Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas-DCET
Licenciatura em Matemática

Curiosidades Numéricas: Constante de Kaprekar e Soma de cubos

Vitória da Conquista - BA
2021

ISADORA NOBRE SILVA

Curiosidades Numéricas: Constante de Kaprekar e Soma de cubos

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Campus Vitória da Conquista - BA, para obtenção do título de licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Júlio César dos Reis.

Vitória da Conquista - BA

2021

Folha de aprovação

Isadora Nobre Silva

Curiosidades Numéricas: Constante de Kaprekar e Soma de cubos

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 15 de junho de 2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César dos Reis - UESB
Orientador

Prof. Dra. Clênia Andrade Oliveira De Melo
UESB

Prof. Dra. Antônio Augusto Oliveira Lima
UESB

Vitória da Conquista - BA
2021

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado saúde e determinação para não desanimar e assim alcansar meus objetivos.
Aos meus pais e irmãos que me incentivaram e me apoiaram nos momentos difíceis na vida e durante o curso.
Ao meu noivo, por todo carinho, cuidado e incentivo dado durante o curso e a escrita desse trabalho.
Ao professor Dr. Júlio César, por ter aceitado ser meu orientador e ter desempenhado tal função com muita dedicação e altos puxões de orelha (risos) para que esse trabalho fosse concluído.
Por fim, a todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar duas curiosidades numéricas: I) a constante de Kaprekar e II) a soma de cubos. A constante de Kaprekar aparece para números de quatro dígitos e para números de três digitos. No primeiro caso, consiste no número 6174 obtido por meio de qualquer número de quatro dígitos (em que ao menos dois sejam diferentes, incluindo o zero) após uma quantidade limitada de passos. Para encontrar a constante de Kaprekar, deve-se escolher qualquer número de quatro dígitos, que obedeça às características citadas anteriormente, e organizár os algarismos em ordem decrescente; em seguida, em ordem crescente, depois subtrair o menor número do maior. Repete-se esse algoritmo com o número da subtração anterior até que o resultado seja 6174, pois a partir daí começará a repetir a constante. No segundo caso, a constante é o número 495, que é obtido por meio de qualquer número de três dígitos (em que ao menos dois sejam diferentes, incluindo o zero) e isso após uma quantidade limitada de passos. Para encontrar a constante de Kaprekar com três dígitos, deve-se escolher qualquer número de três dígitos, que obedeça òs critérios citados, e organizár os algarismos em ordem decrescente, em seguida, em ordem crescente, depois subtrair o menor número do maior. Repete-se esse algoritmo com o número da subtração anterior até que o resultado seja 495, pois a partir daí começará a repetir a constante. Foi demonstrado que a constante de três dígitos é obtida com um número máximo de seis etapas e a constante de quatro dígitos é obtida com um número máximo de sete etapas. Já a soma de cubos consiste em um problema em aberto para caracterizar os números que podem ser expressos como uma soma de três cubos de inteiros, permitindo tanto cubos negativos quanto positivos na soma. Uma condição necessária óbvia para n igualar tal soma é que n não pode ser igual a 4 ou 5 módulo 9, porque os cubos módulo 9 são 0, 1 e -1, e nenhum destes três números somam 4 ou 5 módulo 9. Não se sabe se esta condição necessária é suficiente.

Palavras-chave: Constante, Cubos, Etapas, Kaprekar, Soma

Sumário

Introdução

A matemática é uma ciência viva e que é construída em nosso cotidiano, então há sempre algo novo para descobrir, já que, vários matemáticos se empanham em construir e demonstrar conjecturas, teoremas e proposições que ainda não foram demonstradas. Diante disso, este trabalho aborda duas curiosidades antigas na matemática: I) A Constante de Kaprekar com 3 e 4 dígitos e II) A Soma de Cubos. Curiosidades essas que para a resolução se fez necessário alguns conceitos básicos de teoria dos números, como critérios e propriedades de divisibilidade dentre outros conceitos utilizados de maneira implícita no decorrer do trabalho.

A primeira curiosidade, A Constante de Kaprekar com 3 e 4 dígitos, foi apresentada em 1949 em Madras pelo matemático Dattatreya Ramchandra Kaprekar. Já a segunda curiosidade, A Soma de Cubos, que será abordada mais teoricamente, foi estabelecida pela primeira vez em 1954, na Universidade de Cambridge, na Inglaterra, também na área de teoria dos números.

A constante de Kaprekar consiste no número 6174, resultante de uma operação constituída de no máximo 7 passos, obtidos por meio de qualquer número de 4 dígitos em que ao menos dois sejam diferentes, incluindo o zero. Um fenômeno semelhante ocorre também com o número 495, que é obtido por meio de qualquer número de três dígitos e possui a mesma especificidade citada na constante de Kaprekar com 4 dígitos.

A soma de Cubos consiste em um problema em aberto para caracterizar os números que podem ser expressos como uma soma de três cubos de inteiros, permitindo tanto cubos negativos quanto positivos na soma. Uma condição necessária óbvia para n igualar tal soma é que n não pode ser igual a 4 ou 5 módulo 9, porque os cubos módulo 9 são 0, 1 e -1, e nenhum três destes números somar 4 ou 5 módulo 9. Não se sabe se esta condição necessária é suficiente.

A Constante de Kaprekar foi tema da iniciação cientifíca voluntária na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), orientada pelo professor Júlio César, no ano de 2019. Durante o desenvolvimento da pesquisa, surgiram algumas oportunidades de apresentar esses temas: i) o trabalho foi apresentado na exposição de pôsters da IX Semana de Iniciação Científica do XXXIII Programa de Verão do PPGM-UFSCar (na cidade de São Carlos - SP) em janeiro do ano 2020, ii) foi apresentado também na XIII SEMAT da UESC de Ilhéus (em setembro de 2020) e ii) foi apresentado na sessão de pôsters do VI Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, organizado pela Universidade de Brasília UnB, realizado em maio de 2021. Entretanto, nenhum desses eventos foi apresentada a estrutura completa do trabalho.

A presente monografia está estruturada da seguinte forma: o capítulo 1 abordará as definições e propriedades relacionadas a divisibilidade, bem como, teoremas, corolários. Tais conteúdos serão de suma importância para a compreenssão das ideias e exemplos propostos no decorrer do trabalho. Além disso, esse capítulo aborda a história da constante de Kaprekar, na qual aborda alguns fatos históricos, a fim de responder questões como: Quem foi Kaprekar?, Como surgiu a constante?, Porque do nome constante de Kaprekar?, Quais as propriedades desse número?, Possui algum outro número equivalente a ele?.

Já o assunto do capítulo 2 será a constante de Kaprekar com três dígitos. Abordar-se-á propriedades, exemplos e explicado todo o processo de limitação do número de passos.

O capítulo 3, a Constante de Kaprekar com quatro dígitos, será testada a aplicabilidade das propriedades da constante de 4 dígitos, citada na seção da história da Constante. De maneira que seguirá o mesmo raciocínio da constante de 3 dígitos, no qual deve-se escolher qualquer número de 4 dígitos, em que ao menos dois sejam diferentes, incluindo o zero e aplicando uma operação de máximo 7 etapas. Em seguida, será utilizada uma maneira genérica, baseada no artigo **A rotina de Kaprekar**, publicado na Revista do Professor de Matemática, Edição número 76, para mostrar a limitação do número de passos para se obter a constante.

No capítulo 4, escrito em um tema mais jornalístico, será abordada um pouco sobre a teoria e sobre a solução para do enigma de escrever 33 como soma de cubos, trazendo como embasamento teórico o artigo **Cracking the problem with 33** que traz mais detalhadamente lemas, provas e contas mostrando as soluções para que o número 33 seja escrito como soma de três cubos.

Capítulo 1

Teoria de Números

Este capítulo abordará as definições e propriedades relacionadas a divisibilidade no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, bem como, teoremas, corolários e proposições relacionadas a mesma. Tais conteúdos serão de suma importância para a compreenssão das ideias e exemplos propostos no decorrer do trabalho. As demonstrações que serão aqui omitidas, podem ser encontradas em [5].

1.1 Divisibilidade

Começando com a noção de divisibilidade.

Definição 1 *Se a e b são inteiros, com a diferente de zero, dizemos que a divide b, denotando por $a|b$, se existir um inteiro c tal que $b = ac$.*

Proposição 2 *Se a, b e c são inteiros, $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.*

Proposição 3 *Se a, b, c, m, n são inteiros, $c|a$ e $c|b$ então $c|(ma + nb)$.*

Teorema 4 *A divisão tem as seguintes propriedades:*

1. $n|n$
2. $d|n \Rightarrow ad|an$
3. $ad|an$ e $a \neq 0 \Longrightarrow d|n$
4. $1|n$
5. $n|0$
6. $d|n$ e $n \neq 0 \Longrightarrow |d| \leq |n|$
7. $d|n$ e $n|d \Longrightarrow |d| = |n|$
8. $d|n$ e $d \neq 0 \Longrightarrow (n/d)|n$.

1.2 O Algoritmo da Divisão

Quando não é possível efetuar a divisão exata, usa-se o Algoritmo da Divisão.

Teorema 5 *Dados dois inteiros a e b, $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que $a = qb + r$ com $0 \leq r < b$. Veja que q é chamado de quociente e r de resto da divisão de a por b.*

Observe que $r = 0 \Longleftrightarrow b|a$.

1.3 O Máximo Divisor Comum

Definição 6 *O máximo divisor comum de dois inteiros a e b (a ou b diferente de zero), denotado por (a, b), é o maior inteiro que divide a e b.*

Teorema 7 *Seja d o máximo divisor comum de a e b, então existem inteiros n_0 e m_0 tais que $d = n_0a + m_0b$.*

Teorema 8 *O máximo divisor comum d de a e b é o divisor positivo de a e b o qual é divisível por todo divisor comum.*

Proposição 9 *Para todo inteiro positivo t, (ta, tb) = t(a, b).*

Proposição 10 *Se c > 0 e a e b são divisíveis por c, então*

$$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{1}{c}(a, b).$$

Corolário 11 *Se $(a, b) = d$, temos que* $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$

Definição 12 *Os inteiros a e b são relativamente primos quando (a, b) = 1.*

Teorema 13 *Para a, b e x inteiros temos (a, b) = (a, b + ax).*

Teorema 14 *Se $a|bc$ e (a, b) = 1, então $a|c$.*

Teorema 15 *Se a e b são inteiros e a = qb + r onde q e r são inteiros, então (a, b) = (b, r).*

1.4 O Algoritmo de Euclides

Teorema 16 *Sejam $r_0 = a$ e $r_1 = b$ inteiros não negativos com $b \neq 0$. Se o algoritmo da divisão for aplicado sucessivamente para se obter*

$$r_j = q_{j+1}r_{j+1} + r_{j+2},\ 0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$$

para $j = 0, 1, 2, ..., n-1$ e $r_{n+1} = 0$ então $(a, b) = r_n$, o último resto não-nulo.

1.5 Números Primos

Definição 17 *Um número inteiro* $n(n > 1)$ *possuindo somente dois divisores positivos n e 1 é chamado primo.*
Se $n > 1$ *não é primo dizemos que* n *é composto.*

Proposição 18 *Se* $p|ab$, p *primo, então* $p|a$ *ou* $p|b$.

Teorema 19 (Teorema Fundamental da Aritmética) *Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.*

Teorema 20 *Se* $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$, *o conjunto dos divisores positivos de* n *é o conjunto de todos os números da forma*

$$\prod_{i=1}^{r} p_i^{c_i}, \quad 0 \leq c_i \leq a_i, \quad i = 1, 2, ...r.$$

Teorema 21 *Se dois inteiros positivos* a *e* b *possuem as fatorações*

$$a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}, b = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}$$

então o máximo divisor comum de a *e* b *é igual a :*

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{c_i}$$

onde $c_i = min\{a_i, b_i\}$.

Teorema 22 (Euclides) *A sequência dos números primos é infinita.*

Teorema 23 *Para qualquer inteiro positivo k, existem k inteiros consecutivos todos compostos. Em outras palavras, existem "saltos" arbitrariamente grandes na sequência dos números primos.*

Teorema 24 *O produto de qualquer sequência de k inteiros consecutivos é divisível por k!.*

Teorema 25 *Se n não é primo, então n possui, necessariamente, um fator primo menor do que ou igual a* $\sqrt{n}$.

1.6 Mínimo Múltiplo Comum

Definição 26 *O mínimo múltiplo comum de dois inteiros positivos a e b é o menor inteiro positivo que é divisível por a e b. Vamos denotá-lo por $[a, b]$.*

Proposição 27 *Se $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}$ e $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \cdots p_n^{b_n}$ onde $p_1, p_2, ..., p_n$ são os primos que ocorrem nas fatorações de a e b, então*

$$[a, b] = p_1^{max\{a_1, b_1\}} p_2^{max\{a_2, b_2\}} \cdots p_n^{max\{a_n, b_n\}}.$$

Proposição 28 *Se x e y são números reais então*

$$max\{x, y\} + min\{x, y\} = x + y.$$

Teorema 29 *Para a e b inteiros positivos temos, $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$.*

Proposição 30 *Sejam a e b inteiros positivos relativamente primos entre si. Então se d é divisor positivo de ab, existe um único par de divisores positivos d_1 de a e d_2 de b tais que $d = d_1 d_2$. Reciprocamente, se d_1 e d_2 são divisores positivos de a e b, respectivamente, então $d = d_1 d_2$ é um divisor positivo de ab.*

Teorema 31 *Seja b um inteiro positivo maior do que 1. Então todo inteiro positivo n pode ser representado de maneira única da seguinte forma:*

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + ... + a_1 b + a_0.$$

onde $k \geq 0, a_k \neq 0$ e $0 \leq a_i < b, \quad i = 0, 1, 2, ..., k$.

Definição 32 *Um número da forma*

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

é chamado de número de Fermat. O teorema seguinte nos fornece uma segunda prova de infinitude dos números primos.

Teorema 33 *Quaisquer dois números de Fermat distintos F_n e F_m são relativamente primos.*

Teorema 34 *Existem infinitos primos da forma $6k + 5$.*

A próxima seção irá abordar alguns fatos históricos, a fim de responder questões como: Quem foi Kaprekar?, Como surgiu a constante?, Porque do nome constante de Kaprekar?, Quais as propriedades desse número?, Possui algum outro número equivalente a ele?. Para desse modo introduzir o contéudo que será abordados nos próximos capítulos.

1.7 A história da constante de Kaprekar

Dattatreya Ramachandra Kaprekar nasceu em Dahanu, uma cidade na costa oeste da Índia. Ele foi criado por seu pai depois que sua mãe morreu quando ele tinha oito anos. Seu pai era um escriturário fascinado pela astrologia. Embora a astrologia não exija matemática profunda, ela exige uma habilidade considerável para calcular com números, e o pai de Kaprekar certamente deu ao filho o amor pelo cálculo.

Kaprekar frequentou a escola secundária em Thane. Ele começou seus estudos terciários no Fergusson College em Pune em 1923 . Lá ele se destacou, ganhando o Prêmio de Matemática Wrangler RP Paranjpe em 1927. Este prêmio foi atribuído para a melhor matemática original produzida por um aluno e é certamente adequado que Kaprekar tenha ganho este prêmio, visto que sempre demonstrou grande originalidade nas questões teóricas numéricas que idealizou. Ele se formou com um B.Sc. do Colégio em 1929 e no mesmo ano foi nomeado professor de matemática em Devlali, uma cidade muito perto de Nashik que fica a cerca de 100 km a leste de Dahanu, sua cidade natal. Ele passou toda a sua carreira ensinando em Devlali até se aposentar aos 58 anos em 1962 .

Muitos matemáticos indianos riram das ideias da teoria dos números de Kaprekar, pensando que eram triviais e sem importância. Ele conseguiu publicar algumas de suas ideias em periódicos de matemática de baixo nível, mas outros artigos foram publicados em particular como panfletos com inscrições como Impressos privados, Devlali ou Publicado pelo autor, Khareswada, Devlali, Índia. O nome de Kaprekar hoje é bem conhecido e muitos matemáticos ficaram intrigados com as ideias sobre números que Kaprekar achou tão viciante.

Veja algumas das ideias que ele apresentou.

Talvez o mais conhecido dos resultados de Kaprekar seja o seguinte, que se relaciona com o número 6174, hoje chamada de constante de Kaprekar, em homenagem a ele. Comece com qualquer número de quatro dígitos, nem todos os dígitos sendo iguais. Suponha que a escolha seja o número 4637. Reorganize os dígitos para formar os números maiores e menores com esses dígitos, ou seja, 7643 e 3467 , e subtraia o menor do maior para obter 4167. Continue o processo com este número - subtraia 1467 de 7641 para obter 6174 , a constante de Kaprekar. Testando de novo, tem-se como exemplo o número 3743.

1. $7433 - 3347 = 4086$
2. $8640 - 0468 = 8172$
3. $8721 - 1278 = 7443$
4. $7443 - 3447 = 3996$
5. $9963 - 3699 = 6264$
6. $6642 - 2466 = 4176$

7. $7641 - 1467 = 6174$

Novamente, o resultado é a constante de Kaprekar.

Na verdade, a aplicação do processo de Kaprekar, a quase, qualquer número de quatro dígitos resultará em 6174 após no máximo 7 etapas (então o último exemplo foi aquele em que tem o número máximo de etapas). Isso foi descoberto pela primeira vez por Kaprekar em 1946 e ele o anunciou na Conferência Matemática de Madras em 1949. Ele publicou o resultado no artigo, Problemas envolvendo reversão de dígitos na Scripta Mathematica em 1953.

Claramente, começar com 1111 resultará em 0 do processo de Kaprekar. Na verdade, o processo Kaprekar produzirá 0 ou 6174. Assim, exatamente 77 números de quatro dígitos se estabilizam em 0 no processo de Kaprekar, o restante se estabiliza em 6174 .

Quanto a todo esse processo para obter o número 6174, o mesmo acontece quando trocar os números de quatro dígitos por três dígitos, só que ao invés de encontrar 6174, encontrará 495. Número este, equivalente a constante de Kaprekar.

No próximo capítulo, terá a constante de Kaprekar com três dígitos detalhada e com as propriedades aplicadas nos exemplos.

Capítulo 2

A constante de Kaprekar com três dígitos

Este capítulo abordará a Constante de Kaprekar com três dígitos de maneira a apresentar suas propriedades, exemplos e limitação do número de passos.

2.1 Apresentação da constante

Para a constante de 3 dígitos, deve-se escolher qualquer número de 3 dígitos, em que ao menos dois sejam diferentes e aplicando uma operação de máximo 7 etapas. É necessário seguir alguns passos para obter a constante 495.

Tomando com exemplo o número 574, observe que possui três dígitos e ambos diferentes, obedecendo o critério acima.

1. Organize os dígitos do número 574 em ordem decrescente, que fica 754;

2. Organizando os dígitos mais uma vez, agora em ordem crescente, tem-se o número 457;

3. Subtraindo o menor número do maior número, tem-se $754 - 457 = 297$

4. Repetindo algumas vezes os três passos acima, chegará um momento que aparecerá o número 495;

   Observe o restante dos passos:

5. $972 - 279 = 693$
6. $963 - 369 = 594$
7. $954 - 459 = 495$

   Refazendo o passo 7, tem-se:

8. $954 - 459 = 495$

   Percebe-se que, refazendo os passos 3 vezes, chegará no número 495 e a partir dele pode ser repetido os passos n vezes que o resultado sempre será igual a 495. Dito isso, não é viável prosseguir calculando.

No exemplo a seguir, foi escolhido um número que tenha o zero para ressaltar que não influenciará no resultado 495, em menos de 7 passos.

Tomando como base o número 507

1. $750 - 057 = 693$
2. $963 - 369 = 594$
3. $954 - 459 = 495$
   Refazendo o passo 3
4. $954 - 459 = 495$
   Assim como o exemplo anterior, o resultado 495 foi obtido antes do sétimo passo.

O processo acima, conhecido como rotina de Kaprekar, sempre convergirá para o seu ponto fixo, o valor 495, em no máximo sete passos.

2.2 Exemplos numéricos para a constante de Kaprekar com três dígitos

Nesta seção, serão testadas diversos números, mostrando a aplicabilidade das propriedades da constante de 3 dígitos mais detalhadamente, para que seja explicado todo o processo até chegar na conclusão do porque 495 e o que essa constante tem haver com o critério de divisibilidade. Será abordado a seguir 5 exemplos, cada um com uma quantidade de iterações/passos diferentes;

Exemplo 1 *Seja o número 100, tem-se que:*
•*100 - 001 = 099*
•*990 - 099 = 891*
•*981 - 189 = 792*
•*972 - 279 = 693*
•*963 - 369 = 594*
•*954 - 459 = 495*

Esse primeiro exemplo é especial e difere um pouco dos demais, visto que, esse é o único exemplo que aparece 099 como resultado para depois começar a repetir a sequência de resultados nos outros exemplos, sempre dependendo do número de passos.

Exemplo 2 *Seja o número 123, tem-se que:*
•*321 - 123 = 198*
•*981 - 189 = 792*
•*972 - 279 = 693*
•*963 - 369 = 594*
•*954 - 459 = 495*

Exemplo 3 *Seja o número 134, tem-se que:*
•*431 - 134 = 297*
•*972 - 279 = 693*
•*963 - 369 = 594*
•*954 - 459 = 495*

Exemplo 4 *Seja o número 400, tem-se que:*
•*400 - 004 = 396*
•*963 - 369 = 594*
•*954 - 459 = 495*

Exemplo 5 *Seja o número 127, tem-se que:*
•*721 - 127 = 594*
•*954 - 459 = 495*

Exemplo 6 *Sendo o número 450, tem-se que:*
•*540 - 045 = 495*

Sabe-se que, por critério de divisibilidade, um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3. De maneira equivalente, um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9. Levando esse fato em consideração e fazendo a soma dos dígitos da constante 495 pode observar que $4 + 9 + 5 = 18$. Então 495 por critério de divisibilidade, é divisível por 3 e por 9.

Sabendo que a soma dos dígitos da constante 495 é 18, pegou-se os dígitos de um até nove e formando número de três dígitos, de maneira que a soma destes fossem iguais a 18 e levando em consideração também que esses números podem permutar entre si.
Assim:

1. $1 + 8 + 9 = 18$
2. $2 + 7 + 9 = 18$
3. $3 + 8 + 8 = 18$
4. $3 + 6 + 9 = 18$

5. $3 + 7 + 8 = 18$

6. $4 + 5 + 9 = 18$

7. $4 + 6 + 8 = 18$

8. $4 + 7 + 7 = 18$

9. $5 + 5 + 8 = 18$

10. $5 + 6 + 7 = 18$

11. $6 + 6 + 6 = 18$

Vocês podem estarem perguntando, porque os primeiros dígitos dos respectivos 11 números estão em ordem crescente?
Bem, somente por questão de ordem, pois assim, é mais visível para saber qual número foi usado para não ser repetido. Observem que o último número, apesar de 6 + 6 + 6 = 18, é uma maneira de escrever 18 como soma de três algarismos, porém o número 666 não se encaixa no critério de Kaprekar, visto que ele não obedece a regra de ser pelo menos dois dígitos diferentes.

Feito isso, precisavamos entender se esses números encontrados teriam alguma relação com os 7 passos da operação feita para chegar na constante 495. Para isso foram feitos alguns testes com diferentes números de três algarismos para observar seus resultados.

2.3 Limitação do número de passos

Esta seção tem como embasamento teórico o artigo A rotina de Kaprekar, publicado na Revista do Professor de Matemática, Edição número 76, para mostrar a limitação do número de passos para se obter a constante de Kaprekar. O artigo demonstra a limitação para a constante de Kaprekar com 4 dígitos. Mas seguindo a ideia do artigo foi possível fazer também a demonstração para a constante de Kaprekar com 3 digítos.

Considere que se deseja a organização dos três algarismos de um número por ordem crescente e por ordem decrescente e que se deve subtrair o menor do maior.

De uma forma genérica, para um número com os algarismos a, b, c em que ($9 \geq a \geq b \geq c \geq 0$), o número maior pode ser escrito na forma 100a + 10b + c e o número menor pode ser escrito na forma 100c + 10b + a. Então, a primeira subtração será:

100a + 10b + c – (100c + 10b + a) =
100(a – c) + 10(b – b) + (c – a) =
99(a – c) + 10(b – b).

O valor possível de (a - c) é de 1 a 9 e (b - b) é de 0. Percorrendo todas as possibilidades, podemos ver todos os resultados possíveis da primeira subtração no processo. Eles são mostrados na Tabela.

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	099	198	297	396	495	594	693	792	891

Fonte: Acervo do autor

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	990	981	972	963	954	954	963	972	981

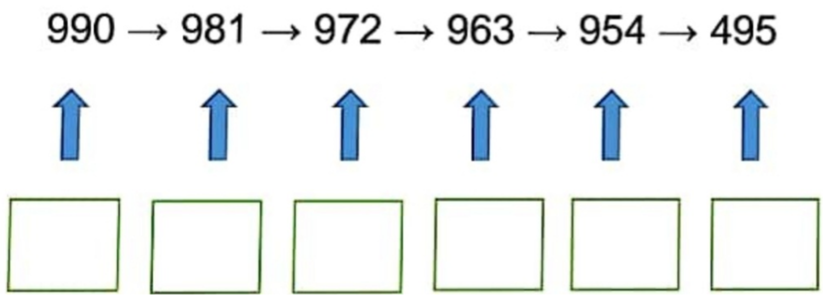
Fonte: Acervo do autor

Pode-se reorganizar a tabela, colocando os números com os algarismos por ordem decrescente, prontos para se aplicar a segunda subtração, observe:

Eliminando as duplicações de números, ficamos com apenas 5 números na tabela anterior para calcular o número de iterações necessárias até chegará constante de Kaprekar.

Resumindo, para um número qualquer de três algarismos, há apenas duas possibilidades: ao ordenarmos seus algarismos em ordem decrescente, obtemos um dos 5 números da tabela ou obtemos um desses 5 números após uma primeira aplicação do algoritmo de Kaprekar. Como o número máximo de iterações necessárias para os 5 números da tabela é cinco, o número máximo de iterações necessárias para qualquer número de três algarismos será seis.

A sequência sistematiza as iterações necessárias para os 5 números da tabela:



Voltando aos exemplos e observando o Exemplo 2 temos que 123 após a primeira subtração tem como resultado 198. Ao se ordenar os números temos 981 que é o segundo número da sequência. Então 123 entra no segundo retângulo (da esquerda para a direita) A partir daí, os resultados que aparecem seguem as setas da figura e são em número de 4, ou seja, no total foram necessários 5 passos para se chegar a constante.

Mais um exemplo. Observe o Exemplo 5. Após a primeira subtração tem como resultado 594. Então 127 entra no quinto retângulo (da esquerda para a direita) A partir daí, os resultados que aparecem seguem as setas da figura e só tem mais um, ou seja, no total foram necessários apenas 2 passos para se chegar a constante.

Capítulo 3

A constante de Kaprekar com quatro dígitos

Este capítulo abordará a Constante de Kaprekar com quatro dígitos de maneira a apresentar suas propriedades, exemplos e limitação do número de passos.

Para a constante de 4 dígitos, segue o mesmo raciocínio da constante de 3 dígitos, deve-se escolher qualquer número de 4 dígitos, em que ao menos dois sejam diferentes, incluindo o zero e aplicando uma operação de máximo 7 etapas. É necessário seguir alguns passos para obter a constante 6174.

Tomando com exemplo o número 1234, observe que possuem os quatro dígitos e ambos diferentes, obedecendo o critério acima.

1. Organize os dígitos do número 1234 em ordem decrescente, que fica 4321;

2. Organizando os dígitos mais uma vez, agora em ordem crescente, tem-se o número 1234;

3. Subtraindo o menor número do maior número, tem-se $4321 - 1234 = 3087$

4. Repetindo algumas vezes os três passos acima, chegará um momento que aparecerá o número 6174;

   Observe o restante dos passos:

5. $8730 - 0378 = 8352$

6. $8532 - 2358 = 6174$

   Refazendo o passo 6, tem-se:

7. $7641 - 1467 = 6174$

Percebe-se que, refazendo os passos 3 vezes, chegará no número 6174 e a partir dele pode ser repetido os passos n vezes que o resultado sempre será igual a 6174. Dito isso, não é viável prosseguir calculando.

No exemplo a seguir, foi escolhido um número que tenha o zero para ressaltar que não influenciará no resultado 6174, em até 7 passos.

Tomando como base o número 2005

1. $5200 - 0025 = 5175$
2. $7551 - 1557 = 5994$
3. $9954 - 4599 = 5355$
4. $5553 - 3555 = 1998$
5. $9981 - 1899 = 8082$
6. $8820 - 0288 = 8532$
7. $8532 - 2358 = 6174$
   Refazendo o passo 7
8. $7641 - 1467 = 6174$
   O resultado 6174 foi obtido no sétimo passo.

O processo acima também é conhecido como rotina de Kaprekar, sempre convergirá para o seu ponto fixo, o valor 6174, em no máximo sete passos.

3.0.1 Propriedades do número 6174

Vale ressaltar que diferente da constante de três dígitos (495), a constante de quatro dígitos tem algumas propriedades únicas, como:

1. 6174 é um Número Harshad, pois é divisível pela soma dos seus dígitos;
2. 6174 é um número suave-7, ou seja, nenhum de seus fatores primos é maior que 7. Assim, em teoria dos números , um n - Smooth é um número inteiro cujo fatores primos são todos menores ou iguais a n.
3. 6174 pode ser escrito como a soma dos três primeiros graus de 18: $18^3 + 18^2 + 18^1 = 5832 + 324 + 18 = 6174$.

3.1 Exemplos numéricos para a constante de Kaprekar com quatro dígitos

Nesta seção, serão apresentados alguns exemplos para a constante de Kaprekar com 4 dígitos.

Serão abordados a seguir 6 exemplos.

Exemplo 7 *Sendo o número 1235, tem-se que:*
•*5321 - 1235 = 4086*
•*8640 - 0468 = 8172*
•*8721 - 1278 = 7443*
•*7443 - 3447 = 3996*
•*9963 - 3699 = 6264*
•*6642 - 2466 = 4176*
•*7641 - 1467 = 6174*

Exemplo 8 *Sendo o número 1236, tem-se que:*
•*6321 - 1236 = 5085*
•*8550 - 0558 = 7992*
•*9972 - 2799 = 7173*
•*7731 - 1377 = 6354*
•*6543 - 3456 = 3087*
•*8730 - 0378 = 8352*
•*8532 - 2358 = 6174*

Nesses dois exemplos acima, ambos possuem 7 passos, mas diferente da constante de 3 dígitos, que obedece uma ordem e constância nos resultados, esses exemplos com 4 dígitos não obedecem. Como pode-se observar nos exemplos acima, aonde nenhum dos resultados são iguais de um exemplo para outro.

Exemplo 9 *Sendo o número 3000, tem-se que:*
•*3000 - 0003 = 2997*
•*9972 - 2799 = 7173*
•*7731 - 1377 = 6354*
•*6543 - 3456 = 3087*
•*8730 - 0378 = 8352*
•*8532 - 2358 = 6174*

Exemplo 10 *Sendo o número 2300, tem-se que:*
•*3200 - 0023 = 3177*
•*7731 - 1377 = 6354*
•*6543 - 3456 = 3087*
•*8730 - 0378 = 8352*
•*8532 - 2358 = 6174*

Nos exemplos 9 e 10, são exemplos que diferem no número de passos, mas possuem alguns resultados em comum, já que são exemplos que terminam com o número zero. Isso, não é uma regra, mas é uma caracteristica em comum entre eles.

Exemplo 11 *Sendo o número 1290, tem-se que:*
•*9210 - 0129 = 9081*
•*9810 - 0189 = 9621*
•*9621 - 1269 = 8352*
•*8532 - 2358 = 6174*

No exemplo 11, chega um momento que começa a repetir os mesmos dígitos dos dois exemplos anteriores.

Exemplo 12 *Sendo o número 1300, tem-se que:*
•*3100 - 0013 = 3087*
•*8730 - 0378 = 8352*
•*8532 - 2358 = 6174*

Exemplo 13 *Sendo o número 2400, tem-se que:*
•*4200 - 0024 = 4176*
•*7641 - 1467 = 6174*

Exemplo 14 *Sendo o número 2600, tem-se que:*
•*6200 - 0026 = 6174*

Nesses três últimos exemplos, apesar do número de passos serem diferentes, acontece o mesmo fato que no exemplo 11, no qual chegou um momento que começou a aparecer dígitos em comuns com os outros exemplos.

Sabe-se que, por critério de divisibilidade, um número é divisível por 4 quando termina em 00 ou quando o número formado pelos dois últimos algarismos for divisível por 4. De maneira parecida, um número é divisível por 8 quando possue final 000 ou que os três últimos algarismos sejam divisíveis por 8. Levando esse fato em consideração e observando alguns dos exemplos acima, é perceptível que tem números que são divisíveis tanto por 4 quanto por 8 ao mesmo tempo. Vale ressaltar também, que tem exemplos que os números não são divisíveis nem por um nem pelo outro.

Quanto a soma dos dígitos dos resultados das operações irão aparecer tanto soma iguais a 18 quanto iguais a 27.

3.2 Limitação do número de passos

Esta seção tem como embasamento teórico o artigo A rotina de Kaprekar, publicado na Revista do Professor de Matemática, Edição número 76, para mostrar a limitação do número de passos para se obter a constante de Kaprekar. O artigo demonstra a limitação para a constante de Kaprekar com 4 dígitos.

Chamando de iteração o número de passos e de frequência quantas vezes esse número repete. Observa-se um padrão nas contas para o caso de 4 dígitos, mas não a tal ponto de se explicar a existência da constante. Já o número de iterações necessárias depende dos algarismos que compõem o número selecionado inicialmente.

De acordo Malheiro e Gomes, no artigo adaptado ´RPM 76 - A rotina de Kaprekar´, existem 8.991 possibilidades de números obtidos pela combinação de quatro algarismos, desde 1000 até 9999, com a condição de que o número não tenha todos os algarismos iguais. Aplicando o processo de Kaprekar a esses 8.991 números, verifica-se que o número de iterações necessárias para se atingir a constante deKaprekar é no máximo sete. A tabela a seguir mostra, na coluna a direita, a quantidade de números (frequência) para os quais a quantidade de iterações necessárias para se chegar a constante de Kaprekar é o número da coluna a esquerda.

Iteração	**Frequência**
0	1
1	356
2	519
3	2124
4	1124
5	1379
6	1508
7	1980

Fonte: Acervo do autor

Pela análise desses dados, podemos verificar que a necessidade de três iterações para a obtenção da constante de Kaprekar é a situação mais comum, isto é, existem 2.124 números, entre os 8.991 possíveis, que necessitam da aplicação de três algoritmos da subtração, de acordo com as condições estipuladas, para se obter a constante de Kaprekar. Considera-se que a aplicação do algoritmo a própria constante (7641 – 1467 = 6174) não requer nenhuma operação, fato que na tabela está representado pela iteração "0".

O pesquisador Malcom Lines realizou um estudo sobre a aplicação da rotina de Kaprekar e verificou que, para se concluir qual é o número de iterações necessárias até se obter a constante de Kaprekar, não é necessário concretizar os algoritmos para todos os números de quatro algarismos.

Observe seu raciocínio.

Consideremos que se deseja a organização dos quatro algarismos de um número por ordem crescente e por ordem decrescente e que se deve subtrair o menor do maior. De uma forma genérica, para um número com os algarismos a, b, c, d em que ($9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$), o número maior pode ser escrito na forma 1000a + 100b +10c + d e o número menor pode ser escrito na forma 1000d + 100c + 10b + a. Então, a primeira subtração será:

1000a + 100b + 10c + d – (1000d + 100c + 10b + a) = 1000(a – d) + 100(b – c) + 10(c – b) + (d – a) = 999(a – d) + 90(b – c).

O valor possível de (a - d) é de 1 a 9 e (b - c) é de 0 a 9. Percorrendo todas as possibilidades, podemos ver todos os resultados possíveis da primeira subtração no processo. Eles são mostrados na Tabela.

999X(a–d)

	+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	999	1998	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991
	1	1089	2088	3087	4086	5085	6084	7083	8082	9081
	2	1179	2178	3177	4176	5175	6174	7173	8172	9171
	3	1269	2268	3267	4266	5265	6264	7263	8262	9261
90X	4	1359	2358	3357	4356	5355	6354	7353	8352	9351
(b–c)	5	1449	2448	3447	4446	5445	6444	7443	8442	9441
	6	1539	2538	3537	4536	5535	6543	7533	8532	9531
	7	1629	2628	3627	4626	5625	6624	7632	8622	9621
	8	1719	2718	3717	4716	5715	6714	7713	8712	9711
	9	1809	2808	3807	4806	5805	6804	7803	8802	9801

Números obtidos após a primeira subtração

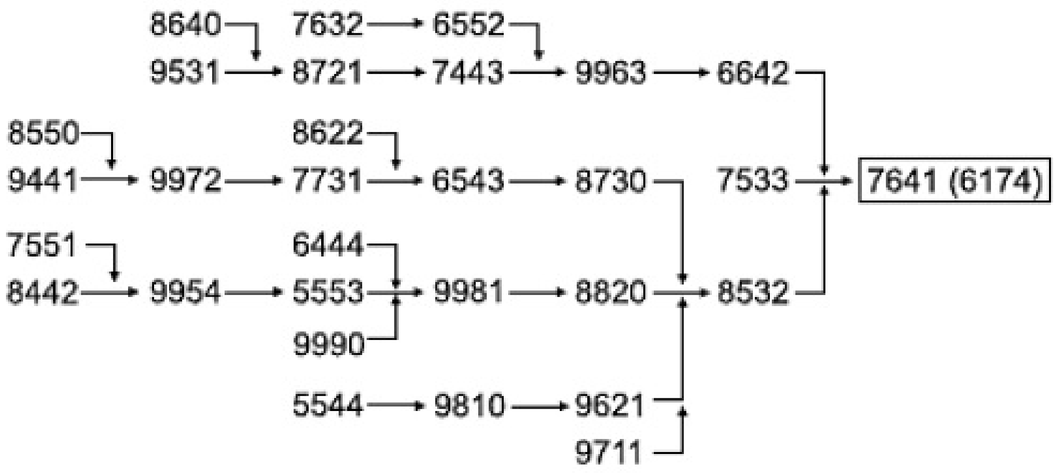
Na tabela apresentada, os números que estão na zona sombreada (que corresponde aos números em que (a–d) $<$ (b–c)) podem ser excluídos, uma vez que estamos apenas interessados em números com algarismos não todos iguais e com $a > b > c > d$. Podemos então reorganizar a tabela, colocando os números com os algarismos por ordem decrescente, prontos para se aplicar a segunda subtração:

999X(a–d)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	9990	9981	9972	9963	9954	9954	9963	9972	9981
	1	9810	8820	8730	8640	8550	8640	8730	8820	9810
	2		8721	7731	7641	7551	7641	7731	8721	9711
	3			7632	6642	6552	6642	7632	8622	9621
90X	4				6543	5553	6543	7533	8532	9531
(b–c)	5					5544	6444	7443	8442	9441
	6						6543	7533	8532	9531
	7							7632	8622	9621
	8								8721	9711
	9									9810

Números máximos organizados para a segunda subtração

Eliminando as restrições e as duplicações de números, ficamos com apenas 30 números na tabela anterior para calcular o número de iterações necessárias até chegará constante de Kaprekar. Resumindo, para um número qualquer de quatro algarismos, há apenas duas possibilidades: ao ordenarmos seus algarismos em ordem decrescente, obtemos um dos 30 números da tabela ou obtemos um desses 30 números após uma primeira aplicação do algoritmo de Kaprekar. Como o número máximo de iterações necessárias para os 30 números da tabela é seis, o número máximo de iterações necessárias para qualquer número de quatro algarismos será sete. O diagrama sistematiza as iterações necessárias para os 30 números da tabela:



Voltando aos exemplos e observando o Exemplo 7 temos que 1235 após a primeira subtração tem como resultado 4086. Ao se ordenar os números temos 8640 que é o número que está na primeira linha a esquerda. Então 1235 entra na sequência pelo número 8640. A partir dai, os resultados que aparecem seguem as setas da figura e são em número de 6, ou seja, no total foram necessários 7 passos para se chegar a constante.

Mais um exemplo. Observe o Exemplo 13. Após a primeira subtração tem como resultado 4176. Ao se ordenar os números temos 7641. Então 6174 entra na última casa da figura. A partir daí, os resultados que aparecem seguem as setas da figura e só tem mais um, ou seja, no total foram necessários apenas 2 passos para se chegar a constante.

3.3 Tentativas frustradas

Há muitos questionamentos sobre fundamentos que possam explicar a rotina e constante de Kaprekar.

3.3.1 Frustração 1: Encontrar padrão

Uma boa parte do trabalho desta monografia foi tentar encontrar uma explicação algébrica para a constante de Kaprekar.

Uma das tentativas consistiu em fazer uma indução sobre as lacunas entre os números que ocupam centena e dezena. Por exemplo, para o número 1245 dizemos que a lacuna entre centena e dezena foi de uma unidade. Já para o número 1278 dizemos que a lacuna foi de 4 unidades. Para o número 123 dizemos que a lacuna é de zero unidades entre a centena e a dezena.

A tabela a seguir mostra o tipo de cálculo que foi feito no sentido de encontrar um padrão em números diferentes mas que tivessem a mesma lacuna entre a centena e a dezena.

Chamando o número de abc com $a < b < c$, abrindo as contas em vários passos e usando o recurso de **tomar emprestado** quando necessário foram feitas várias contas na busca de um padrão.

Mas não se encontrou nenhum padrão.

Passo 1 *cba – abc; Abrindo as contas: C indica centena, D indida dezena e U unidade*

Tabela 3.1: Passo 1 do exemplo 1

	C	D	U
	$\overset{c-1}{\cancel{c}}$	$10+\overset{b-1}{\cancel{b}}$	$10+a$
-	a	b	c
	$c-1-a$	9	$10+a-c$

Fonte: Acervo do autor

De forma que $c-1-a=1$ *e* $10+a-c=8$

Observe que, de início, tinha na casa das unidades apenas a - c, mas pelo critério que foi colocado (a é menor que c), se fez necessário pedir emprestado na casa da dezena, que por sua vez tinha b - c e com o emprestimo ficou com (b - 1) - c. Para que após o empréstimo fosse possível fazer a subtração dos valores da casa da unidade, que ficou (10 + a) - c. De maneira análoga, foi feito o mesmo processo para as outras casas.

3.3.2 Frustração 2: Generalizar a constante para 5 ou 6 dígitos

Se existe uma constante para números com 3 dígitos e para números com 4 dígitos, uma pergunta natural é: Existe uma constante para números de 5 ou 6 dígitos?

Após muitas tentativas, a resposta é um sonoro NÃO.

O que acontece no caso de 5 e de 6 dígitos é a repetição de um ciclo, após um determinado número de passos, mas não a estabilização em uma constante.

Outro fato surpreendente foi que analisando o comportamento dos números de 5 dígitos, eles se parecem mais com o números de 3 dígitos do que com os números de 4 dígitos.

Até agora não se tem uma explicação algébrica para a existência da constante para números de 3 e de 4 dígitos.

A verdade é que até agora tudo parece se resumir a uma feliz e bonita coincidência que proporciona interesse e motivação para novas descobertas.

3.3.3 Um remédio para a frustração

Já que não foi possível encontrar uma explicação algébrica para a constante e nem generalizar a constante, fez-se uma outra pergunta: qual problema de teoria de números teve uma solução anunciada recentemente?

Para surpresa geral, foi encontrada a solução para o número 33 como soma de três cubos, que será o assunto do próximo capítulo. O próximo capítulo é propositalmente escrito com uma linguagem mais jornalística, como uma boa notícia.

Capítulo 4

Soma de três cubos

Nesse capítulo será abordada um pouco sobre a teoria da soma de cubos e a descoberta de uma solução para esse enigna. Este capítulo é propositalmente escrito com uma linguagem mais jornalística, como uma boa notícia.

Um teórico de números, prodígio da programação, encontrou uma solução para $33 = x^3 + y^3 + z^3$, uma equação muito estudada que ficou sem solução por 64 anos.

Os matemáticos sempre se perguntaram se é possível expressar o número 33 como a soma de três cubos, ou seja, se a equação $33 = x^3 + y^3 + z^3$ tem uma solução. Eles sabiam que 29 poderia ser escrito como $3^3 + 1^3 + 1^3$, por exemplo, enquanto 32 não pode ser escrito como a soma de três inteiros cada um elevado a terceira potência. Mas o caso 33 ficou sem solução por 64 anos.

Agora, Andrew Booker, um matemático da Universidade de Bristol, finalmente resolveu: Ele descobriu que $(8.866.128.975.287.528)^3+(-8.778.405.442.862.239)^3+(-2.736.111.468.807.040)^3 = 33$.

Booker encontrou este estranho trio de inteiros de 16 dígitos, inventando um novo algoritmo de busca para separá-los de quatrilhões de possibilidades. O algoritmo foi executado em um supercomputador da universidade por três semanas seguidas. (Ele diz que acha que levaria seis meses, mas uma solução "apareceu antes que eu esperasse".) Quando a notícia de sua solução chegou a Internet no início deste mês, os teóricos dos números e os entusiastas da matemática estavam cheios de entusiasmo. De acordo com um vídeo Numberphile sobre a descoberta, o próprio Booker literalmente pulou de alegria em seu escritório quando descobriu.

Por que essa alegria? Parte disso é a simples dificuldade de encontrar tal solução. Desde 1955, os matemáticos usaram os computadores mais poderosos que podem obter para pesquisar a reta numérica por trios de inteiros que satisfazem a equação "soma de três cubos" $k = x^3 + y^3 + z^3$, onde k é um número inteiro.As vezes as soluções são fáceis, como acontece com k = 29; outras vezes, sabe-se que uma solução não existe, como acontece com todos os números inteiros que deixam para trás um resto de 4 ou 5 quando dividido por 9, como o número 32.

Mas, geralmente, as soluções são "não triviais". Nesses casos, o trio de inteiros em cubos - como $(114.844.365)^3 + (110.902.301)^3 + (-142.254.840)^3$, que equivale a 26 - parece mais um bilhete de loteria do que qualquer coisa previsível. Por ora, a única maneira de os teóricos de números descobrirem essas soluções é jogar a "loteria" matemática repetidas vezes, usando a força bruta da pesquisa assistida por computador para experimentar diferentes combinações de inteiros em cubos e esperar por uma “vitória”.

Mas mesmo com computadores cada vez mais poderosos e algoritmos mais eficientes lançados contra o problema, alguns números inteiros recusaram-se obstinadamente a obter ingressos vencedores. E 33 foi um caso especialmente teimoso: até que Booker encontrou sua solução, era um dos dois inteiros restantes abaixo de 100 (excluindo aqueles para os quais as soluções definitivamente não existem) que ainda não podiam ser expressos como uma soma de três cubos. Com 33 fora do caminho, o único remanescente é 42.

A razão pela qual demorou tanto tempo para encontrar uma solução para 33 é que pesquisar o suficiente até a linha numérica - até 1016, ou dez quadrilhões, e até os inteiros negativos - para o trio numérico correto era computacionalmente impraticável, até que Booker inventou seu algoritmo. ”Ele não apenas executou essa coisa em um computador maior em comparação com os computadores de 10 anos atrás - ele encontrou uma maneira genuinamente mais eficiente de localizar as soluções”, disse Tim Browning, um teórico de números do Instituto de Ciência e Tecnologia da Áustria.

Algoritmos anteriores ”não sabiam o que estavam procurando”, explicou Booker; eles poderiam pesquisar eficientemente um dado intervalo de inteiros para soluções para $k = x^3 + y^3 + z^3$para qualquer número inteiro k, mas eles não eram capazes de mirar em um específico, como k = 33. O algoritmo de Booker poderia, e assim funciona “Talvez 20 vezes mais rápido, em termos práticos”, ele disse, do que algoritmos que adotam uma abordagem não direcionada.

4.1 Tradução do artigo Cracking the problem with 33, de Booker

Essa seção é uma tradução do artigo de Booker, ”Cracking the problem with 33”, inspirado no vídeo Numberphile ”The uncracked problem with 33”de Browning e Brady Haran.

Seja k um número inteiro positivo com $k \not\equiv \pm 4 \pmod 9$. Então Heath-Brown conjeturou que existem infinitamente muitos triplos $(x, y, z) \in Z^3$ de tal forma que
$k = x^3 + y^3 + z^3$ (1)

Várias investigações numéricas de (1) foram realizadas, começando já em 1954; Existe um relato completo da história dessas investigações até 2000. Os cálculos realizados desde então foram dominados por um algoritmo devido a Elkies. O mais recente de que temos conhecimento é o artigo de Huisman (baseado no implementação por Elsenhans e Jahnel), que determinou todas as soluções para (1) com $k < 1000$ e $max|x|, |y|, |z| \leq 10^{15}$. Em particular, Huisman relata que as soluções são conhecido por todos, exceto 13 valores de $k < 1000$:

$$33, 42, 114, 165, 390, 579, 627, 633, 732, 795, 906, 921, 975 \ (2)$$

O algoritmo de Elkies funciona encontrando pontos racionais perto da curva de Fermat $X^3 + Y^3 = 1$ usando a redução da base da rede; é bem adequado para encontrar soluções para muitos valores de k simultaneamente. Neste artigo, descrevemos uma abordagem diferente que é mais eficiente quando k é fixo. Tem a vantagem de encontrar comprovadamente todas as soluções com um limite na menor coordenada, em vez da maior, como no algoritmo de Elkies. Isso sempre produz um expansão não trivial do intervalo de pesquisa, uma vez que, além de um número finito de exceções que pode ser contabilizado separadamente, tem um

$$max|x|, |y|, |z| > \sqrt[3]{2}min|x|, |y|, |z|.$$

Além disso, empiricamente, o caso frequentemente é de que uma das variáveis é muito menor do que os outros dois, então esperamos que o ganho seja ainda maior na prática. Nossa estratégia é semelhante a algumas abordagens anteriores, e baseia-se na observação de que em qualquer solução, $k - z^3 = x^3 + y^3$ tem x + y como fator.

Nossa principal contribuição sobre as investigações anteriores é observar que com algumas compensações de espaço-tempo, o tempo de execução é quase linear no limite de altura e é bastante prático quando implementado em computadores modernos de 64 bits.

Em mais detalhes, suponha que (x, y, z) seja uma solução para (1), e assuma sem perda de generalidade que $|x| \geq |y| \geq |z|$. Então temos

$$k - z^3 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)\ .$$

Se $k - z^3 = 0$ então $y = -x$, e todo valor de x produz uma solução. Caso contrário, definindo $d = |x + y| = |x| + y$ sgn x, vemos que d divide $|k - z^3|$, e

$$\frac{|k-z^3|}{d} = x^2 - xy + y^2 = x(2x - (x + y)) + y^2 = |x|(2|x| - d) + (d - |x|)^2 = 3x^2 - 3d|x| + d^2,$$

De modo a

$$x, y = \frac{1}{2}sgn(k - z^3)(d \pm \sqrt{\frac{4|k-z^3|-d^3}{3d}})\ (3)$$

Assim, dado um valor candidato para z, há um procedimento eficaz para encontrar todos os valores de x e y, passando por todos os divisores de $|k - z^3|$. Já este algoritmo básico encontra todas as soluções com $min|x|, |y|, |z| \leq B$ no tempo O($B^{1+\epsilon}$), assumindo heurísticas padrão para a complexidade de tempo da fatoração de inteiros. Na próxima seção, explicamos como evitar fatoração e alcançar os mesmos fins de forma mais eficiente.

Metodologia

Para facilitar a apresentação, assumir que $k \equiv\ \pm 3(mod 9)$; note que isso vale para todo k em 2). Uma vez que o algoritmo básico descrito acima é razoável para encontrar pequenas soluções, assumiremos daqui em diante que $|z| > \sqrt{k}$. Além disso, se nos especializarmos (1) em soluções com $y = z$, então obtemos a equação de Thue $x^3 + 2y^3 = k$, que pode ser resolvida com eficiência. Usando o Thue solver em PARI / GP , verificamos que tais soluções não existem para o k em (2). Daí podemos ainda assumir que $y \neq z$.

Uma vez que $|z| > \sqrt{k} \geq \sqrt[3]{k}$, temos

$sgnz = -sgn(k - z^3) = -sgn(x^3 + y^3) = -sgnx$

Da mesma forma, como $x^3 + z^3 = k - y^3$ e $|y| \geq |z|$, temos $sgny = -sgnx = sgnz$. Multiplicando ambos os lados de (1) por $-sgnz$, obtemos assim

$|x|^3 - |y|^3 - |z|^3 = -ksgnz$. (4)

Defina $\alpha = \sqrt[3]{2} - 1$ e lembre-se de que $d = |x + y| = |x| - |y|$. Se $d \geq \alpha|z|$ então

-k sgn $z = |x|^3 - |y|^3 - |z|^3 \geq (|y| + \alpha|z|)^3 - |y|^3 - |z|^3$

$= 3\alpha(\alpha + 2)(|y| - |z|)z^2 + 3\alpha(|y| - |z|)^2|z|$

$\geq 3\alpha(\alpha + 2)|y - z|z^2$

Como $3\alpha(\alpha + 2) > 1$, isso é incompatível com nossas suposições de que $y \neq z$ e $|z| > \sqrt{k}$. Portanto, devemos ter $0 < d < \alpha|z|$.
Em seguida, reduzindo (4) módulo 3 e lembrando nossa suposição de que $k \equiv \pm 3 \pmod 9$, vejamos que

$d = |x| - |y| \equiv |z| \pmod 3$.

Deixe $\epsilon \in \pm 1$ seja assim que $k \equiv 3\epsilon (mod 9)$. Então, uma vez que cada cubo é congruente com 0 ou $\pm 1 \pmod 9$, devemos ter $x \equiv y \equiv z \equiv \epsilon \pmod 3$, de modo que sgn $z = \epsilon(\frac{|z|}{3}) = \epsilon(\frac{d}{3})$. Tendo em vista (3), obtemos uma solução para (1) se e somente se $d \mid z^3 - k$ e $3d(4|z^3 - k| - d^3) = 3d(4\epsilon(\frac{d}{3})(z^3 - k) - d^3)$ é um quadrado.

Em resumo, para encontrar todas as soluções para (1) com $|x| \geq |y| \geq |z| > \sqrt{k}$, $y \neq z$ e $|z| \leq B$, é suficiente resolver o seguinte sistema para cada $d \in Z \cap (0, \alpha B)$ coprime para 3:

$\frac{d}{\sqrt[3]{2}-1} < |z| \leq B$, sgn $z = \epsilon(\frac{d}{3})$, $z^3 \equiv k$ (mod d),

$3d(4\epsilon(\frac{d}{3})(z^3 - k) - d^3) = \square$. (5)

Nossa abordagem para resolver isso é direta: trabalhamos com os valores de d recursivamente por suas fatorações primárias, e aplicar o teorema do resto chinês para reduzir a solução de $z^3 \equiv k$ (mod d) para o caso do módulo de potência principal, ao qual se aplicam os algoritmos padrão. Deixe $r_d(k) = \#z$ (mod d) : $z^3 \equiv k$ (mod d) denotam o número de raízes cúbicas de k módulo d. Por estimativas analíticas padrão, uma vez que k não é um cubo, temos

$$\sum_{d \leq \alpha B} r_d(k) \ll_k B.$$

Heuristicamente, calcular as soluções de $z^3 \equiv k$ (mod p) para todos os primos $p \leq \alpha B$ pode ser feito com $O(B)$ operações aritméticas de inteiros em [0, α B].

Assumindo isso, pode-se ver que com o truque de inversão de lote de montgomery o esforço restante para determinar as raízes de $Z^3 \equiv k$ (mod d) para todos os inteiros positivos $d \leq \alpha B$ pode novamente ser realizado com $O(B)$ operações aritméticas.

Assim, podemos calcular todo z satisfazendo a primeira linha de (5), como uma união de progressões aritmética, em tempo linear. Para detectar soluções até a linha final, é crucial ter um método rápido de determinar se $\triangle := 3d(4\epsilon(\frac{d}{3})(z^3 - k) - d^3)$ é um quadrado. Primeiro notemos que para d fixo esta condição se reduz a encontrar um ponto integral em uma curva elíptica; especificamente, escrevendo $X = 12d|z|$ e $Y = (6d)^2|x - y|$, de (3) vemos que (X,Y) encontra-se na curva Mordell

$Y^2 = X^3 - 2(6d)^3(d^3 + 4\epsilon(\frac{d}{3})k)$. (6)

Assim, para d fixo, existem no máximo um número finito de soluções, e elas podem ser efetivamente limitada. Para alguns pequenos valores de d, é prático encontrar todos os pontos integrais em (6) e verificar se alguma solução resulta em (1). Por exemplo, usando a funcionalidade de ponto integral em magma, verificamos que não há soluções para k como em (2) e $d \leq 40$, exceto possivelmente para $(k, d) \in (579, 29), (579, 34), (975, 22)$.

Em seguida, notamos que algumas restrições de congruência e divisibilidade vêm gratuitamente:

Lema: Seja z uma solução para (5), seja p um número primo e defina $s = ord_p d$, $t = ord_p(z^3 - k)$. Então:

1. $z \equiv \frac{4}{3}k(2 - d^2) + 9(k + d)$ (mod 18);

2. se $p \equiv 2$ (mod 3) então $t \leq 3s$;

3. se $t \leq 3s$ então $s \equiv t$ (mod 2);

4. se $ord_p k \in 1, 2$ então $s \in 0, ord_p k$.

Prova:

Deixe $\triangle = 3d(4\epsilon(\frac{d}{3})(z^3 - k) - d^3)$. Escrevendo $\delta = \frac{d}{3}$, temos $|z| \equiv d \equiv \delta$ (mod 3). Observando isso $(\delta + 3n)^3 \equiv \delta + 9n$ (mod 27), modulo 27 temos

$\frac{\triangle}{3d} = 4\epsilon\delta(z^3 - k) - d^3 = 4|z|^3 - d^3 - 4\epsilon\delta k$

$\equiv 4[\delta + 3(|z| - \delta)] - [\delta + 3(d - \delta)] - 4\epsilon\delta k = 3(4|z| - d) - \delta[18 + 4(\epsilon k - 3)]$

$\equiv 3(4|z| - d) - d[18 + 4(\epsilon k - 3)] = 12|z| - 9d - 4\epsilon dk$

$\equiv 3|z| - 4\epsilon dk.$

Isso desaparece módulo 9, então para que $\triangle$ para ser um quadrado, ele deve desaparecer o mod 27 também. Por isso
$z = \epsilon\delta|z| \equiv \frac{4\delta dk}{3} \equiv \frac{4(2-d^2)k}{3} \pmod 9$

Reduzindo (1) módulo 2, vemos que $z \equiv k + d \pmod 2$, e isso resulta em (i). Em seguida, defina $u = p^{-s}d$ e $v = p^{-t}\epsilon\delta(z^3 - k)$, de modo que

$\triangle = 3(4p^{s+t}uv - p^{4s}u^4).$

Se $3s < t$ então $p^{-4s}\triangle \equiv -3u^4$ (mod 4p), mas isso é impossível quando $p \equiv 2 \pmod 3$, uma vez que -3 não é um módulo quadrado $4p$. Portanto, nesse caso devemos ter $t \leq 3s$.

Em seguida, suponha que $t \leq 3s$. Consideramos os seguintes casos, que abrangem todas as possibilidades:

1. Se $p = 3$, então $s = t = 0$, então $s \equiv t \pmod 2$.

2. Se $p \neq 3$ e $3s > t + 2ord_p2$, então $ord_p\triangle = s + t + 2ord_p2$, então $s \equiv t \pmod 2$.

3. Se $3s \in t, t+2$ então $s \equiv t \pmod 2$.

4. Se $p = 2$ e $3s = t + 1$ então $2^{-4s}\triangle = 3(2uv - u^4) \equiv 3 \pmod 4$, o que é impossível.

Assim, em qualquer caso, concluímos que $s \equiv t \pmod 2$.

Finalmente, suponha que $p \mid k$ e $p^3 \dagger k$. Se $s = 0$, então não há nada a provar, então assuma por outro lado. Desde $d \mid z^3 - k$, devemos ter $p \mid z$, de onde

$0 < s \leq t = ord_p(z^3 - k) = ord_pk < 3s$

Pela parte (iii) segue que $s \equiv ord_pk \pmod 2$ e, portanto, $s = ord_pk$. $\square$

Assim, uma vez que a classe de resíduo de z (mod d) é fixada, seu módulo de resíduo $lcm(d, 18)$ é determinado. Observe também que as condições (ii) e (iii) são eficientes para testar $p = 2$.

No entanto, mesmo com essas otimizações, existem $\gg BlogB$ pares d, z satisfazendo a primeira linha de (5) e conclusões (i) e (iv) do lema. Para alcançar melhor do que $O(BlogB)$ em tempo execução, portanto, requer a eliminação de alguns valores de z desde o início. Isso com uma compensação de espaço-tempo padrão. Para ser mais preciso, defina $P = 3(loglogB)(logloglogB)$, e deixe $M = \prod_{5\leq p\leq P} p$ ser o produto dos primos no intervalo $[5, P]$. Pelo teorema do número primo, temos $logM = (1 + o(1))P$. Se $\triangle$ é um quadrado, então para qualquer primo $p \mid M$ temos

$(\frac{\triangle}{p}) = (\frac{3d}{p})(\frac{|z|^3-c}{p}) \in 0, 1,$ (7)

Onde $c \equiv \epsilon(\frac{d}{3})k + \frac{d^3}{4}$ (mod M). Quando $lcm(d, 18) \leq \alpha B/M$, primeiro calculamos essa função para cada classe de resíduo $|z|$ (mod M), e selecione apenas os resíduos para os quais (7) vale para cada $p \mid M$. Pelo limite de Hasse, o número de resíduos permitidosé no máximo

$$\frac{M}{2^{\omega(M/(M,d))}} \prod_{p|\frac{M}{(M,d)}} (1 + O(\frac{1}{\sqrt{p}})) = \frac{M}{2^{\omega(M/(M,d))}} e^{O(\sqrt{P}/logP)},$$

e, portanto, o número total de valores z a considerar é no máximo

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{lcm}(d,18)\leq\frac{\alpha B}{M}} r_d(k)\left[M + \frac{e^{O(\sqrt{P}/\log P)}}{2^{\omega(M/(M,d))}}\frac{\alpha B}{d}\right] + \sum_{\substack{d\leq\alpha B\\ \mathrm{lcm}(d,18)>\frac{\alpha B}{M}}} \frac{r_d(k)\alpha B}{d}\\
&\ll_k B\log M + \frac{e^{O(\sqrt{P}/\log P)}}{2^{\omega(M)}}\sum_{g|M}\frac{2^{\omega(g)}r_g(k)}{g}\sum_{d'\leq\frac{\alpha B}{9gM}}\frac{r_{d'}(k)\alpha B}{d'}\\
&\ll_k B\log M + B\log B\frac{e^{O(\sqrt{P}/\log P)}}{2^{\omega(M)}}\prod_{p|M}\left(1+\frac{2r_p(k)}{p}\right)\\
&\ll BP + \frac{B\log B}{2^{(1+o(1))P/\log P}} \ll B(\log\log B)(\log\log\log B).
\end{aligned}$$

Para z que não são eliminados desta forma, seguimos uma estratégia semelhante com alguns outros módulos auxiliares M' composto de primos maiores, a fim de acelerar o teste do quadrado. Pré-calculamos tabelas de módulos de cubos M' e símbolos de Legendre módulo $p \mid M'$, para que o teste (7) seja reduzido a pesquisas de tabela. Somente quando todos esses testes passam é que calculamos $\triangle$ em aritmética de multi-precisão e aplique um teste de quadrado geral, e isso acontece para uma proporção cada vez menor de valores candidatos. Na verdade, esperamos que o número de Legendre testa para ser limitado em média, portanto, no total, encontrando todas as soluções com $|z| \leq B$ não deve exigir mais do que $O_k(B(loglogB)(logloglogB))$ em pesquisas de tabela e operações aritméticas em inteiros no $[0, B]$.

Assim, quando B se ajusta ao tamanho da palavra da máquina, esperamos que o tempo de execução seja quase linear, e isso é o que observamos na prática para $B < 2^{64}$.

Implementamos o algoritmo acima em C, com algumas rotinas de montagem em linha para aritmética de Montgomery escrita por Buhrow e a biblioteca primesieve de Walisch para enumerar números primos.

O algoritmo é naturalmente dividido entre os valores de d com um fator primo excedendo $\sqrt{\alpha B}$ e aqueles que são $\sqrt{\alpha B}$-smooth. O primeiro conjunto de d consome mais de dois terços de o tempo de execução, mas é mais facilmente paralelizado. Executamos esta parte no paralelo maciço cluster Bluecrystal Phase 3 no Advanced Computing Research Center, University of Bristol. Para o smooth d, usamos um pequeno cluster separado de 32 e 64 núcleos.

Buscamos soluções em (1) para k como em (2) e $min|x|, |y|, |z| \leq 10^{16}$, e encontramos os seguintes:

$$33 = 8866128975287528^3 + (-8778405442862239)^3 + (-2736111468807040)^3,$$

$$795 = (-14219049725358227)^3 + 14197965759741571^3 + 2337348783323923^3.$$

Também buscamos soluções para $k = 3$, abordando uma questão de Mordell . Neste caso, Cassels observou que a reciprocidade cúbica força a restrição adicional $x \equiv y \equiv z \pmod 9$, e segue-se que a parte (i) do lema pode ser atualizada para um módulo de congruência 162:

$$z \equiv 4(\tfrac{d}{3})d + 3(d^2 - 1) \pmod{162}.$$

Apesar dessa eficiência adicional, não encontramos soluções, além das soluções conhecidas de um dígito, com $min|x|, |y|, |z| \leq 10^{16}$. O tempo de execução foi de aproximadamente 8 anos-núcleo por número testado.

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho foi demonstrado que para obter a constante de Kaprekar, tanto com três quanto com quatro dígitos, não se faz necessário mais que sete passos, pois, a partir do momento que se obtém a constante, nos passos seguintes os resultados se repetirão.

Na constante de Kaprekar com três dígitos, foi demonstrado que, além de ser no máximo seis passos para se obter 495, foi mostrado também que dependendo do resultado obtido no primeiro passo da subtração, os próximos resultados tem uma ordem para aparecer até chegar na constante.

Já para a constante de Kaprekar com quatro dígitos, foi demonstrado apenas que, de fato existe uma delimitação de passos e este não passa de 7. Visto que,todos os cálculos feitos, tanto cálculos especifícos quanto genericamente, ainda não se tem uma solução que explique o porque de chegar no número 6174. Até então é somente algo bonito que não passa de uma mera coincidência.

Diante de tudo que se foi feito para a constante de quatro dígitos e mesmo assim não obter uma explicação satisfatória, foram feitos algumas contas com o caso de cinco dígitos, que mesmo sabendo que não possuia uma constante para tal caso, talvez algum resultado pudesse ser parecido ou até ajudar na solução para o caso de quatro dígitos. Entretanto, apesar de possuir algumas coincidências entre alguns resultados, este se parece mais com o caso de três dígitos do que com o caso de quatro dígitos.

Na soma de três cubos, foi abordado a solução para o número 33, na qual foi um resultado obtido por um algoritmo, inventado por Booker, e executado em um supercomputador por três semanas seguidas.

Referências Bibliográficas

[1] Booker, Andrew; Cracking the problem with 33, disponível em https://doi.org/10.1007/s40993-019-0162-1. Acesso: 2021/05/01

[2] Catarina Malheiro; Alexandra Gomes, RPM 76 – A rotina de Kaprekar, disponível em https://rpm.org.br/cdrpm/76/1.html. Acesso em: 2021/04/07;

[3] Chaves, Ana; Problema da soma de três cubos resolvido para o "teimoso"número 33, disponível em https://apchaves.ime.ufg.br/n/115178-problema-da-soma-de-tres-cubos-resolvido-para-o-teimoso-numero-33. Acesso:2021/05/01;

[4] G.H.Hardy Wright; E.M.Wright An introduction to the theory of numbers, 4 ed. Oxford: Great Britain the University Press (1960);

[5] José Plínio de Oliveira Santos Introdução a Teoria dos Números, 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA (2011);

[6] Martin Aigner; Gunter M. Ziegler As provas estão n'O LIVRO, 2 ed. Edgard Blucher Ltda (2002);

[7] Número misterioso 6174, disponível em https://plus.maths.org/content/os/issue38/features/nishiyama Acesso: 2021/04/11;

[8] O mistério dos números 6174 e 495 que intriga matemáticos há 70 anos, disponível em https://g1.globo.com/educacao/noticia. Acesso: 2019/08/27;