei uma para o grupo 2 realizar as composições $F_1 \circ F_3$ e $F_1 \circ F_4$, e a outra caixa para o grupo 3 realizar as composições $F_1 \circ F_5$ e $F_1 \circ F_6$.

Em seguida o grupo 1 divulgou o funcionamento das composições $F_1 \circ F_1$ e $F_1 \circ F_2$, e os grupos 3 e 4 anotaram os resultados, em seguida foi a vez do grupo 2 divulgar o comportamento das composições $F_1 \circ F_3$ e $F_1 \circ F_4$ para que os grupos 1 e 3 anotassem, e por fim o grupo 3 divulgou os funcionamentos das composições $F_1 \circ F_5$ e $F_1 \circ F_6$, para que os grupos 1 e 2 anotassem em suas fichas.

Em certo momento, um integrante do grupo 1 comentou "essa composição da caixa $F_1 \circ F_1$ não tem graça não, dá a mesma coisa!", isso demonstra implícitamente que ele já havia percebido que a caixa F_1 era a identidade na operação composição.

Figura 4.7: Grupo 2 avaliando a composição $F_1 \circ F_3$



Na questão 3)a) o grupo 1 (que tinha as caixas F_1 e F_2) ficou responsável por realizar as composições $F_1 \circ F_2$ e $F_2 \circ F_1$ (Figura 5.6), a primeira composição já havia sido realizada na questão 2, bastava realizar a segunda, ao realizar e divulgar os resultados, os demais grupos anotaram, e ficou evidente que ambas as combinações tinham comportamento igual.

Na questão 3)b) um integrante do grupo 1 e um integrante do grupo 2, trouxeram as caixas F_2 e F_3 para uma cadeira que estava ao centro da sala para que todas as pessoas presentes na sala pudessem observar os procedimentos efetuados nas composições $F_2 \circ F_3$ e $F_3 \circ F_2$.

Perceberam que a composição $F_2 \circ F_3$ se comportava de forma análoga a caixa F_4 e a composição $F_3 \circ F_2$ tinha comportamento semelhante a caixa F_5, esse detalhe foi importante pois seria utilizado como artifício na resolução das questões posteriores (3 f).

Na questão 3)c) uma integrante do grupo 3, foi convidada a realizar a composição $F_6 \circ F_6$, sendo auxiliada por mim, esse composição entre as caixas F_6 foi feita também sobre a cadeira que podia ser vista por todos os alunos, ao realizar a referida composição a aluna rapidamente notou que $F_6 \circ F_6$ tinha o mesmo funcionamento da caixa F_1, ou com as palavras dela "F_6 sobre F_6 é igual a F_1", isso reflete claramente que nesse momento essa alua já começa a pensar na noção de igualdade, que precede uma possível substituição de uma certa quantidades de caixas por uma só.

Na questão 3) d) foi realizada por um integrante de cada grupo, para realizarem a composição $F_1 \circ F_2 \circ F_3$, eles observaram que o resultado era F_4, ou seja continuava dando como resultado uma caixa já existente.

A questão 3)e) um integrante do grupo 2 se voluntariou a realizar as composições $F_3 \circ F_4$ e $F_4 \circ F_3$ (Figura 5.8), e avaliar se o comportamento de ambas composições era igual, e após realizar as composições, percebeu que o comportamento era diferente, ou seja, as caixas F_3 e F_4 não comutam.

Em seguida foi feita a seguinte pergunta: "Se colocarmos a bola na entrada 2 da combinação $F_3 \circ F_4$ teremos o mesmo resultado se colocarmos a bola na entrada 1 da combinação $F_4 \circ F_3$?", e ele avaliou as suas anotações e disse "nessa situação sim, aí sairão na saída 2"

Figura 4.8: Integrante do grupo 2 avaliando a composição $F_3 \circ F_4$

A partir da questão 3) f), os grupos começaram a utilizar mais o raciocínio e a lógica por trás do funcionamente e das composições entre as caixas, do que utilizar efetivamente as caixas. essa questão exigia a composição $F_5 \circ F_5 \circ F_5$, sendo que eles tinham apenas duas caixas do tipo F_5 (Figura 5.9). Foi dado um tempo de 2 minutos para eles refletirem e raciocinarem com base em suas anotações feitas na atividades anteriores. Após esse tempo eles não conseguiram propor uma solução, então fui ao quadro e escrevi:

$$F_5 \circ F_5 \circ F_5 = F_5 \circ (F_5 \circ F_5)$$

Mas $(F_5 \circ F_5) = F_4$, logo:

$$F_5 \circ F_5 \circ F_5 = F_5 \circ F_4 = F_1$$

Daí eles perceberam a importância de substituir uma conposição de duas caixas por uma caixa de igual funcionamento.

A questão 4 ocorreu da seguinte forma, era necessário que fossem feitas as composições $F_2 \circ F_6$ e $F_4 \circ F_4$, um integrante do grupo 1 (com a caixa F_2) e um integrante do grupo 3 (com a caixa F_6) fizeram a composição $F_2 \circ F_6$ e encontraram que seu funcionamento era idêntico ao funcionamento da caixa F_5, em seguida um integrante do grupo 2 realizou

Figura 4.9: Grupo 2 analisando alternativas para $F_5 \circ F_5 \circ F_5$

a composição $F_4 \circ F_4$ e encontrou também que seu funcionamento era igual a F_5, logo, respondendo a pergunta, eles afirmaram que $F_2 \circ F_6$ e $F_4 \circ F_4$ tem o mesmo comportamento.

Figura 4.10: Resolução $F_5 \circ F_5 \circ F_5$

Por fim a questão 5 fez com que eles raciocinassem ao contrário, ao invés de compor duas caixas e achar uma terceira como solução, eles tiveram que descobrir qual composição teria como resultado a caixa F_1 , sendo a composição do tipo $F_5 \circ F_x = F_1$, qual seria a caixa F_x,foi dado um tempo de 3 minutos até que eles pensassem em uma forma de resolver.

Após esse tempo um grupo analisou as respostas das atividades anteriores e notou que na questão 3)f eles tinham calculado que $F_5 \circ F_4 = F_1$, então percebemos que teria sido mais interessante colocar uma composição que ainda não tinha sido feita nas questões anteriores para induzir os alunos a raciocinarem.

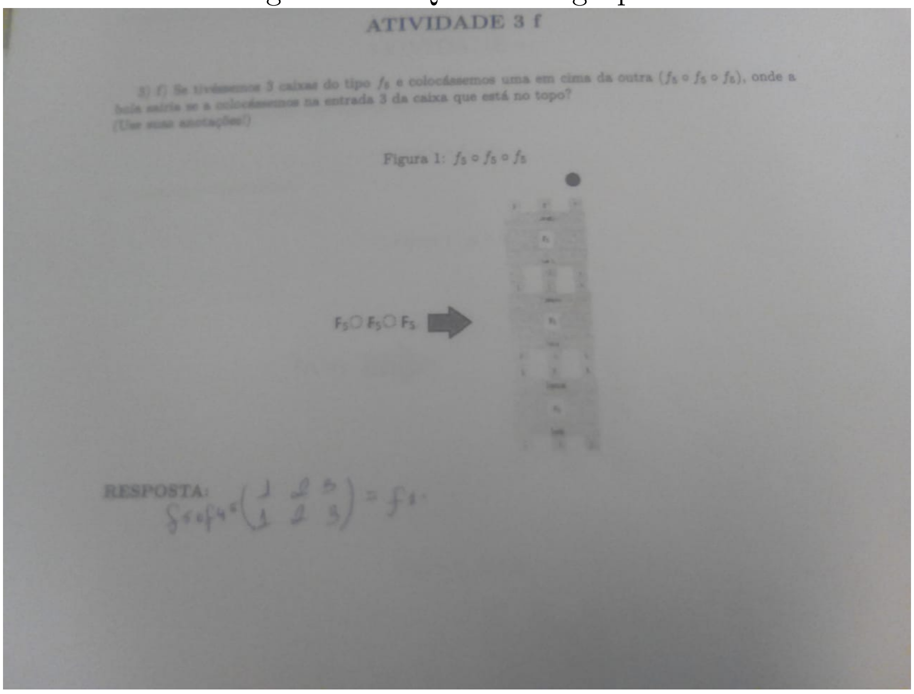
4.5 Resultados obtidos

Vamos agora analisar as repostas e estratégias utlizadas pelos alunos para resolverem as questões propostas em cada atividade.

As atividades 1,2,3a,3b,3c,3d,e 3e; exigia apenas que os alunos testassem, anotassem e/ou compusessem as caixas, e compartihassem com os demais grupos o funcionamento de cada caixa, logo, não há muito o que discutir sobre essas atividades.

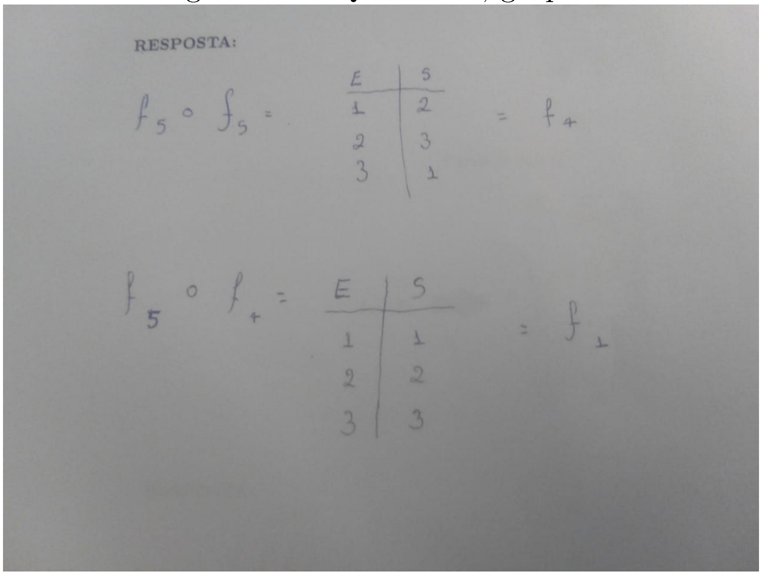
Na **atividade 3f** temos um detalhe importante a se observar, o grupo 1 (Figura 5.11) não respondeu, já o grupo 2 utilizou o seguinte raciocínio, substituiu $F_5 \circ F_5$ por F_4 e em seguida fez a composição $F_5 \circ F_4$ encontrando o resultado F_1.

Figura 4.11: Questão 3f grupo 2



Já o grupo 3 (Figura 5.12) adotou uma estratégia semelhante, porém com o uso de uma tabela auxiliar, construída por eles mesmos, chegando ao mesmo resultado.

Figura 4.12: Questão 3f, grupo 3



A **Atividade 4** foi feita por todos os grupos, os grupos 1 e 2 responderam de forma muito parecida (Figuras 5.13 e 5.14), já o grupo 3 (Figura 5.15) novamente utilizou uma tabela para auxiliar o raciocícino, essa reincidência das tabelas leva a acreditar que pelo fato de as primeiras questões já virem com tabelas prontas para eles preencherem deu mais segurança para eles nas questões seguintes.

Figura 4.13: Questão 4, grupo 1

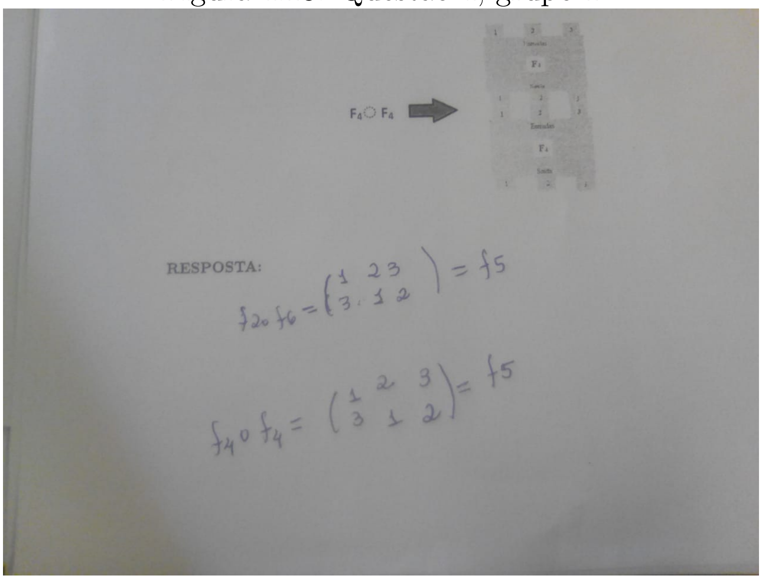


Figura 4.14: Questão 4, grupo 2

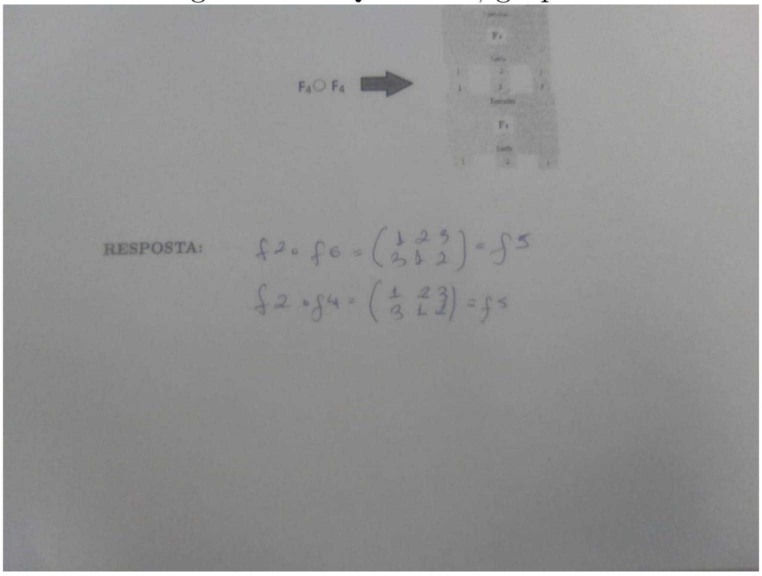
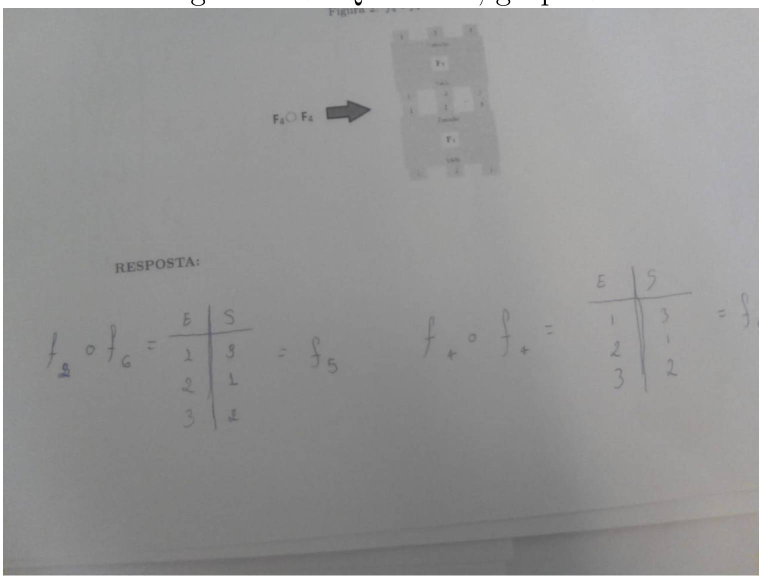
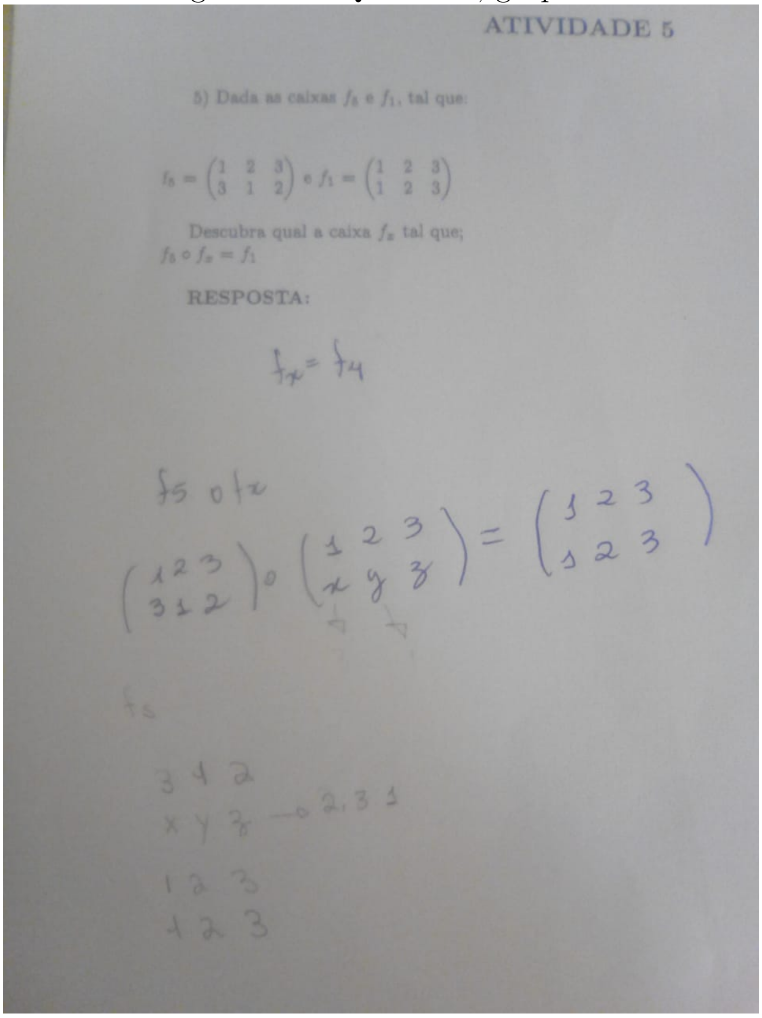


Figura 4.15: Questão 4, grupo 3



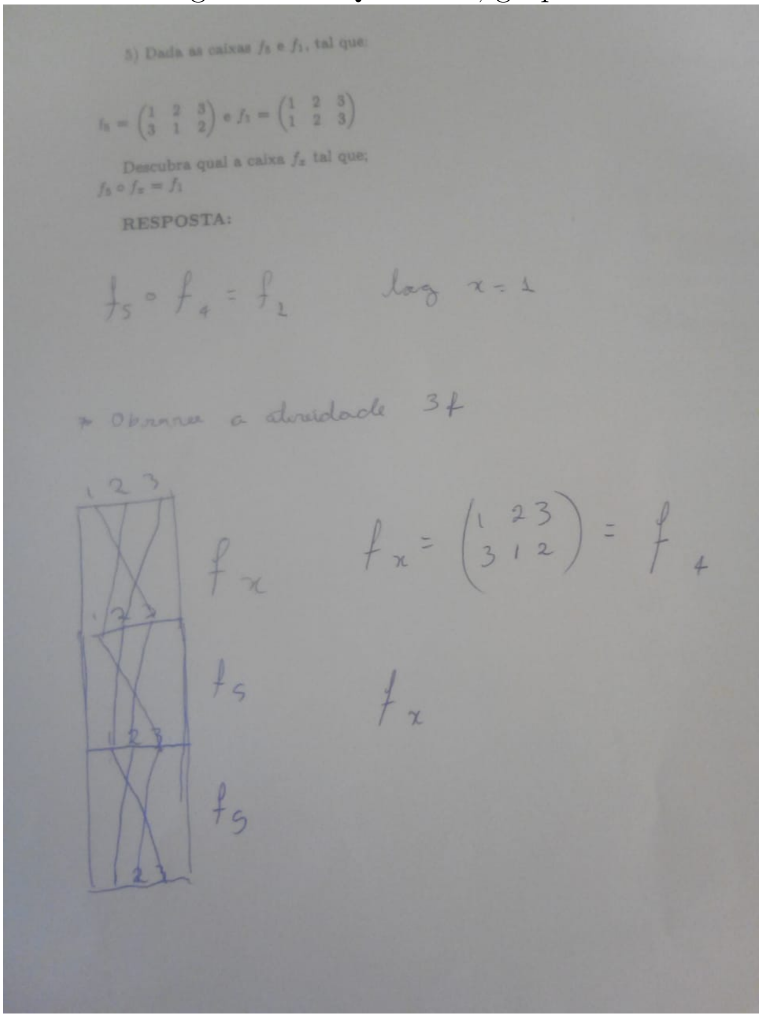
A **Atividade 5** foi feita pelos grupos 1 e 3, o grupo 2 não respondeu. O grupo 1 utilizou um raciocínio algébrico (Figura 5.16), considerando as saídas da caixa F_x como incógnitas x, y e z.

Figura 4.16: Questão 5, grupo 1



Por outro lado, o grupo 3 (Figura 5.17) utilizou uma estratégia mais "visual", montando um esquema, literalmente desenhando as caixas. Deram como resposta a caixa F_4, porém no citado esquema, eles achavam as saídas de outra caixa, diferente da F_4.

Figura 4.17: Questão 5, grupo 3



Conclusão

Concluímos após a realização desse trabalho que, o uso de artifícios para o ensino de conteúdos da Matemática pode ser algo bastante proveitoso. Nosso objetivo era trabalhar a teoria dos grupos, mais precisamente dos grupos de permutações, porém de uma forma diferente da tradicional (sendo que a forma tradicional também é bastante proveitosa), daí surgiu a ideia de propor uma oficina que trabalhasse intuitivamente as proporiedades inerentes aos *grupos de permutações*.

De início tinhamos o objetivo de aplicar essa oficina em alguma turma de Ensino Médio, evitando termos tais como "grupos", "grupo abeliano"e etc, o que poderia criar uma espécie de bloqueio no público-alvo, apenas aplicando uma oficina sob o título de "Caixas de Permutações", e após o término da oficina mostrar a eles que tinha acabado de lidar com um conceito relacionado a Álgebra Abstrata Moderna, mostrando que por mais complexo que o conteúdo seja, é possível de assimilá-lo.

Porém não foi possível aplicar essa oficina em uma turma de ensino médio, logo aplicamos em uma turma de Ensino Superior, portanto não era necessário tanto zelo nas nomenclaturas. Os resultados foram satisfatórios, e a turma se mostrou bastante participativa. As respostas dadas aos exercícios propostos foram bastante satisfatórias, e condizentes com nossas exepectativas.

Além disso foi possível realizar esse trabalho com o uso de materiais acessíveis, tais como papelão, bola de gude, conduítes, ou seja, materiais que podem ser encontrados com certa facilidade, tornando menos onerosa sua confecção.

Anexos

Seguem em anexos as atividades aplicadas, bem como o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Atividade 1

.
Grupo : ______

Integrantes:____

ATIVIDADE 1

1) Dadas as caixas $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ todas com entradas enumeradas de 1 à 3, utilize a bola em suas mãos para testar cada uma das caixas, anote os resultados.

RESPOSTA:

	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
Caixa F_1	1		Caixa F_2	1	
	2			2	
	3			3	
	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
Caixa F_3	1		Caixa F_4	1	
	2			2	
	3			3	
	ENTRADA	SAÍDA		ENTRADA	SAÍDA
Caixa F_5	1		Caixa F_6	1	
	2			2	
	3			3	

Atividade 2

.
Grupo : ______

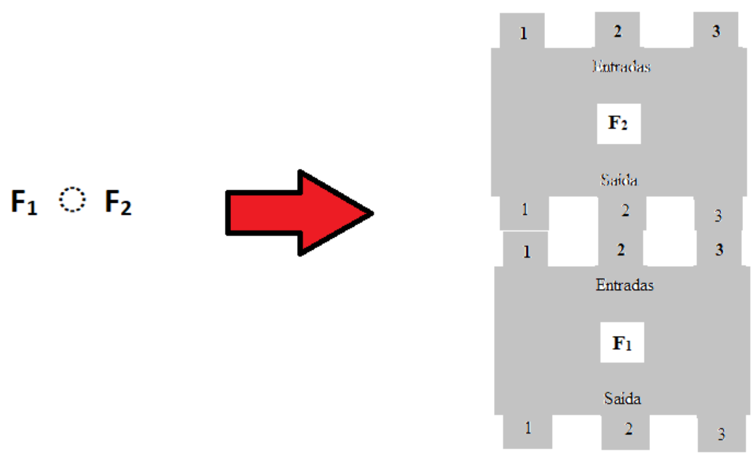
Integrantes:____

ATIVIDADE 2

2) Considerando que a notação $F_1 \circ F_2$ equivale a dizer que a caixa F_2 está encaixada acima da caixa F_1, como mostra a Figura 1, agora realize as seguintes combinações e anote os resultados:

$$F_1 \circ F_1, F_1 \circ F_2, F_1 \circ F_3, F_1 \circ F_4, F_1 \circ F_5, F_1 \circ F_6$$

Figura 4.18: F_1 composta com F_2



	ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_1$	1	
	2	
	3	

	ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_2$	1	
	2	
	3	

	ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_3$	1	
	2	
	3	

	ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_4$	1	
	2	
	3	

	ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_5$	1	
	2	
	3	

	ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_6$	1	
	2	
	3	

Atividade 3)a

.
Grupo : ______

Integrantes:____

ATIVIDADE 3 a

3)Com base nos resultados anteriores, responda:
a) Qual o resultado da combinação $F_1 \circ F_2$? Preencha a tabela para a composição $F_1 \circ F_2$, e preencha tabela para a composição $F_2 \circ F_1$, em seguida compare os resultados.

Figura 4.19: F_1 composta com F_2

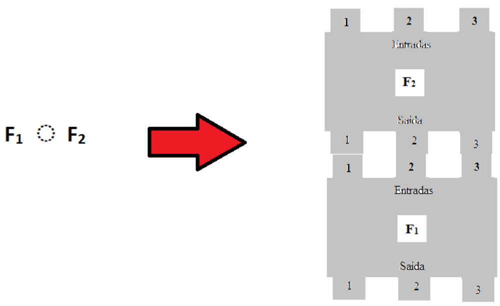
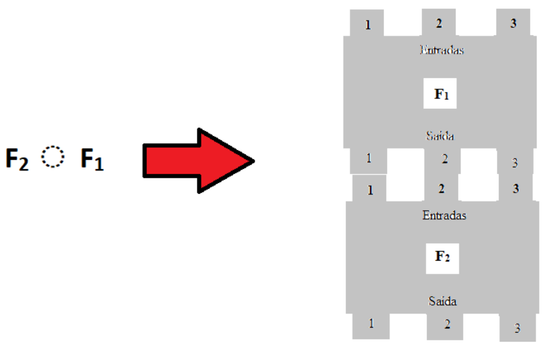


Figura 4.20: F_2 composta com F_1



	Entrada	Saída		Entrada	Saída
$F_1 \circ F_2$	1		$F_2 \circ F_1$	1	
	2			2	
	3			3	

Atividade 3)b

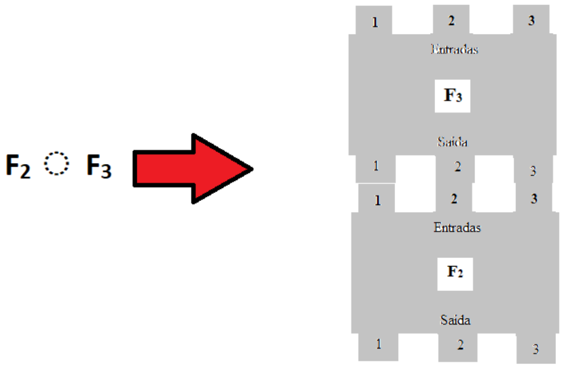
.
Grupo : ______

Integrantes:____

ATIVIDADE 3b

3) b) $F_2 \circ F_3 = F_3 \circ F_2$? Quais os resultados de uma e os resultados da outra?

Figura 4.21: F_2 composta com F_3



	Entrada	Saída		Entrada	Saída
$F_2 \circ F_3$	1		$F_3 \circ F_2$	1	
	2			2	
	3			3	

Atividade 3)c

.
Grupo : ______

Integrantes:____

ATIVIDADE 3c

3) c) Se encaixarmos duas caixas do tipo F_6 qual seria o resultado da combinação $F_6 \circ F_6$? Compare o resultado dessa combinação, com o comportamento das outras caixas.

Figura 4.22: F_6 composta com F_6

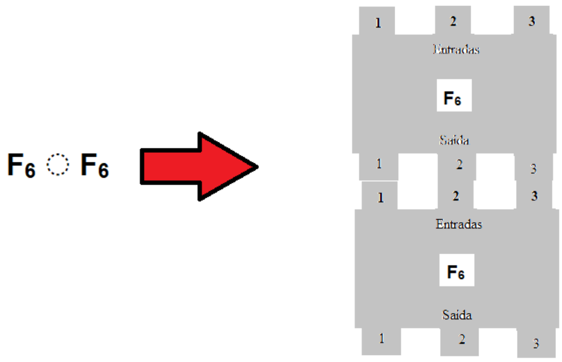


Tabela 4.1: Caixa $F_6 \circ F_6$

ENTRADA	SAÍDA
1	
2	
3	

Atividade 3)d

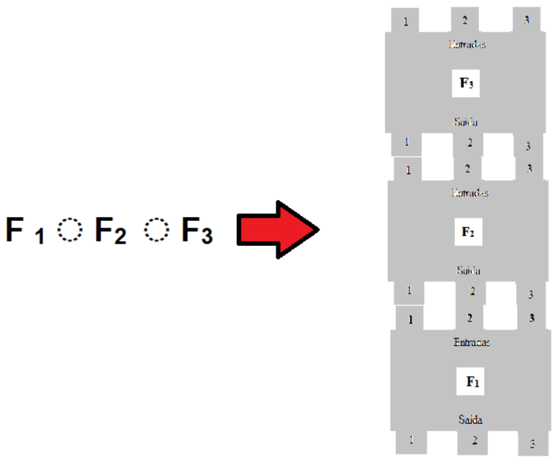
.
Grupo : ________

Integrantes:____

ATIVIDADE 3 d

3) d)Considere a combinação $F_1 \circ F_2 \circ F_3$, se colocarmos a bola na entrada 3 da caixa que está no topo (caixa F_3) , onde a bola sairá na última caixa (caixa F_1)? Analise o comportamento dessa composição e anote os resultados na tabela abaixo.

Figura 4.23: $F_1 \circ F_2 \circ F_3$



	ENTRADA	SAÍDA
$F_1 \circ F_2 \circ F_3$	1	
	2	
	3	

Atividade 3)e

.
Grupo : ______

Integrantes:____

ATIVIDADE 3 e

3) e) Se colocarmos a bola na entrada 2 da combinação $F_3 \circ F_4$ teremos o mesmo resultado se colocarmos a bola na entrada 1 da combinação $F_4 \circ F_3$?

Figura 4.24: F_3 composta com F_4

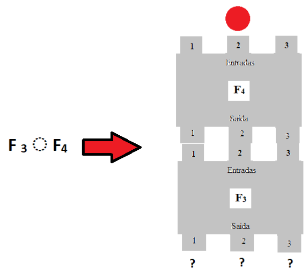
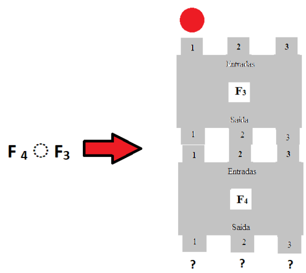


Figura 4.25: F_4 composta com F_3



	Entrada	Saída		Entrada	Saída
$F_3 \circ F_4$	1		$F_4 \circ F_3$	1	
	2			2	
	3			3	

Atividade 3)f

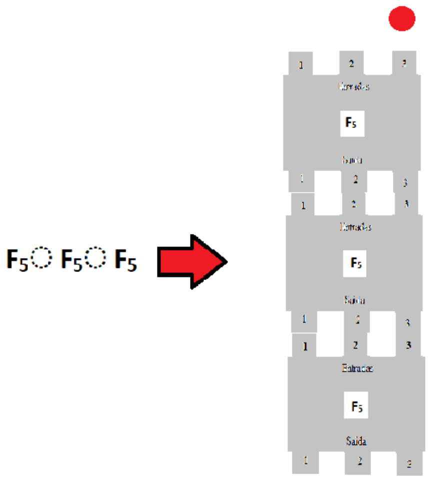
.
Grupo : ______

Integrantes:____

ATIVIDADE 3 f

3) f) Se tivéssemos 3 caixas do tipo F_5 e colocássemos uma em cima da outra ($F_5 \circ F_5 \circ F_5$), onde a bola sairia se a colocássemos na entrada 3 da caixa que está no topo? (Use suas anotações!)

Figura 4.26: $F_5 \circ F_5 \circ F_5$



RESPOSTA:

Atividade 4

.
Grupo : ______

Integrantes:____

ATIVIDADE 4

4) Realize as combinações e em seguida responda:

$$F_2 \circ F_6 \text{ e } F_4 \circ F_4$$

têm o mesmo comportamento?

Figura 4.27: $F_2 \circ F_6$

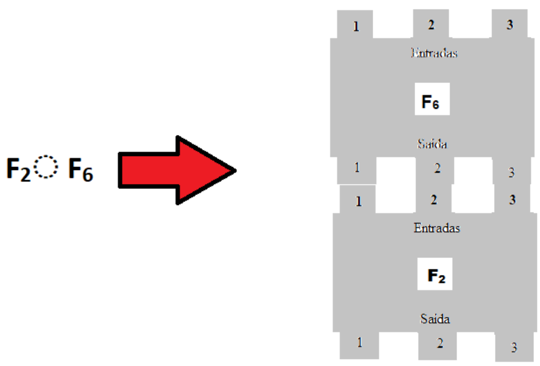
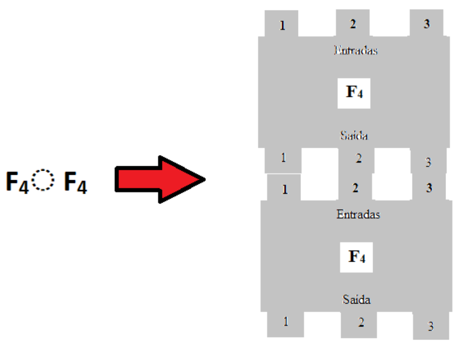


Figura 4.28: $F_4 \circ F_4$



RESPOSTA:

Atividade 5

.
Grupo : ______

Integrantes:____

ATIVIDADE 5

5) Dada as caixas F_5 e F_1, tal que:

$$\mathrm{F}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Descubra qual a caixa F_x tal que;
$F_5 \circ F_x = F_1$

RESPOSTA:

(TCLE)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da Oficina/Pesquisa: intitulada **"Caixas de Permutações"**. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, este documento deverá ser assinado em duas vias, sendo a primeira de guarda e confidencialidade do Ministrante responsável e a segunda ficará sob sua responsabilidade para quaisquer fins.
Em caso de recusa, você não será penalizado (a) de forma alguma. Em caso de dúvida sobre a oficina/pesquisa, você poderá entrar em contato com o Ministrante responsável ______________________________ através do telefone: __________________ ou através do e-mail ______________________________

O objetivo desse projeto é Trabalhar o conceito dos Grupos de Simetrias, através de um material concreto. Para a coleta de dados será utilizado atividades feitas em grupos. Você será esclarecido(a) sobre a pesquisa em qualquer tempo e aspecto que desejar, através dos meios citados acima. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento, sendo sua participação voluntária e a recusa em participar não irá acarretar qualquer penalidade.
O(s) Ministrantes irão tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo e todos os dados coletados servirão apenas para fins de pesquisa. Seu nome ou o material que indique a sua participação não será liberado sem a sua permissão. Você não será identificado(a) em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo.

Ciente e de acordo com o que foi anteriormente exposto, eu ________________________ ____________ estou de acordo em participar da Oficina/Pesquisa intitulada **"Caixas de Permutações"**, de forma livre e espontânea, podendo retirar a qualquer meu consentimento a qualquer momento.
___, de _________ de 20____

____

Assinatura do responsável pela pesquisa.

____

Assinatura do participante .

Referências Bibliográficas

DOMINGUES, Hygino; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna.** São Paulo: Atual, 2003.

EVARISTO, Jaime. **Introdução à Álgebra Abstrata.** Maceió: EDUFAL, 2002. 220 p. ISBN 85-7177-125-1.

GARCIA , Arnaldo; LECQUIAN, Yves. **Álgebra:** Um Curso de Introdução. Rio de Janeiro: IMPA, 1988.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. 194 p.

HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. 226 p. v. 1

LANG, Serge. **Álgebra Linear.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003. 220 p. ISBN 85-7393-253-8

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 357 p. v. 1. ISBN 9788524403903.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. ISBN 9788540700413.

MIRANDA, Sergiana Alves Cangusçu; REIS, Júlio César dos.**CAIXA DE FUNÇÕES:** UMA PROPOSTA COM MATERIAL CONCRETO E MANIPULÁVEL. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional) - PROFMAT, Vitória da Conquista/BA, 2017.

YARTEY, Joseph Nee Anyah. **ÁLGEBRA II**. Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística, 2017. 244p p. ISBN 978-8292-144-9.