UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
UESB

Carlos Ferreira Farias Júnior

Aplicações da Teoria dos Grafos por meio do site Ghraph Online

Vitória da Conquista - Bahia
Agosto - 2021

Carlos Ferreira Farias Júnior

Aplicações da Teoria dos Grafos por meio do site Ghraph Online

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação da Prof. Cristina de Andrade Santos Reis

Vitória da Conquista - Bahia
2021

Folha de aprovação

Carlos Ferreira Farias Junior

Aplicações da Teoria dos Grafos por meio do site Ghraph Online

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Cristina de A. S. Reis

Cristina de Andrade Santos Reis - UESB
Orientadora

Antônio Augusto Oliveira Lima
UESB

Alexsandra Oliveira Andrade

Alexsandra Oliveira Andrade
UESB

Vitória da Conquista - BA
2021

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado forças para dedicar aos meus estudos e sabedoria para poder desenvolver e concluir este trabalho.

Agradeço imensamente aos meus queridos e amados pais Carlos Ferreira e Elza Lima e as minhas irmãs Camila Lima e Jéssica Aline, que não mediram esforços em me ajudar de maneira que eu conseguisse me dedicar somente aos estudos, pelas palavras de apoio quando eu acreditava ser impossível, pelo carinho, amor e por acreditarem em mim.

A todos os meus amigos e colegas da turma 2016.1 do curso de Licenciatura em Matemática - UESB, pelo incentivo, caminhando junto comigo, ajudado nas dificuldades, sempre me incentivando a não desistir.

A minha professora orientadora, Cristina de Andrade Santos Reis, meus mais genuínos agradecimentos. Pela sua paciência e compreensão, com que conduziu este trabalho, sempre disposta em me ajudar, me fazendo ter confiança que não estaria sozinho nessa caminhada. A ela toda a minha gratidão e respeito.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar algumas propriedades e definições importantes sobre Matrizes e Teoria dos Grafos para que possamos entender a parte teórica para ser aplicada em duas situações problemas. Além disso, é apresentado um capítulo sobre o uso das TICs no ensino da matemática que traz uma breve abordagem sobre as suas contribuições ao processo de ensino e aprendizagem e posteriormente é abordado o site Graph Online, um site onde possui ferramentas que o auxilia para a construção de um grafo, onde será utilizado para a criação dos grafos nas duas situações problemas apresentados. O trabalho está dividido em três partes, na primeira parte são abordados os conceitos e definições de Matrizes e Teoria do Grafos. Na segunda parte o uso das TICs nas aulas de matemática e a apresentação do site Graph Online e a terceira parte a aplicação onde serão abordadas duas situações problemas envolvendo os grafos onde serão aplicados os conceitos vistos anteriormente para a resolução dos problemas e a realização deles através do site.

Palavras-Chaves: Matrizes. Teoria dos Grafos. Tecnologia de Informação e Comunicação. Graph Online.

Índice

Introdução **5**

1 Matrizes **6**
1.1 Matrizes 6
1.2 Tipos de matrizes: 6
1.3 Matriz quadrada e suas diagonais: 7
1.4 Matriz Identidade: 9
1.5 Lei de Formação: 9
1.6 Operações com Matrizes: 9
1.7 Multiplicação de Matrizes: 11
1.8 Matriz Transposta: 11
1.9 Matriz Oposta: 12
1.10 Matriz simétrica: 12
1.11 Matriz Antissimétrica: 12
1.12 Matriz Inversa: 12

2 Teoria dos Grafos **14**
2.1 Definições Básicas 14
2.2 Grafos Dirigidos 16
2.3 Matriz de Adjacência 17

3 A Utilização de TIC no Ensino da Matemática **18**
3.1 As Tics no ensino: 18
3.2 Cenário de uso: 19
3.3 Apresentação do site: 20

4 Propostas de Atividades Envolvendo Matriz e Grafos **23**
4.1 Atividades envolvendo Matrizes e Grafos: 23
4.1.1 Atividade 1: 23
4.1.2 Atividade realizada no site Graph Online 25
4.1.3 Atividade 2: 27
4.1.4 Atividade realizada no site Graph Online: 29

Conclusão **31**

Conclusão **32**

Introdução

Este trabalho, visa o estudo da teoria dos grafos e matrizes através de situações problemas e o uso do site Graph Online. Tem como objetivo geral apresentar o site educacional Ghaph Online como suporte para o ensino-aprendizado dos conteúdos de Teoria dos Grafos e objetivos específicos: Desenvolver uma aplicação da teoria; Reconhecer os tipos de matrizes representadas, tais como suas definições e propriedades; Representar um grafo, suas definições e nomenclaturas; Utilizar o site Graph Online como ferramenta de ensino.

Matrizes é um conteúdo presente no currículo do ensino Médio e é composto por vários tipos, contendo propriedades e definições. Através dela podemos utilizar resoluções de problemas matemáticos e resolução de sistemas lineares, além disso podemos fazer aplicações em outras áreas.

Teoria dos grafos é um conteúdo estudado na graduação, sendo ele parte da área da Matemática. O estudo dos grafos são estruturas formadas por vértices que são conectados através de arestas entre si gerando assim um grafo, através deste grafo temos propriedades e nomenclaturas que serão apresentadas ao decorrer deste trabalho. Podemos utilizar Grafos para modelar diferentes situações, entre elas uma região de uma cidade, sendo assim, podemos identificá-los os vértices e as suas ligações.

Sendo assim, utilizando os conceitos e propriedades das Matrizes e da Teoria dos Grafos, tendo em vista que os seus conteúdos possuem uma ligação e que podemos utilizar para aplicações em situações problemas, este trabalho vai apresentar a relação desses conteúdos e como eles foram aplicados.

Para complementação do trabalho trazemos uma ferramenta que é aplicada às situações problemas. Buscando compreender o processo que o aluno se faz presente na atualidade em relação ao ensino e aprendizagem, é apresentado um site que podemos fazer diferentes representações de grafos, permitindo uma melhor visualização e melhor resolução dos problemas que serão apresentados neste trabalho.

Nos capítulos 1 e 2 apresentamos as ferramentas necessárias, fornecidas pela Teoria dos Grafos e Matrizes, suas definições, propriedades e nomenclaturas, para conseguir modelar os problemas propostos nos próximos capítulos. No capítulo 3, uma breve abordagem das TICs no ensino da Matemática e apresentaremos um site ao qual é possível a construção de Grafos. E, finalmente, no capítulo 4 exibimos duas aplicações envolvendo os grafos e representações de matrizes que também são solucionados através do site Graph Online.

Capítulo 1

Matrizes

Este capítulo é dedicado às classificações de matrizes, sendo apresentados os diferentes tipos de matrizes, a lei de formação de uma matriz com suas definições, teoremas e suas operações.

1.1 Matrizes

Definição 1.1.1 *Matriz é uma representação de um tabela cuja a sucessão de valores é composta por números reais onde é organizada em linhas e colunas sendo um quadro retangular de escalares* a_{ij} *da forma:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Uma matriz com **m** linhas e **n** colunas é denotada da matriz **m** por **n**, ou matriz $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$. Também classificada por a_{ij}, com i=1, ...,m e j=1, ...,n.

1.2 Tipos de matrizes:

Há alguns tipos especiais ao qual as matrizes são classificadas:

Definição 1.2.1 *Dizemos que uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $1 \times m$ *é uma* **matriz linha**, *que represetamos por:*

$$A\text{=}[a_{11}a_{12}...a_{1n}]$$

Definição 1.2.2 *Dizemos que uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $m \times 1$ *é uma* **matriz coluna**, *que represetamos por:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .. \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Definição 1.2.3 *Dizemos que uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* 1×1 *é uma* **matriz unitária**, *que represetamos por:*

$$A = [a_{11}]$$

Definição 1.2.4 *Dizemos que uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$ *é a* **matriz nula** *se seus elementos* a_{ij} *são todos nulos. Neste caso, denotamos A=0. Frequentemente, indicamos* $0_{m \times n}$ *para denotar uma matriz nula de ordem* $m \times n$*, onde pode causar alguma dúvida sobre a ordem da matriz.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{; } A \text{ é uma matriz nula de ordem } 2 \times 2$$

1.3 Matriz quadrada e suas diagonais:

Definição 1.3.1 *Dizemos que uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$ *é apresentada na forma quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas, caso contrário ela é da forma retangular.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{; } E \text{ é uma matriz retangular de ordem } 2 \times 3.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \text{; } B \text{ é uma matriz quadrada de ordem } 2 \times 2.$$

Tendo em vista que a matriz quadrada é sempre $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, com **m=n** ela possui as seguintes caracteristicas:
Ordem: com o mesmo número de linhas e colunas;
Chama-se **diagonal principal** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm os dois índices igual, isto é,

$$[a_{ij}\text{— i=j}] = [a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}]$$

Chama-se **diagonal secundária** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm soma dos indices igual a n+1, isto é,

$$[a_{ij}\text{—i+j=n+1}] = [a_{1n},\, a_{2,\ n-1},\, a_{3,\ n-2},\, ...,\, a_{n1}]$$

Definição 1.3.2 *Seja $U = [u_{ij}]$ uma matriz de ordem* $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$*. Dizemos que U é uma matriz* **triangular superior** *se os elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, isto é, u_{ij}=0 para j<i.*
Exemplo: A matriz U dada por:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz triangular superior.}$$

Definição 1.3.3 *Seja $L = [l_{ij}]$ uma matriz de ordem* $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$*. Dizemos que L é uma matriz* **triangular inferior** *se os elementos acima da diagonal principal são todos nulos, isto é, l_{ij}=0 para j>i.*
Exemplo: A matriz L dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz triagular inferior.}$$

Definição 1.3.4 *Seja $D = [d_{ij}]$ uma matriz de ordem* $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$*. Dizemos que D é uma matriz* **diagonal** *se os elementos fora da diagonal principal são todos nulos, isto é, d_{ij}=0 para $j \neq i$. Frequetemente, indicamos:*

$$D = diag(d_1,\ ...\ ,d_n),$$

para dizer que D é uma matriz diagonal de ordem $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$*.*
Exemplo: A matriz D dado por:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ; é uma matriz diagonal.}$$

1.4 Matriz Identidade:

Definição 1.4.1 *Uma matriz diagonal cujos elementos são todos iguais a 1 é denotada* **idetidade**. *Frequentemente, indicamos I_n para denotar uma matriz idetidade de ordem n.*

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ Identidade\ de\ ordem\ 2.$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ Identidade\ de\ ordem\ 3.$$

1.5 Lei de Formação:

Uma Lei de formação é caracterizada a partir dos valores da localização de cada termo, onde é formada uma equação para gerar valores para essa matriz através dos índices de linha e coluna do elemento.
Exemplo:

$$M_{3x2} = (a_{ij})_{3x2} = \begin{cases} 2i + j = se\ i = j \\ 3j - i = se\ i \neq j \end{cases}$$

$$M_{3x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

a_{11}=2.1+1=3; a_{22}=2.2+2=6
a_{12}=3.2-1=5 ; a_{21}=3.1-2=1 ; a_{31}=3.1-3=0 ; a_{32}=3.2-3=3.

$$M_{3x2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.6 Operações com Matrizes:

As Matrizes podem ser aplicadas às operações da aritmética, como iremos ver a seguir:
Igualdade de matriz: Duas Matrizes com a mesma ordem $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ são iguais, se, e somente se, os elementos que correspondem a essas matrizes sejam iguais, tanto as linhas como as colunas.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Adição e Subtração de Matrizes: Dadas duas matrizes de mesma ordem, iremos somar ou subtrair os elementos correspodentes de amabas as matrizes, ou seja, somar ou subtrair linha com linha e coluna com coluna.

Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem, $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{bmatrix}$$

A soma das Matrizes A e B, que se escreve A+B, é a matriz obitida somando-se os termos correspodentes:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2n} + b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

E a subtração, denotada por A-B, é a matriz obtida subtraindo dos termos correspondentes:

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & ... & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & ... & a_{2n} - b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & ... & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

O produto do escalar k pela matriz A é a matriz obitda multiplicando-se por k cada elemento de A:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ... & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ... & ka_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ... & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Teorema 1.6.1 *Sejam V o conjunto de todas as matrizes* $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ *sobre um corpo k (K= R). Então, para cada quaisquer matrizes A, B, C,* $\in$ *V e quaisquer escalares* k_1 *e* $k_2 \in k$*, temos:*
i) (A + B) + C = A + (B + C)
ii) A + 0 = A
iii) A + (-A) = 0

iv) A + B=B + A
v) k_1*(A + B)=* K_1A *+* K_1A
vi) $(k_1+k_2)A= k_1A + k_2A$
vii) $(k_1k_2)A= k_1(k_2A)$
viii) 1.A= A e 0A=0

1.7 Multiplicação de Matrizes:

Definição 1.7.1 *Dada as matrizes* $A=a_{ij}$ *e* $B=b_{ij}$ *com suas respectivos linhas e colunas sendo iguais, com A uma matriz* $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ *e B uma matriz* **n=p**. *Então o produto AB é uma matriz* C_{mxp} *cujo os elementos desta nova matriz C sejam representados pela soma dos produtos dos elementos correspodentes da linha A e j da coluna B:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1p} \\ \mathbf{a_{il}} & ... & \mathbf{a_{ip}} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & ... & \mathbf{b_{1j}} & .... & b_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{p1} & ... & \mathbf{b_{pj}} & .... & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ ... & \mathbf{c_{ij}} & ... \\ ... & ... & ... \\ c_{m1} & ... & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Observação: a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, o produto de AB é diferente do produto de BA.

Teorema 1.7.2 *Consideramos as matrizes A e B são definidas as seguintes propriedades:*
i) (AB)C=A(BC) (Lei associativa)
ii) A(B+C)=AB+AC (Lei distributiva à esquerda)
iii) (B+C)A=BA+CA (Lei distributiva à direita)
iv) K(AB)=(KA)B=A(KB) (k escalar)

1.8 Matriz Transposta:

Definição 1.8.1 *Se A é uma matriz de ordem* $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$*, denominamos* **transposta** *de A à matriz de ordem* $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ *obtida trocando-se as linhas pelas colunas. Denotamos a transposta da matriz A por* A^t
Exemplo:

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \textit{ onde tem a transposta } A^t_{3x2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.8.2 *A matriz trasposta apresenta as seguintes propriedades:*
i) $(A + B)^t$=A^t + B^t

ii) $(A^t)^t$=A
iii) $(kA)^t$=kA^t
iv) $(AB)^t$=B^tA^t

1.9 Matriz Oposta:

Definição 1.9.1 *É dado uma matriz oposta quando é obtida uma nova matriz com os sinais trocados de cada elemento. Então, se temos uma matriz representada por A, a sua oposta vai ser -A.*

Exemplo:

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \text{ a matriz oposta é } -A_{3x2} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$$

1.10 Matriz simétrica:

Definição 1.10.1 *Seja A = [a_{ij}] uma matriz quadrada. Dizemos que A é* **simétrica** *se* A^t = *A, isto é,* a_{ij} = a_{ij} *para todo i,j.*
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix} = A^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

1.11 Matriz Antissimétrica:

Definição 1.11.1 *Seja A uma matriz quadrada. Dizemos que A é* **anti-simétrica** *se* A^t = *-A, isto é,* $a_{ij} = -a_{ij}$ *para todos i,j.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} ;\ A^t = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} ;\ -A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Observação: necessariamente os elementos da diagonal sempre vão ser zero.

1.12 Matriz Inversa:

Definição 1.12.1 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz quadrada B, de ordem n, diz-se uma inversa da matriz A, se e somente se:*
A.B=A.B=i_n *(quando a matriz B é inversa da matriz A)*

$$A \text{ é inversa de } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} ;\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = l_2$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = l_2$$

Capítulo 2

Teoria dos Grafos

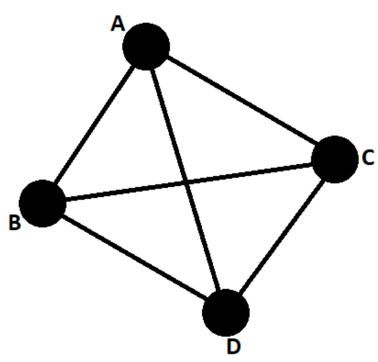
Neste capítulo, trataremos de estudar um pouco sobre a Teoria dos Grafos, incluindo representação de grafos, nomenclaturas e algumas definições importantes para melhor compreender os capítulos seguintes.

2.1 Definições Básicas

Definição 2.1.1 *Grafo é uma estrutura matemática composta de vértices e arestas ou nós representados por G (V,A), onde V é o conjunto de vértices e A o conjunto de arestas ou nós.*

Um Grafo G (V,A) é uma estrutura formada por conjuntos V e A, onde:
V – Conjunto não vazio: os vértices do grafo.
A – Conjunto de pares ordenados $\alpha = (v, w)$, v e w $\in$ V: as arestas do grafo .

Figura 1: Exemplo de um Grafo com 4 vértices e 6 arestas.



Fonte: Elaborado pelo autor

V = { A, B, C, D }.
A = {(A,B), (A,C), (A,D), (B,D), (C,B), (C,D)}

Definição 2.1.2 *Um grafo simples G é formado por um par (V(G), A(G)) onde V(G) é um conjunto não vazio e A(G) um conjunto de pares distintos não ordenados de elementos de V(G).*

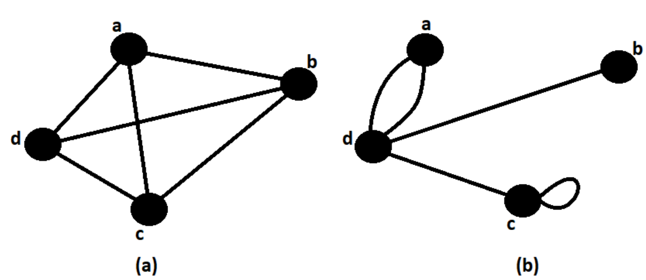
Definição 2.1.3 *Os elementos de V(G) são chamados de vértices e os elementos de A(G), arestas. Quando não houver risco de confusão, denotamos V(G) e A(G) apenas por V e A. Uma aresta* $\{a,b\} \in A(G)$ *será denotada simplesmente por ab, além disso, dizemos que ab contém os vértices a e b, ou que a e b pertencem à aresta ab. G – ab representa o grafo G menos a aresta ab de G – v o grafo G menos o vértice v e toda aresta que contém v.*

Definição 2.1.4 *Duas Arestas ab, cd* $\in$ *A em um grafo G são adjacentes se possuem um vértice em comum, isto é, a=c ou d, ou b=c ou d. Dizemos que uma aresta que ocorre mais de uma vez na família A é uma aresta múltipla e o número de ocorrência é sua multiplicidade. Uma aresta é um laço se para* $v \in V$, $vv \in A$ *(observe que arestas múltiplas e laços, não podem ocorrer em grafos simples). O grau de um vértice v é o número de arestas que contém v, denotado por g(v). Assim, um vértice ímpar (respectivamente par) é um vértice com grau ímpar (respectivamente par).*

Ao serem trabalhados com os grafos são representados graficamente por diagramas. Os vértices no gráfico são pontos e as arestas são segmentos (ou curvas) determinados por apenas dois desses pontos, ou seja, nenhum outro vértice está incluído.

Por exemplo, considere um grafo G com V = a,b,c,d e tomemos A de duas maneiras, a saber A = ab,ac,ad,bc,bd,cd e A = ad,ad,db,dc,cc conforme mostrado no exemplo a seguir. No primeiro caso, A é composto por diferentes pares de elementos de V, o que resulta em G como um grafo simples (Figura 2 (a)), no caso A é constituído por pares (nem todos distintos) de elementos (nem todos distintos) de V, donde obtemos que G é apenas um grafo (Figura 2 (b)).

Figura 2: (a) Grafo Simples; (b) Grafo.



Fonte: Elaborado pelo autor

Um grafo G que não possui arestas, isto é, A(G) = ∅, é dito nulo e seus vértices são isolados. Denotamos um grafo nulo com n vértices por N_n .

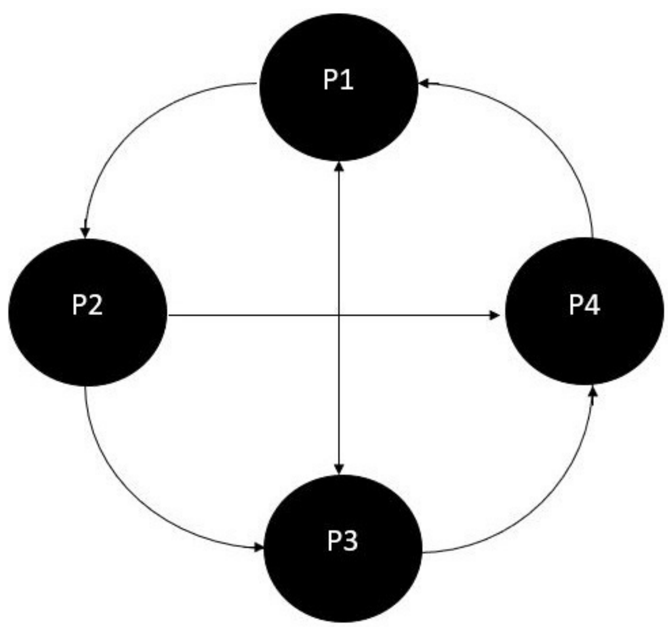
2.2 Grafos Dirigidos

A seguir são apresentados os grafos dirigidos e a relação com as matrizes, onde são mostradas como matrizes são empregadas para calcular o número de caminhos de um certo comprimento entre vértices de um grafo.

Definição 2.2.1 *Um* **grafo dirigido** *é um conjunto finito de elementos* $\{P_1,...,P_n\}$ *junto com uma coleção finita de pares ordenados* $(P_i,\ P_j)$ *de elementos distintos deste conjunto, sem repetição de pares ordenados. Os elementos do conjunto são chamados* **vértices** *e os pares ordenados* **arestas dirigidas** *do grafo dirigido.*

Dado um grafo dirigido $\{P_1,...,P_n\}$, a notação $P_i \rightarrow P_j$ indica que o elemento P_i está conectado ao elemento P_j. Neste caso, a aresta dirigida $(P_i.P_n)$ pertence ao grafo dirigido. Geometricamente, um grafo dirigido é visualizado representando os vértices como pontos no plano e as arestas dirigidas $P_i \rightarrow P_j$ como segmentos de reta ou de arco, desde o vértice P_i até o vértice P_j, com uma seta de P_i para P_j. Se ambos os vértices estão relacionados, isto é, $P_i \rightarrow P_j$ e $P_j \rightarrow P_i$, é desenhado somente um segmento entre P_i e P_j, mas com setas apontando em sentidos opostos. A figura 3 fornece uma representação de um grafo dirigido.

Figura 3: Representação de um grafo dirigido.



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir de um grafo dirigido de n vértices podemos associá-lo a uma matriz $M =_{(mij)}$ quadrada de ordem n. tal matriz é denominada matriz de vértices do grafo dirigido. Os elementos da matriz M, obedecem à seguinte regra:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, se\ p_i \to p_j \\ 0, se\ caso\ contrario \end{cases}$$

Exemplo: A matriz de vértices associada ao grafo da **Figura 3** é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pois:

	P1	P2	P3	P4
P1	0	1	1	0
P2	0	0	1	1
P3	1	0	0	1
P4	1	0	0	0

2.3 Matriz de Adjacência

Definição 2.3.1 *Dado um grafo G com n vértices e m arestas, sua matriz de adjacência é a matriz A de ordem* $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$*, cujo elemento* $_{ji}$ *é o numero de arestas ligando o vértice i ao vértice j.*

Ou seja, A partir de um grafo dirigido eu posso gerar uma Matriz de Adjacência, como no exemplo do grafo dirigido da Figura 3.

Capítulo 3

A Utilização de TIC no Ensino da Matemática

3.1 As Tics no ensino:

Foi pela busca de explicações e pelo desenvolvimento da sociedade, que os saberes matemáticos foram sendo implantados e se tornaram visivelmente presentes no dia-a-dia, seja numa ida ao supermercado, no preparo de uma receita, na construção de uma casa, no tempo, no jogo de futebol, etc. O processo de repassar esses conhecimentos, de geração para geração, se dá por meio da educação, que é "uma fração do modo de vida dos grupos sociais que a criam e recriam (BRANDÃO, 1993, p. 4), surgindo, o saber e ensinar o saber, que está correlacionado entre o ensinar e aprender.

Assim, o ensino se modifica conforme o desenvolvimento da sociedade, com novos meios de observação, de coleção de dados e processamentos desses dados, e a Matemática acompanha essas transformações, assim como o aluno, que está inserido num cenário moderno, em que as situações do dia- a- dia, requerem habilidades práticas da matemática.
Logo, percebe-se a importância do professor está atento às modificações da sociedade na sua prática em sala de aula, uma vez que, na mesma existem diversos alunos, cada um com suas próprias características e conhecimentos, que tornam esse espaço um ambiente diversificado, o que requer do educador a adequação e condução constantes. Essa adequação não é realizada de maneira casual, ela requer uma atenção quanto à metodologia em sala de aula, isto é, uma reflexão que visa aprimorar e remodelar conforme a necessidade do conjunto escolar (FONTANA; FÁVERO, 2013).

Buscando aprimorar a sua prática em sala de aula e fazer presente com aquilo ao qual os alunos estão inseridos no seu cotidiano, surge o processo das utilizações de TICS (Tecnologias da informação e Comunicação) no ensino. Vivemos em uma sociedade moderna em que grande parte das pessoas, independente da idade, tem fácil acesso aos recursos tecnológicos, incluindo alunos de todos os níveis de ensino. Neste contexto, o docente pode está desenvolvendo materiais pedagógicos através das TICS, propondo assim um ambiente interativo para a exploração dos conteúdos no processo de ensino e de aprendizagem.

Ao longo dos anos a sociedade vem em um avanço tecnológico, e a partir disso podemos encontrar as TICS em todos os lugares que vamos, inclusive no ambiente escolar. A maioria das escolas possuem computadores e tablets disponíveis para serem utilizados em sala de aula como uma ferramenta no processo de ensino-aprendizagem, onde eles estão interligados, fazendo com que "[...] a educação e as TICs andam juntas, pois com o avanço das mesmas as escolas precisam se adaptar para termos uma melhora na educação e formamos os nossos alunos também para viver nesta sociedade tecnológica [...]" (RIFFEL, 2018, p. 6). Sendo assim, "estes recursos podem se tornar aliados das aulas, a fim de demonstrar e construir conceitos matemáticos além de, desenvolver atividades dinâmicas." (BATTISTI, 2016, p.1).

O uso das tics possibilita ao docente oportunidades de um percurso de aprendizagem bem amplo, ao qual eles podem desenvolver materiais pedagógicos interativos através de várias ferramentas, pois "A tecnologia disponibiliza as mais diversas alternativas de comunicação permitindo a interação, por exemplo, com diversos modos de representação simbólica (gráficos, textos, imagens), o que poderá vir a se constituir em notáveis fontes de informação e interação." (FERREIRA, 2013, p.21), com isso podemos utilizar os diferentes meios que a tecnologia propõe para serem utilizadas em sala de aula ao aplicar algum assunto, seja ele por meio de softwares, aplicativos ou até mesmo sites que desenvolvam as mesmas funções.

A utilização das Tics pode constituir em uma importante ferramenta pedagógica no ensino-aprendizagem, tais recursos traz uma forma de dinamização no ensino para auxiliar nas aulas. Na Matemática, ela pode tornar os conteúdos mais atraentes para os alunos, por meio de programas/aplicativos, jogos computacionais, sites educativos e etc, fazendo com que os alunos despertem o interesse pelos conteúdos, sendo assim uma motivação pela aprendizagem da matemática.

3.2 Cenário de uso:

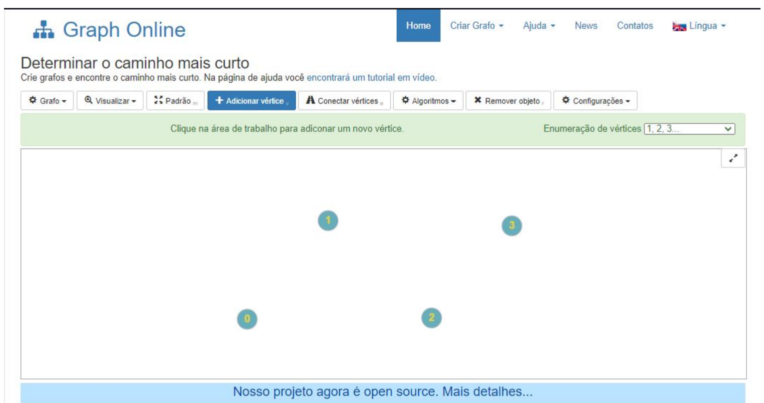
Como forma de abordar os conteúdos de matrizes e teoria dos grafos presentes neste trabalho, é apresentado um site intitulado Graph Online. Ele é um site gratuito que desenvolve grafos através de pontos dados ou por meio de uma matriz adjacente ou de incidência, sendo este site um suporte ao ensino-aprendizado da disciplina de Teoria dos Grafos.

3.3 Apresentação do site:

O Graph Online é um site desenvolvido para criação de grafos, com o seguinte endereço https://graphonline.ru/pt/ . Sua interface gráfica (Figura 4) é bastante simples com a barra de menus bem objetiva (Grafo, Visualizar, Padrão, adicionar vértice, conectar vértices, algoritmos, remover objeto, configurações) e uma barra de ferramentas (Home, Criar Grafo, Ajuda, News, Contatos).

Na Figura 4, destaca-se a ferramenta adicionar vértice, e em seguida foram adicionados quatro vértices, clicando nos respectivos lugares.

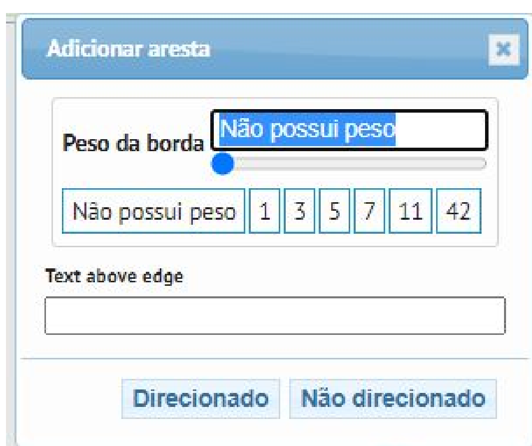
Figura 4: Interface gráfica do Graph Online, exibindo as barras de menu e ferramentas.



Fonte: https://graphonline.ru/pt/

Posteriormente, é usado a ferramenta conectar vértices, após clicar e selecionar o vértice desejado aparece uma janela para adicionar a aresta (Figura 5), nesta janela podemos ter a sua espessura, se queremos adicionar algum texto e se a aresta está direcionada ou não.

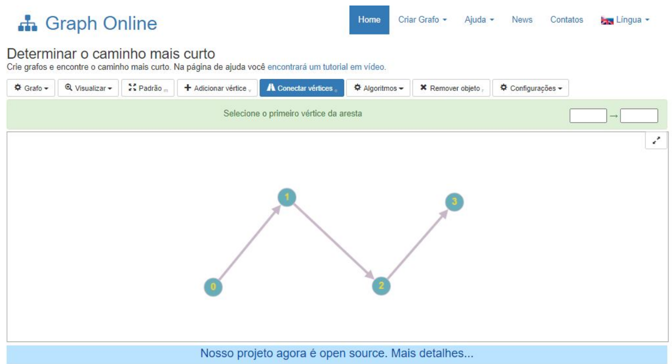
Figura 5: Interface gráfica do Graph Online, para adicionar arestas.



Fonte: https://graphonline.ru/pt/

Em seguida, se selecionarmos dois vértices e fazer o comando da aresta, temos a representação de um grafo (Figura 6) com seus respectivos vértices e arestas denominados.

Figura 6: Interface gráfica do Graph Online, exibindo o grafo definido.

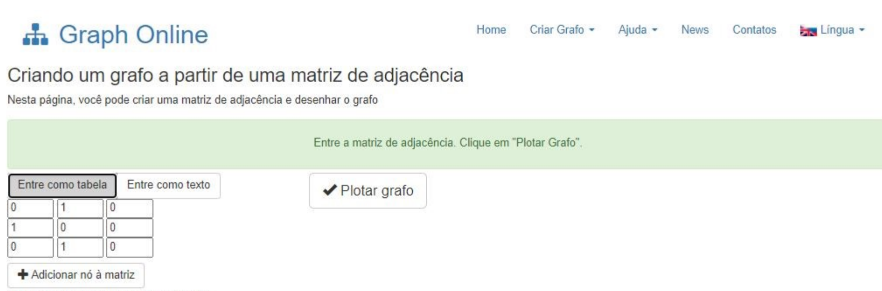


Fonte: https://graphonline.ru/pt/

Após a construção do grafo, podemos utilizar outras ferramentas para modificar o grafo e até mesmo encontrar algumas soluções. Na barra de menu, na parte de "grafo", podemos selecionar, ir até "renomear em grupo" e renomear cada vértice. Adicionar novos vértices e fazer novas arestas e até mesmo ir na ferramenta "algoritmos" e "Encontrar o caminho mais curto usando o algoritmo de Dijkstra" e selecionar dois vértices, com isso é gerado o comprimento do caminho mais curto do determinado grafo apresentado, sendo assim uma solução para um problema envolvendo grafos.

O Graph Online é um site para desenhar grafos que permite sua visualização previamente desenhada. Podemos utilizar nele as relações de adjacência e incidência entre os elementos do grafo que são exibidas na parte superior do site, na ferramenta criar grafo → Usando matriz de adjacência ou usando matriz de incidência. Temos como exemplo uma matriz de adjacência (Figura 7). Nela podemos colocar os dados em uma tabela ou entrar com o texto, após o seu preenchimento é só clicar no "Plotar Grafo" e automaticamente é gerado o grafo correspondente a esta matriz.

Figura 7: Interface gráfica do Graph Online, exibindo uma matriz de adjacência..



Fonte: https://graphonline.ru/pt/

Podemos também fazer o inverso, criar um grafo e a partir deste grafo gerar uma matriz adjacente.

O Graph Online permite salvar as informações geométricas e topológicas dos grafos, onde é gerado um link específico para que possam ser compartilhados os seus dados. Para isso é necessário ir na barra de ferramentas em "Grafo" → "Guardar", com isso já é gerado o link, ou até mesmo salvar a imagem do grafo realizado.

Capítulo 4

Propostas de Atividades Envolvendo Matriz e Grafos

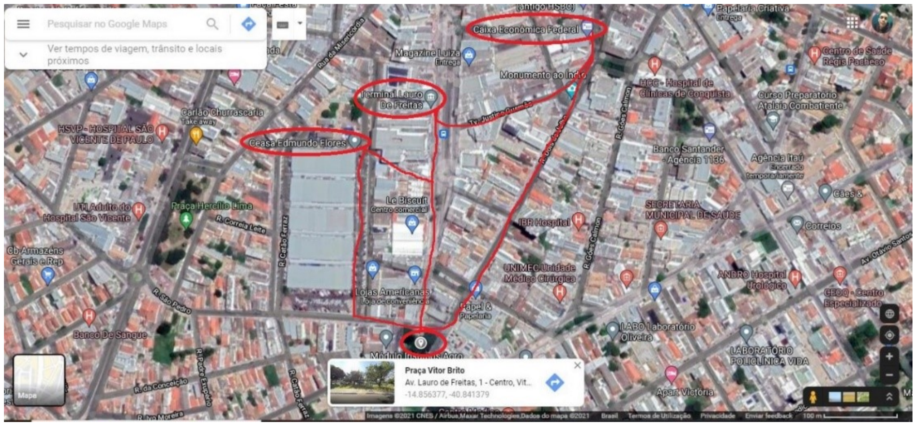
Neste Capítulo é apresentado dois problemas envolvendo a teoria dos grafos e o uso das matrizes. São duas situações problemas que serão utilizadas para gerar um grafo e a partir do grafo gerar a matriz adjacente e posteriormente ser feito o mesmo processo no site Graph Online.

4.1 Atividades envolvendo Matrizes e Grafos:

4.1.1 Atividade 1:

Uma Família composta por pai, mãe e filho, foi ao centro de Vitória da Conquista - Bahia para fazer a feira do mês no Ceasa Edmundo Flores. Ao chegar no Terminal Lauro de Freitas eles encaminharam para o Ceasa Edmundo Flores para realizar as compras, após comprar as verduras, eles decidiram comprar carne, porém não estavam com o dinheiro suficiente para realizar a compra, foi então que eles decidiram ir ao banco sacar o dinheiro, eles retiraram o dinheiro no Caixa Econômica Federal e retornaram ao Ceasa Edmundo Flores para realizar a compra da carne, após realizar a compra, o pai ao conversar com sua esposa decidiu voltar ao banco para retirar mais dinheiro, porém antes disso eles foram para a Praça Vitor Brito, onde o filho e a mãe ficaria esperando o pai ir ao banco. O pai foi ao banco e retirou outra parte do dinheiro, voltou pelo Terminal e se encaminhou até a praça para ir buscar o filho e sua esposa, após isso eles voltaram ao Terminal Lauro de Freitas e retornaram para casa.

Figura 8: Mapa centro de Vitória da Conquista.

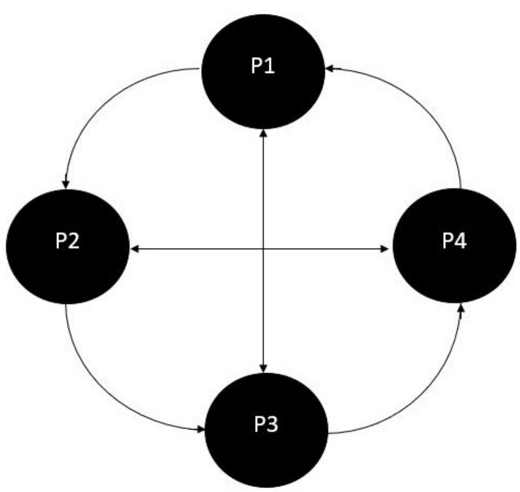


Fonte: Google Maps

Supondo que Terminal Lauro de Freitas seja P1, Ceasa Edmundo Flores seja P2, Praça Vitor Brito seja P3 e Caixa Econômica federal seja P4. Qual é a representação geométrica de um grafo dirigido do caminho percorrido apenas pelo pai?

Resolução: Terminal para o Ceasa (P1 →P2)
Ceasa para o Banco (P2 →P4)
Banco para o Ceasa (P4 →P2)
Ceasa para Praça (P2 →P3)
Praça para Banco (P3 →P4)
Banco para o Terminal (P4 →P1)
Terminal para a Praça (P1 →P3)
Praça para Terminal (P3 →P1)

Figura 9: Grafo dirigido desta situação.



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir deste grafo dirigido podemos associá-lo a uma matriz $M = m_{ij}$ quadrada de ordem n, que é denominada matriz de vértices do grafo dirigido. Os elementos da matriz, obedecem a seguinte regra:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, se\ p_i \rightarrow p_j \\ 0, se\ caso\ contrario \end{cases}$$

A matriz de vértices associada ao grafo da Figura 9 é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

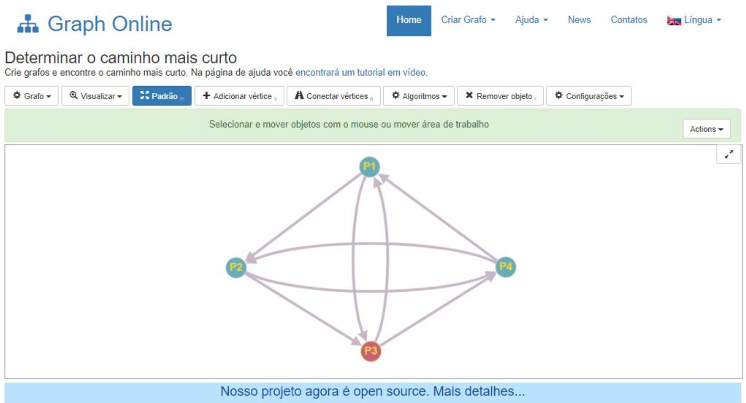
pois:

	P1	P2	P3	P4
P1	0	1	1	0
P2	0	0	1	1
P3	1	0	0	1
P4	1	1	0	0

4.1.2 Atividade realizada no site Graph Online

Agora vamos utilizar o site Graph Online para desenhar o grafo desta atividade e validar a matriz adjacente associada. Primeiro construímos os vértices, em seguida renomeamos cada um deles e posteriormente utilizando a ferramenta "Conectar vértices" criamos os vértices, finalizando assim a representação geométrica deste problema.

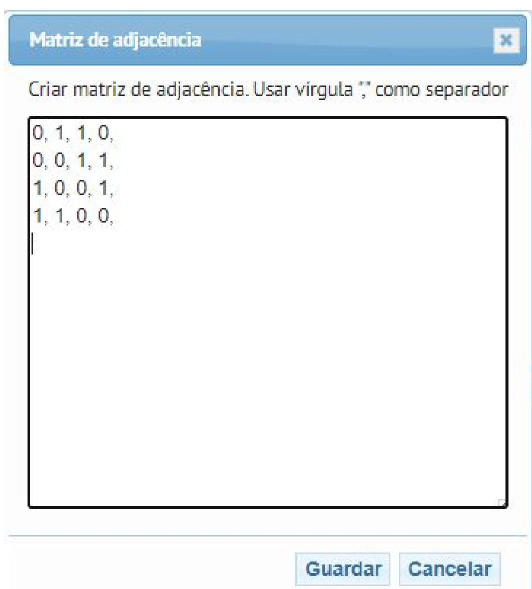
Figura 10: representação geométrica de um grafo dirigido do problema, no site Graph Online.



Fonte: https://graphonline.ru/pt/

Em seguida vamos utilizar este grafo para encontrar a matriz adjacente correspondente. Para isso é necessário ir na barra de ferramentas e selecionar "grafo" → Matriz de adjacência, surgindo então a janela (Figura 11). Logo, essa é a matriz de vértices associada ao grafo realizada no site Graph Online, o mesmo resultado utilizado anteriormente feito pela lei de correspondência.

Figura 11: representação geométrica de um grafo dirigido do problema, no site Graph Online.



Fonte: https://graphonline.ru/pt/

4.1.3 Atividade 2:

Uma empresa de influencers possui 7 mulheres que são contratadas para fazerem divulgações de suas marcas e a cada ano são selecionadas duas pessoas desta empresa para coordenar um evento da empresa, porém Gabriela e Bianca já foram selecionadas no ano anterior, sendo assim o chefe dessa empresa pediu para que elas indicassem dois possíveis candidatos. Acreditando que a pessoa escolhida será amiga em comum de ambas, o patrão decidiu consultar uma rede social onde todos os funcionários possuem e notou-se o seguinte:

Amanda possui quatro amigos de seu trabalho nessa rede social, são elas, Bianca, Carine, Eva e Gabriela;

Bianca possui três amigos, Amanda, Fernanda e Gabriela;

Carine possui dois amigos, Amanda e Daiane;

Daiane possui dois amigos, Carine e Eva;

Eva possui três amigos, Amanda, Daiane e Gabriela;

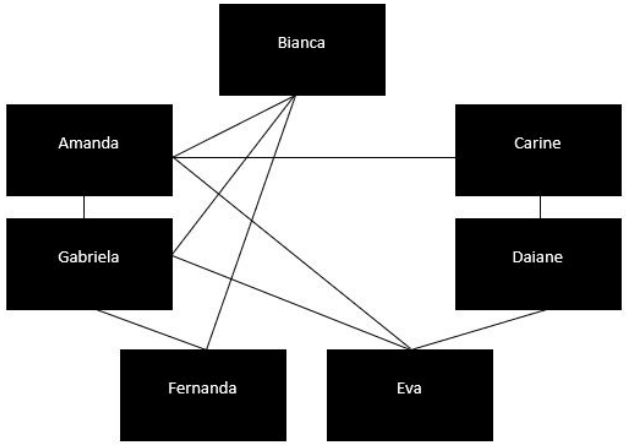
Fernanda possui dois amigos, Bianca e Gabriela;

Gabriela possui quatro amigos, Amanda, Bianca, Eva e Fernanda.

Analisando essas relações de amizades, quais devem ser as duas prováveis indicações de Bianca e Gabriela?

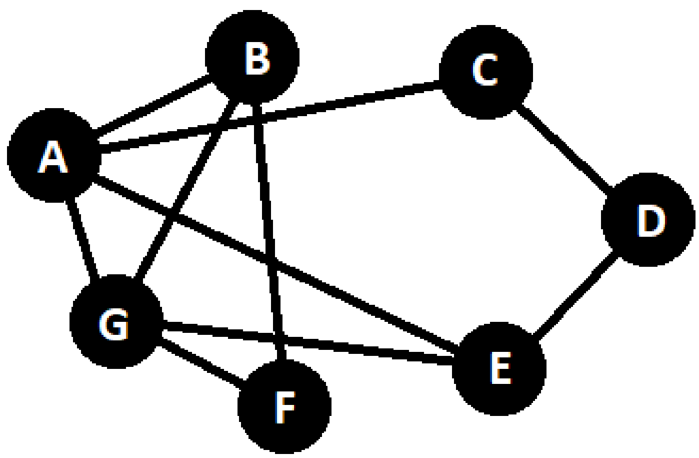
No Exemplo 2, através das relações entre os funcionários desta empresa contida nesta rede social, podemos representá-los em forma de grafo, onde os funcionários são os vértices do grafo e as amizades entre eles são as arestas. Sendo assim, temos o conjunto vértice formado por V = Amanda, Bianca, Carine, Daiane, Eva, Fernanda, Gabriela, e o conjunto de arestas U = (A, B), (A, C), (A, E), (A, G), (B, F), (B, G), (C, D), (D, E), (E, G), (F, G) onde está representado pela inicial de cada nome, gerando assim o grafo G = (V, U).
A partir desses dados podemos representar o grafo com suas arestas e vértices. As imagens a seguir temos representado o grafo a partir dos nomes dos funcionários (Figura 12) e através das suas iniciais (Figura 12):

Figura 12: Representação do grafo do problema, a partir dos nomes dos funcionários.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 13: Representação do grafo do problema, através das suas iniciais.



Fonte: Elaborado pelo autor

Os nomes e as iniciais são os vértices e as arestas são representadas pelas amizades deles na rede social, fazendo com que a solução para o problema seja de melhor visualização. Sendo assim, observamos que os amigos em comum de Bianca e Gabriela, pelo diagrama são os vértices que tem ligação com B e G, verificando que A e F são os pontos desejados pela atividade 2, mostrando que Amanda e Fernanda são os amigos em comum ao qual o problema estava procurando.

Ao observar este grafo podemos complementa-lo utilizando a ideia de matriz de vértices do grafo dirigido, sendo utilizado uma lei de formação, que obedeçam a seguinte regra:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, se\ p_i \to p_j \\ 0, se\ caso\ contrario \end{cases}$$

Ou seja, a matriz de vértices associada ao grafo é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

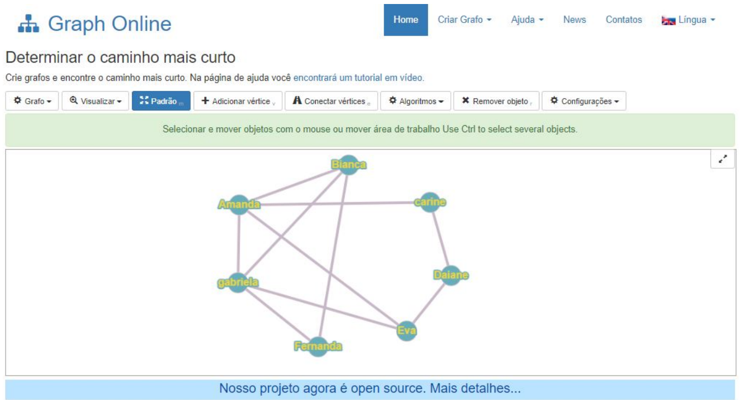
pois:

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	1	0	1	0	1
B	1	0	0	0	0	1	1
C	1	0	0	1	0	0	0
D	0	0	1	0	1	0	0
E	1	0	0	1	0	0	1
F	0	1	0	0	0	0	1
G	1	1	0	0	1	1	0

4.1.4 Atividade realizada no site Graph Online:

Vamos utilizar agora o site Graph Online para validar os resultados obtidos neste problema. Primeiro iremos colocar sete pontos, que serão os vértices deste grafo. Em seguida, na barra de ferramentas clique na opção “Grafo” e em “Renomear em Grupo” e digitar os respectivos nomes dos vértices do problema e posteriormente, conectar os vértices, ficando assim o grafo desejado (Figura 14).

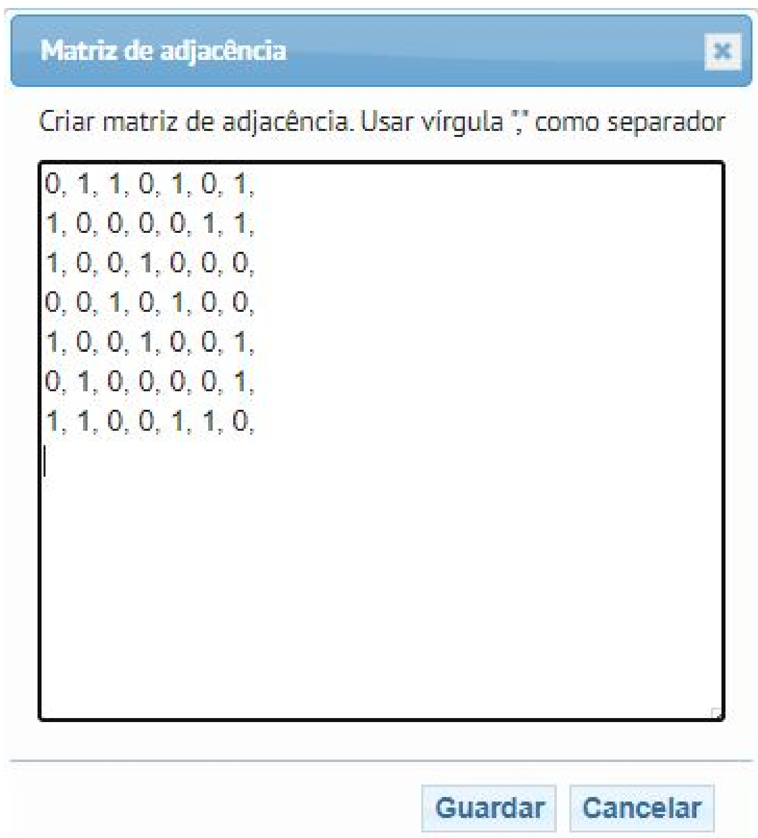
Figura 14: Interface gráfica do Graph Online, com o grafo desejado.



Fonte: https://graphonline.ru/pt/

Podemos agora gerar a matriz de adjacência deste grafo, usando a ferramenta grafo e selecionando a opção "Matriz de adjacência", surgindo assim a tabela com os respectivos dados da matriz (Figura 15).

Figura 15: Interface gráfica do Graph Online, com a matriz adjacente do grafo realizado.



Fonte: https://graphonline.ru/pt/

Conclusão

Com os conteúdos envolvendo as Matrizes e a Teoria dos Grafos podemos modelar enumeras situações, representá-los e solucioná-los. Neste trabalho recorremos a modelar dois problemas, seja ela através de um grafo ou por meio de uma Matriz, que nas situações foi utilizado a matriz adjacente.

Começamos o trabalho estudando um pouco sobre as matrizes e a teoria dos grafos, onde foram apresentados os conceitos e definições para que seja aplicado posteriormente nos problemas apresentados. Sendo assim, foi realizada uma revisão dos conteúdos, para que sejam melhor aplicados.

Para enriquecer o trabalho foi apresentada uma breve discussão sobre o uso das TICs no ensino. Com isso percebesse a importância da utilização de programas e sites educacionais para melhor compreensão dos conteúdos por parte dos alunos, tendo em vista que estamos em uma sociedade tecnológica e que tudo gira através dessas ferramentas. Logo, ao utilizar um equipamento que se faz presente no cotidiano dos alunos, e aplicarmos os conteúdos os matemáticos, podemos despertar no aluno um melhor entendimento do conteúdo trabalhado.

Sendo assim, foi utilizado um site que faz a representação dos grafos e aplicamos nos problemas apresentados. Com isso, percebemos que os conteúdos matemáticos podem ser utilizados através de ferramentas computacionais e elas podem desenhar os problemas e solucioná-los.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, Lucas Amorim. Teoria dos grafos e o problema do carteiro chines. Orientador: Júlio César Reis. 2018. 67 f. Dissertação (Graduação) - Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade estadual do Sudoeste da Bahia, para a obtenção do título de Licenciado em Matemática., Vitória da Conquista, 2018.

[2] ANTON, Howard; RORRES Chris. Álgebra Linear com Aplicações. 8a edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[3] BATTISTI, Sabrina; SCHEFFER, Nilce Fátima. A UTILIZAÇÃO DE TIC NO ENSINO DA MATEMÁTICA EM ESCOLAS ESTADUAIS DA CIDADE DE ERECHIM-RS: UM DIAGNÓSTICO. Disponível em: $http : //www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6720_2986_I$ Acesso em: jun. 2021

[4] BRANDÃO, Carlos Rodrigues. O que é educação. 1.ed. São Paulo: Brasiliense, 1981.

[5] BRITO, Lucas Vieira. Teoria dos grafos e uma aplicação. Orientador: Júlio César Reis. 2015. 48 f. Dissertação (Graduação) - Trabalho de conclusão de curso apresentado a Banca Examinadora do curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial de obtenção do título de Licenciado em Matemática., Vitória da Conquista, 2015.

[6] COSTA, Polyanna Possani da. Teoria de grafos e suas aplicações. Orientador: Thiago de Melo. 2011. 77 f. Dissertação (Mestrado) - Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas d Universidade Paulista "Júlio de Mesquita Filho"., Rio Claro, 2011.

[7] FERREIRA, Fernanda Pires. O uso das TIC nas aulas de matemática na perspectiva do professor / Fernanda Pires Ferreira – Guaratinguetá: [s.n], 2013. 66 f. : il. Bibliografia: f. 57-58

[8] FERREIRA, Silvia da Rocha. Aplicações de matrizes no ensino médio. Orientador: Sérgio Henrique Monari Soares. 2013. 57 f. Dissertação (Mestrado) - Dissertação apresentada ao

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP. como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Mestrado Profissional em Matemática., [S. l.], 2013.

[9] FONTANA, M. J.; FÁVERO, A. A. Professor reflexivo: uma integração entre teoria e prática. Revista de Educação do Ideau, 2013. vol. 8(17), p.3. Disponível em: $https : //www.ideau.com.br/getulio/restrito/upload/revistasartigos/30_1.pdf$. Acesso em: jun. 2021.

[10] GRAPH ONLINE, https://graphonline.ru/pt/ Acesso em: jun. 2021.

[11] LIMA, Elon Lages. Geometria analítica e álgebra linear. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. 305p.

[12] PULINO, Petronio. Álgebra Linear e suas Aplicações. Departamento de Matemática Aplicada; Instituto de Matemática, Estatistica e Computação Científica; Universidade Estadual de Campinas.

[13] RIFFEL, Adriane Maria. O USO DAS TICS PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Orientador: Simone Regina dos Reis. 2018. 23 p. Dissertação (Graduação) - Artigo de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de especialização da Informação e da Comunicação Aplicadas à Educação (EAD), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Tecnologias da Informação e da Comunicação Aplicadas à Educação, Restinga Seca, RS, 2018.

[14] STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo. Álgebra Linear, 2 ed. São Paulo: Person Makron Books, 1987.583p.

[15] STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo. Introdução à álgebra linear. São Paulo: Person Makron Books.