UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

CRISTIANO BRITO DE OLIVEIRA

COMO O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE ESTÁ SENDO COMUNICADO NO LIVRO DIDÁTICO

VITÓRIA DA CONQUISTA
2021

CRISTIANO BRITO DE OLIVEIRA

COMO O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE ESTÁ SENDO COMUNICADO NO LIVRO DIDÁTICO

Trabalho de conclusão de curso de graduação em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Prof.ª Drª Roberta D'Angela Menduni Bortoloti.

VITÓRIA DA CONQUISTA

2021

TERMO DE APROVAÇÃO

CRISTIANO BRITO DE OLIVEIRA

COMO O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE ESTÁ SENDO COMUNICADO NO LIVRO DIDÁTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti - Orientadora
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Prof.º Dr. Claudinei de Camargo Sant'Ana
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Prof.º Dr. Jonson Ney Dias da Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Vitória da Conquista, julho de 2021

AGRADECIMENTOS

Quero Agradecer primeiramente ao Senhor Deus, pois sem Ele eu não teria força e coragem para me mudar de cidade e começar algo totalmente novo. A presença dele iluminou a minha caminhada.

Agradeço a minha família, avós, pai, mãe e irmã que sempre me incentivaram a estudar e sempre acreditaram em mim. Meus pais sempre garantiram que eu tivesse uma boa educação e sempre batalharam pelo meu melhor. Não poderia deixar de agradecer aos meus tios e primos, pois morei com eles durante toda a minha graduação e eu creio que sem eles eu não teria seguido essa caminhada. Também não poderia deixar de agradecer a minha namorada, que sempre esteve ao meu lado durante toda a minha graduação.

Agradeço a todos os amigos que eu conheci durante essa caminhada, sempre que precisei, eles me ajudaram, em especial, Salustiano, Lucas, Bruno, Allan, Adriano, Willian e Eduardo. Dentre esses, eu quero destacar Salustiano que foi um irmão durante a minha graduação, sempre apresentávamos os trabalhos juntos.

Não poderia deixar de agradecer a todos os professores que me auxiliaram durante a minha graduação, em especial a minha orientadora Roberta Menduni, uma professora que eu admiro muito, cursei várias disciplinas de educação que foi ministrada por ela, dentre essas, as mais marcantes foram os estágios.

Por fim, quero dedicar essa vitória a todos que me ajudaram durante a minha formação.

Muito Obrigado!

RESUMO

O objetivo da pesquisa é identificar em livros didáticos da Educação Básica como o conceito de proporcionalidade está sendo comunicado conforme o modelo de Menduni-Bortoloti (2016). Foi realizada uma pesquisa de abordagem qualitativa e caráter documental, sendo o livro didático o documento usado como fonte. Foram analisadas duas coleções de livros didáticos, sendo uma do Ensino Fundamental II e outra do Ensino Médio. Como instrumento de seleção das coleções, foi utilizado o Sistema do Material Didático (SIMAD) um site de distribuição de material didático. Por meio desse instrumento que foram escolhidas as coleções de livros didáticos utilizadas na pesquisa. Os modos de comunicar o conceito de proporcionalidade foram organizados em 3 cenários diferentes: No primeiro cenário - proporcionalidade comunicada como razão – esta se apresentou como sendo escala; porcentagem; probabilidade; taxa e razão trigonométrica. No segundo cenário - proporcionalidade comunicada como igualdade entre razões – esta foi apresentada pela regra de três e razão de semelhança. E no último cenário - proporcionalidade comunicada como taxa de variação de uma função – esta se referiu as funções afim e linear. Foi notado ainda que a proporcionalidade como razão foi a mais comunicada nos livros didáticos, seguido pela proporcionalidade como igualdade entre razões e por último a proporcionalidade como taxa de variação de uma função que foi comunicada apenas no 1º ano da coleção de livro didático do Ensino Médio. Espera-se que essa pesquisa contribua para com futuros e presentes professores conhecendo que proporcionalidade possa ser comunicada de diferentes modos, assim, contribuindo no processo de ensino aprendizagem desse conceito.

Palavras-chave: Proporcionalidade, Livro Didático, Formação de Professores.

ABSTRACT

The objective of the research is to identify in Basic Education textbooks how the concept of proportionality is being communicated according to the Menduni-Bortoloti model (2016). A research with a qualitative approach and documental character was carried out, being the textbook the document used as source. Two collections of textbooks were analyzed, one from Elementary School II and the other from High School. As an instrument for selecting the collections, the Didactic Material System (SIMAD) was used, a website for the distribution of didactic material. Through this instrument, the textbook collections used in the research were chosen. The ways of communicating the concept of proportionality were organized in 3 different scenarios: In the first scenario - proportionality communicated as a reason - this was presented as a scale; percentage; probability; rate and trigonometric ratio. In the second scenario - proportionality communicated as equality between reasons - this was presented by the rule of three and similarity ratio. And in the last scenario - proportionality communicated as rate of change of a function - this referred to the affine and linear functions. It was also noted that proportionality as a reason was the most communicated in textbooks, followed by proportionality as equality between reasons and finally proportionality as a rate of change of a function that was communicated only in the 1st year of the high school textbook collection . It is expected that this research will contribute to future and present teachers knowing that proportionality can be communicated in different ways, thus contributing to the teaching-learning process of this concept.

Keywords: Proportionality, Textbook, Teacher Training

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Pesquisa com formação de professores envolvendo o Teorema de Tales 17
Figura 2: Modelo de uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade 21
Figura 3: Concentrado de suco 26
Figura 4: Razão entre grandezas de mesma natureza 27
Figura 5: Razão entre grandezas de natureza diferentes 27
Figura 6: Fotografia 29
Figura 7: Malha quadriculada 30
Figura 8: Painel de cores 31
Figura 9: Situações envolvendo porcentagens 33
Figura 10: Interpretações 36
Figura 11: Cartões 37
Figura 12: Árvores de possibilidades 38
Figura 13: Probabilidade de um evento 40
Figura 14: Opções de pagamento 41
Figura 15: Juros simples 42
Figura 16: Fórmula de juros e montante 43
Figura 17: Juros compostos 44
Figura 18: Razões trigonométricas 45
Figura 19: Altura do prédio 46
Figura 20: Largura do rio 47
Figura 21: Grandeza diretamente proporcional 49
Figura 22: Grandeza inversamente proporcional 50
Figura 23: Propriedade fundamental do proporção 51
Figura 24: Regra de três simples 52
Figura 25: Regra de três composta diretamente proporcional 53
Figura 26: Regra de três composta inversamente proporcional 54
Figura 27: Polígonos semelhantes 54
Figura 28: Polígonos não semelhantes 56
Figura 29: Segmentos proporcionais 57
Figura 30: Teorema de Tales 58

Figura 31: Taxa de variação 59
Figura 32: Retas paralelas e triângulos.. 61

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental II utilizado pelos colégios de Vitória da Conquista 23
Quadro 2: Coleções de livros didáticos do Ensino Médio utilizado pelos colégios de Vitória da Conquista 23
Quadro 3: Peso dos homens e seus cachorros 48
Quadro 4: Livros x Proporcionalidade comunicada como razão, igualdade entre razões e taxa de variação de uma função 63
Quadro 5: Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade 64

Sumário

1 – INTRODUÇÃO 11
2 – REVISÃO DE LITERATURA 14
2.1 – O ensino de proporcionalidade 15
2.2 – A Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade 18
2.2.1 Proporcionalidade como razão 19
2.2.2 Proporcionalidade como igualdade entre razões 19
2.2.3 Proporcionalidade como taxa de variação de uma função 20
3 - METODOLOGIA 21
4- ANÁLISES E DISCUSSÕES 25
4.1 – Cenários para a realização do conceito de proporcionalidade 25
4.1.1 – Proporcionalidade como razão 25
4.1.1.1 – Escalas 28
4.1.1.2 – Porcentagem 31
4.1.1.3 – Probabilidade 37
4.1.1.4 – Taxa 40
4.1.1.5 – Razões Trigonométricas 45
4.1.2 – Proporcionalidade como igualdade entre razões 48
4.1.2.1 – Semelhança e segmentos proporcionais 54
4.1.3 - Proporcionalidade como taxa de variação de uma função 58
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS 61
6. REFERÊNCIAS 64

1 – INTRODUÇÃO

Concluí o ensino médio no ano de 2013, mas, antes de ingressar na Universidade, fiquei dois anos e meio sem saber o que faria futuramente. Em 2015, ocorreu o primeiro cursinho da Universidade Para Todos (UPT) em Caetanos-Ba, cidade na qual eu morava, assim, aproveitei a oportunidade de participar e voltar a estudar. Dediquei-me, bastante, com o intuito de conseguir uma vaga na Universidade e, no final daquele mesmo ano, recebi a notícia que eu tinha sido aprovado no vestibular da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), no curso de Licenciatura em Matemática.

No vestibular, a minha primeira opção foi em Licenciatura em Matemática, pois já me interessava pela área desde o início da UPT. No ensino básico, não cogitava a possibilidade de ser professor de Matemática, demonstrava interesse pela Matemática, mas a profissão de ser professor não era a primeira opção, pois sempre enxergava a engenharia como uma possibilidade, mas com o passar do tempo comecei a ter paixão em ser professor e a UPT foi "uma porta de entrada para este mundo".

Ao iniciar o curso, no ano de 2016, senti muita dificuldade, uma vez que, concluí o ensino básico em escola pública. Dessa forma, apresentei dificuldades nas disciplinas de fundamentos de Matemática elementar, principalmente, na de fundamentos I, na qual eram trabalhadas as funções. Chegando ao final do semestre, foi necessário realizar a prova final dessa disciplina, contudo consegui a pontuação exigida para dar continuidade ao curso.

No segundo semestre, senti menos dificuldade em comparação com o semestre anterior, pois já estava familiarizado com a rotina de estudos e acostumando com a cidade, pois, por crescer em uma cidade menor, demorou um tempo para acostumar com a nova cidade. A rotina de pegar ônibus, sair de casa após o almoço, foi um pouco complicada no começo.

Nesse semestre, cursei a disciplina de Cálculo I e foi a partir desse momento que comecei a gostar dos cálculos e pensava em realizar minha monografia com um tema voltado à Matemática. Isso porque não tive nenhuma disciplina que abordasse conteúdos que envolvessem a Educação Matemática.

A partir do terceiro semestre, comecei a cursar a disciplina de prática como componente curricular I. Assim, entendi um pouco mais sobre a Educação Matemática, por meio dos artigos que foram apresentados. Foi nessa disciplina que comecei a produzir os primeiros planos de aula, embora esses planos não fossem aplicados em sala de aula, foram de extrema importância para o meu aprendizado. No quarto semestre, cursei a disciplina de prática como componente curricular II, essa, por sua vez, não teve tanta produção de planos de aula, mas o grande aprendizado foi às conversas em grupos, ou seja, uma vez por semana, realizávamos um círculo, em sala de aula, e começávamos a discutir sobre os textos que foram lidos durante toda a semana.

Chegando ao quinto semestre, o curso de matemática “começou para mim”, pois foi a partir desse semestre que começamos a realizar estágios supervisionados. Assim, entendi como é ser um professor de Matemática, bem como a escola é gerenciada, qual o papel do professor diante do quadro e como é administrar uma sala com mais de 30 alunos.

No estágio supervisionado I, trabalhei com uma turma do 7º ano, assim, tive a oportunidade de ministrar o conteúdo de escalas, conteúdo este que envolve a proporcionalidade, mas não consegui aplicar da maneira como queria, devido o tempo de duração do estágio.

Foi neste semestre que passei a ter contato com o conteúdo de proporcionalidade, pois surgiram dúvidas por parte de todos os alunos em relação à aplicação de conteúdos que envolvessem a proporcionalidade. Alguns alunos estavam trabalhando com razões, outros com escalas, então, a solução tomada pela professora foi à leitura de vários artigos que trabalhavam de maneiras diferentes à aplicabilidade desse conteúdo em sala de aula. Desse modo, discutimos sobre esse tema e foi assim que comecei a ter noção da proporcionalidade e como ela poderia ser aplicada numa sala de aula.

O que mais chamou atenção ao realizar as leituras desses artigos foi à maneira com que a proporcionalidade está sendo trabalhada no ensino básico. Muitos resolvem problemas de proporcionalidade apenas utilizando a regra de três, ou seja, resumem a proporcionalidade por meio de um algoritmo.

> Nossa experiência docente demonstrou, em diversas ocasiões, que os alunos encontram obstáculos significativos na aprendizagem da proporcionalidade por meio da abordagem tradicional. Quando conseguem dominar o procedimento de cálculo da regra de três, nem sempre mostram compreender as noções de razão, de proporção

> como igualdade de razões e, mais amplamente, de proporcionalidade. Mesmo problemas muito simples, se fogem ao modelo convencional do "problema de regra de três", desorientam muitos alunos. (IMENES; LELLIS, 2005, p.13-14)

No sexto semestre, matriculei na disciplina de estágio supervisionado II e, novamente, foi ministrada pela professora Roberta. Esse estágio foi um pouco diferente do primeiro, pois tivemos uma greve, então, precisávamos fazer algo para não perdermos as aulas de orientação na UESB e não atrasar o nosso estágio, que já estava em andamento.

Como não estava tendo aula na UESB, marcamos algumas aulas de orientação nos próprios colégios onde estávamos realizando o nosso estágio. Assim, não atrasamos o estágio e conseguimos terminar as aulas de orientação, antes mesmo de voltar às aulas da UESB.

Este semestre foi de extrema importância para mim, pois foi ao final do mesmo que eu decidi fazer a minha monografia na área da Educação Matemática. Como a professora Roberta já havia construído um modelo de ensino para o conceito de proporcionalidade utilizando como fonte os livros didáticos resolvi fazer o meu trabalho de conclusão de curso nessa área.

A motivação em trabalhar a análise do conceito de proporcionalidade no livro didático começou por meio dos artigos que li durante o meu estágio supervisionado I. Logo, comecei a perceber que este conteúdo era ministrado de maneira mecânica pelos professores no ensino básico, assim surgiu o questionamento: "Por que este conteúdo é abordado dessa forma no ensino básico?".

Após conhecer um modelo de ensino para o conceito de proporcionalidade, construído por meio da tese de doutorado de Menduni-Bortoloti (2016), resolvi analisar o conceito de proporcionalidade em outras coleções de livros didático utilizando este mesmo modelo.

Menduni-Bortoloti (2016) apresenta, em sua tese, três fontes, para construir um modelo de Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade.

- Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de uma revisão sistemática de literatura;
- Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um estudo do conceito;

- Realizações do conceito de proporcionalidade em livros didáticos: Uma proposta de Matemática para o ensino.

Contudo, este trabalho teve como foco apenas uma dessas fontes, neste caso, os livros didáticos. Desta forma, o objetivo geral desta pesquisa é identificar em livros didáticos modos de comunicar o conceito de proporcionalidade, tendo como objetivo específico verificar se os modos encontrados nos livros didáticos, por ora pesquisados, estão presentes ou não no modelo construído por Menduni-Bortoloti (2016).

Espera-se que esta pesquisa mostre aos profissionais, dentre esses, os professores que já ministram aulas, os futuros professores e até mesmo os profissionais que dedicam muito tempo para produzir esses materiais didáticos, que a proporcionalidade pode ser trabalhada de diferentes modos e, na maioria das vezes, a “mecanização” desse conceito, como a “regra de três”, pode ser “deixada de lado”, enriquecendo o conhecimento do aluno.

Em relação ao conteúdo de proporcionalidade, precisa-se trabalhar de maneira que atraia os alunos a querer entender e compreender como solucionar problemas que envolvam esse conteúdo e mostrar a esses que é possível resolverem tais problemas de outras maneiras, deixando assim de utilizar fórmulas para resolver todos os problemas, assim como mencionado acima por Imenes e Lellis (2005).

2 – REVISÕES DE LITERATURA

Este tópico foi dividido em duas seções, sendo a primeira sobre o ensino de proporcionalidade, que tem como foco apresentar como o ensino de proporcionalidade está sendo trabalhado no ensino básico, conforme visão dos pesquisadores. A segunda seção, a Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade, que apresenta o modelo teórico utilizado na pesquisa e as duas ênfases que compõem este modelo, sendo a primeira às realizações e a segunda os cenários, divididos em três etapas.

Nesta seção faremos um diálogo entre autores de pesquisas e também entre os resultados de suas pesquisas e a experiência do orientando que realiza este trabalho, seja enquanto aluno da Educação Básica seja enquanto aluno-estagiário.

2.1 – O ensino de proporcionalidade

Nessa seção será tratado como o ensino de proporcionalidade está sendo trabalhado no ensino básico e como deveria ser trabalhado na visão dos pesquisadores. Uma das formas de ensinar proporcionalidade é resolver os problemas de diferentes modos e não de maneira mecânica. À análise foi realizada por meio dos artigos.

Cândido, Silva e Souza (2018, p. 22) “[...] consideram o raciocínio proporcional uma das temáticas centrais do ensino de Matemática [...]”, além disso, aconselham que “[...] seja trabalhado com as crianças desde os anos iniciais do Ensino Fundamental”.

Ao resolverem problemas que envolvam o conceito de proporcionalidade é normal que os alunos façam da maneira que eles aprenderam. Alunos do ensino fundamental I, que não tiveram contato com a proporcionalidade, buscam determinar uma forma de resolvê-lo. Nesse caso, é desenvolvido, pelos alunos, o raciocínio proporcional, como afirma Miranda e Viana (2016, p. 196)

> Nesta perspectiva, considera-se que o raciocínio proporcional dos estudantes pode ser investigado por meio das estratégias adotadas por eles – e representadas simbolicamente por palavras, desenhos ou símbolos matemáticos – quando resolvem problemas que avaliam o tema.

Estes alunos conseguem resolver problemas sem a utilização de um mecanismo, pois os mesmos não tiveram contato com nenhum dos meios de resolução. Então, é de extrema importância que os alunos trabalhem esse raciocínio proporcional antes de entrarem no fundamental II.

O ensino de proporcionalidade começa, geralmente, no 7º ano, pois no 6º ano ocorrem revisões de assuntos já estudados. Dessa forma, os alunos do 6º ano não têm o contato formalizado com a proporcionalidade, ou não têm contato com a “mecanização” da regra de três, por exemplo.

A pesquisa, realizada por Oliveira e Santos (2000), mostra que os alunos que não tiveram contato com a regra de três, utilizaram estratégias diferentes para resolver problemas que envolviam a proporcionalidade, segundo os autores, “[...] Quando os alunos têm que resolver um problema, e não foram apresentados a um algoritmo formal que permita resolvê-lo imediatamente, eles criam estratégias próprias para resolvê-los” (OLIVEIRA; SANTOS, 2000, p. 2).

Para aqueles alunos que já conhecem os mecanismos para resolver determinados problemas, não será mais um problema, logo, será apenas um exercício.

A pesquisa de Oliveira e Santos (2000) foram realizados com alunos do 6º ao 9º ano, sendo que os mesmos deveriam resolver 8 problemas envolvendo a proporcionalidade. Ao final da pesquisa, constatou-se que nenhum dos alunos do 6º ano utilizou a regra três, pois eles não tinham o conhecimento desse mecanismo, então eles encontraram as suas próprias estratégias para resolver os problemas e uma dessas estratégias foi o valor unitário. Do 7º ao 9º ano 41,82% dos alunos utilizaram a regra de três para resolver os problemas propostos.

O valor unitário poderia ser a primeira estratégia para ensinar um aluno a resolver problemas que envolvam a proporcionalidade, sendo assim, Oliveira; Santos (2000) explicam que Vergnaud (1991) “descreve essa estratégia como sendo a utilização de uma lei binária, onde os alunos irão estabelecer uma relação entre grandezas diferentes, hora e velocidade, por exemplo.” (VERGNAUD 1991 apud OLIVEIRA; SANTOS, 2000, p. 7).

O ensino do conceito de proporcionalidade deve ser trabalho de maneira diferente e não apenas com “mecanizações”, uma vez que o mesmo é um conceito unificador dentro da Matemática, perpassando por diversas outras áreas de ensino. Segundo Allevato e Costa (2012, p.114)

> O conceito de proporcionalidade está presente no dia a dia de qualquer pessoa, nas mais diversas situações, envolvendo desde interpretar estatísticas e gráficos até fazer análises de plantas de imóveis ou mapas, ampliar ou reduzir fotos, entre outras. Ele também é essencial ao aprendizado de diversas disciplinas dos ensinos Fundamental, Médio e Superior.

O estudo da proporcionalidade apresenta um amplo conhecimento dentro da disciplina Matemática, pois essa já vem sendo trabalhada desde os anos iniciais do ensino básico. Vale ressaltar que o conceito de proporcionalidade se expandiu para as outras áreas de conhecimentos.

Na física, pode-se trabalhar a proporcionalidade em velocidades médias, na geografia em escalas e na química é utilizado nas conversões.

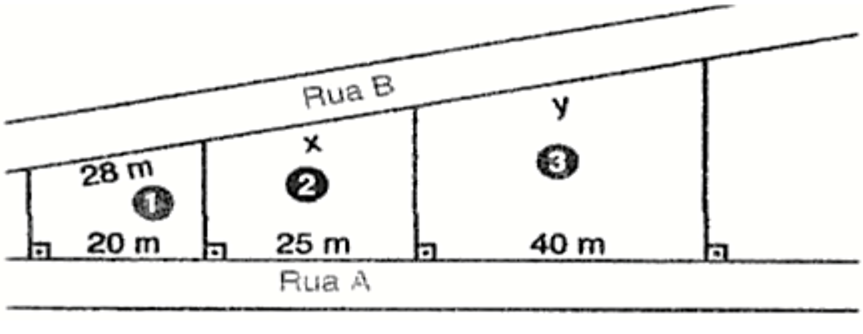
Uma área que eu não tinha o conhecimento que utilizava a proporcionalidade foi à música, na qual são trabalhadas na composição de intervalos musicais. Conforme Abdounur "esta operação, que possui grandes afinidades musicais, exigia em geral que dada uma sequência de razões a serem compostas, o segundo termo de uma razão deveria ser igual ao primeiro termo da razão seguinte" (2012, p. 392).

Na geometria, pode-se observar que a maioria dos problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade são resolvidos pela regra de três. Um exemplo bastante interessante é o Teorema de Tales, no qual se tem a proporcionalidade "estampada", mas na maioria das vezes não é notada e simplesmente resolvida com a regra de três.

Uma pesquisa realizada pelos professores e pesquisadores Costa e Allevato (2012) com professores em formação inicial, mostra este problema com o Teorema de Tales, como se pode observar abaixo.

Um problema envolvendo o Teorema de Tales foi aplicado para professores em formação inicial, no qual estes deveriam resolver da forma que eles entendessem melhor. No problema foram dadas quatro retas paralelas e duas transversais e os participantes da pesquisa deveriam encontrar o valor de x e y.

Figura 1: Pesquisa com formação de professores envolvendo o Teorema de Tales



Fonte: Allevato e Costa (2012)

A maioria dos participantes utilizou a regra de três para resolver este problema e apenas dois deles citaram que envolvia a proporcionalidade, mas nem um deles comunicou que aquele problema envolvia o Teorema de Tales. Afirmam Allevato e Costa

> Embora alguns participantes tivessem conseguido perceber a proporcionalidade existente no problema, não relacionaram esse fato ao chamado Teorema de Tales, ou seja, eles conhecem o resultado, mas não o conhecem com o nome de Teorema de Tales. (2012, p. 117)

A maneira com que os futuros professores resolveram o problema tem tudo a ver com os anos de ensino básico. Essa "mecanização" de resoluções de problemas utilizando a regra de três é bastante frequente, pois ficou marcado durante o ensino básico desses participantes.

Sendo assim, da mesma forma que esses participantes resolveram o problema, eu também faria o mesmo, uma vez que, a regra de três (simples) foi frequente durante todo o meu ensino básico e tudo que envolvia a proporcionalidade era resolvido dessa forma. Mas ao estudar e entender os artigos sobre a proporcionalidade esta ideia de resolver tudo por regra de três foi modificando.

2.2 – A Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade

Para a execução desta pesquisa fundamentou-se no modelo teórico de uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade, de Menduni-Bortoloti (2016). Uma das fontes trabalhadas por ela foi à análise do conceito de proporcionalidade nos livros didáticos da educação básica, sendo essa a escolhida para realizar as análises, a fim de obter resultados para este trabalho.

Diferentemente do modelo de Menduni-Bortoloti (2016), esta pesquisa será dividida em duas ênfases, sendo essas trabalhadas durante toda a pesquisa e uma estará interligada com a outra.

Primeira ênfase: realização, *d*e acordo com Menduni-Bortoloti é a ação do participante, ou melhor, é a forma do participante realizar o conceito (2016, p 117).

Segunda ênfase: *cenários,* que são formados pelas realizações. Os cenários se mostram de três formas: Proporcionalidade como razão, proporcionalidade como igualdade entre razões e proporcionalidade como taxa de variação de função. A distribuição das formas se deu conforme as realizações ocorreram e assim foram apresentadas por Menduni-Bortoloti (2016).

2.2.1 Proporcionalidade como razão

Neste primeiro cenário, considera-se a razão como “uma expressão numérica que diz o quanto há de uma certa quantidade em relação a uma outra quantidade” (BOTTA, 1997, apud MENDUNI-BORTOLOTI, 2016, p.121). Normalmente, quando se utiliza a razão costuma-se trabalhar com grandezas de mesma natureza ou não, mas, na citação acima, a palavra quantidade tem o significado de mesma coisa.

Denota-se razão da seguinte forma: a/b = a:b. Suponha que em um determinado curso de uma universidade a quantidade de vagas é $\frac{1}{3}$, (1 está para 3), ou seja, em cada três pessoas há apenas um vaga. Denomina-se o valor que está no numerador como antecedente e o valor no denominador como consequente (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 97).

Conforme o modelo de Menduni-Bortoloti (2016), as realizações para o conceito de proporcionalidade como razão foram comunicadas por meio das escalas, taxas, probabilidades, razões trigonométricas e porcentagens.

2.2.2 Proporcionalidade como igualdade entre razões

No segundo cenário, denota-se a proporcionalidade como igualdade entre razões da seguinte forma: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(a\ está\ para\ b\ assim\ como\ \ c\ está\ para\ \ d)$. Conforme Menduni-Bortoloti “A relação entre razões nada mais é que uma relação de igualdade” (2016, p.127).

As realizações para o conceito de proporcionalidade como igualdade entre razões foram comunicadas como sendo porcentagens, divisão proporcional de segmentos e regra de três.

A porcentagem é bastante comunicada durante o dia a dia, costuma aparecer muito em quantidade de votos que o candidato teve, quantidade de alunos que foram reprovados em uma determinada disciplina, índice de violência no Brasil durante certo mês. A porcentagem pode ser apresentada em diferentes formas: A percentual, a fracionária e a decimal.

Na divisão proporcional de segmentos serão abordadas quantas vezes um devido segmento “cabe” em outro (MENDUNI-BORTOLOTI, 2016, p. 103). Assim, as figuras geométricas serão de extrema importância.

E, por último, a regra de três, que “para obtê-la é necessário ter apenas três valores e o quarto será encontrado” (MENDUNI-BORTOLOTI, 2016, p. 127). Será um cenário bem discutido durante toda a pesquisa.

2.2.3 Proporcionalidade como taxa de variação de uma função

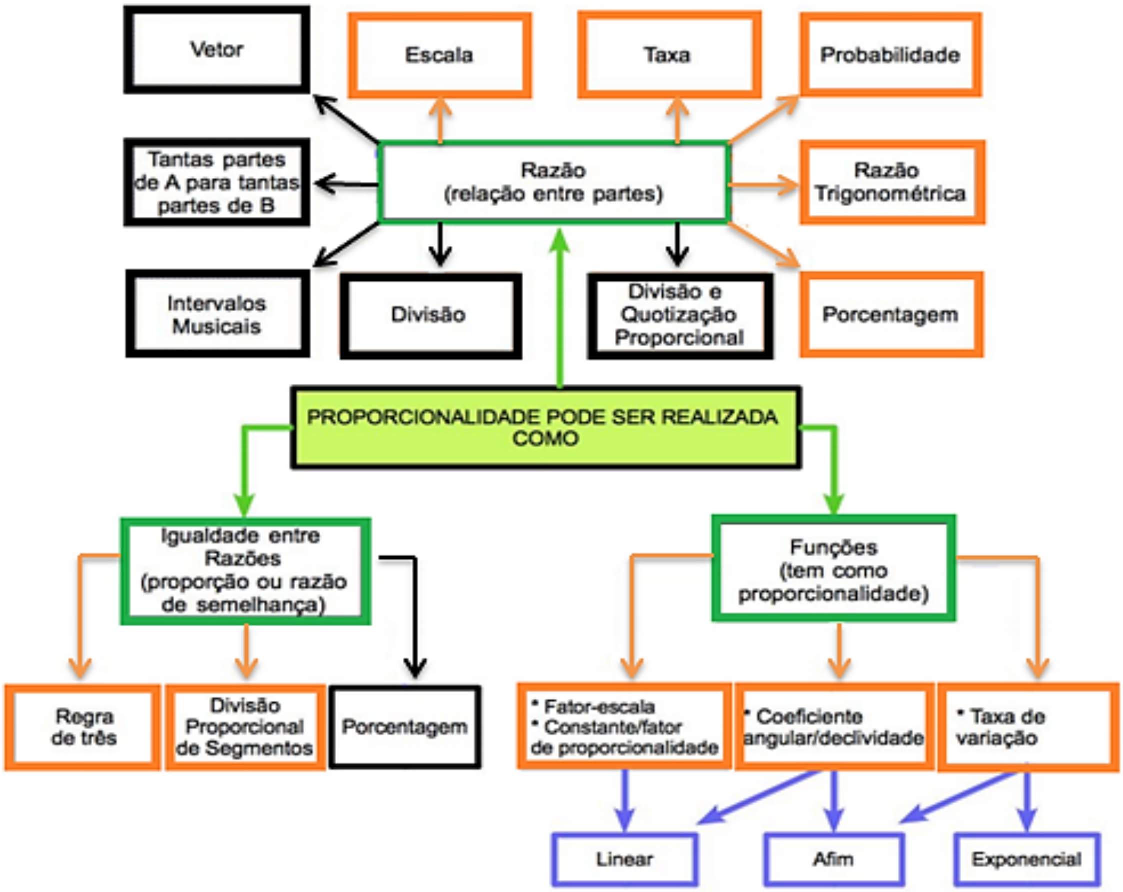
Diferentemente dos outros cenários, neste faz-se necessário encontrar um fator de proporcionalidade, fator este que é essencial nas funções (MENDUNI-BORTOLOTI 2016, p. 130). Funções recorrentes que tiveram ligações diretas com a proporcionalidade foram às funções afim, linear e exponencial.

Para associar a função com a proporcionalidade precisa-se entender um pouco de cada uma das leis de formação, a fim de buscar as variações dos valores de x e y que serão proporcionais. Estes valores podem ser diretamente ou inversamente proporcionais.

As variações de funções que são relacionadas com a proporcionalidade podem ser encontradas em gráficos, tabelas, lei de formação de uma função e na Matemática Financeira: Juros simples e compostos, crescimento de populações, figuras geométricas.

A figura 2 mostra o modelo de uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade de Menduni-Bortoloti (2016). Como citado anteriormente, optamos por utilizar apenas um dessas fontes, neste caso, o livro didático. Os retângulos que estão pintados da cor laranja representam os conceitos que foram utilizados nos livros didáticos, os retângulos que estão pintados de preto representam o que foram utilizados nas outras fontes de pesquisa.

Figura 2: Modelo de uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade



Fonte: Menduni-Bortoloti (2016, p.136)

3 - METODOLOGIA

Esta pesquisa tem um caráter qualitativo e é do tipo documental. Existem vários tipos de pesquisas cujo método é qualitativo. Neste caso, trabalhou-se com a pesquisa tipo documental, na qual o documento é o livro didático.

No que concerne à pesquisa qualitativa, Kripka, Scheller e Bonotto abordam:

> Os estudos qualitativos se caracterizam como aqueles que buscam compreender um fenômeno em seu ambiente natural, onde esses ocorrem e do qual faz parte [...] As informações ou dados coletados podem ser obtidos e analisados de várias maneiras dependendo do objetivo que se deseja atingir. (2015, p. 57)

Com referência a pesquisa do tipo documental, afirmam Kripka, Scheller e Bonotto (2015, p.59) "São considerados documentos quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação". Por isso, considera-se o livro didático como documento.

Os livros que serviram de base para esta pesquisa documental foram os livros do ensino básico, sendo esses do ensino fundamental II e do ensino médio.

A princípio, optou-se por escolher livros que seriam utilizados no ano de 2020, contudo os livros do ensino médio seriam divulgados pelo Sistema do Material Didático (SIMAD) no final do primeiro semestre de 2020, então priorizou-se por escolher livros que estavam sendo trabalhados no período de 2019, nas escolas.

O método para escolha da coleção do livro didático foi por quantidade, ou seja, as coleções mais utilizadas pelos colégios públicos de Vitória da Conquista.

Como instrumento de coleta, utilizou-se o SIMAD, um site de distribuição de material didático, no qual são armazenados todos os dados referentes aos livros didáticos dos Colégios Federais, Estaduais, Municipais e Particulares de todo o Brasil. Nesse site, pôde-se escolher a localização de cada colégio em zona urbana e rural, o programa de ensino, que por sua vez, foi utilizado o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o ano referente ao programa de ensino.

Por meio desses dados, fez-se uma tabela no excel, na qual foram divididos os colégios que possuíam o ensino fundamental II, dos colégios que atendiam o ensino médio, assim, no final dessa coleta, chegou-se ao resultado das coleções mais utilizadas pelos colégios de Vitória da Conquista.

- No Ensino Fundamental II, foram 36 escolas pesquisadas, 9 dessas utilizavam à coleção Matemática Compreensão e Prática dos autores Ênio Silveira e Cláudio Marques.
- No Ensino Médio, foram 19 escolas pesquisadas, 6 das mesmas utilizavam à coleção Matemática Contexto & Aplicações de Luiz Roberto Dante.

Os quadros 1 e 2 abaixo mostram o total de coleções adquiridas pelas escolas de Vitória da Conquista.

Quadro 1: Coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental II utilizado pelos colégios de Vitória da Conquista

Coleção	Ensino escolar	Quantidade
0029P17022006IL-MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA	Fundamental 2	9
0008P17022006IL-PRATICANDO MATEMÁTICA	Fundamental 2	8
0047P17022006IL-MATEMÁTICA - BIANCHINI	Fundamental 2	6
0097P17022006IL-VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	Fundamental 2	5
0033P17022006IL-PROJETO TELÁRIS MATEMÁTICA	Fundamental 2	4
0046P17022006IL-MATEMÁTICA: IDEIAS E DESAFIOS	Fundamental 2	2
MATEMÁTICA NOS DIAS DE HOJE NA MEDIDA CERTA	Fundamental 2	2
Total	Fundamental 2	36

Fonte: Autoria Própria

Quadro 2: Coleções de livros didáticos do Ensino Médio utilizado pelos colégios de Vitória da Conquista

Coleção	Ensino escolar	Quantidade
0008P18023101IL-MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES	Médio	6
0082P18023101IL-MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES	Médio	5
0195P18023101IL-CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	Médio	3
0070P18023101IL-QUADRANTE MATEMÁTICA	Médio	2
0155P18023101IL-CONTATO MATEMÁTICA	Médio	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]
0180P18023101IL-MATEMÁTICA PAIVA	Médio	1
Total	Médio	19

Fonte: Autoria Própria

A pesquisa realizada nos livros didáticos, Matemática Compreensão e Prática (Ensino Fundamental II) e Matemática Contexto & Aplicações (Ensino Médio) buscou identificar as comunicações que esses trazem a respeito do conceito de proporcionalidade e comparar com o modelo teórico de Menduni-Bortoloti (2016). Foram analisados não somente os capítulos que apresentava conteúdos relacionados com a proporcionalidade, mas, todos os capítulos dos livros. Nas duas coleções teve-se acesso ao livro do professor.

Godoy (1995) afirma que “A análise de documento prever três fases fundamentais: A pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.”

A pré-análise é aquele primeiro contato com o material, sendo essa uma das mais importantes fases, pois é o momento no qual são feitas as escolhas, ou seja, a busca pelos objetivos e hipóteses daquilo que se deseja trabalhar.

A segunda fase é o momento de explorar o material, conforme Godoy (1995, p. 24) "[...] caberá agora ao pesquisador ler os documentos selecionados, adotando, nesta fase, procedimentos de codificação, classificação e categorização." É nesta etapa que se deve dividir o documento em partes, isto é, classificar o material de forma que seja conveniente na organização do trabalho.

E, por último, mas não menos importante, o tratamento do resultado, ou melhor, a conclusão do que foi pesquisado. Na fase anterior, elencou-se o que seria trabalhado, nesta fase, será retomada a divisão que foi realizada na etapa anterior "e encontraremos significados válidos, condessando os resultados em busca de padrões, tendência ou relações implícitas" (GODOY, 1995, p. 24).

A pré-análise foi um momento de organização do material. Nessa etapa, foram feitas leituras "flutuantes" dos materiais, ou seja, um primeiro contato com os documentos. Depois foram selecionadas as coleções de livros que seriam analisados e por fim, os objetivos da pesquisa e os procedimentos a ser seguidos.

A segunda fase é a retomada da fase anterior. Foram realizadas as leituras com mais profundidade dos livros didáticos. Nesta etapa foram divididas em dois quadros as coleções de livros didáticos, ensino fundamental II e médio. Logo, deveria ser escolhida apenas uma das coleções de cada quadro. Em relação à leitura dos livros didáticos, à medida que fosse encontrando algo relacionado com o tema da pesquisa, eram classificados em três cenários: Proporcionalidade como razão, como igualdade entre razões e taxa de variação de uma função. Caso identificássemos outro tipo de cenário, acrescentaríamos ao modelo.

A última fase ocorreu o fechamento da pesquisa, ou seja, foram apresentados os cenários que apareceram durante a pesquisa, quais foram os livros selecionados mais utilizados em relação aos assuntos de proporcionalidade e por fim uma conclusão em relação a cada um dos cenários.

4- ANÁLISES E DISCUSSÕES

Nesta etapa, foram feitas as análises e discussões que ocorreram em relação às duas coleções do livro didático (Ensino Fundamental e Médio), nas quais foram realizadas as pesquisas entre os três cenários discutidos no capítulo anterior: proporcionalidade como razão, proporcionalidade como igualdade entre razões e proporcionalidade como taxa de variação de uma função.

No decorrer das análises e discussões, algumas citações em relação aos livros didáticos, aparecerão com algumas letras à frente. Sempre que aparecer a letra (a) está referindo ao livro do 6º ano do ensino fundamental ou ao livro do 1º ano do ensino médio, o que vai definir se o livro é do ensino fundamental ou médio serão os autores. Os outros livros da coleção seguiram o mesmo método, lembrando que no ensino fundamental são 4 livros e no médio apenas 3, assim, quando for citado a letra (d), está se referindo ao livro do 9º ano do ensino fundamental II.

4.1 – Cenários para a realização do conceito de proporcionalidade

Em cada um dos cenários, será apresentado como os livros didáticos estão comunicando o conceito de proporcionalidade, por meio de definições, exercícios e exemplos. Também se discutirá as realizações que foram encontradas nas duas coleções.

4.1.1 – Proporcionalidade como razão

Nas coleções analisadas, mostrou-se que “A razão entre dois números, “a e b com $b \neq 0$, nessa ordem, é dada por $\frac{a}{b}$ ” (SILVEIRA, 2015b, p.149). Não foi encontrado algo mais detalhado em relação a definição de razão nas coleções, como é definido por Allevato e Onuchic (2008, p. 96-97) “razão é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas, denotadas por a/b = a:b (a está para b), em que a é denominado antecedente e b é denominado consequente” (apud MENDUNI-BORTOLOTI, 2016, p. 45).

No capítulo de razão entre grandezas de mesma natureza, foi definido que “Algumas razões são utilizadas para comparar grandezas de mesma natureza que devem estar expressas em uma mesma unidade” (SILVEIRA, 2015b, p.152). Em relação à razão entre grandezas de naturezas diferentes, são aquelas em que são expressas em uma unidade de medida diferente e de acordo com Silveira (2015b, p.156) “São razões que recebem nomes especiais”.

“Observe a orientação de uso no rótulo dessa garrafa de suco concentrado 1 porção de suco para 5 porções iguais de água"

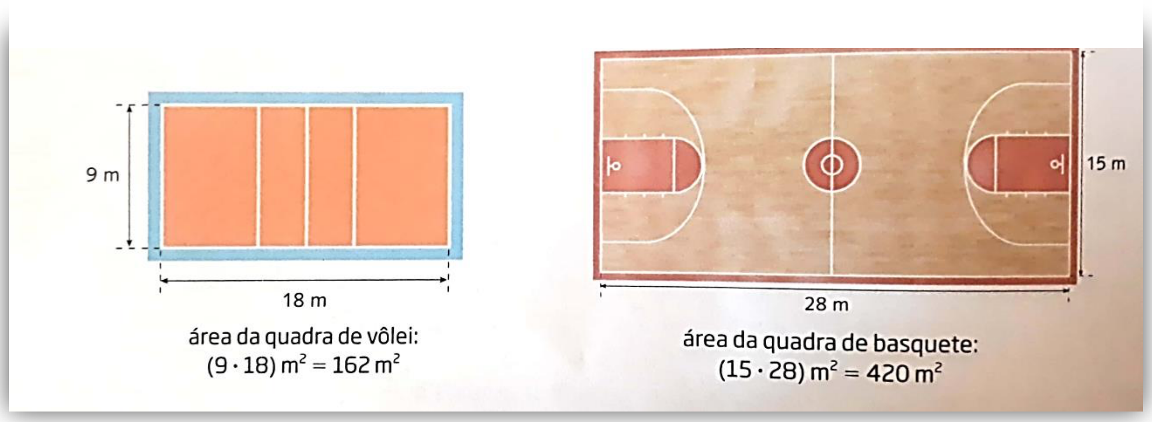
Figura 3: Concentrado de suco

Fonte: Silveira (2015b, p.149)

A comparação realizada neste exemplo foi entre a quantidade de água e de suco que foi utilizado para a produção de um suco de uva. Como mostra no exemplo acima, “Para cada litro de suco concentrado devem ser colocados 5 litros (l) de água na mistura” (SILVEIRA, 2015b, p.149). A partir deste mesmo exemplo, pode-se trabalhar com quantidades maiores desse mesmo suco.

Algumas razões têm seus próprios nomes específicos, dessa maneira, foi discutido nos próximos parágrafos algumas definições, exemplos e problemas.

Figura 4: Razão entre grandezas de mesma natureza



Fonte: Silveira (2015b, p.152)

No problema da figura 4, deveria ser encontrada a razão entre as áreas das quadras de vôlei e de basquete. Neste caso, a grandeza envolvida foi à área, percebe-se que foi trabalhada numa mesma unidade de medida, sendo esta, metros quadrados (m^2). Para realização deste problema, primeiramente foi encontrado a área de cada figura separadamente, multiplicando as dimensões das quadras, como na figura 4. Em seguida, deveria encontrar a razão de cada uma das figuras em relação à área, neste caso, a razão encontrada foi $\frac{162}{420} = \frac{27}{70}$. Essa razão é lida da seguinte maneira (27 está para 70). Conclui-se que: 27 metros quadrados da quadra de vôlei equivalem a 70 metros quadrados da quadra de basquete.

Figura 5: Razão entre grandezas de natureza diferentes

Fonte: Silveira (2015b, p.156)

Diferentemente do exemplo que foi retratado na figura 4, este, recorre a razões com grandezas de naturezas diferentes. O exemplo trata-se de uma viagem realizada entre duas cidades do Estado de São Paulo, Campinas e a Capital São Paulo. A distância percorrida foi de 92 quilômetros (Km) e foram gastos oito litros (l) de combustível.

Na figura anterior, foi utilizada apenas uma grandeza, no caso, à área. Neste exemplo, foram trabalhadas duas grandezas, a distância percorrida, ou seja, o comprimento, e a quantidade de combustível que foi utilizada em litros. Para realização desse problema foi utilizada a razão $\frac{92\,Km}{8\,l} = 11{,}5\,Km/l$, significa dizer que a cada litro de combustível este carro percorreu 11,5 Km. Esta razão tem um nome especial e é conhecido como consumo médio.

Em vista de todos os exemplos e exercícios observados, nota-se que as grandezas (de mesma natureza ou não) estão sempre relacionadas com as medidas “Entendemos por grandezas tudo o que pode ser medido ou contado. O comprimento, a superfície, o espaço, a massa, capacidade, etc” (SILVEIRA, 2015b, p.199).

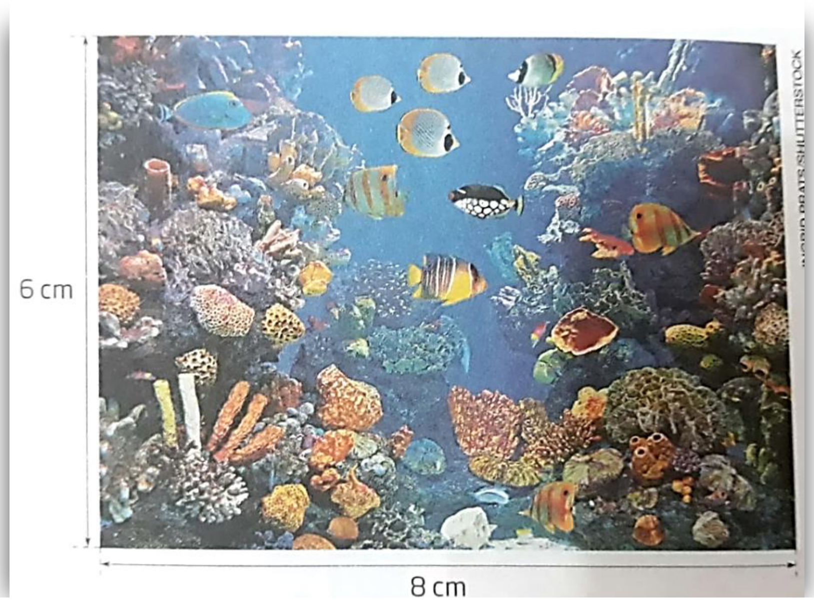
4.1.1.1 – Escalas

Segundo Silveira, “Escala é a razão entre a medida do comprimento que está na representação gráfica e a medida correspondente do comprimento real, expressos em uma mesma unidade de medida.” (2015b, p.153) e pode ser expressa da seguinte forma: $a{:}\,b$, ou seja, a representará a medida gráfica e o b medida real.

Esta razão é bastante utilizada, tanto na Geografia como na Matemática. Na geografia, é utilizada em mapas, trabalhando com as escalas cartográficas, podendo ser representada tanto numérica quanto gráfica. Entretanto, as escalas não são trabalhadas apenas em mapas, pode-se utilizá-las para representar um tamanho real de um objeto em um desenho, como na planta de uma casa, numa fotografia, e diversos outros exemplos.

Um dos exemplos apresentado no livro, como introdução do conteúdo de escala, está relacionado com a fotografia de um pôster, como mostra na figura 6. O objetivo deste problema é encontrar a razão da fotografia em relação ao pôster utilizando as medidas que foram apresentadas pelo livro.

Figura 6: Fotografia



Fonte: Silveira (2015b, p.154)

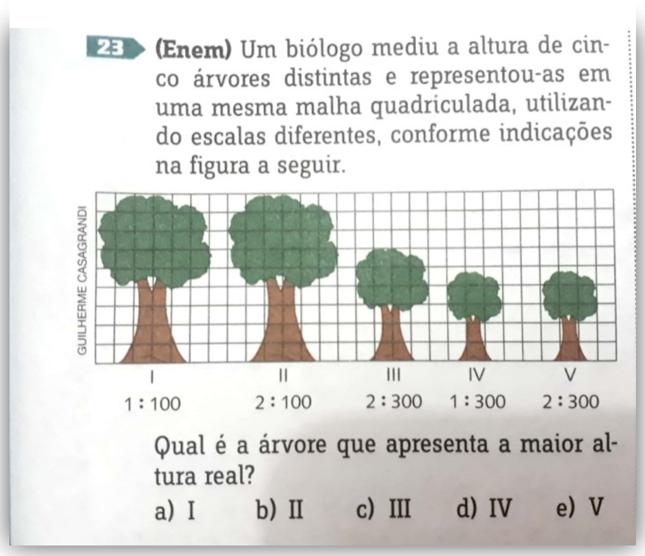
Foram apresentadas, pelo livro, as seguintes medidas: Comprimento do pôster 1,60 metros (m) e largura 1,20 m. Pela definição de escala, é necessário expressar os comprimentos em uma mesma unidade de medida, assim, terá 160 centímetros (cm) e 120 cm respectivamente.

Para encontrar a escala desejada, foi realizada uma razão entre as dimensões da fotografia e do comprimento real, $\frac{8}{160} = \frac{1}{20} = 1:20$. Utilizando o mesmo método para a largura $\frac{6}{120} = \frac{1}{20} = 1:20$.

Percebe-se que em ambas as razões tiveram $1:20$ (1 está para 20), isto é, cada centímetro da fotografia corresponde a 20 cm do desenho real (pôster).

Na figura 7, pode-se observar um exercício proposto pelo livro, relacionando a escala com desenhos numa malha quadriculada, sendo esta uma atividade bem elaborada, pois, não dependerá do tamanho real da figura, mas da maneira que foi proposto à escala para representar o desenho. Também é uma atividade para os alunos entenderem um pouco mais sobre ampliações e reduções de desenhos, com isso, a malha quadriculada ajudará na observação do desenho.

Figura 7: Malha quadriculada


23 **(Enem)** Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.

Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

a) I b) II c) III d) IV e) V

Fonte: Silveira (2015b, p.161)

Ao observar o desenho, facilmente responderia que a primeira ou a segunda árvore seria a maior, mas, é preciso olhar para as escalas que foram propostas por cada um dos desenhos. Na primeira árvore, observa-se que a escala é dada de 1:100, ou seja, um quadradinho da malha quadriculada corresponde a 100 centímetros do tamanho real.

Como a primeira árvore tem 9 quadradinhos verticalmente, então ficará da seguinte forma: 9 : 900, ou seja, essa árvore terá $900 \text{ cm } (9 \text{ m})$. Depois de realizar essa razão, percebe-se que a árvore II será bem menor que a árvore I, pois a cada dois quadradinhos da malha quadriculada correspondem a 100 cm do desenho real. Portanto, a árvore II tem $450 \text{ cm } (4{,}5 \text{ m})$.

Ao analisar todas as árvores da malha quadriculada, percebe-se que a árvore IV seria a maior, sendo a escala dada de 1:300. Assim, cada quadradinho corresponde a 300 centímetros do desenho real, como tem “quase” cinco quadradinhos, logo terá aproximadamente, $1500 \text{ cm } (15 \text{ m})$.

Pode ser discutido com os alunos que ao observar desenhos que tenham uma escala correspondente, esses não devem olhar para o tamanho do desenho, mas ficar atentos à escala que foi colocada para cada uma. Na figura 7, as árvores I e II são bem maiores que as outras, mas, ao analisarem as escalas que foram propostas, percebe-se que a menor árvore em tamanho visual, será a maior árvore no tamanho real, respondendo ao que foi solicitado pela questão.

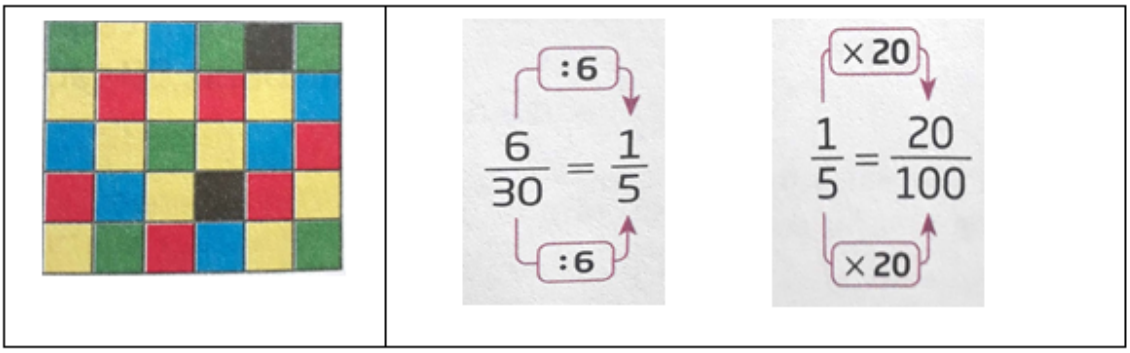
4.1.1.2 – Porcentagem

Segundo Silveira (2015a, p.185) “A porcentagem está relacionada com a representação de partes de um total de 100 partes. Daí a leitura do símbolo **%** ser ‘por cento’”. É uma razão bastante utilizada, pois está relacionada com outras razões. Afirma Silveira (2015b, p. 149) “Podemos expressar a razão na forma de fração, de porcentagem, ou de número decimal”.

A porcentagem, em alguns casos, é chamada de percentagem. No livro do 6º ano, explica que a diferença surgiu de como se originou, sendo porcentagem de “por cento” e percentagem do latim “per centum”, entretanto as duas formas estão corretas.

Ao analisar a figura 8, percebe-se que no quadrado existem várias cores pintadas de quantidades diferentes. Neste exemplo do livro, pede-se que descubra qual foi à porcentagem de quadradinhos que foi pintada de azul no painel. Este é um exemplo básico e introdutório para começar a trabalhar com os alunos o conteúdo de porcentagem, pois no mesmo problema pode trabalhar com a porcentagem das outras cores, assim, determinando a soma de todas as porcentagens.

Figura 8: Painel de cores



Ao observar o painel, verificou-se que 6 quadradinhos foram pintados da cor azul, de um total de trinta quadradinhos, identificando a razão como $\frac{6}{30}$.

Contudo, o objetivo do problema era determinar a porcentagem de quadradinhos azuis no painel. Para isso, foi encontrado tanto no antecedente quanto no consequente, um número que seja divisor de 100, assim, o número encontrado foi o 6, como mostrar na figura 8.

Pela definição apresentada, a porcentagem é representada por partes de um total de 100 partes, neste caso, precisaria encontrar um número que multiplicado pelo consequente da razão $\frac{1}{5}$, fosse 100. Portanto, o número encontrado foi 20, como mostra na figura 8. Neste caso o antecedente da razão nos indicará a porcentagem, por isso, 20% dos quadradinhos do painel foram pintados da cor azul.

Outra situação que ocorre no dia a dia envolvendo a porcentagem, é na compra de imóveis, celulares, materiais de construções, móveis etc. Ao realizar essas compras, normalmente o comprador efetua um valor de entrada, assim, dividindo o resto em parcelas. Esse valor que foi efetuado na entrada refere-se a uma porcentagem do valor total. Para exemplificar melhor, o autor apresenta um exemplo no livro do sexto ano.

"Mauro comprou um aparelho de som por R$ 450,00, dando 20% do valor total de entrada e dividindo o restante em três parcelas iguais. Qual é o valor da entrada em reais? Qual é o valor de cada parcela?" (SILVEIRA, 2015a, p.192). Como citado acima, foi dado um valor de entrada e o resto foi dividido em parcelas.

Para resolver este problema, precisará encontrar quanto vale 20% do valor total e depois realizar as divisões das parcelas, neste caso, três parcelas.

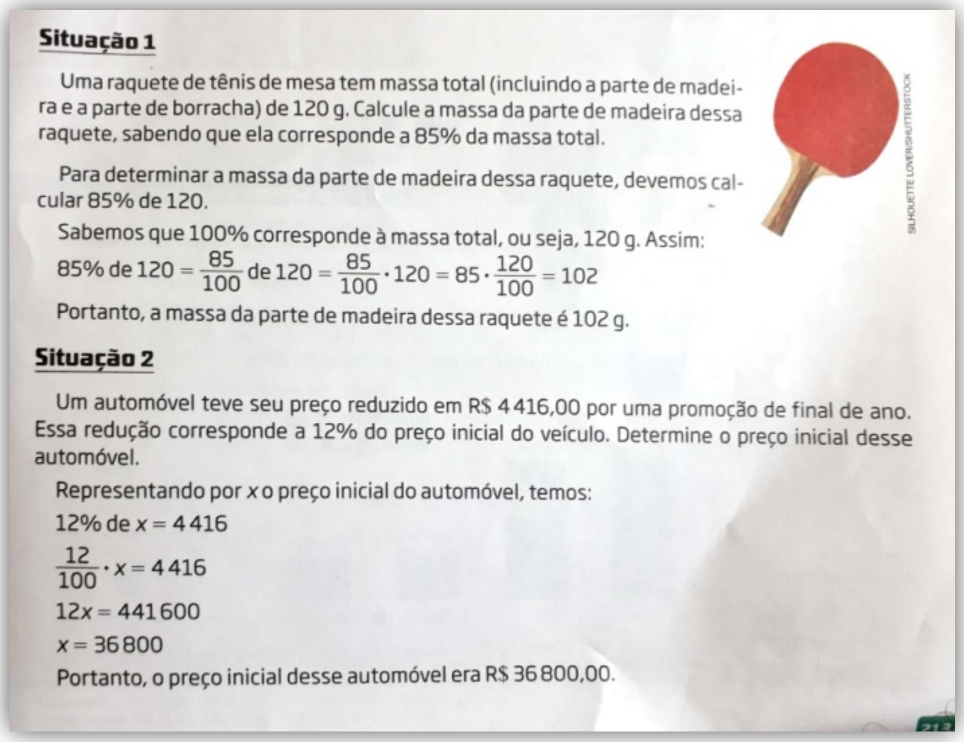
Pela definição apresentada anteriormente, porcentagens são representadas por partes de um total de cem partes. Como foi solicitado o valor total e a quantidade em porcentagem de entrada, então precisa estabelecer quanto é 20% de 450. Pela definição 20% = $\frac{20}{100}$, o autor resolve da seguinte forma:

$$\frac{20}{100} \cdot 450 = \frac{20 \ \cdot 450}{100} = 90$$

Portanto, o valor de entrada foi de R$ 90,00. Após ser encontrado esse valor, realizou-se uma subtração entre o valor total e o valor de entrada, restando R$ 360,00. Por fim, foram divididos em três parcelas o valor encontrado, assim, restando três parcelas de R$ 120,00 para efetuar a compra deste aparelho de som.

A figura 9 aparece duas situações que são resolvidas de uma maneira bem parecida, a única diferença ocorre no valor inicial, pois na situação 1 é solicitado o valor da massa da raquete e é preciso determinar a massa da parte de madeira da mesma. Já na situação 2, foi solicitado o valor reduzido e é preciso encontrar o valor inicial antes dessa redução de preço.

Figura 9: Situações envolvendo porcentagens



Situação 1

Uma raquete de tênis de mesa tem massa total (incluindo a parte de madeira e a parte de borracha) de 120 g. Calcule a massa da parte de madeira dessa raquete, sabendo que ela corresponde a 85% da massa total.

Para determinar a massa da parte de madeira dessa raquete, devemos calcular 85% de 120.

Sabemos que 100% corresponde à massa total, ou seja, 120 g. Assim:

$$85\% \text{ de } 120 = \frac{85}{100} \text{ de } 120 = \frac{85}{100} \cdot 120 = 85 \cdot \frac{120}{100} = 102$$

Portanto, a massa da parte de madeira dessa raquete é 102 g.

SILHOUETTE LOVER/SHUTTERSTOCK

Situação 2

Um automóvel teve seu preço reduzido em R$ 4 416,00 por uma promoção de final de ano. Essa redução corresponde a 12% do preço inicial do veículo. Determine o preço inicial desse automóvel.

Representando por x o preço inicial do automóvel, temos:

$12\% \text{ de } x = 4\,416$

$\frac{12}{100} \cdot x = 4\,416$

$12x = 441\,600$

$x = 36\,800$

Portanto, o preço inicial desse automóvel era R$ 36 800,00.

Fonte: Silveira (2015b, p.213)

Outra situação que envolve porcentagem encontrada no livro está relacionada com os descontos, algo que também pode ser encontrado no dia a dia. O que mais chama atenção são os descontos sucessivos, situação esta que foi encontrada tanto na coleção do ensino fundamental, como na do ensino médio.

No livro do sexto ano, no capítulo de estatística, não foi abordado o termo descontos sucessivos, sendo este, aplicado de maneira implícita em um dos desafios (questões que aparecem ao final de cada capítulo e são um pouco mais complicadas para resolver), sugerindo o seguinte problema.

Na compra de um produto, ganhei inicialmente 10% de desconto. Depois consegui mais 20 % de desconto sobre o novo preço. Em porcentagem, qual foi o desconto total que obtive sobre o preço inicial? (SILVEIRA, 2015a, p.203)

Normalmente, os alunos responderiam que o desconto seria de 30%, mas, vale ressaltar, que não se pode realizar essa soma de 10% mais 20%. Podem-se somar apenas as porcentagens que referir a um mesmo valor, neste caso, o desconto de 10% foi sobre o valor inicial e o de 20% foi sobre o valor atual, logo, não é possível fazer essa soma.

Para resolver problemas desse tipo, no qual não temos o valor inicial, costuma-se estipular o valor. Como se está trabalhando com porcentagem, então será estipulado o valor inicial de R$ 100,00, pois é um número bem conhecido dentre as porcentagens.

Primeiramente deve ser encontrado quanto que é 10% de R$ 100,00

$$\frac{10}{100} \cdot 100 = 10$$

Portanto, o desconto foi de R$ 10,00, isto é, o valor atual com o desconto de 10% fica R$ 90,00. Agora, será realizado o novo desconto de 20% sobre o novo preço.

$$\frac{20}{100} \cdot 90 = 18$$

Com o desconto de 20% sobre o valor atual de R$ 90,00, obteve-se o valor de R$ 18,00, restando R$ 72,00. Ao analisar o valor inicial menos o valor final teria R$ 28,00 de desconto sobre o valor inicial, mas a questão pede o valor em porcentagem do desconto. Neste momento, que utilizamos daquele valor inicial que foi suposto no começo, pois o valor sendo R$ 100,00 facilitaria na compreensão com a porcentagem final de desconto sobre o valor inicial. Assim, o desconto final foi de 28% sobre o valor inicial. Lembrando que poderia escolher qualquer valor inicial para resolver este problema. Utilizou-se o valor de 100 reais, pois facilitaria na compreensão da porcentagem final.

A coleção do ensino médio já aborda o conteúdo como descontos sucessivos e mostra outra maneira de resolver problemas que envolvem o mesmo. No capítulo de Matemática financeira, o autor discute sobre o fator de atualização (f) que é “uma razão entre dois valores de uma grandeza em tempos diferentes (passado, presente ou futuro)” (DANTE, 2016c, p.18).

$$f = \frac{Valor\ novo}{Valor\ velho}$$

Na divisão desses dois valores, existirão três resultados: Se o resultado for maior do que 1, terá um aumento em um determinado valor, se for menor que 1, terá um desconto e se for igual a 1 o fator é neutro, ou seja, não sofrerá nenhuma alteração.

Para resolver os problemas que envolvem descontos e aumentos, foi apresentado pelo autor duas interpretações para resolver os problemas.

Figura 10: Interpretações

- Se $f > 1$, $f = 1 + i$; portanto, a taxa é $i = f - 1$, em números decimais.
- Se $f < 1$, $f = 1 - i$; portanto, a taxa é $i = 1 - f$, em números decimais.

Fonte: Dante (2016c, p.18)

O Problema dizia o seguinte:

O que vocês preferem quando vão comprar algo: Receber um único desconto de 55% ou dois descontos sucessivos de 30%? Justifique do ponto de vista financeiro. (DANTE, 2016c, p. 20)

Como o valor de fator de atualização (f) é menor que 1, pois estão resolvendo problema de desconto, então será utilizada a segunda interpretação da figura 10. Como foram dois descontos sucessivos de 30%, então será realizada a mesma interpretação duas vezes, depois será multiplicado os resultados, assim encontrando o fator acumulado.

$$f_1 = 1 - i = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$$

$$f_2 = 1 - i = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$$

$$f_{acumulado} = f_1 \cdot f_2 = 0{,}70 \cdot 0{,}70 = 0{,}49$$

Essa taxa de 0,49 = 49% ainda não é o total do desconto sucessivo. Após realizar a multiplicação do $f_{acumulado}$, precisa-se verificar se é maior ou menor que 1.

Se $f_{acumulado} > 1$usa a fórmula 1 da (figura 10)

Se $f_{acumulado} < 1$usa a fórmula 2 da (figura 10)

Sendo o $f_{acumulado} = 0{,}49 < 1$, então os alunos usarão a interpretação 2.

Portanto, terá como resultado o $i = 1 - f \Rightarrow f = 1 - i \Rightarrow f = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$

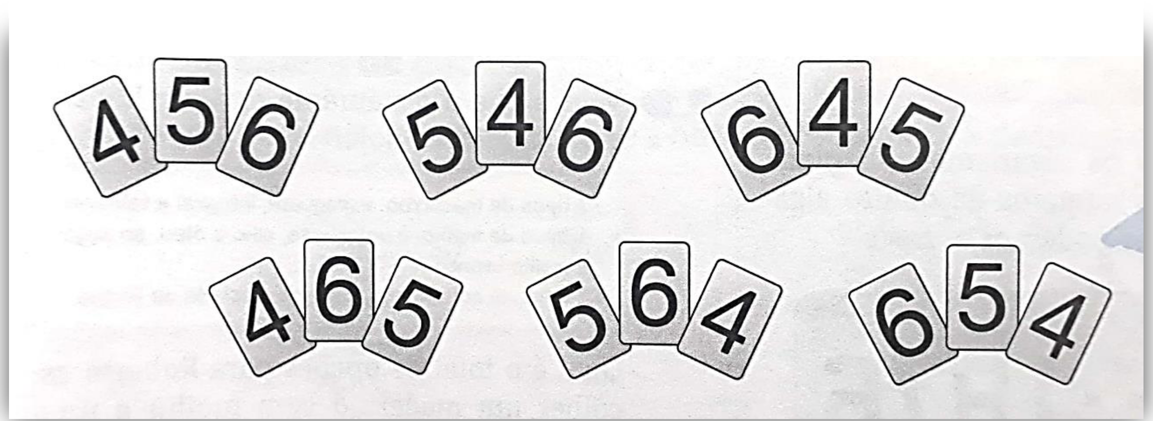
Dessa forma, ao fazer dois descontos sucessivos de 30%, terá 51% de desconto em cima do valor inicial, deste modo, a preferência seria de um único desconto de 55%.

4.1.1.3 – Probabilidade

No sexto ano, a probabilidade ainda não é apresentada com esse nome, mas ela aparece no capítulo 8 como possibilidades. É uma forma de trabalhar a probabilidade de uma maneira menos formal, com mais visualizações, ou seja, sem utilizar as fórmulas de probabilidade e utilizando apenas a manipulação e agrupamento dos eventos.

Nesse livro, são apresentadas duas situações para os leitores. Na primeira, Cláudio dispõe de 3 cartões com os algarismos 4, 5 e 6 e ele precisa formar números com 3 algarismos utilizando apenas esses 3 cartões. Na figura 11, mostram as possibilidades que foram realizadas utilizando apenas os 3 cartões.

Figura 11: Cartões



Percebe-se, que neste exemplo, foi escolhido um número por vez para ser o primeiro algarismo e os outros dois números trocariam de posições, formando assim dois números com 3 algarismos. Após realizar todas as combinações, o resultado final foi de seis possibilidades de formar números com 3 algarismos utilizando apenas 3 cartões com números diferentes.

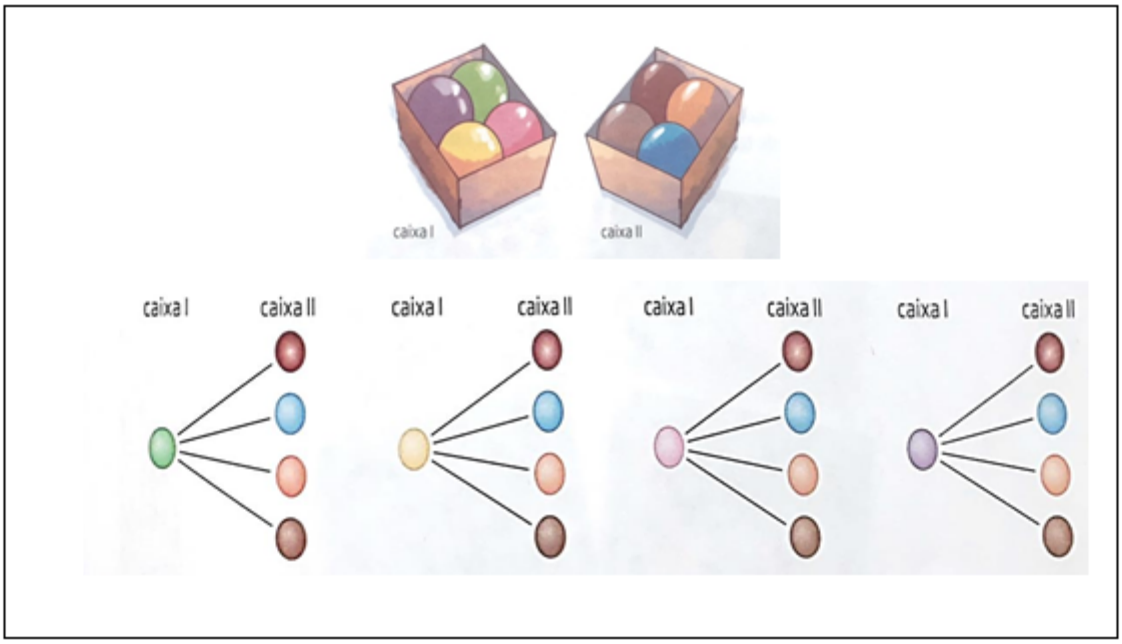
Ao trabalhar possibilidades com os alunos do 6º, será mostrado para os mesmos, de maneira intuitiva, como é feita a resolução de problemas envolvendo as possibilidades sem utilizar nem um tipo de fórmula.

Na segunda situação, foi apresentado um exemplo um pouco maior que o anterior, mas utilizou uma ideia parecida para resolver o problema.

Brena tem duas caixas, cada uma com quatro bolas, de cores distintas. Ela resolveu levar uma bola de cada caixa para o colégio. Quantos pares diferentes de bola podem ser formados por Brena? (SILVEIRA, 2015a, p.195)

A figura 12 mostra o que foi feito para separar os pares que Brena levaria para a escola. O que foi utilizado, neste exemplo, é conhecido como árvore de

Figura 12: Árvores de possibilidades



Fonte: Silveira (2015a, p.195)

podendo resolver problemas de possibilidades que envolvam mais bolinhas.

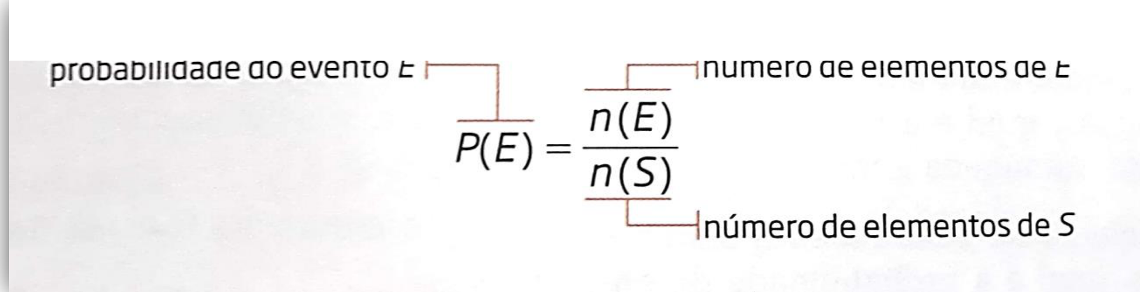
Nos livros seguintes, o autor traz a probabilidade com um pouco mais de formalidade, mostrando as definições, termos que são utilizados, como: a porcentagem de um determinado evento ocorrer, experimento aleatório, cálculo de probabilidade, evento, espaço amostral e espaço amostral equiprovável. Ao iniciar o capítulo de probabilidade, do livro do 7° ano, é perguntado ao leitor “O que é probabilidade” (SILVEIRA, 2015b, p.165). Para exemplificar melhor o que é probabilidade, o livro mostra dois exemplos que não utilizam a probabilidade para depois mostrar os exemplos que utilizam.

As duas discussões foram as seguintes: Ao lançar um objeto para cima, sabe-se que em algum momento ele cairá, o mesmo acontece se empurrar um objeto, em algum momento ele vai parar. Desde o começo deste experimento já sabia o resultado final, ou seja, já era previsto o resultado. Agora ao lançar uma moeda, acredita-se que vai ser cara ou coroa, mas não terá a certeza de qual será a face voltada para cima. O mesmo acontece com o lançamento de um dado, sabe-se que a face voltada para cima será o número 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas não existe certeza nenhuma da face que ficará para cima ao lançar um dado.

Tanto o exemplo do dado, quanto da moeda é conhecido como experimento aleatório e o livro define como: “É aquele que conhecemos os resultados possíveis, mas não podemos assegurar qual será o resultado final” (SILVEIRA, 2015b, p.165). A probabilidade determina a quantidade de vezes que um determinado experimento pode acontecer, representado na forma de uma fração ou de uma porcentagem.

O espaço amostral “são os resultados possíveis de um experimento” (SILVEIRA, 2015c, p.199). No livro é representado o espaço amostral pela letra (S) maiúscula. Já o evento, “É qualquer conjunto de resultados possíveis do espaço amostral de um experimento aleatório” (SILVEIRA, 2015c, p.199), representado pela letra (E) maiúscula. Em relação aos eventos equiprováveis, “São chamados de eventos equiprováveis, pois todos tem a mesma chance de ocorrer” (DANTE, 2016b, p. 234). A figura 13 mostra como se pode obter a probabilidade de um evento.

Figura 13: Probabilidade de um evento



Fonte: Silveira (2015c, p.199)

“A probabilidade de determinado resultado em um experimento aleatório é a razão entre o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades” (SILVEIRA, 2015b, p.166).

No cálculo de probabilidade, foi apresentado um exemplo de um aparelho de som que será sorteado entre 1000 alunos de uma escola. Qual seria a probabilidade desse som ser adquirido por alunos do terceiro ou sexto ano, sendo que nessa escola há 50 alunos no terceiro ano e 80 alunos no sexto ano. (SILVEIRA, 2015b, P. 166).

A probabilidade de um aluno ser do terceiro ano é $\frac{50}{1000}$ e do sexto ano é de $\frac{80}{1000}$. Em porcentagem teria 5% e 8%, respectivamente, de um aluno ser sorteado do sexto ou terceiro ano. Lembrando que o livro não traz a representação em porcentagem neste exemplo.

4.1.1.4 – Taxa

Segundo Silveira, “A razão entre a medida da massa de um corpo e o seu volume é denominado densidade” (2015b, p.157). A densidade é utilizada para calcular o total de pessoas que se encontram em um determinado território. Alguns exemplos são: Total de pessoas em uma festa, total de habitantes por quilômetro quadrados em uma cidade e outros.

Todos esses exemplos citados acima têm um nome específico, chamado de densidade demográfica, que tem como proposito avaliar em um determinado território a distribuição da população.

No Capítulo de razão, mais especificamente na parte de grandezas com naturezas diferentes, é mostrada essa relação de habitantes por quilômetro quadrado. O seguinte exemplo solicitava a quantidade da população estimada do Estado do Ceará e a área do estado. Tendo esses dados adquiridos, o autor mostrou como que calcularia a densidade demográfica do estado do Ceará.

Quantidade de habitantes: 8.842.791

Área do estado: 148.886 Km^2

Em seguida, foi realizada a razão para determinar a densidade demográfica do estado.

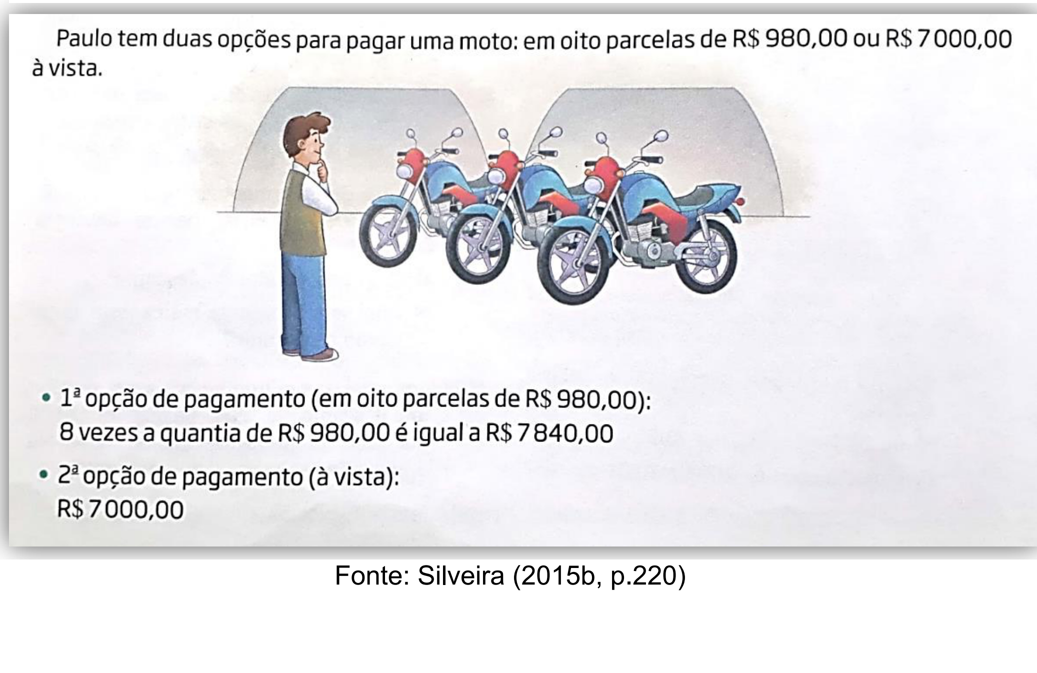
$$\frac{8.842.791\ hab}{148.886\ \mathrm{K}m^2} \approx 59 \text{ hab/ Km}^2$$

A taxa encontrada foi de 59 hab/Km^2, isto é, a cada quilômetro quadrado do estado do Ceará, existiam aproximadamente 59 habitantes.

Esses dados foram apresentados no livro do sétimo ano, sendo que o autor retirou as informações do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), no ano de 2014.

As taxas costumam aparecer bastante na Matemática financeira, como nos cálculos de juros simples e compostos. No livro do sétimo ano, da coleção de Silveira, os juros simples foram abordados de uma maneira mais superficial, ou seja, não foram apresentados os termos que são trabalhados ao resolver problemas que envolvam os juros simples. Na figura 14, é apresentado o problema.

Figura 14: Opções de pagamento



Fonte: Silveira (2015b, p.220)

Neste exemplo, o autor resolveu o problema de Paulo sem utilizar nem um tipo de fórmula, utilizando os mesmos métodos que foram apresentados nos capítulos anteriores.

Para iniciar a resolução do problema, foi realizada a subtração do valor que seria pago à vista e o valor parcelado, encontrando a diferença de R$ 840,00. Após encontrar este valor, o autor utilizou uma razão relacionando o valor da diferença e o valor que seria pago a vista.

$$\frac{840}{7000} = 0{,}12 = 12\%$$

Logo, Paulo pagará 12% a mais se for comprar a moto parcelada, mas o problema queria saber quanto seria a taxa de juros mensal, pois se sabe que, ao trabalhar com juros, sempre é solicitada uma taxa de juros mensal, anual, bimestral, trimestral etc.

Como a moto seria dividida em 8 vezes, então foi realizada uma divisão dos 12% pelo valor total de parcelas, assim, encontrando 1,5% de juros ao mês. Lembrando que o livro não sugeriu nem uma das duas opções, ou seja, ficava a critério do leitor escolher o que seria melhor para Paulo.

Uma das figuras do livro do nono ano, da coleção de Silveira, mostra que “Emprestar dinheiro é parecido com alugar uma casa: o juro é como se fosse o aluguel do dinheiro emprestado”, como mostra a figura 15.

Figura 15: Juros simples

Fonte: Silveira, 2015d, p.273

Diferente do livro que foi mostrado anteriormente, no livro do nono ano, já é apresentado os termos que são trabalhados com a Matemática financeira e as fórmulas que são utilizadas para resolver os problemas. Na figura 16, é mostrada a relação das fórmulas com os termos utilizados.

Figura 16: Fórmula de juros e montante

Assim, um capital ***C***, emprestado a uma taxa mensal ***i*** durante um intervalo de tempo ***t***, gera um total de juro simples ***j***, que pode ser assim expresso:

$$\boxed{j = C \cdot i \cdot t}$$

O total a ser pago ao final do empréstimo é denominado **montante** (***M***) e corresponde ao capital mais o total de juro. Ou seja:

$$\boxed{M = C + j}$$

Fonte: Silveira, 2015d, p.275

O problema seguinte, mostra como é realizado o cálculo utilizando as fórmulas acima. Percebe-se que utilizando as fórmulas da figura 16 o problema ficará mais fácil de ser resolvido, por isso que a coleção aborda esse conteúdo por partes, sendo que nos primeiros livros foram aplicados sem utilizar aqueles termos da Matemática Financeira.

A situação dizia o seguinte “Isaac pediu um empréstimo de R$3600,00 a um banco. Vai pagar daqui há 6 meses, com a taxa de juros simples de 2% ao mês. Quanto ele pagará de juro? Que quantia Isaac vai pagar ao final do empréstimo?”(SILVEIRA, 2015d, p.274).

Primeiramente, o livro organiza o que foi solicitado pelo problema, para depois começar a resolvê-lo.

Capital (c) = R$ 3600,00

Taxa (i) = 2% ao mês ou podemos expressar como 0,02 ao mês

Tempo (t) = 6 meses

Depois, é calculado o total de juros que Isaac pagará e, em seguida, o total a pagar (Montante). Dessa maneira, tem-se:

Total de juro = $c \cdot i \ \cdot t = \ 3600 \cdot 0{,}02 \ \cdot 6 = 432$

Total a pagar = $c + j = 3600 + 432 = 4032$

Portanto ao final do empréstimo Isaac pagará R$ 4.032,00

Como citado nos parágrafos anteriores, existem duas maneiras de aplicar juros, a simples e a composta. No livro do nono ano, de Silveira (2015d), é apresentado tanto juros simples, quanto composto.

Na situação, um investidor faz uma aplicação de R$ 80.000,00, com juro composto de 20% ao ano (a.a). Qual será o montante disponível após quatro anos? E qual foi o total de juros da aplicação?

O livro disponibilizou uma tabela (figura 17) com os valores organizados em cada ano e como ocorreu esse rendimento ao ano. Da mesma forma que foi feito o cálculo de juros simples, ocorreu para os juros compostos, mas em vez de utilizar o valor da aplicação inicial (Capital) para calcular os juros durante os quatro anos, no juro composto sempre são utilizados o valor do montante anterior para aplicar esses juros.

Figura 17: Juros compostos

	Aplicação inicial (R$)	Montante anterior (R$)	Juro a 20% a.a. (R$)	Montante (R$)
1º ano	80 000	—	80 000 · 0,20 · 1 = 16 000	80 000 + 16 000 = 96 000
2º ano	—	96 000	96 000 · 0,20 · 1 = 19 200	96 000 + 19 200 = 115 200
3º ano	—	115 200	115 200 · 0,20 · 1 = 23 040	115 200 + 23 040 = 138 240
4º ano	—	138 240	138 240 · 0,20 · 1 = 27 648	138 240 + 27 648 = 165 888

Para finalizar a situação, é preciso dizer o quanto foi o montante final e o total de juros que foi aplicado durante toda a aplicação. O montante final como podemos observar pela tabela, foi de R$ 165.888,00, já o total de juro da aplicação é calculado pela diferença do montante final e a aplicação inicial. Assim, o juro da aplicação corresponde a: R$ 165.888,00 – R$ 80.000 = R$ 85.888,00.

4.1.1.5 – Razões Trigonométricas

Neste tópico, será abordado um pouco da relação entre a geometria (triângulo retângulo) e a razão. Quando comparamos dois triângulos retângulos às medidas dos lados são proporcionais e as medidas dos ângulos são congruentes, assim, “escolhendo um ângulo agudo de um triângulo retângulo a razão entre seus lados terá o mesmo resultado.” Por isso que a razão trigonométrica é uma forma de comunicar a proporcionalidade.

O livro do nono ano, de Silveira (2015d), inicia o conteúdo de razões trigonométricas apresentando o seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. A figura 18 é definida a relação do triângulo retângulo com esses conceitos citados anteriormente.

Figura 18: Razões trigonométricas

$$\text{sen}\ a = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de medida } a}{\text{medida da hipotenusa}}$$

> Em todo triângulo retângulo, denominamos seno de um ângulo agudo a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\cos a = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo de medida } a}{\text{medida da hipotenusa}}$$

> Em todo triângulo retângulo, denominamos cosseno de um ângulo agudo a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

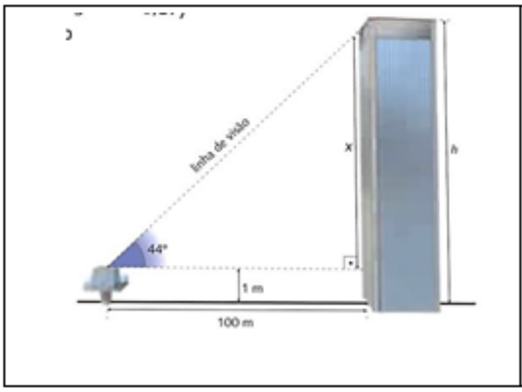
$$\text{tg}\ a = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de medida } a}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo de medida } a}$$

> Em todo triângulo retângulo, denominamos tangente de um ângulo agudo a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Fonte: Silveira (2015d, p. 186-187)

Para exemplificar melhor como é feita a resolução de um problema que envolve as razões trigonométricas, é proposto por Silveira (2015d, p.196), no tópico de resoluções de problemas, a seguinte situação:

Figura 19: Altura do prédio



De um posto de observação situado a 100m de um prédio, vê-se o ponto mais alto desse prédio sob um ângulo de 44°. Determine a medida da altura do prédio, sabendo que o posto está a 1m do solo.

Para a resolução deste problema, foi utilizado às razões que foram apresentadas anteriormente. Para resolução deste problema foi utilizada a razão trigonométrica da tangente de 44°, pois se sabe o valor do cateto adjacente ao ângulo e pretende-se encontrar o valor do cateto oposto. Lembrando que o livro disponibiliza o valor da tangente de 44°, assim como o valor do seno e cosseno, dessa forma, o aluno precisa encontrar qual seria a razão utilizada.

Utilizando as razões trigonométricas, tem-se:

$$tg\ 44° = \frac{x}{100}$$

$$x = 100 \cdot\ tg\ 44°$$

$$x = 100 \cdot\ 0{,}97$$

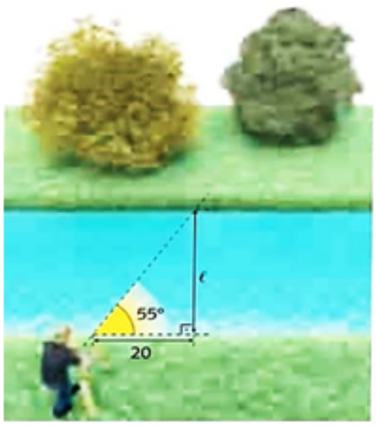
$$x = 97$$

Portanto, a altura x encontrada é de 97 metros, mas o exemplo pediu à altura do prédio, então, precisa ser adicionado ao valor da altura do posto de observação que é de 1 metro, portanto a altura do prédio é de 98 metros.

Existe casos que não é possível medir um determinado comprimento, então se utiliza a geometria para encontrar esses comprimentos. O livro cita, ainda, sobre um instrumento para medir ângulos, chamado de Teodolito, que é bastante utilizado nessas situações em que não se pode medir o comprimento.

Na figura 20, é apresentado e resolvido o problema. Lembrando que não há diferença na resolução dessa situação com a anterior, neste caso, foi utilizada a tangente de 55°. Por mais que seja parecida com a resolução do problema anterior, a proposta é bastante diferente, pois deve-se encontrar a medida de lugares que não pode utilizar uma trena para medir.

Figura 20: Largura do rio



(Utilize: sen 55° = 0,82; cos 55° = 0,57; tg 55° = 1,43)

$$\text{tg}\,55° = \frac{\ell}{20}$$

$$\ell = 20 \cdot \text{tg}\,55°$$

$$\ell = 20 \cdot 1{,}43 = 28{,}6$$

Logo, a largura do rio mede 28,6 m.

Fonte: Silveira (2015d, p. 197)

Para encontrar o valor que não pode ser medido é preciso ter o conhecimento de razões trigonométricas, para isso, é preciso medir com uma trena o lado que está na superfície, neste caso, foi encontrado o valor de 20 metros, depois definir o ângulo entre o lado da superfície medido e a hipotenusa ou pode-se utilizar o Teodolito para encontrar este ângulo. Neste caso, foi utilizada a tangente de 55º.

Como mostra na figura 20, a largura do rio é de 28,6 metros. Observa-se, que quanto maior for o ângulo, maior será o lado desconhecido.

4.1.2 – Proporcionalidade como igualdade entre razões

Para iniciar o capítulo de proporcionalidade, o livro do sétimo ano, introduz uma situação entre dois homens e os seus cachorros, o peso dos homens, bem como dos cachorros são apresentados na questão. Em seguida, o autor pergunta para os leitores qual a razão da massa entre homens e a razão da massa entre os cachorros. E, para finalizar, ainda pergunta para os leitores se as razões encontradas são iguais.

Vale ressaltar que o autor não resolveu essa situação, pois, nos capítulos anteriores, foram trabalhadas as razões, então, o aluno deveria encontrar as razões e compará-las. Para entender melhor o que o autor quis mostrar com essa situação, será resolvido o problema utilizando os dados que foram apresentados pelo autor.

Quadro 3: Peso dos homens e seus cachorros

Homens/Cachorros	Peso
Roberto	120 Kg
Pedro	48 Kg
Cachorro de Roberto	40 Kg
Cachorro de Pedro	16 Kg

Fonte: 2015b, p.182

Encontrando a razão dos homens e os seus cachorros

$$\frac{48\ Kg}{120Kg} = \frac{2}{5}$$

Razão do peso de Roberto e Pedro

$$\frac{16\ \mathrm{Kg}}{40\mathrm{Kg}} = \frac{2}{5}$$

Razão entre o peso do cachorro de Roberto e do cachorro de Pedro

Para finalizar a introdução do conteúdo de igualdade entre razões, é questionado pelo autor que ao realizar a troca de animais entre si, isto é, um ficasse com o animal do outro “a razão entre as massas dos jovens seria, agora, igual ao inverso da razão das massas dos cachorros trocados” (SILVEIRA, 2015b, p.182).

$$\frac{40\ \text{Kg}}{16\text{Kg}} = \frac{10\ \text{Kg}}{4\ \text{Kg}} = \frac{5}{2}$$

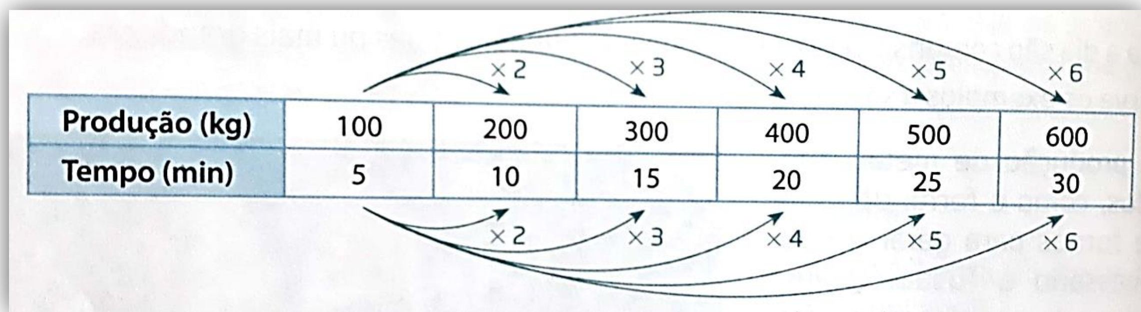
Cachorros trocados

Nota-se que a razão entre as massas dos jovens ficaram o inverso das massas dos cachorros trocados. Essa citação tem como objetivo mostrar para os alunos que existe igualdade entre razões, tanto direta, quanto inversa.

Na figura 21 e 22, é mostrada essa diferença entre grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

A figura 21 mostra-se a produção de ferro fundido em relação ao tempo. Esse exemplo é de grande relevância para entender a relação de grandezas diretamente proporcionais.

Figura 21: Grandeza diretamente proporcional



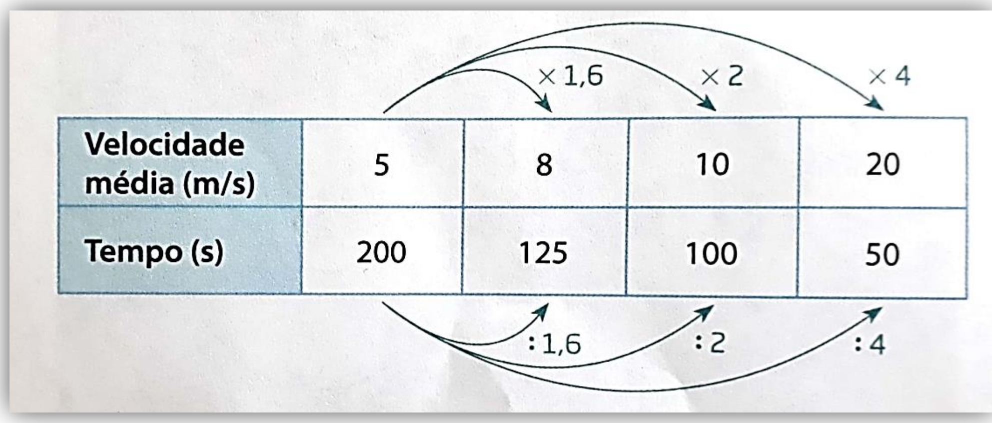
Produção (kg)	100	200	300	400	500	600
Tempo (min)	5	10	15	20	25	30

Fonte: Silveira (2015b, p.200)

O autor apresenta como definição “Duas grandezas são diretamente proporcionais quanto variam sempre na mesma razão. Ou seja, a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda é a mesma” (SILVEIRA, 2015, p.200). Percebe-se que quanto mais aumenta o valor da produção, maior será o tempo, essa situação é definida como grandezas diretamente proporcionais.

A figura 22 é abordada o oposto da figura anterior, ou seja, quanto mais aumenta a velocidade, menor será o tempo. Essa situação é definida como grandezas inversamente proporcionais.

Figura 22: Grandeza inversamente proporcional



Velocidade média (m/s)	5	8	10	20
Tempo (s)	200	125	100	50

Fonte: Silveira (2015b, p.200)

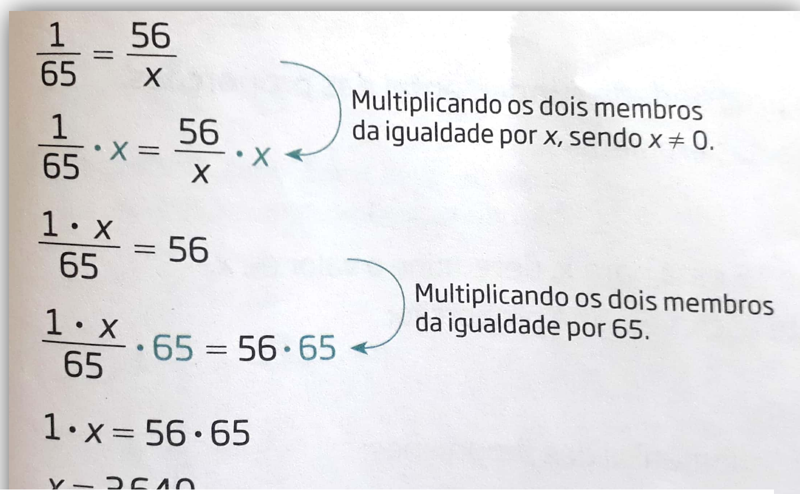
De acordo com Silveira "Duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma varia sempre na razão inversa da outra" (2015b, p.201).

Para exemplificar melhor, sobre a igualdade entre razões, o autor apresenta, na parte dois do mesmo capítulo, a propriedade fundamental das proporções. Esse exemplo que foi apresentado pelo autor para retratar a propriedade fundamental, tem como objetivo trabalhar a escala já apresentada nos capítulos anteriores.

No exemplo: "A Nau Santa Maria era uma das embarcações da esquadra comandada por Cristovão Colombo [...] Em um museu há uma miniatura dessa Nau na escala 1:65, com 56 cm de comprimento" (SILVEIRA, 2015b, p.185), o objetivo da questão é encontrar o comprimento real da embarcação.

Existem determinadas maneiras de responder problemas desse tipo, como a utilização da regra de três ou encontrando a constante de proporcionalidade e outras formas. Mas, como se trata de uma proporção, o autor apresentou uma resposta utilizando a regra de três simples e teve como resultado 3640 cm do comprimento real, ou melhor, 36 metros e 40 centímetros. A resolução da questão é observada na figura 23.

Figura 23: Multiplicação em cruz



Fonte: Silveira (2015b, p.185)

Segundo o autor “Em toda proporção, o produto dos extremos é igual o produto dos meios, ou seja, dados a, b, c e d não nulos, com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos a x d = b x c (SILVEIRA, 2015b, p.186)”. O autor resolveu este problema utilizando a regra de três, mas só utilizou-se pois os valores apresentados foram proporcionais

Uma das maneiras mais utilizadas para resolver os problemas que envolvem a proporcionalidade como igualdade entre razões é a regra de três simples e composta. Desta forma, o livro do sétimo ano apresenta para os alunos um problema inicial que pode ser resolvido utilizando a regra de três simples.

O enunciado diz que “Ana comprou 4 cadernos de um mesmo modelo por R$ 48,00. Quanto Ana gastaria para comprar 9 cadernos desse modelo?” (SILVEIRA, 2015b, p.202). O autor explica, para os leitores, que problemas desse tipo podem ser resolvidos utilizando à aritmética, neste caso, deve-se encontrar o valor da unidade e multiplicar pela quantidade de cadernos que deseja comprar.

Ao analisar o enunciado da questão, nota-se que existem duas grandezas. A figura 24 mostra como o autor resolveu o problema de Ana.

Figura 24: Regra de três simples

Quantidade de cadernos	Preço (em R$)
4	48
9	x

$$\frac{4}{9} = \frac{48}{x}$$

$$4 \cdot x = 9 \cdot 48$$

$$4x = 432$$

$$x = \frac{432}{4} = 108$$

Fonte: Silveira (2015b, p.200)

As grandezas:

- A quantidade de cadernos
- Preço dos cadernos

Como citado nos parágrafos anteriores, existe a regra de três simples, e a regra de três composta, a diferença está na quantidade de grandezas envolvidas. No problema anterior, estiveram envolvidas duas grandezas “quantidade de cadernos” e o “preço”. Para utilizar a regra de três composta, é preciso possuir ao menos três grandezas envolvidas e relacionadas proporcionalmente.

Para introduzir o conteúdo de regra de três composta, o autor apresentou dois exemplos. Sendo que o primeiro problema envolveu apenas grandezas diretamente proporcionais, já o segundo problema envolveu grandezas inversamente proporcionais. Assim, os problemas serão resolvidos de maneiras diferentes.

Na figura 25, é apresentado o seguinte problema: “Em uma oficina de artesanato, 8 artesões montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos desses carrinhos serão montados por 4 desses artesões em 16 dias?” (SILVEIRA, 2015b, p.204). Diferentemente do problema anterior, existem três grandezas envolvidas “número de artesãos”, “números de carrinhos” e “número de dias”.

Figura 25: Regra de três composta diretamente proporcional

Número de artesãos	Número de carrinhos	Número de dias
8	20	5
4	x	16

$$\frac{20}{x} = \frac{8}{4} \cdot \frac{5}{16}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{40}{64}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{40}{64}$$

$$40 \cdot x = 20 \cdot 64$$

$$40x = 1280 \qquad x = \frac{1280}{40} \qquad x = 32$$

Fonte: Silveira (2015b, p.204 e 205)

Para resolver problemas que evolvam mais de duas grandezas, é preciso escolher uma das três grandezas e compará-las com as outras duas. O autor sugeriu que a melhor escolha seria a grandeza na qual se encontra o x, neste exemplo, tem-se o número de carrinhos.

Realizou-se uma comparação entre as grandezas e explicou-se que tanto o número de artesãos quanto número de dias, em comparação com o número de carrinhos, é diretamente proporcional. Isso ocorre porque, quanto mais aumenta o número de artesãos maior será a quantidade de carrinhos e quanto mais dias se passarem, maior será a quantidade de carrinhos.

Ao introduzir o conteúdo de regra de três composta, foi apresentada pelo autor a seguinte questão: “Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160m^3 de terra. Em 15 horas, quanto desses caminhões serão necessários para descarregar 125m^3 de terra?”(SILVEIRA, 2015b, p.205).

Da mesma forma que foi resolvida o problema anterior, ocorreu com esse problema, no entanto, a única diferença está em uma das grandezas que é inversamente proporcional às outras. Neste caso, o número de caminhões é inversamente proporcional ao tempo, ou seja, quanto mais caminhões carregando terra, menor será o tempo. Como o tempo é inversamente proporcional, então, deve ser invertida a razão dessas duas grandezas como mostra na figura 26.

Figura 26: Regra de três composta inversamente proporcional

Tempo (h)	Número de caminhões	Volume (m^3)
8	20	160
5	x	125

$$\frac{20}{x} = \frac{5}{8} \cdot \frac{160}{125}$$

razão inversa

$$\frac{20}{x} = \frac{800}{1000}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{800}{1000}$$

$$800 \cdot x = 20 \cdot 1000$$

$$800x = 20000$$

$$x = \frac{20000}{800}$$

$$x = 25$$

Fonte: Silveira (2015b, p.205)

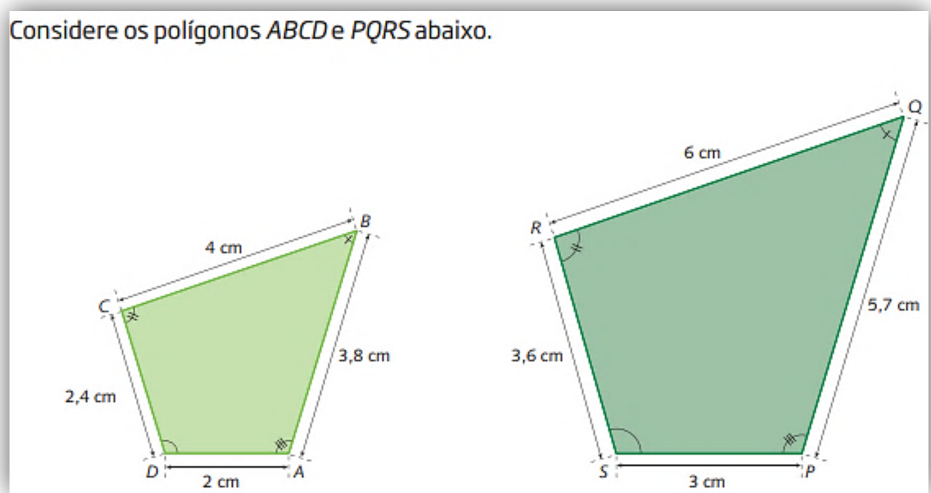
4.1.2.1 – Semelhança e segmentos proporcionais

Para introduzir o conteúdo de semelhança e segmentos proporcionais, o livro do nono ano de Silveira, apresenta no capítulo 6, algumas figuras semelhantes, segundo o autor.

> A palavra semelhante vem do latim similare, que significa “parecer-se com”, “ter a mesma aparência que”. Em duas figuras semelhantes, as medidas dos comprimentos correspondentes são proporcionais e todos os ângulos correspondentes têm medidas iguais. (SILVEIRA, 2015d, p. 134)

Essa ideia de polígonos semelhantes se aplica para “dois polígonos que possuem ângulos correspondentes congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais” (SILVEIRA, 2015, p. 150). Pode-se observar, na figura 27, a semelhança entre os polígonos.

Figura 27: Polígonos semelhantes



Fonte: Silveira (2015d, p.150)

Segundo a definição apresentada Pelo autor, esses polígonos são semelhantes, pois os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas dos lados correspondentes também são proporcionais. Segundo o autor "A razão entre as medidas dos lados correspondente em polígonos semelhantes é denominado razão de semelhança ou coeficiente de proporcionalidade"(SILVEIRA, 2015d, p.150)

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = k\ (razão\ de\ semelhança)$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{3,8}{5,7} \approx 0,67$$

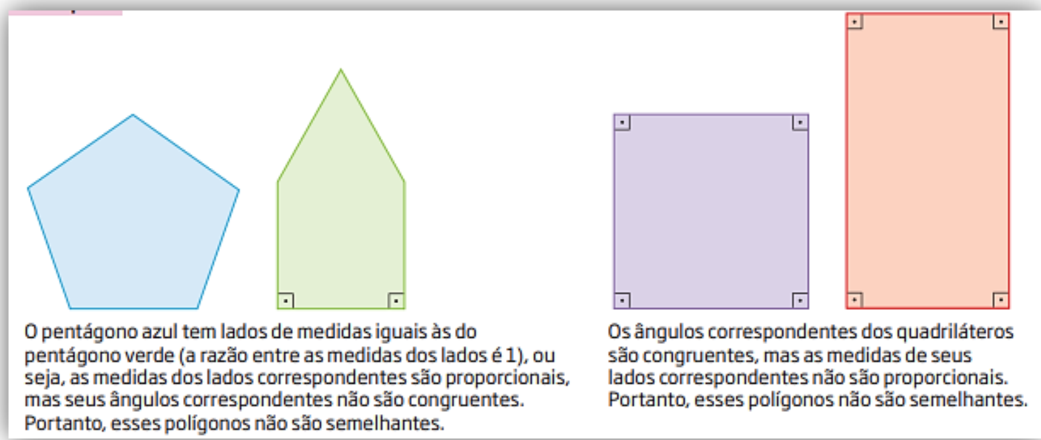
Neste exemplo a razão de semelhança foi igual a 0,67 ou $\frac{2}{3}$, levando em consideração a razão de semelhança do polígono menor para o maior. Descobrindo essa razão de semelhança, pode-se calcular qualquer lado correspondente dos polígonos.

Como o polígono ABCD é semelhante ao polígono PQRS, pode-se simplificar utilizando um símbolo matemático ABCD ~ PQRS.

Para finalizar o conteúdo de polígonos semelhantes, o autor faz uma observação. Ele apresenta para os leitores que é preciso verificar as duas condições de polígonos semelhantes, pois, apenas uma dessas condições não será suficiente para garantir a semelhança de polígonos.

Como pode ser observado na figura 28, no primeiro exemplo, o comprimento dos lados dos pentágonos tem a mesma medida, dessa forma, são proporcionais. Mas é possível observar que os ângulos correspondentes não são congruentes, logo, esses polígonos não são semelhantes. O mesmo vale para os outros dois polígonos, mas, dessa vez, ocorreu o inverso do primeiro exemplo, ou seja, os ângulos correspondentes são congruentes, mas as medidas dos lados correspondentes não são proporcionais, assim, os polígonos não são semelhantes.

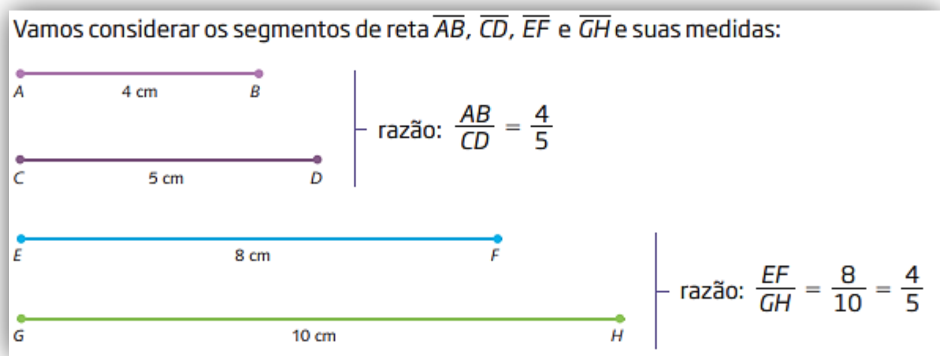
Figura 28: Polígonos não semelhantes



Fonte: Silveira (2015d, p.151)

A proporcionalidade como igualdade entre razões também pode ser observada em segmentos de retas. A figura 29 mostra essa relação de segmentos proporcionais.

Figura 29: Segmentos proporcionais



Fonte: Silveira (2015d, p.138)

Segundo Silveira (2015d), como as razões obtidas são iguais, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ formam, nesta ordem, uma proporção:

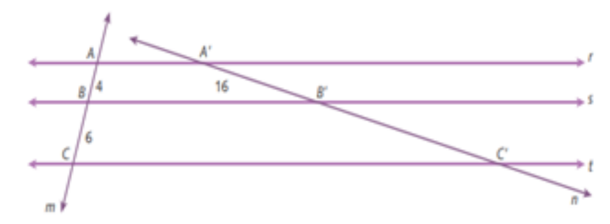
$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Após a definição de segmentos proporcionais, o autor apresenta para os leitores o Teorema de Tales, que também é compreendido como uma igualdade entre duas razões. O autor apresenta a seguinte definição: “Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, os segmentos determinados sobre a primeira transversal são proporcionais a seus correspondentes determinados sobre a segunda transversal.” (SILVEIRA, 2015d, p. 140). Para ilustrar essa relação entre proporcionalidade e o Teorema de Tales, observe a questão a seguir:

Enunciado da questão: Um feixe de três retas paralelas determina sobre uma transversal os pontos A, B e C e sobre outra os pontos A’, B ’ e C ’. Sabendo que AB= 4 cm, BC= 6 cm e A’B ’= 16 cm, vamos calcular B ’C ’.

A resolução dessa questão pode ser observada na figura 30 em que o autor aplicou o Teorema de Tales

Figura 30: Teorema de Tales



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{16}{B'C'} \Rightarrow$$

$$B'C' = \frac{16 \cdot 6}{4} \Rightarrow \quad B'C' = 24$$

Fonte: Silveira (2015d, p.141)

Nesse exemplo só foi possível utilizar o Teorema de Tales, porque existem retas paralelas e retas transversais que se cortam determinando segmentos proporcionais.

Vale ressaltar que a coleção do ensino médio não apresentou o conteúdo de semelhança e segmentos proporcionais. Apenas a coleção do ensino fundamental II que apresentou.

4.1.3 - Proporcionalidade como taxa de variação de uma função

Em relação à proporcionalidade com a função afim, o capítulo 3, do livro do primeiro ano, apresenta a taxa de variação média de uma função afim no tópico 4, desse mesmo capítulo. O autor deixa claro nas observações que a taxa de uma variação média é constante. Na figura 31, consegue-se observar como pode ser obtida essa taxa de variação.

Figura 31: Taxa de variação

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ para } x_1 \neq x_2 .$$

Fonte: Dante (2016, p. 76)

Segundo o autor, “O número a chama-se taxa de variação da função f, mas também é conhecido como declividade ou coeficiente angular dessa reta em relação ao eixo x” (DANTE, 2016a, p.79).

Em relação à proporcionalidade com a função linear, é apresentada no tópico com o tema de função linear e proporcionalidade. Conforme o autor, “uma função linear é uma função $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = ax$ para todo x. Seu gráfico é uma reta não vertical que passa pela origem (0,0)” (DANTE, 2016, P.93).

Em comparação com os parágrafos apresentados acima, o autor aborda a relação de função linear com a proporcionalidade de uma maneira diferente de como ocorreu com a função afim. Nesse tópico, foi apresentada a relação de uma função quando é diretamente proporcional e inversamente proporcional.

O autor explica essa relação de proporcionalidade com a função linear da seguinte forma: Dada uma função $y = f(x)$, ela será diretamente proporcional se duas condições forem estabelecidas. A primeira tem que ser uma função crescente e a segunda, se multiplicado um valor n natural por x, o valor de y também ficará multiplicado por n.

Para que uma função seja inversamente proporcional, também é preciso de duas condições. A primeira, a função deve ser decrescente e a segunda, o número n natural, se multiplicado por x, o valor correspondente de y ficará dividido por n. Para ilustrar melhor esses dois conceitos, o autor disponibiliza alguns exemplos que podem ser observados nos próximos parágrafos.

Primeiramente, foi apresentado um exemplo de funções diretamente proporcional.

“Se 1 quilograma de feijão custa R$6,00, então x quilogramas custarão $y = f(x) = 6x$ reais” (DANTE, 2016, P.93).

Para resolver esse exemplo, foram verificadas aquelas duas condições que foram mostradas acima. Primeiro, foi notado que o valor seguinte da função era sempre maior do que o anterior, isso caracteriza uma função crescente. Já a segunda, foi citada pelo autor que caso seja duplicada a quantidade de quilogramas, também duplicará o preço, o mesmo vale se triplicar ou quadriplicar. Portanto, se vale as duas condições, logo, essa função será diretamente proporcional.

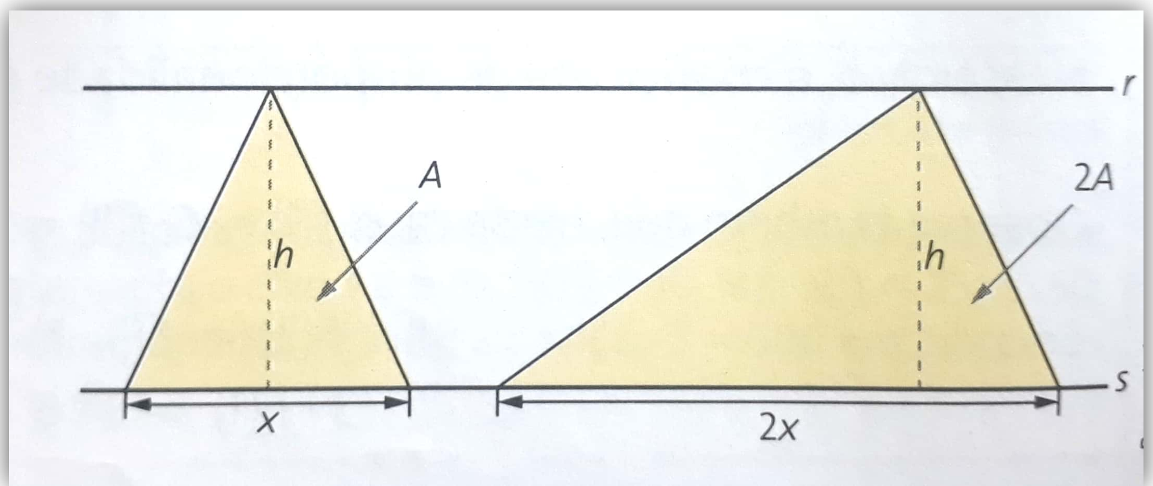
O segundo exemplo, tem a ver com as funções inversamente proporcionais. Este aborda a fórmula para calcular a velocidade média de um carro. Foi utilizada a seguinte fórmula para resolver este problema: $d = vt \Rightarrow t = \frac{d}{v}$. Esses são exemplos típicos de estudo na Física. O enunciado da questão dizia o seguinte:

“O tempo necessário para ir, em linha reta, de um ponto A para um ponto B, com velocidade constante, é inversamente proporcional a essa velocidade” (DANTE, 2016a, p.94).

Da mesma forma que o autor resolveu o exemplo anterior, ocorreu neste. Primeiro, precisaria saber se a função era crescente ou decrescente, como o tempo diminui quando aumentada a velocidade, logo, será decrescente. Caso duplique essa velocidade constante, consequentemente, o tempo será reduzido pela metade, o mesmo ocorrerá se triplicar a velocidade, então terá a terça parte do tempo. Portanto, essa função será inversamente proporcional.

Neste mesmo capítulo o autor mostra para os leitores que a proporcionalidade e a função linear podem aparecer em problemas que envolvem as retas paralelas e os triângulos. “Considerando r e s retas paralelas e um triângulo que tenha um vértice em uma dessas retas e o lado oposto contido na outra” (DANTE, 2016a, P.94), como mostra na figura 32.

Figura 32: Retas paralelas e triângulos



Fonte: Dante (2016a, p. 94)

Quando é fixada a altura em relação a um dos lados do triângulo, podemos dizer que a área (A) é proporcional a esse lado. Sabemos que a área de um triângulo como mostra na figura é dada por A = $\frac{h}{2} \cdot x$, assim, o $\frac{h}{2}$ é coeficiente de proporcionalidade. Já foi definido o coeficiente, agora é preciso representar a função linear, que por sua vez é dada por: A(x) = a·x, com a = $\frac{h}{2}$.

Finalizando o problema percebe-se que quanto mais aumentamos o valor do x (lado do triângulo que está sobre a reta s) maior será a área. Portanto conclui-se que essa função é diretamente proporcional.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Toda pesquisa desenvolvida tem um objetivo principal, neste caso, foi identificar formas de comunicar o conceito de proporcionalidade nos livros didáticos, segundo o modelo teórico de Menduni-Bortoloti(2016).

O modelo é dividido em três cenários, sendo esses, proporcionalidade como razão, proporcionalidade como igualdade entre razões e proporcionalidade como taxa de variação de uma função. Nas duas coleções foram encontrados modos de comunicar a proporcionalidade, mas alguns cenários apareceram mais que os outros e neste caso, temos a razão como o modo mais comum de comunicar a proporcionalidade, depois à igualdade entre razões e por último a função.

Na proporcionalidade realizada como razão, teve como foco a relação comparativa entre grandezas de mesma natureza ou não. A primeira forma de comunicação foi à escala, que foram apresentadas na coleção de ensino fundamental II, neste caso, no livro do 7º ano. A principal ideia da escala é apresentar para os alunos a representação de algo real em um desenho utilizando as escalas.

Em sequência foram apresentadas as porcentagens, essa por sua vez, foram comunicadas nas duas coleções de livros didáticos. Nos livros de 6º e 7º ano foram apresentadas as definições e as ideias principais de como resolver problemas envolvendo as porcentagens. No livro do 3º ano do ensino médio foi apresentada uma forma de resolver problemas que envolvem os descontos sucessivos utilizando duas interpretações. Neste caso, foi utilizada tanto a porcentagem quanto a taxa para comunicar a proporcionalidade.

Outra forma de comunicar a proporcionalidade como razão foi à probabilidade, apresentada tanto na coleção de livro do ensino fundamental II, quanto na de ensino médio. No livro do sexto ano a probabilidade é tratada como possibilidades e a partir do sétimo ano começa a introduzir os termos, tais como: experimento aleatório, evento, espaço amostral e espaço equiprovável. Na coleção do ensino médio o único livro que apresentou a probabilidade foi do 2º ano.

As duas últimas formas de comunicar a proporcionalidade foram às taxas e as razões trigonométricas. A taxa foi utilizada apenas na coleção de livros do ensino fundamental II, sendo bem mais utilizada nos livros do 7º e 9º anos e com foco em juros simples e composto. As razões trigonométricas foram comunicadas apenas no livro do 9º ano, que teve como foco as tangentes de certo ângulo.

A igualdade entre razões foi comunicada pelas proporções, pelo Teorema de Tales e pelos segmentos proporcionais e semelhanças de figuras.

Dentre as proporções, foram apresentadas as grandezas diretamente e inversamente proporcionais e a ação utilizada para resolver problemas desse tipo, foi à utilização da regra de três simples e composta. Em segmentos proporcionais e semelhanças foram apresentados os polígonos semelhantes e não semelhantes e por último o Teorema de Tales, que foi utilizada a relação de segmentos proporcionais para serem resolvidos os devidos problemas.

Foram utilizadas as duas coleções de livros didáticos para comunicar a igualdade entre razões, tendo em vista, que o livro do 7º foi o mais utilizado dentre todos.

Para comunicar a proporcionalidade realizada como taxa de variação de uma função foram utilizadas as funções afim e linear. Apenas na coleção do ensino médio que elas foram comunicadas. Dentre essas duas funções utilizou-se a ideia de funções diretamente e inversamente proporcionais.

O quadro 4 mostra quais foram os livros que mais comunicaram o conceito de proporcionalidade. Os retângulos que estão marcados com o X indica o modo de comunicar a proporcionalidade presente no livro.

Fonte: Elaboração própria

Quadro 4. Livros x Proporcionalidade comunicada como razão, igualdade entre razões e taxa de variação de uma função

	Escala	Porcentagem	Probabilidade	Taxas	Razões Trigonométricas	Regra de 3 simples e composta	Razão de Semelhança	Taxa de Variação
6º Ano		X	X					
7º Ano	X	X	X	X		X		
8º Ano			X					
9º Ano				X	X	X	X	
1º Ano								X
2º Ano			X					
3º Ano		X						

Nota-se que a proporcionalidade é mais comunicada nos livros de 7º e 9º ano. No 7º ano a forma mais identificada de comunicar proporcionalidade foi como razão e no livro do 9º ano houve tanto como razão, quanto igualdade entre razões.

O quadro 5 mostra como foi comunicado cada conteúdo em relação a cada cenário.

Quadro 5: Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade

CENÁRIOS	A PROPORCIONALIDADE É COMUNICADA COMO
Razão	Escala; Porcentagem; Probabilidade; Taxa; Razões trigonométricas.
Igualdade entre razões	Regra de três simples e composta; Razão de semelhança.
Taxa de variação de uma função	A proporcionalidade na função afim e linear foi comunicada como taxa de variação

Fonte: Elaboração própria

Comparando o quadro 5 com a pesquisa de Menduni-Bortoloti (2016), nota-se que a forma de comunicar a proporcionalidade em dois desses cenários ficou diferente da pesquisa elaborada por Menduni-Bortoloti.

No cenário de razão, os quadros estão bem parecidos, não houve nada de diferente. Na igualdade entre razões em Menduni-Bortoloti (2016) foi apresentada a divisão entre grandezas e multiplicação em cruz, sendo que nessa pesquisa foi comunicada apenas como regra de três e razão de semelhança. Em taxa de variação de uma função, a proporcionalidade foi comunicada nas funções afim e linear, em Menduni-Bortoloti também foi comunicada na função exponencial.

6. REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. Uma abordagem histórico/didática de analogias envolvendo razões e proporções em contexto musical: um ensaio preliminar. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 386-397, 2012.

MENDUNI-BORTOLOTI, Roberta D'Angela. Um estudo sobre a Matemática para o ensino de proporcionalidade. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, da Universidade Federal da Bahia, 2016.

COSTA, M. dos S.; ALLEVATO, N. S. G. Futuros professores de matemática e o ensino de proporcionalidade através da resolução de problemas de geometria. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 61, p. 109-123, jul./dez. 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações:** ensino médio. Vol 1. 3º ed. São Paulo: Ática, 2016a.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações:** ensino médio. Vol 2. 3º ed. São Paulo: Ática, 2016b.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações:** ensino médio. Vol 3. 3º ed. São Paulo: Ática, 2016c.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. RAE, São Paulo, v. 35, n.3, p. 20-29, 1995.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma crítica da crítica. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 18, n. 24, p. 1-30, 2005.

KRIPKA, R. M. L; SCHELLER, M; BONOTTO, D. de L. Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização. Revista de investigaciones unad. Bogotá. V.14, n. 2, p. 55-73, 2015.

OLIVEIRA, Isabela. A. F. G; SANTOS, M. C. O ensino fundamental e a resolução de problema de proporção simples: Uma análise das estratégias. Disponível em: < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/ensino_fundamental.pdf > Acesso em: 23 de abril de 2021.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

SILVA, A. da F.G; CÂNDIDO, A. S; SOUZA, V. H. G de. Raciocínio proporcional: um estudo sobre as estratégias de estudantes de Pedagogia ao resolverem diferentes situações. Acta Scientiae. Canoas, v.20, n.1, p. 20-35, 2018.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática:** 6ºano. 3º ed. São Paulo: Moderna, 2015a.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática:** 7ºano. 3º ed. São Paulo: Moderna, 2015b.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática:** 8ºano. 3º ed. São Paulo: Moderna, 2015c.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática:** 9ºano. 3º ed. São Paulo: Moderna, 2015d.

VIANA, O. A; MIRANDA, J. A. O raciocínio proporcional e as estratégias de resolução de problemas de valor omisso e de comparação. Revemat. Florianópolis (SC), v.11, n.1, p. 194-213, 2016.