Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas-DCET
Licenciatura em Matemática

Materiais e Ideias para o ensino da Álgebra abstrata

Vitória da Conquista - BA
2021

BRUNO LISBOA DA SILVA

MATERIAIS E IDEIAS PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA ABSTRATA

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Campus Vitória da Conquista - BA, para obtenção do título de licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Júlio César dos Reis.

Vitória da Conquista - BA

2021

Folha de aprovação

Bruno Lisboa da Silva

Materiais e Ideias para o ensino da Álgebra abstrata

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 24 de fevereiro de 2021

BANCA EXAMINADORA

Júlio César dos Reis

Prof. Dr. Júlio César dos Reis (Orientador)
UESB

Clênia Andrade Oliveira de Melo

Prof.ª Drª. Clênia Andrade Oliveira de Melo
UESB

Alexsandra Oliveira Andrade

Prof.ª Drª. Alexsandra Oliveira Andrade
UESB

Vitória da Conquista-BA
2021

Aos meus pais, Benilda e Claudio que, com muito amor e carinho, me ensinaram a nunca desistir dos meus sonhos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da minha vida e por me dar forças para superar todos os desafios e dificuldades que encontrei no decorrer do curso, e a Nossa Senhora por me cobrir todos os dias com o seu manto sagrado.

A minha mãe, Benilda Vieira Lisboa, mulher guerreira que sempre lutou para que eu pudesse realizar meus sonhos e nunca deixou de acreditar em mim.

Ao meu pai, Claudio Pereira da Silva, meu herói que sempre me mostrou o caminho a ser seguido, principalmente nas vezes em que eu me senti sem rumo.

Ao meu anjo, Luiza Sousa Alves, por sempre estar comigo e não me desamparar nesta árdua jornada. Por ter me estimulado durante todo o curso e compreender minha ausência pelo tempo dedicado aos estudos.

Aos meus irmãos, Lucas e Rogério, pelo apoio, incentivo e por se fazerem presentes em todos os momentos que precisei.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Júlio César dos Reis, pela orientação e dedicação, pois sem ele, este trabalho teria se tornado muito mais difícil.

A todos os professores da graduação, por todo carinho e conhecimento compartilhado e por fazerem parte desta conquista.

Aos meus colegas de turma, por saberem e entenderem tudo que passei até aqui e me apoiarem, pois caminhamos juntos na mesma estrada.

Por fim, sou grato a todos que participaram de alguma forma, direta ou indiretamente, da realização desse sonho.

"Pois saibam que todas as coisas concorrem para o bem daqueles que amam a Deus, daqueles que são chamados segundo o seu propósito".

(Romanos 8:28)

Resumo

Este trabalho tem por objetivo facilitar a compreensão de conceitos voltados a classe de restos módulo m e a regra de sinais por meio da utilização de materiais concretos e manipuláveis no ensino da álgebra abstrata. Buscando tal propósito, apresentamos a teoria necessária ao projeto, conceituando cada propriedade a ser utilizada como embasamento para a aplicação dos materiais em sala de aula. Ao decorrer do projeto, veremos todo o processo de construção de tais materiais, expondo os erros cometidos e os caminhos encontrados para contorná-los. Além disso, sugerimos algumas propostas de atividades a serem realizadas com o auxílio dos materiais confeccionados, com o intuito de tornar um pouco mais tangível o conceito da álgebra. Veremos que, com materiais simples e de fácil acesso, é possível construir caminhos que facilitem esta troca de experiências entre educador e educando, aprimorando o ensino-aprendizagem e tornando um conceito que por vezes parece tão complexo em algo fácil de ser entendido.

Palavras-chave: Álgebra, Materiais concretos, construção, ensino-aprendizagem.

Abstract

This work aims to facilitate the understanding of concepts related to the m module class and the rule of signs through the use of concrete and manipulable materials in the teaching of abstract algebra. Seeking this purpose, we present the necessary theory for the project, conceptualizing each property to be used as a basis for the application of materials in the classroom. During the project, we will see the entire construction process of such materials, exposing the mistakes made and the ways found to get around them. In addition, we suggest some activity proposals to be carried out with the help of made materials, in order to make the concept of algebra a little more tangent. We will see that, with simple and easily accessible materials, it is possible to build paths that facilitate this exchange of experiences between educator and student, improving teaching and learning and making a concept that sometimes seems so complex into something easy to be understood.

Keywords: Algebra, Concrete materials, construction, teaching and learning.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

O presente trabalho tem por objetivo facilitar a compreensão de conceitos voltados a classe de restos módulo m e a regra de sinais. Para tanto, exploraremos no decorrer do projeto a opção de trabalhar com materiais concretos e manipuláveis no ensino da álgebra, abordando os passos para sua construção e, posteriormente, apresentando propostas de atividades a serem trabalhadas em sala de aula.

A ideia de trabalhar com tal tema surgiu do contato com a monografia de Sergiana Alves Cangusçu Miranda, intitulado **CAIXAS DE FUNÇÕES: Uma proposta com material concreto e manipulável** que, assim como nosso trabalho, apresenta uma metodologia de ensino que se baseia na utilização de materiais concretos em sala de aula.

Esta monografia foi dividida em 4 capítulos, sendo que, no primeiro, apresentamos a teoria ao qual se baseia nosso projeto. Desde a noção de divisibilidade no conjunto dos números inteiros, apontando as características do Algoritmo Euclidiano bem como da relação de congruência módulo m até o estudo sobre a Teoria de Anéis, tendo como foco o anel $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$.

No segundo capítulo discorreremos sobre o processo de construção, apontando os materiais necessários e as ferramentas utilizadas até obter o resultado final. Retrataremos o passo a passo do trajeto apontando os erros cometidos na confecção e os caminhos que seguimos para um aprimoramento.

Já no terceiro capítulo, propomos atividades para serem aplicadas em sala de aula utilizando os materiais confeccionados, visando o desenvolvimento dos conceitos algébricos citados acima, relacionando a manipulação dos materiais com suas propriedades.

Por fim, mas não menos importante, trazemos no quarto capítulo as soluções das atividades propostas buscando, da maneira mais clara possível, explicitar o que foi pensado a se trabalhar com os materiais concretos e manipuláveis apresentados durante o decorrer do nosso trabalho.

Capítulo 1

Teoria

Neste capítulo discutiremos as definições e propriedades relacionadas à divisibilidade no conjunto numérico dos inteiros ($\mathbb{Z}$), prosseguindo com a definição de Congruência e a Teoria de Anéis. Tais conteúdos serão de suma importância no andamento do presente trabalho, visando um melhor entendimento acerca das ideias propostas.

1.1 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

1.1.1 Divisão exata

Definição 1.1.1 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que b é divisível por a se existir um $c \in \mathbb{Z}$ de forma tal que $b = ac$. Podemos também dizer que b é múltiplo de a. Para indicar que a divide b usaremos a notação $a|b$.
Se $a|b$ com $a \neq 0$, o número inteiro $c; b = ac$ será indicado por $\dfrac{b}{a}$ e chamado de quociente da divisão de b por a.

Exemplo 1.1.1 42 é divisível por 7 uma vez que $42 = 7 \cdot 6$. Dizemos também que 42 é múltiplo de 7. O inteiro $6 = \dfrac{42}{7}$ é chamado de quociente da divisão de 42 por 7.

Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$, a relação entre tais elementos, definida por $a|b$, preserva as seguintes propriedades:

i) $a|a$;

Demonstração: De fato, $a.1 = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$. ■

ii) Se $a, b \geq 0$, $a|b$ e $b|a$ então $a = b$;

Demonstração: Temos por hipótese $a = bq_1$ e $b = aq_2$, onde q_1 e $q_2 \in \mathbb{Z}$.
É óbvio que $a = 0 \iff b = 0$. Suponhamos então $a, b > 0$.
Assim:

$$\begin{cases} a = bq_1 \\ b = aq_2 \end{cases} \implies a = aq_2q_1 \implies q_2q_1 = 1$$

Sendo $q_1, q_2 > 0$, pois $a, b > 0$, ocorre imediatamente que $q_1 = q_2 = 1$ e consequentemente, $a = b$. ■

iii) Se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$;

Demonstração:

$$\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \implies \begin{cases} \exists q_1 \in \mathbb{Z}; b = aq_1 \\ \exists q_2 \in \mathbb{Z}; c = bq_2 \end{cases} \implies c = aq_1q_2$$

Como $q_1q_2 \in \mathbb{Z}$, ocorre imediatamente da definição 1.1.1 que $a|c$. ■

iv) Se $a|b$ e $a|c$ então $a|(bx + cy)$ quaisquer que sejam os x e $y \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

$$\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \implies \begin{cases} \exists q_1 \in \mathbb{Z}; b = aq_1 \\ \exists q_2 \in \mathbb{Z}; c = aq_2 \end{cases} \implies \begin{cases} bx = a(xq_1) \\ cy = a(yq_2) \end{cases} \implies bx + cy = a(xq_1 + yq_2)$$

Como $(xq_1 + yq_2) \in \mathbb{Z}$ ocorre imediatamente da definição 1.1.1 que $a|(bx + cy)$. ■

Segue em particular desta propriedade que:

- $a|b$ e $a|c \implies a|(b + c)$ e $a|(b - c)$;
- $a|b \implies a|bx \quad \forall x \in \mathbb{Z}$.

v) Se $a|b$ e $c|d$ então $ac|bd$.

Demonstração:

$$\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \implies \begin{cases} \exists q_1 \in \mathbb{Z}; b = aq_1 \\ \exists q_2 \in \mathbb{Z}; d = cq_2 \end{cases} \implies bd = ac(q_1q_2)$$

Tendo $q_1q_2 \in \mathbb{Z}$ seque que $ac|bd$. ■

Exemplo 1.1.2 Note que 6 é divisor do próprio 6 e do 12 então, pela propriedade iv, 6 também é divisor de $6 \cdot 3 + 12 \cdot 5 = 78$. De fato $78 = 6 \cdot 13$.

1.1.2 Algoritmo Euclidiano

Proposição 1.1.1 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b > 0$. Existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq + r$ sendo $0 \leq r < b$. Os inteiros q e r são denominados quociente e resto, respectivamente.

Demonstração:

i) Existência:
Inicialmente, considere o conjunto

$$S = \{y = a - bx; y \geq 0 \text{ e } x \in \mathbb{Z}\}$$

Note que $S \neq \varnothing$ pois se $x = -|a|$ então:
$y = a + b|a| \geq a + |a| \geq 0 \Longrightarrow y \in S$
Como $S \neq \varnothing$ e $S \subset \mathbb{Z}_+$, segue pelo *Princípio da boa ordenação*[1] que existe em S um menor elemento.
Seja r este menor inteiro. Logo, pela definição do conjunto S:

$$r = a - bx; x \in \mathbb{Z}$$

Considerando $x = q$ teremos:

$$r = a - bq \Longrightarrow a = bq + r$$

Resta mostrar que $0 \leq r < b$
A primeira desigualdade é imediata uma vez que $r \in S$.
Suponha então por absurdo que $r \geq b$ logo:
$\exists\, r' \geq 0;\ r = b + r' \Longrightarrow r - r' = b > 0 \Longrightarrow r > r'$
Sendo r o menor elemento de S podemos afirmar que $r' \notin S$.
Note agora que $r' = r - b \Longrightarrow r' = a - bq - b \Longrightarrow r' = a - b\underbrace{(q+1)}_{\in \mathbb{Z}} \Longrightarrow r' \in S$.
O que é uma contradição. Portanto $r < b$.

ii) Unicidade:
Suponhamos que existam q' e r' tais que:

$$a = bq' + r' \quad \text{com} \quad 0 \leq r' < b$$

[1] A demonstração pode ser encontrada em (LIMA, 2004, p.39)

Assim:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ a = bq' + r' \end{cases} \Longrightarrow bq + r = bq' + r' \Longrightarrow r - r' = bq' - bq \Longrightarrow r - r' = b(q - q') \Longrightarrow b|(r - r')$$

Sabemos que:

$$r < b \Longrightarrow r - r' < b - r' \leq b \Longrightarrow r - r' < b$$

Como:

$$\begin{cases} r - r' < b \\ b|(r - r') \end{cases} \Longrightarrow r - r' = 0 \Longrightarrow r = r'$$

Da mesma forma:

$$\begin{cases} r - r' = 0 \\ r - r' = b(q - q') \end{cases} \Longrightarrow 0 = b(q - q')$$

Sendo, por hipótese, $b \neq 0$ segue que:

$$q - q' = 0 \Longrightarrow q = q'$$

■

Exemplo 1.1.3 O resto da divisão de 15 por 6 é 3 uma vez que $15 = 6 \cdot 2 + 3$

Veremos, no decorrer do trabalho, que o algoritmo de Euclides é uma ferramenta importantíssima quando tratamos das classes de equivalência módulo m.

1.1.3 Relação de Congruência

Definição 1.1.2 Sejam a, b e $m \in \mathbb{Z}$ e $m > 0$. Diz-se que a é côngruo a b módulo m se $m|(a - b)$, ou seja, $\exists\, q \in \mathbb{Z};\ a - b = mq$. Para indicar que a é côngruo a b módulo m usa-se a notação

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Quando $a - b$ não é divisível por m, dizemos que a não é côngruo a b módulo m cuja notação é dada por

$$a \not\equiv b \pmod{m}$$

Propriedades 1.1.1 Temos as seguintes propriedades para a relação de congruência módulo m:

1) $a \equiv a \pmod{m}$;

Demonstração:
De fato:

$$m|a-a, \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}$$

■

2) $a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow b \equiv a \pmod{m}$;

Demonstração:
$a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow m|(a-b) \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; a-b = mq \Longrightarrow b-a = m(-q) \Longrightarrow m|b-a \Longrightarrow b \equiv a \pmod{m}$ ■

3) $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m} \Longrightarrow a \equiv c \pmod{m}$;

Demonstração:
$a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m} \Longrightarrow m|(a-b)$ e $m|(b-c) \Longrightarrow m|[(a-b)+(b-c)] \Longrightarrow m|(a-c) \Longrightarrow a \equiv c \pmod{m}$ ■

4) $a \equiv b \pmod{m}$ e $0 \leq b < m \Longleftrightarrow b$ é o resto da divisão de a por m;

Demonstração:
$\Rightarrow$)
$a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow m|(a-b) \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; a-b = mq \Longrightarrow a = mq+b;\ 0 \leq b < m.$
A conclusão é decorrente da unicidade do quociente e do resto na divisão euclidiana de a por m visto na proposição 1.1.1.

$\Leftarrow$)
Por hipótese, $\exists q \in \mathbb{Z}; a = mq+b$ e $0 \leq b < m$. Logo:

$$a-b = mq \Longrightarrow m|(a-b) \Longrightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

■

5) $a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow a$ e b possuem o mesmo resto da divisão euclidiana por m;

Demonstração:
$\Rightarrow$)
$a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow m|(a-b) \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; a-b = mq \Longrightarrow a = mq+b$

Sejam q_1 e r, respectivamente, o quociente e o resto na divisão euclidiana de a por m, logo:

$$a = mq_1 + r;\ 0 \leq r < m$$

Então:

$$\begin{cases} a = mq + b \\ a = mq_1 + r \end{cases} \Longrightarrow mq + b = mq_1 + r \Longrightarrow b = m\underbrace{(q_1 - q)}_{\in \mathbb{Z}} + r;\ 0 \leq r < m$$

Portanto, r é o resto da divisão euclidiana de b por m.

$\Leftarrow$)
Por hipótese, a e b deixam o mesmo resto na divisão euclidiana por m, então existem q_1 e $q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$\begin{cases} a = mq_1 + r \\ b = mq_2 + r \end{cases} ; 0 \leq r < m \Longrightarrow a - b = m\underbrace{(q_1 - q_2)}_{\in \mathbb{Z}} \Longrightarrow m|(a-b) \Longrightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

■

6) $a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$;

Demonstração:
$a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow m|(a-b) \Longleftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z};\ a - b = mq \Longleftrightarrow (a \pm c) - (b \pm c) = mq \Longleftrightarrow m|(a \pm c) - (b \pm c) \Longleftrightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$ ■

7) $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m} \Longrightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;

Demonstração:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m|(a-b) \\ m|(c-d) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists q_1 \in \mathbb{Z}; a - b = mq_1 \\ \exists q_2 \in \mathbb{Z}; c - d = mq_2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (a-b) \pm (c-d) = mq_1 \pm mq_2 \Longrightarrow (a \pm c) - (b \pm d) = m\underbrace{(q_1 \pm q_2)}_{\in \mathbb{Z}} \Longrightarrow m|(a \pm c) - (b \pm d) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}.$$ ■

8) $a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$;

Demonstração:
$a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow m|(a-b) \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Z};\ a-b = mq \Longrightarrow (a-b)c = mqc \Longrightarrow$
$\Longrightarrow ac - bc = m(qc) \Longrightarrow m|(ac-bc) \Longrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$. ■

9) $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m} \Longrightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$;

Demonstração:
Tendo por hipótese $a \equiv b \pmod{m}$, segue pela propriedade anterior que
$ac \equiv bc \pmod{m}$.
Da mesma forma, de $c \equiv d \pmod{m}$ tem-se $bc \equiv bd \pmod{m}$.
Devido a transitividade vista na propriedade 3 conclui-se que $ac \equiv bc \pmod{m}$ ■

10) Se $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ e $a \equiv b \pmod{m}$ então $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

Demonstração:

Basta notar que:

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

Tendo por hipótese $a \equiv b \pmod{m}$, segue da definição 1.1.2 que $m|a-b$ e consequentemente, $m|a^k - b^k$. Portanto, $a^k \equiv b^k \pmod{m}$. ■

Exemplo 1.1.4 Vamos calcular o resto da divisão de 3^{625} por 11.
Note inicialmente que $243 = 3^5 \equiv 1 \pmod{11}$ uma vez que $11|243-1$.
Dessa forma, pela propriedade 10:
$3^5 \equiv 1 \pmod{11} \implies 3^{625} = (3^5)^{125} \equiv 1^{125} \pmod{11} \implies 3^{625} \equiv 1 \pmod{11}$
Portanto, o resto da divisão de 3^{625} por 11 é igual a 1.

1.2 Teoria de Anéis

1.2.1 Anel

Definição 1.2.1 Seja E um conjunto não vazio. Uma operação sobre E é uma função:

$$* : E \times E \longrightarrow E$$

$$(a, b) \longmapsto a * b$$

Isto é, a cada par ordenado (a, b) de $E \times E$ corresponde, pela operação $*$, um único elemento de E, designado por $a * b$.

Definição 1.2.2 Seja A um conjunto não vazio onde estejam definidas duas operações, as quais chamaremos de adição e multiplicação e denotaremos por + e · respectivamente.
Dizemos que A é um anel, e denotaremos como $(A, +, \cdot)$, se as seguintes propriedades são satisfeitas para quaisquer $a, b, c \in A$:

i) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da adição)

ii) $\exists\, \theta \in A;\ a + \theta = \theta + a = a$ (existência do elemento neutro da adição)

iii) $\forall x \in A,\ \exists\, x' \in A;\ x + x' = x' + x = 0$ (existência do simétrico)

iv) $a + b = b + a$ (comutatividade da adição)

v) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade da multiplicação)

vi) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributividade da multiplicação em relação a adição)

Dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um anel com unidade se satisfazer a seguinte propriedade:

vii) $\exists\, e \in A;\ x \cdot e = e \cdot x = x\ \forall x \in A.$

Dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo se satisfazer a seguinte propriedade:

viii) $\forall x, y \in A,\ x \cdot y = y \cdot x.$

Dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um anel sem divisores de zero se satisfazer a seguinte propriedade:

ix) $x, y \in A,\ x \cdot y = \theta \Rightarrow x = \theta$ ou $y = \theta$.

Se $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero, dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um domínio de integridade.

Dizemos que um domínio de integridade $(A, +, \cdot)$ é um corpo se satisfazer a seguinte propriedade:

x) $\forall x \in A, x \neq \theta, \exists y \in A$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = e$.

Exemplo 1.2.1 O conjunto dos Números inteiros $\mathbb{Z}$ munido das operações usuais de adição e multiplicação é um anel de integridade pois este é comutativo e possui o 1 como unidade.

Exemplo 1.2.2 O conjunto

$$M_{(2,\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

das matrizes quadradas de ordem 2 por 2 com as operações usuais de adição e multiplicação é um anel com unidade $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Porém, este não é um anel comutativo pois, se tomarmos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ teremos $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Exemplo 1.2.3 Como exemplo de corpo temos o conjunto dos números Reais $\mathbb{R}$ com as operações de adição e multiplicação. O mesmo ocorre para o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

1.2.2 Propriedades de um anel

Dado um anel $(A, +, \cdot)$, são válidas as seguintes propriedades:

P_1) O elemento neutro $\theta \in (A, +, \cdot)$ é único;

Demonstração:

Suponha existentes θ e θ^* elementos neutros aditivos de $(A, +, \cdot)$. Logo:

$$\theta = \theta + \theta^* = \theta^*$$

O que garante a unicidade de θ. ■

P_2) Se existe, o elemento neutro $e \in (A, +, \cdot)$ também é único;

Demonstração:

Analogamente a propriedade anterior, suponha existentes e e e^* elementos neutros multiplicativos de $(A, +, \cdot)$, então:

$$e = e \cdot e^* = e^*$$

Portanto, e é único. ■

P_3) Unicidade do elemento simétrico;

Demonstração:

Seja $a \in (A, +, .)$ e a' e $a'' \in (A, +, \cdot)$ simétricos de a. Assim:

$$\begin{cases} 0 = a + a' \\ 0 = a + a'' \end{cases} \Longrightarrow a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = a''$$

Portanto, o simétrico é único. ■

Adotaremos daqui pra frente, quando não houver ambiguidades,as seguintes notações:

- O anel $(A, +, \cdot)$ simplesmente por A;
- O elemento neutro aditivo θ de A por 0;
- O elemento neutro multiplicativo e de A por 1;
- O simétrico de um elemento $a \in A$ por $-a$.
- $a - b = a + (-b)$

Prosseguindo com as propriedades, para quaisquer a, b e $c \in A$ temos:

P_4) $0 = a \cdot 0$ e $0 = 0 \cdot a$;

Demonstração:

De fato:

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

Somando o simétrico $-(a \cdot 0)$ em ambos os membros da igualdade:

$$a \cdot 0 - (a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 - (a \cdot 0) = a \cdot 0 + [a \cdot 0 - (a \cdot 0)] \implies 0 = a \cdot 0$$

Analogamente se demonstra que $0 = 0 \cdot a$ ■

P_5) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$;

Demonstração:

Note inicialmente que:

$$0 = a + (-a) \implies 0 \cdot b = [a + (-a)] \cdot b \implies 0 = a \cdot b + (-a) \cdot b$$

Chegamos então que $(-a) \cdot b$ é o simétrico de $a \cdot b$ e, como demonstrado anteriormente, o simétrico de um elemento do anal A é único. Portanto:

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

Analogamente se demonstra que $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. ■

P_6) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

Demonstração:

Pela propriedade anterior:

$$\begin{cases} (-a) \cdot (-b) = -[a \cdot (-b)] \\ \quad a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \end{cases} \Longrightarrow (-a) \cdot (-b) = -[a \cdot (-b)] = -[-(a \cdot b)] = a \cdot b$$

■

1.2.3 O conjunto $\mathbb{Z}_m$

Definição 1.2.3 Para cada $a \in \mathbb{Z}$ definimos a classe de congruência módulo m determinada por a como sendo o conjunto:

$$\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{m}\}$$

Definição 1.2.4 O conjunto de todas as classes de congruência módulo m, denotado por $\mathbb{Z}_m$ é chamado de conjunto das classes de congruência módulo m em $\mathbb{Z}$, ou seja:

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

Proposição 1.2.1 Sejam $\overline{a}$ e $\overline{b} \in \mathbb{Z}_m$ então:

$$\overline{a} = \overline{b} \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

Demonstração:

$\Rightarrow$)

Seja $x \in \overline{a}$ então, por hipótese, $x \in \overline{b}$, logo:

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases} \Longrightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

$\Leftarrow$)

seja $x \in \overline{a}$, segue então que $x \equiv a \pmod{m}$.

Tendo por hipótese $a \equiv b \pmod{m}$, podemos afirmar, pela transitividade, que $x \equiv b \pmod{m}$, então, $x \in \overline{b}$ e consequentemente $\overline{a} \subset \overline{b}$.

Analogamente se demonstra que $\overline{b} \subset \overline{a}$ e, portanto, $\overline{a} = \overline{b}$ ■

Proposição 1.2.2 Se $m \in \mathbb{Z}^*$ então o conjunto $\mathbb{Z}_m$ possui exatamente m classes de equivalência, a saber:

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{m-1}\}$$

Demonstração: Provemos inicialmente que se

$$0 \leq a < b < m \Longrightarrow \overline{a} \neq \overline{b}$$

De fato, seja $0 \leq a < b < m$. Pela proposição anterior, temos que $\overline{a} = \overline{b} \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; 0 < a - b = km$.
Agora como $0 \leq a < b < m$ temos que $a - b$ não pode ser múltiplo de m, ou seja, $\overline{a} \neq \overline{b}$.
Assim, $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{m-1}\} \subset \mathbb{Z}_m$ é um conjunto contendo exatamente m elementos. Para provarmos a igualdade $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{m-1}\}$ é suficiente mostrarmos que: se $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ então $\overline{a} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{m-1}\}$. Podemos escolher k inteiro suficientemente grande tal que $a' = a + km$ seja não negativo. Mas é claro que $a' \equiv a \pmod{m}$, e daí segue que $\overline{a'} = \overline{a}$.
Assim, é bastante provarmos que $\overline{a'} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{m-1}\}$ com $a' \geq 0$. Pelo algoritmo da divisão temos que, $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a' = qm + r$ onde $0 \leq r < m$.
Mas então $a' - r = qm$ ou $a' \equiv r \pmod{m}$ e portanto $\overline{a} = \overline{a'} = \overline{r}$ e $0 \leq r < m$. ■

Exemplo 1.2.4 Tem-se que $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$.

1.2.4 O anel $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

Definição 1.2.5 Seja $m \in \mathbb{Z}; m \geq 2$ podemos então definir as operações de adição e multiplicação neste conjunto respectivamente por:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m &\to \mathbb{Z}_m \\ (\overline{a}, \overline{b}) &\longmapsto \overline{a+b} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m &\to \mathbb{Z}_m \\ (\overline{a}, \overline{b}) &\longmapsto \overline{ab} \end{aligned}$$

Proposição 1.2.3 As operações de adição e multiplicação no conjunto $\mathbb{Z}_m$ são bem definidas, ou seja, sendo $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ com $\overline{a} = \overline{a'}$ e $\overline{b} = \overline{b'}$ então:

$$\overline{a+b} = \overline{a'+b'} \quad \textbf{e} \quad \overline{ab} = \overline{a'b'}$$

Demonstração:

$$\begin{matrix} \overline{a} = \overline{a'} \\ \overline{b} = \overline{b'} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a \equiv a' \pmod{m} \\ b \equiv b' \pmod{m} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a + b \equiv a' + b' \pmod{m} \\ ab \equiv a'b' \pmod{m} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \overline{a+b} = \overline{a'+b'} \\ \overline{ab} = \overline{a'b'} \end{matrix}$$

■

Vemos então que, dado um conjunto $\mathbb{Z}_m$, é indiferente quais dos representantes de suas classes de equivalência usemos para efetuar operações. Ou seja, em $\mathbb{Z}_6$:

$$\overline{3} + \overline{4} = \overline{15} + \overline{10} = \overline{27} + \overline{46} = \overline{1}$$

uma vez que $\overline{3}, \overline{15}$ e $\overline{27}$ pertencem a uma mesma classe. O mesmo ocorre para $\overline{4}, \overline{10}$ e $\overline{46}$.

Proposição 1.2.4 Se $m \geq 2$ então $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ é um anel.
Demonstração:
Para realizar a demostração deste fato verificaremos que $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ atende as características da definição 1.2.1. Dessa forma, para quaisquer $\overline{a}, \overline{b}$ e $\overline{c} \in \mathbb{Z}_m$ temos:

⋆ Associatividade da adição:

$$\begin{aligned}
\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) &= \overline{a} + \overline{b + c} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\
&= \overline{a + b + c} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\
&= \overline{a + (b + c)} && \text{(pela associatividade em } \mathbb{Z}) \\
&= \overline{(a + b) + c} && \text{(pela associatividade em } \mathbb{Z}) \\
&= \overline{a + b} + \overline{c} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\
&= (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} && \text{(pela definição 1.2.5)}
\end{aligned}$$

⋆ Existência do elemento neutro:

$$\begin{aligned}
\overline{a} + \overline{0} &= \overline{a + 0} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\
&= \overline{a} && \text{(0 é o elemento neutro aditivo de } \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{0}$ é o elemento neutro aditivo em $\mathbb{Z}_m$.

⋆ Existência do simétrico:

Dado $\overline{a}$ procuremos por seu simétrico $\overline{a}'$ e, para isto, devemos ter $\overline{a} + \overline{a'} = \overline{0}$. De onde segue:

$$\overline{a} + \overline{a'} = \overline{0} \overset{1.2.5}{\Longrightarrow} \overline{a + a'} = \overline{0} \overset{1.2.1}{\Longrightarrow} a + a' \equiv 0 \pmod{m} \overset{6}{\Longrightarrow} a' \equiv -a \pmod{m}$$

Notando agora que:

$$\begin{cases} a' \equiv -a \pmod{m} \\ 0 \equiv m \pmod{m} \end{cases} \overset{7}{\Longrightarrow} a' \equiv m - a \pmod{m} \overset{1.2.1}{\Longrightarrow} \overline{a'} = \overline{m - a}$$

Ora, obviamente $\overline{m-a} \in \mathbb{Z}_m$. Isso mostra que todo elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ tem como simétrico o $\overline{m-a}$.

★ Comutatividade da adição

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= \overline{a+b} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\ &= \overline{b+a} && \text{(pela comutatividade em } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= \bar{b} + \bar{a} && \text{(pela definição 1.2.5)} \end{aligned}$$

★ Associatividade da multiplicação

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) &= \bar{a} \cdot \overline{b \cdot c} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\ &= \overline{a \cdot b \cdot c} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\ &= \overline{a \cdot (b \cdot c)} && \text{(pela associatividade em } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= \overline{(a \cdot b) \cdot c} && \text{(pela associatividade em } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= \overline{a \cdot b} \cdot \bar{c} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} && \text{(pela definição 1.2.5)} \end{aligned}$$

★ Distributividade da multiplicação em relação a adição

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) &= \bar{a} \cdot \overline{b+c} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\ &= \overline{a \cdot (b+c)} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\ &= \overline{(a \cdot b) + (a \cdot c)} && \text{(pela distributividade em } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= \overline{a \cdot b} + \overline{a \cdot c} && \text{(pela definição 1.2.5)} \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot \bar{c}) && \text{(pela definição 1.2.5)} \end{aligned}$$

Analogamente se verifica que $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot \bar{c})$

Verificadas todas as propriedades, completamos nossa demonstração de que $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ é um anel. ■

Exemplo 1.2.5 O anel $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$

$$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

Vemos agora as tábuas de operações[2] de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_6$:

[2]Podemos encontrar este conceito em (DOMINGUES e IEZZI, 2003, p.124)

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Podemos notar pelas tábuas de operações que:

- $\overline{3} + \overline{5} = \overline{2}$, pois $3 + 5 = 8$ e este deixa resto 2 quando dividido por 6;
- $\overline{5} \cdot \overline{4} = \overline{2}$, pois $5 \cdot 4 = 20$ que também deixa resto 2 ao ser dividido por 6;
- $\mathbb{Z}_6$ não é um anel de integridade pois, $\overline{4} \cdot \overline{3} = \overline{0}$ mesmo tendo $\overline{4}$ e $\overline{3}$ diferentes de $\overline{0}$;
- Os únicos elementos de $\mathbb{Z}_6$ que possuem inverso multiplicativo são o $\overline{1}$ e o $\overline{5}$, sendo que estes são seus próprios inversos, ou seja, $\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}$ e $\overline{5} \cdot \overline{5} = \overline{1}$.

Capítulo 2

Construção

No decorrer deste capítulo descreveremos o processo de elaboração e construção dos materiais concretos de ensino relacionados as classes de resto módulo m e a regra de sinais em que se baseia nosso trabalho, desde os materiais e ferramentas utilizadas até os erros e acertos ocorridos durante a construção. Procuraremos, durante este processo, detalhar cada passo ocorrido e, quando necessário, fazer uso de fotografias acerca do andamento do projeto. Para discorrer sobre esta fase, dividiremos o conteúdo em duas partes, inicialmente, trataremos da congruência módulo m e em seguida, será explorado sobre a regra de sinais.

2.1 Congruência módulo m

Para este primeiro material, pensamos numa forma de agrupar todos os representantes das classes módulo m em conjuntos distintos. A princípio, foi acordado de utilizarmos o conjunto dos números inteiros de 0 a 30, visando a facilidade em construir e manusear uma quantidade formidável de números.

Entramos, então, em duas questões: como construir tais números para representar os elementos de cada classe e a forma de agrupá-los caracterizando seu devido conjunto.

Na confecção dos elementos das classes foi utilizado um material leve e maleável de modo a facilitar sua moldagem, uma vez que este necessitaria ser cortado várias vezes. Já para o agrupamento desses elementos, necessitamos utilizar um material transparente, pois, é preciso visualizar os números que ficarão em cada pacote. Tendo esta ideia em mente, elencamos nos quadros 2.1 e 2.2, respectivamente, os materiais e ferramentas necessárias à execução do trabalho.

Tabela 2.1: Material utilizado

MATERIAL UTILIZADO	**QUANTIDADE**
Envelopes de Pasta Catálogo	20
E.V.A	5
Fita adesiva	1

Fonte: Acervo do autor

Tabela 2.2: Ferramentas utilizadas

FERRAMENTAS UTILIZADAS
Régua
Tesoura
Estilete
Lápis Preto

Fonte: Acervo do autor

Uma vez definidos todos os materiais e ferramentas a serem utilizados no trabalho, partimos para a confecção. Usaremos duas cores distintas para a criação dos números. A cor verde para os números de 0 a 30 e a cor laranja para criar os representantes das classes de equivalência. Vemos na tabela 2.3 a quantidade específica de material a ser produzido.

Tabela 2.3: Material a ser produzido

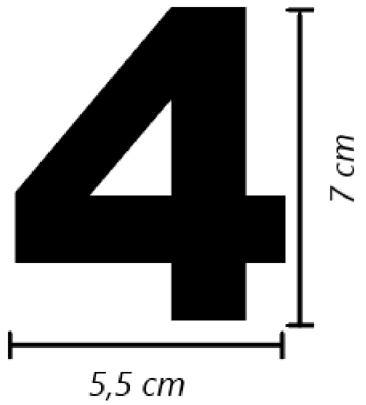
MATERIAL PRODUZIDO	QUANTIDADE
números de 0 a 30 na cor verde (sem a barra superior)	2 cópias por número
números de 0 a 7 na cor laranja (com a barra superior)	5 cópias por número
Pacotes de pasta catálogo com o suporte	14

Fonte: Acervo do autor

1º Passo - Confecção dos moldes numéricos

No primeiro momento foi necessário determinar o tamanho e forma em que os números seriam moldados no E.V.A. Suas dimensões devem prezar pelo bom andamento da aula, não podendo ser pequeno, o que pode dificultar a visualização dos alunos, nem grande, causando um desconforto ao se trabalhar com tanto material. Optamos então por usar a fonte Arial Black, tamanho 150 pt. Para ter uma leve noção do tamanho de cada número usamos o número 4 com suas devidas dimensões para exemplificar o processo, conforme figura 2.1.

Figura 2.1: Dimensões do molde.



Fonte: Acervo do autor

Já para a barra acima do número que caracteriza os elementos das classes de resto módulo m, optamos por omiti-los, de início, uma vez que sua inserção poderia causar certa confusão entre os alunos. Porém, na confecção dos elementos que representarão as classes de equivalência introduziremo-nos. Para isto resolvemos não fazer um molde específico, pois este varia conforme o numeral em que se está trabalhando. Sendo assim, padronizamos a altura em $1cm$ e o tamanho se ajustaria a situação.

Tendo definido a fonte e o tamanho dos numerais, partimos para a impressão dos moldes.

Figura 2.2: Moldes.

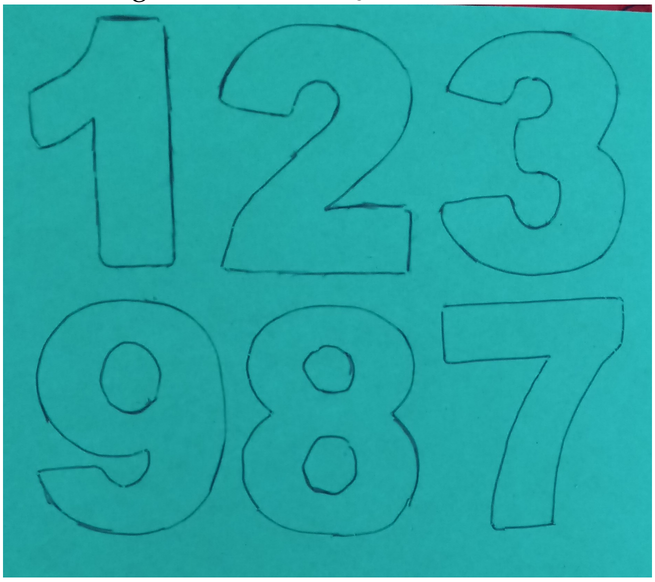
Fonte: Acervo do autor

Após impressos, os moldes foram recortados para serem utilizados na criação dos números no E.V.A.

2º passo - Marcação e recorte dos números no E.V.A

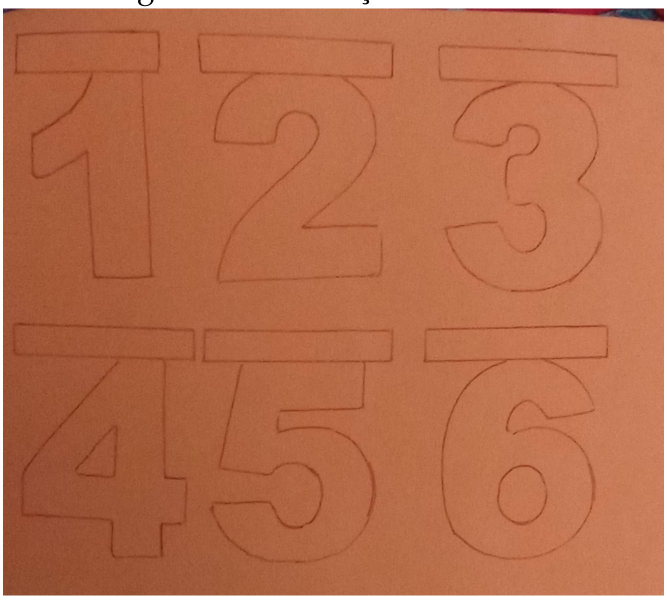
Com os moldes em mãos, fizemos as marcações no E.V.A onde foram recortados os números que representam os elementos das classes de equivalência. Primeiramente, para as duas cores, desenhamos o número com o auxílio do molde e, em seguida, para a cor laranja, fizemos o traçado da barra logo acima do numeral. O resultado deste processo pode ser visto nas figura 2.3 e 2.4.

Figura 2.3: Marcações no E.V.A.



Fonte: Acervo do autor

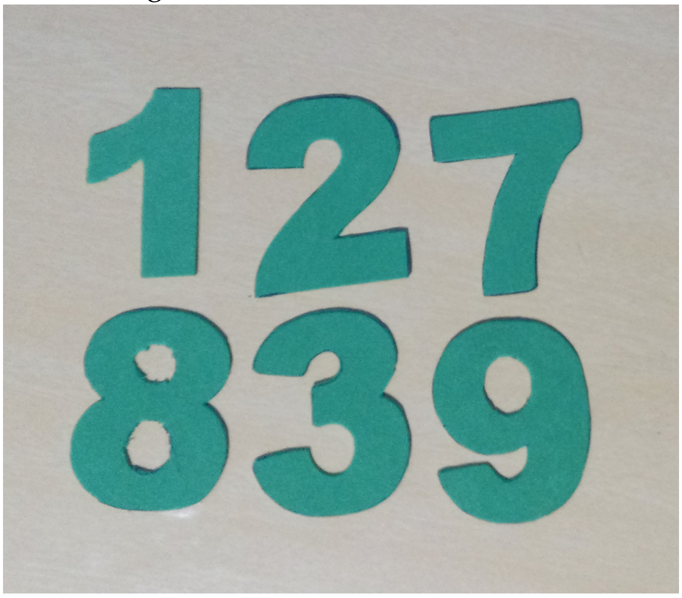
Figura 2.4: Marcações no E.V.A.



Fonte: Acervo do autor

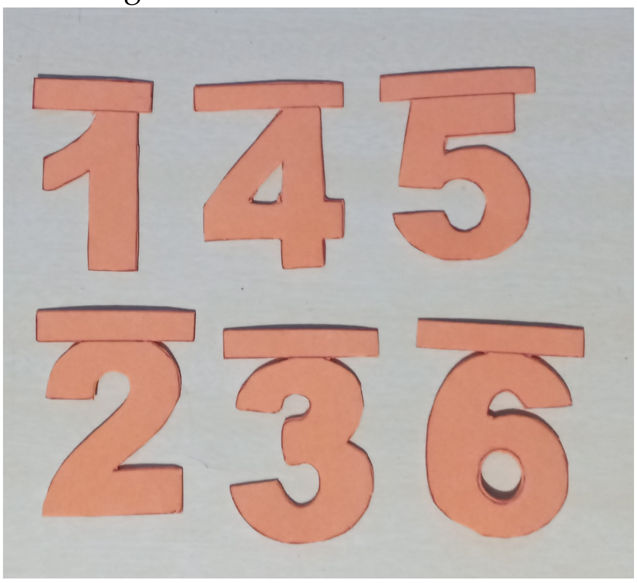
E agora, já traçadas as marcações no E.V.A, partimos para o recorte conforme figuras 2.5 e 2.6.

Figura 2.5: Recortes numéricos.



Fonte: Acervo do autor

Figura 2.6: Recortes numéricos.



Fonte: Acervo do autor

3º passo - Forma de agrupar os números por classe de equivalência

Para o agrupamento dos números em sua respectiva classe de resto, utilizamos os envelopes de pasta catálogo. Durante a elaboração do projeto, notamos a necessidade de exibir um representante para cada classe de equivalência. Assim sendo, tal representante ficará exposto no próprio conjunto de tal forma que, ao olharem para o pacote de números de uma das classes também seja possível identificá-lo.

Assim, em cada envelope atribuímos um suporte no qual será inserido o representante da classe em questão. Este suporte será feito da seguinte forma: Para cada envelope será recortado um pedaço de uma folha da pasta catálogo, figura 2.7 onde será colada com a fita adesiva na frente do envelope designado para agrupar os elementos das classes de resto módulo m. O resultado final pode ser visto em 2.8.

Figura 2.7: Suporte.

Fonte: Acervo do autor

Figura 2.8: Agrupamento da classe de resto.

Fonte: Acervo do autor

E assim, concluímos a criação do material a ser trabalhado com as classes de equivalência módulo m.

2.2 Regra de sinais

Para trabalhar com a regra de sinais, a ideia é confeccionar cartões retangulares de cartolina de tal forma que cada cartão simbolize um número. Ainda, em cada um dos cartões teremos a representação do valor positivo e negativo do número simbolizado. Para tanto, utilizaremos a cor verde em uma das faces para representar o valor positivo e a cor vermelha na outra face para o valor negativo. Para isto, usaremos as folhas de papel dupla face nas cores supracitadas como material para este trabalho.

Uma vez tendo a representação dos valores de cada número, precisamos de uma maneira para manipulá-los de forma prática, alternando entre suas faces quando preciso. Pensando nisso, além dos cartões numéricos, necessitaremos de um painel magnético para, com o auxílio dos imãs de neodímio, fixar os cartões confeccionados e mudar suas devidas faces quando conveniente. Porém, como alternativa a esta opção, utilizaremos a placa de papelão na qual será colado partes da fita magnética, possibilitando assim a utilização dos imãs de neodímio.

Como no caso da congruência módulo m, iniciaremos esta seção apresentando o passo a passo para a construção do material idealizado para a regra de sinais. Para tanto ilustraremos nas tabelas 2.4 e 2.5, respectivamente, os materiais e ferramentas utilizadas para o prosseguimento do projeto.

Tabela 2.4: Material utilizado

MATERIAL UTILIZADO	QUANTIDADE
Imãs de neodímio 3mm/2mm	100
Folhas dupla face	2
Fita magnética 2mm	1
Placa de papelão	1
Cola branca	1
Folha de cartolina	1

Fonte: Acervo do autor

Tabela 2.5: Ferramentas utilizadas

FERRAMENTAS UTILIZADAS
Régua
Tesoura
Estilete
Lápis Preto

Fonte: Acervo do autor

Vemos na tabela 2.6 os materiais a serem produzidos.

Tabela 2.6: Material a ser produzido

MATERIAL PRODUZIDO	QUANTIDADE
Números de 0 a 9 na cor verde	3 cópias por número
Números de 0 a 9 na cor vermelha	3 cópias por número
Cartões numéricos de 0 a 9	3 cópias por número
Painel magnético	3
cartão operacional da multiplicação	3
cartão operacional da multiplicação	3

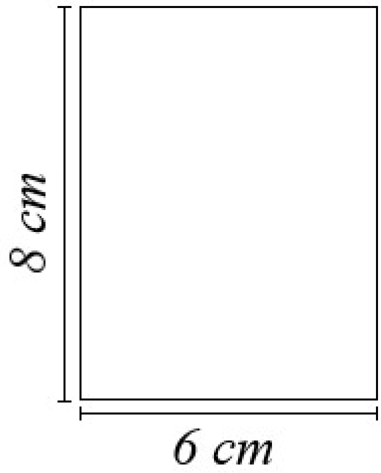
Fonte: Acervo do autor

1º Passo - Confecção dos moldes numéricos

Inicialmente devemos especificar as dimensões em que serão confeccionados os cartões numéricos e para isto, tomaremos como referência o tamanho dos moldes utilizados para o recorte dos números na folha dupla face. Para uma melhor praticidade, utilizaremos as mesmas dimensões que no material de congruência módulo m, conforme ilustra a figura 2.1 e, para o molde, também nos basearemos no produzido na figura 2.2.

Assim, cada cartão numérico terá as dimensões apresentadas na figura 2.9 sendo que sua base será recortada em uma cartolina de cor branca.

Figura 2.9: Dimensões do cartão numérico.

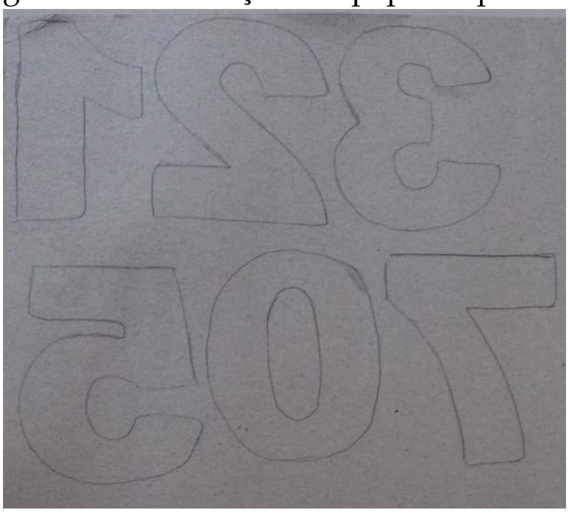


Fonte: Acervo do autor

2º passo - Marcação e recorte dos números no papel dupla face

Novamente, nos basearemos nos passos adotados para a construção do material para a congruência módulo m, ou seja, nesta fase serão feitas as marcações que posteriormente serão recortadas e utilizadas para construção dos cartões numéricos. Vemos um esboço das marcações na figura 2.10. Lembrando que, esta etapa será realizada tanto para a folha dupla face de cor verde como para a de cor vermelha.

Figura 2.10: Marcações no papel dupla face.



Fonte: Acervo do autor

Observe que os números foram marcados de forma refletida no verso do papel dupla face para que, ao serem recortados, estes se apresentassem da maneira correta no lado colorido. Temos um panorama dos números recortados na figura 2.11.

Figura 2.11: Recortes numéricos.

Fonte: Acervo do autor

3º passo - Confecção dos cartões numéricos

Neste passo, utilizando a cola branca, os números que foram recortados em papel dupla face serão colados nos cartões retangulares de cartolina. De um lado ficará o número na cor vermelha (representando o valor negativo) e do outro ficará o número na cor verde (representando o valor positivo). Serão produzidos cartões numéricos de 0 a 9. O resultado final pode ser visto na figura 2.12.

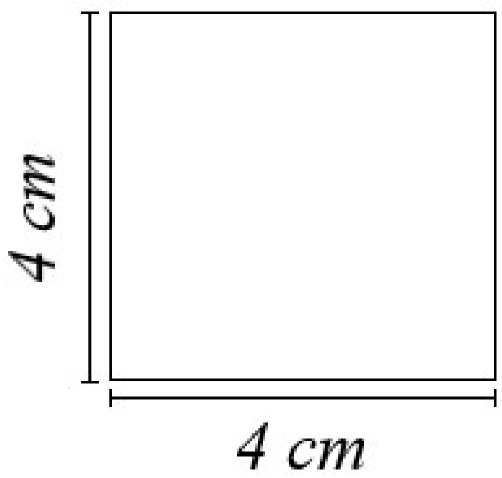
Figura 2.12: Cartões numéricos.

Fonte: Acervo do autor

4º passo - Construção dos cartões operacionais

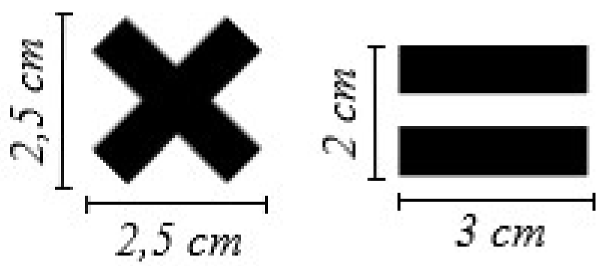
Além dos cartões numéricos, necessitaremos de cartões representando o operador da multiplicação (x) e o sinal de igualdade (=). Adotaremos aqui os mesmos passos realizados para a confecção dos cartões numéricos exceto pelo fato de que não será preciso usar duas cores e as duas faces da cartolina em que serão colados os operadores. Para a base de cartolina branca adotaremos as dimensões apresentadas na figura 2.13 e os moldes dos operadores na figura 2.14.

Figura 2.13: Dimensões do cartão operacional.



Fonte: Acervo do autor

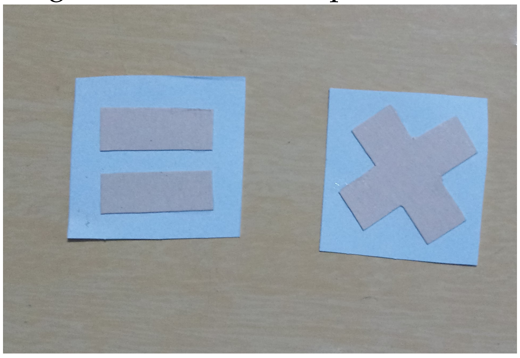
Figura 2.14: Moldes dos símbolos operacionais.



Fonte: Acervo do autor

Uma vez prontos os moldes, os operadores serão recortados e colados na base de cartolina. Note que, para não optar por uma das cores usadas para os sinais dos números, os recortes dos operados foram colados na cartolina com o verso do papel dupla face exposto. Podemos ver o resultado final na figura 2.15.

Figura 2.15: Cartões operacionais.

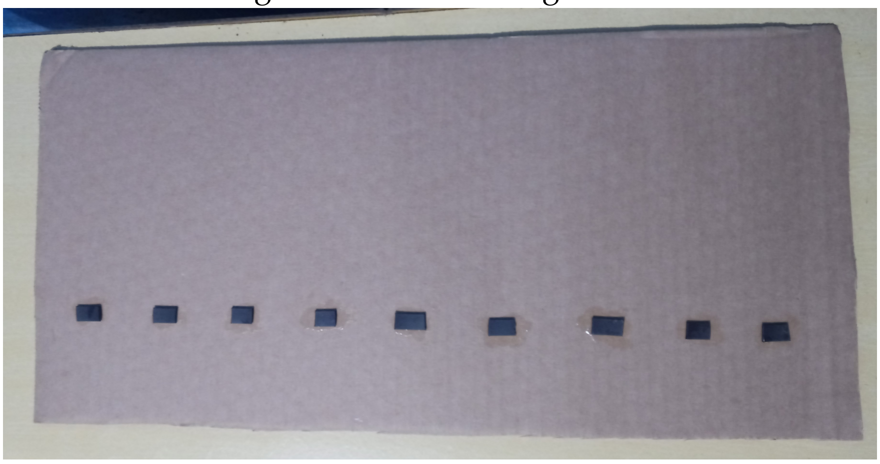


Fonte: Acervo do autor

5º passo - Construção do painel magnético

Como já mencionado, na construção do painel magnético utilizaremos uma placa de papelão na qual será colada uma fita magnética com 2mm de espessura visando a fixação dos cartões numéricos com o auxílio dos imãs de neodímio. Podemos ter uma ideia do processo na figura 2.16.

Figura 2.16: Painel magnético.



Fonte: Acervo do autor

2.3 Erros encontrados no processo de construção

Durante a construção dos materiais de aprendizagem houveram alguns equívocos que acabaram por mudar os planos que havíamos estipulado inicialmente. Sendo assim, optamos por realizar algumas mudanças durante o decorrer do trabalho.

Classe de equivalência módulo m

Uma mudança proposta na execução do projeto foi a forma como seriam recortados os números com dois algarismos. Inicialmente, cada algarismo foi recortado individualmente porém, após detectada uma possível confusão com seu manuseio, optamos por recortá-los já conectados. Podemos ver um exemplo do recorte na figura 2.17.

Figura 2.17: Recorte de número com dois algarismos.

Fonte: Acervo do autor

Regra de sinais

Nossa ideia inicial foi usar somente uma folha dupla face para a construção dos cartões numéricos, visto que cada lado já seria da cor apropriada ao projeto. Porém, ao recortar o primeiro número nos damos conta de que deixamos passar algo muito importante: ao usar o verso do papel, ou seja, ao virá-lo do lado oposto, a forma de representação do numeral era exposta de forma refletida, ficando inviável sua utilização.

Depois de notado o erro é que foi decidido recortar dois números individualmente, um em cada cor, e depois então colar no papelão para que assim, ao representar o verso do cartão, o número aparecesse da forma adequada.

Outra questão que causou uma certa confusão foi o modo como seria construído o painel magnético, visto que comprar um já pronto acarretaria um custo muito alto, o que fugiria do intuito nosso trabalho. Foi pensado então em trabalhar com uma chapa de zinco na qual seriam fixados os cartões numéricos com os imãs de neodímio.

Novamente a questão do custo ficou em pauta e além do mais, o manuseio com este tipo de material seria uma dificuldade a mais para se trabalhar em sala de aula.

Por fim optamos pela opção que foi apresentada na seção anterior.

O material base para os cartões numéricos também foi mudado pois, inicialmente este seria construído com papelão. o motivo de tal mudança se deu por conta da maior espessura do papelão em relação a cartolina, dificultando assim o magnetismo dos imãs de neodímio no painel magnético.

Capítulo 3

Proposta de Atividades

3.1 Atividade 1

PRÉ-REQUISITO: Divisibilidade em $\mathbb{Z}$;

OBJETIVOS:

- Conhecer o material produzido;
- Agrupar os elementos conforme o resto da divisão;
- Identificar um elemento que represente o conjunto de restos.

DURAÇÃO: 2 aulas (140 min)

METODOLOGIA

1º **Momento:**

Inicialmente a turma será dividida em dois grupos, sendo que cada grupo receberá um conjunto com números de 0 a 30 e sete envelopes de Pasta catálogo. Já com o material em mãos, lhes será questionado sobre quais as formas de dividir os números nos envelopes seguindo um padrão.

Em seguida, lhes será apresentado a forma de agrupamento por meio dos restos da divisão Euclidiana. Fixaremos o valor 6 e dividiremos todos os algarismos (de 0 a 30) por ele. Assim, de acordo com o resto deixado na operação, tais números serão agrupados nos pacotes de pasta catálogo. Podemos ver um exemplo do processo na figura 3.1. Realizada a operação, deve ser registrado no caderno a quantidade de grupos formados e a quantidade de elementos em cada conjunto.

Figura 3.1: Agrupamentos.

Fonte: Acervo do autor

2º Momento:

Após a primeira experiência com a nova forma de agrupar, os alunos deverão variar o número pré-estabelecido, agora utilizando os números 3, 4 e 7 para a divisão e efetuar um novo agrupamento, sempre registrando os pontos explorados no 1º Momento.

3º Momento:

Serão levantadas as seguintes questões para os alunos:

a) Quantos envelopes foram utilizados em cada agrupamento?

b) Existe alguma relação entre a quantidade de envelopes usados e o número que foi fixado para realizar a operação?

c) Fixado qualquer número para realizar a operação, é preciso fazer o agrupamento para saber a quantidade de envelopes que serão utilizados?

d) Pegue os elementos de um dos envelopes e organize-os de forma crescente. Qual a relação que é possível notar nesta disposição?

e) Escolha um dos agrupamentos feito anteriormente. Olhando para todos os envelopes que foram criados, existe algum número inteiro que, feita a divisão com o número fixado, não se enquadraria em nenhum destes grupos? Por quê?

f) Na divisão dos números por 3 é possível saber em qual conjunto ficaria o número 278?

g) O número 0 ficou em qual conjunto durante as operações? É possível encontrar alguma relação entre o conjunto em que ele estará independente do número que for fixado para a divisão?

h) Olhe para todos os pacotes formados na divisão por 5. Se juntarmos todos eles em um só, como você chamaria esse novo conjunto? E na divisão pelos outros valores?

4º Momento:

Sanadas as questões referentes ao 3º Momento, será apresentado o conceito de classes de equivalência.

3.2 Atividade 2

PRÉ-REQUISITO: Divisibilidade em $\mathbb{Z}$;

OBJETIVOS:

- Operar com as classes de Equivalência;
- Relacionar os membros de cada classe com a operação;
- Identificar o elemento neutro de cada operação;
- Identificar o inverso aditivo de cada classe de equivalência.

DURAÇÃO: 2 aulas (140 min)

METODOLOGIA

1º Momento:

Inicialmente os alunos deverão agrupar os números de modo a caracterizar o conjunto $\mathbb{Z}_6$, ou seja, agrupar os números de acordo com o resto que cada um deixa na divisão por 6. Para cada classe de equivalência módulo 6 eles deverão eleger um representante e este será colocado no suporte da pasta catálogo preparado para ele, conforme figura 3.2.

Figura 3.2: Classes de resto módulo 6.

Fonte: Acervo do autor

2º **Momento:**

A partir de então, os alunos serão induzidos a fazer operações de adição utilizando os conjuntos e para isso, usarão os representantes de cada classe de equivalência.

3º **Momento:**

Assim como na atividade 1, lhes serão levantados alguns questionamentos:

a) Qual o resultado obtido entre a adição do representante do conjunto $\overline{2}$ com o do conjunto $\overline{3}$?
b) Em qual conjunto o valor do resultado encontrado deve ser colocado?
c) Agora faça a mesma operação com os dois conjuntos porém com representantes diferentes. Em qual grupo o valor novamente deve ser colocado?
d) Há alguma semelhança entre os passos que você acabou de realizar? Se sim, qual?
e) E se fizermos operações com elementos de um mesmo conjunto? O resultado final também fará parte deste conjunto?
f) Olhe agora para o conjunto $\overline{0}$. Faça operações de adição envolvendo seus elementos e os elementos de outra classe. O que acontece com o resultado?
g) Qual seria um possível nome para o conjunto $\overline{0}$?
h) Opere o $\overline{5}$ com o $\overline{1}$. Qual o resultado?
i) E se operarmos o $\overline{3}$ com o $\overline{15}$
j) Será que para qualquer conjunto é possível encontrar outro que operado com ele dê como resultado o $\overline{0}$?

4º **Momento:**

Assim como feito para a operação de adição, os alunos deverão realizar operações com as classes com relação à multiplicação.

5º **Momento:**

Da mesma maneira, lhes será indagado as seguintes questões:

a) Qual o resultado obtido entre a multiplicação do representante do conjunto $\overline{2}$ com o do conjunto $\overline{3}$?

b) Em qual conjunto o valor do resultado encontrado deve ser colocado?

c) Foi visto que na adição não importava o representante da classe para fazer a operação. Podemos dizer o mesmo na multiplicação?

d) Na adição existia um elemento neutro. Na multiplicação também existe? se sim, quem?

e) O mesmo se pode dizer do inverso?

f) O que acontece se fizermos a multiplicação de uma classe com o $\overline{0}$?

3.3 Atividade 3

PRÉ-REQUISITO:Multiplicação em $\mathbb{N}$;

OBJETIVOS:

- Multiplicar em $\mathbb{Z}$;
- Relacionar os fatores da operação com a regra de sinais;

DURAÇÃO: 2 aulas (140 min)

METODOLOGIA

1º **Momento:**

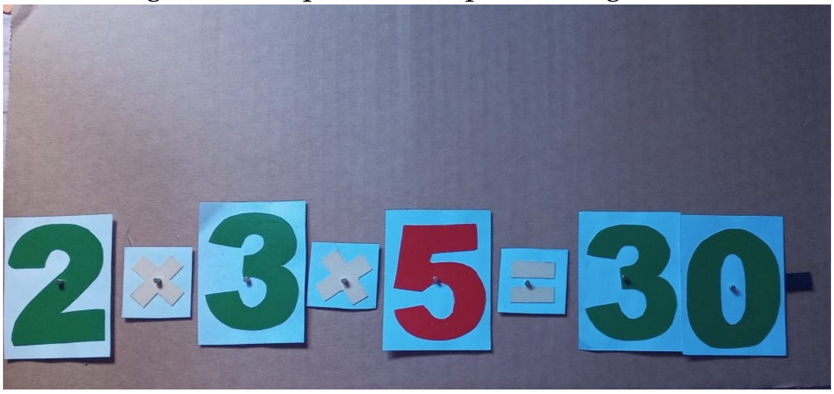
Inicialmente os alunos deverão se familiarizar com o material a ser trabalhado, para então começar a operar. Dessa forma, lhes será explicado o significado de cada cor nos cartões numéricos, explorando o fato de que, na multiplicação entre elementos do conjunto $\mathbb{Z}$ teremos como resultado um elemento do conjunto $\mathbb{Z}$, ou seja, o resultado pode ser tanto positivo como negativo a depender do sinal dos fatores envolvidos na multiplicação.

2º **Momento:**
Nesta etapa, a turma será dividida em três grupos sendo que cada um dos grupos receberá os cartões numéricos de 0 a 9, um painel magnético e 20 imãs de neodímio, necessários ao andamento da atividade.

3º **Momento:**
Com os materiais em mãos, cada grupo deverá "operar" utilizando o painel magnético da seguinte forma:

Após decididos os fatores que serão multiplicados, os alunos deverão considerar o resultado em valor absoluto, ou seja, o valor positivo do resultado. Em seguida, deverão armar a operação no painel magnético, conforme a figura 3.3. Observe que o único a ser tomado em valor absoluto é o resultado final, os outros fatores devem ser representados segundo o seu respectivo sinal.

Figura 3.3: Operação no painel magnético.



Fonte: Acervo do autor

Em seguida, para cada fator da operação cujo sinal seja negativo (que apareça na cor vermelha) o cartão que representa o resultado final deverá ser mudado de lado, ficando assim com o sinal oposto ao que apresentava anteriormente. Note que, para o exemplo da figura 3.3 o resultado final foi mudado de lado uma vez por conta do fator 5 em vermelho. Como segue na figura 3.4.

Figura 3.4: Operação no painel magnético.

Fonte: Acervo do autor

4º **Momento:**

Nesse momento lhes serão levantados alguns questionamentos:

a) O que acontece se multiplicarmos dois elementos positivos, ou seja, dois fatores de cor verde?

b) E se forem dois de cor vermelha?

c) Qual a relação entre a quantidade de fatores negativos (cor vermelha) e o sinal do resultado final?

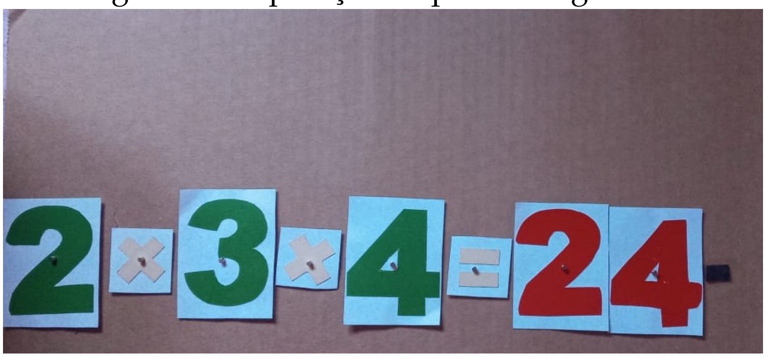
d) E se um dos fatores for 0, qual o resultado final da operação?

e) Sendo um dos fatores o 0 o sinal dos outros fatores mudarão o resultado final?Porque?

5º **Momento:**

Agora, os alunos deverão realizar o caminho inverso, ou seja, primeiro será colocado o valor final com seu devido sinal e o fatores envolvidos na multiplicação em valor absoluto. Veja um exemplo na figura 3.5.

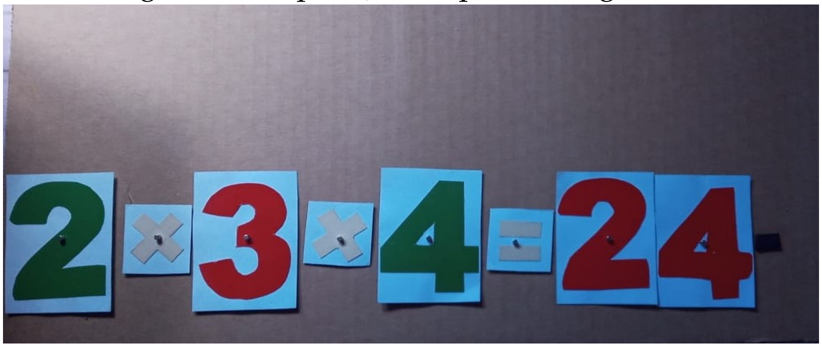
Figura 3.5: Operação no painel magnético.



Fonte: Acervo do autor

Em seguida, os alunos deverão mudar o lado dos fatores da multiplicação para que o resultado final fique de acordo, conforme figura 3.6.

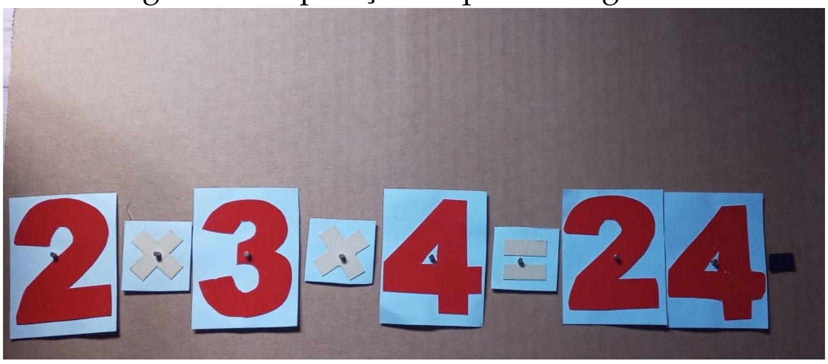
Figura 3.6: Operação no painel magnético.



Fonte: Acervo do autor

Note que esta forma de resolução não é única, um outro exemplo que poderia ser feita é apresentado na figura 3.7.

Figura 3.7: Operação no painel magnético.



Fonte: Acervo do autor

6º **Momento:**

Como no momento anterior, lhes será indagado as seguintes questões:

a) O que ocorre se o resultado final for positivo?

b) E se for negativo?

c) É preciso mudar o lado de mais de um fator envolvido na operação?

d) Existe apenas uma maneira de ajustar o sinal dos fatores para que a operação fique correta?

e) E se o resultado final for o 0, o que deve ocorrer com os fatores para que tenhamos uma igualdade?

Capítulo 4

Soluções das Atividades

4.1 Solução da Atividade 1

3º **Momento:**

a) Quantos envelopes foram utilizados em cada agrupamento? Quando fixado o 6 foram utilizados 6 envelopes, fixado o 3 foram 3 envelopes, fixado o 4, 4 envelopes e fixado o 7, 7 envelopes.

b) Existe alguma relação entre a quantidade de envelopes usados e o número que foi fixado para realizar a operação?

   Sim, a quantidade de envelopes será exatamente a quantidade representada pelo valor fixado para a divisão.

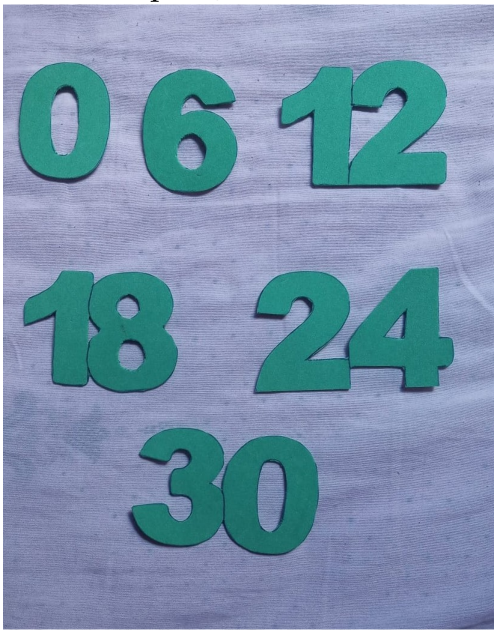
c) Fixado qualquer número para realizar a operação, é preciso fazer o agrupamento para saber a quantidade de envelopes que serão utilizados?

   Não, uma vez que, conforme dito na questão anterior, a quantidade de envelopes será condizente com o número fixado.

d) Pegue os elementos de um dos envelopes e organize-os de forma crescente. Qual a relação que é possível notar nesta disposição?

   Tendo o 6 como número fixado para a divisão, pegamos o pacote que continha o número 0 e fizemos a disposição conforme figura 4.1.

Figura 4.1: Disposição em ordem crescente.



Fonte: Acervo do autor

Notamos que a diferença entre os números que se sucedem é sempre 6, exatamente aquele fixado para a divisão.

e) Escolha um dos agrupamentos feito anteriormente. Olhando para todos os envelopes que foram criados, existe algum número inteiro que, feita a divisão com o número fixado, não se enquadraria em nenhum destes grupos? Por quê?

Não, os envelopes que surgem para qualquer número fixado para a divisão cobrem todas as possibilidades de resto existentes.

f) Na divisão dos números por 3 é possível saber em qual conjunto ficaria o número 278?

Sim, como o resto de divisão deste por 3 é 2, podemos afirmar que o número 278 ficaria no mesmo envelope que o número 2.

g) O número 0 ficou em qual conjunto durante as operações? É possível encontrar alguma relação entre o conjunto em que ele estará independente do número que for fixado para a divisão?

Ele sempre se encontra no mesmo envelope onde fica o próprio número fixado.

4.2 Solução da Atividade 2

3º Momento:

a) Qual o resultado obtido entre a adição do representante do conjunto $\overline{2}$ com o do conjunto $\overline{3}$?

A resposta a esta pergunta varia conforme os representantes escolhidos. Por exemplo, se forem tomados o $\overline{2}$ e o $\overline{3}$ tem-se como resultado o $\overline{5}$.
Tomando o $\overline{8}$ e o $\overline{15}$ tem-se o $\overline{23}$ como resultado.

b) Em qual conjunto o valor do resultado encontrado deve ser colocado?

Independentemente dos representantes escolhidos, o resultado final sempre será um elemento pertencente ao conjunto cujo $\overline{5}$ pertence.

c) Agora faça a mesma operação com os dois conjuntos porém com representantes diferentes. Em qual grupo o valor novamente deve ser colocado?

Este será um elemento do $\overline{5}$.

d) Há alguma semelhança entre os passos que você acabou de realizar? Se sim, qual?

Sim, após obtido o resultado da adição entre os representantes das classes, o resto da divisão deste por 6 será sempre 5.

e) E se fizermos operações com elementos de um mesmo conjunto? O resultado final também fará parte deste conjunto?

Não necessariamente. Olhando para o conjunto representado pelo $\overline{3}$, se fizermos a operação aditiva do $\overline{3}$ com o $\overline{9}$ obtemos o $\overline{12}$ como resultado. Note que o resto da divisão de 12 por 6 é 0 e consequentemente, o 12 não pertence ao conjunto $\overline{3}$.

f) Olhe agora para o conjunto $\overline{0}$. Faça operações de adição envolvendo seus elementos e os elementos de outra classe. O que acontece com o resultado?

O resultado será sempre o representante da outra classe, ou seja, o 0 tem um papel neutro na operação.

g) Qual seria um possível nome para o conjunto $\overline{0}$?

Elemento neutro da adição.

h) Opere o $\overline{5}$ com o $\overline{1}$. Qual o resultado?

$\overline{6}$, que também é um elemento pertencente ao conjunto do $\overline{0}$.

i) E se operarmos o $\overline{3}$ com o $\overline{15}$

Novamente temos um representante do $\overline{0}$. Dessa vez, o resultado da operação é $\overline{18}$.

j) Será que para qualquer conjunto é possível encontrar outro que operado com ele dê como resultado o $\overline{0}$?

Sim, uma vez que o $\mathbb{Z}_6$ é um anel.

5º **Momento:**

a) Qual o resultado obtido entre a multiplicação do representante do conjunto $\overline{2}$ com o do conjunto $\overline{3}$?
$\overline{6}$.

b) Em qual conjunto o valor do resultado encontrado deve ser colocado?
É um elemento pertencente ao conjunto do $\overline{0}$.

c) Foi visto que na adição não importava o representante da classe para fazer a operação. Podemos dizer o mesmo na multiplicação?
Sim.

d) Na adição existia um elemento neutro. Na multiplicação também existe? Se sim, quem?
Sim, na multiplicação é o $\overline{1}$.

e) O mesmo se pode dizer do inverso?
Não pois existem classes que não possuem um inverso multiplicativo, ou seja, não existe nenhuma outra classe que, quando operado com esta, tenha por resultado o $\overline{1}$. Tome por exemplo a classe representada pelo $\overline{0}$.

f) O que acontece se fizermos a multiplicação de uma classe com o $\overline{0}$? O resultado será sempre o próprio $\overline{0}$.

4.3 Solução da atividade 3

5º **Momento:**

a) O que acontece se multiplicarmos dois elementos positivos, ou seja, dois fatores de cor verde?
O resultado será sempre positivo, ou seja, o número que o representa terá a cor verde pois, seguindo o procedimento estabelecido, não será necessário trocá-lo de lado uma vez que os fatores envolvidos são também positivos.

b) E se forem dois de cor vermelha?
Novamente o resultado será positivo. Porém, desta vez será preciso trocar a face do resultado final duas vezes pois os dois fatores envolvidos na multiplicação são negativos (de cor vermelha) e assim, o resultado final retorna a sua posição original.

c) Qual a relação entre a quantidade de fatores negativos (cor vermelha) e o sinal do resultado final?
Quando a quantidade de fatores envolvidos na multiplicação for ímpar, teremos como resultado um valor negativo e quando esta quantidade for par, o resultado será positivo.

d) E se um dos fatores for 0, qual o resultado final da operação?

Nesse caso, independentemente dos outros fatores envolvidos na multiplicação, o resultado será sempre 0.

e) Sendo um dos fatores o 0 o sinal dos outros fatores mudarão o resultado final?Porque?

Como já explorado na questão anterior, uma vez tendo o 0 como um dos fatores da multiplicação, o resultado final será o próprio 0, não importando quais são os outros fatores envolvidos no processo.

6º **Momento:**

a) O que ocorre se o resultado final for positivo?

Então, os fatores envolvidos na multiplicação devem ser todos positivos ou haver uma quantidade par de fatores negativos.

b) E se for negativo?

Nesse caso é necessário uma quantidade ímpar de fatores negativos.

c) É preciso mudar o lado de mais de um fator envolvido na operação?

Não pois uma vez que se altera o sinal de um dos fatores o resultado final também se altera.

d) Existe apenas uma maneira de ajustar o sinal dos fatores para que a operação fique correta?

Não, há diversas formas.

e) E se o resultado final for o 0, o que deve ocorrer com os fatores para que tenhamos uma igualdade?

É preciso que um dos fatores também seja 0.

Considerações finais

Um dos objetivos iniciais do trabalho era aplicar a uma turma de alunos as atividades propostas no capítulo 3, porém, por motivos maiores não foi possível realizar tal processo.

Por se tratar de um ramo tão abstrato, o ensino da Álgebra se tornou um desafio a ser superado por professores e alunos ao longo do processo de aprendizagem. Após a construção dos materiais e elaboração das atividades a serem trabalhadas, foi possível identificar a importância existente no fato do professor sair dos métodos tradicionais de ensino e buscar novas ferramentas que possam captar a atenção de seus alunos e tornar este conceito um pouco mais palpável.

Vimos que, com materiais simples e de fácil acesso, é possível construir caminhos que facilitem esta troca de experiências entre educador e educando, aprimorando o ensino-aprendizagem e tornando um conceito que outrora parecia tão complexo em algo fácil e até divertido de se estudar.

Os materiais aqui apresentados não podem sozinhos ser a fonte de aprendizado e conhecimento inerentes a um aluno ao se tratar dos conceitos algébricos que foram trabalhados. Porém estes são uma grande ferramenta que, com o auxílio dos livros didáticos, possam propiciar aos alunos uma experiência um pouco mais estimulante ao se tratar do estudo desta ciência tão bela que é a matemática.

Referências Bibliográficas

DOMINGUES, Hygino; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna.** São Paulo: Atual, 2003.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra.** Rio de Janeiro: IMPA, 1979. 194 p.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

MIRANDA, Sergiana Alves Cangusçu; REIS, Júlio César dos.**CAIXA DE FUNÇÕES:** UMA PROPOSTA COM MATERIAL CONCRETO E MANIPULÁVEL. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional) - PROFMAT, Vitória da Conquista/BA, 2017.