

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Curso de Licenciatura em Matemática

Josué Rodrigo Evangelista Figueirêdo

Introdução a métodos numéricos na
resolução de Equações Diferenciais
Ordinárias de primeira ordem

Vitória da Conquista - BA
Agosto de 2021

Josué Rodrigo Evangelista Figueirêdo

Introdução a métodos numéricos na resolução de
Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem

Monografia apresentada ao Colegiado do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciada em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. André Nagamine.

Vitória da Conquista - Bahia
Agosto de 2021

Folha de Aprovação

Josué Rodrigo Evangelista Figueirêdo

Introdução a métodos numéricos na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem

Monografia apresentada ao Colegiado do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciada em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. André Nagamine.

Trabalho aprovado em ____/____/ 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. André Nagamine
Orientador

**Prof. Me. Antônio Augusto Oliveira
Lima**
Convidado

Prof. Me. Altemar Brito Lima
Convidado

Vitória da Conquista - Bahia
Agosto de 2021

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, por mais um passo que foi permitido caminhar para minha formação escolhida.

A minha mãe, Vilma, por todo o apoio e por sempre se preocupar sobre todos os meus dias de estágio, além de me apoiar e se mostrar orgulhosa por cada passo meu.

Aos meus colegas de sala, pelas discussões e troca de reflexões.

A meu professor André Nagamine, por além de me guiar de forma muito satisfatória nesse período, compreendeu e respondeu minhas dezenas de dúvidas.

Resumo

Este trabalho visa a discussão de tempo e precisão de métodos numéricos, utilizando como problemáticas exemplos de EDOs de primeira ordem com problema de valor inicial, empregando como exemplos soluções extensas ou não existentes. No trabalho são utilizados dois exemplos, o primeiro a solução particular é demasiada extensa na solução, ademais, é difícil de se trabalhar a substituição da variável independente. E, a segunda não se tem uma solução analítica dos métodos de soluções particulares que foram estudados. Para a verificação da existência de solução, foram estudados o fator integrante, a equação exata e o método das variáveis separáveis. Os métodos numéricos escolhidos para o trabalho foram o método de Euler, Euler melhorada e Runge-Kutta. Os métodos numéricos foram implementados no programa gratuito Scilab. A discussão vista no último capítulo vai verificar um comparativo de cada método e qual decidir a melhor aproximação, tanto no aspecto de execução do programa, quanto na precisão dos resultados.

Palavras-chave: EDO, Método numérico, PVI

Sumário

Sumário	6
Lista de ilustrações	7
Lista de tabelas	8
Introdução	9
1 Aspectos Históricos	11
2 Equação diferencial ordinária de primeira ordem	12
2.1 Fator integrante	14
2.2 Método das variáveis separáveis	17
2.3 Equações exatas	19
3 Métodos numéricos para resolução de EDO's	22
3.1 Método de Euler	25
3.2 Aprimoramento do método de Euler	26
3.3 Método de Runge-Kutta	29
4 Aplicação analítica do método numérico	34
4.1 Método de Euler	38
4.1.1 Exemplo 1	38
4.1.2 Exemplo 2	40
4.2 Euler melhorado	42
4.2.1 Exemplo 1	42
4.2.2 Exemplo 2	44
4.3 Runge Kutta de quarta ordem	46
4.3.1 Exemplo 1	46
4.3.2 Exemplo 2	49
5 Aplicação numérica	55
6 Conclusão	59
Referências	60

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico da solução particular de 4.1	37
Figura 2 – Gráfico da solução particular 4.2	39
Figura 3 – Resolução numérica dos 4 métodos - Exemplo 1	56
Figura 4 – Erro numérico dos 4 métodos - Exemplo 1	56
Figura 5 – Gráfico dos valores numéricos e do valor exato - Exemplo 1	57
Figura 6 – Resolução numérica dos 4 métodos - Exemplo 2	57
Figura 7 – Erro numérico dos 4 métodos - Exemplo 2	58
Figura 8 – Gráfico dos valores numéricos e do valor exato - Exemplo 2	58
Figura 9 – Algoritmo - Método de Euler	61
Figura 10 – Algoritmo - Euler Melhorada	63
Figura 11 – Algoritmo - Método de Runge-Kutta	64

Lista de tabelas

Tabela 1	– Resultados obtidos em cada um dos métodos numéricos para o exemplo 1	54
Tabela 2	– Resultados obtidos em cada um dos métodos numéricos para o exemplo 2	54
Tabela 3	– Erro dos métodos numéricos utilizados do exemplo 1	54
Tabela 4	– Erro dos métodos numéricos utilizados do exemplo 2	54

Introdução

Este trabalho visa o estudo de métodos numéricos para EDO's de primeira ordem, nos quais, pode-se ter uma aproximação satisfatória, ocupando menos tempo com resoluções analíticas extensas ou auxiliando em soluções que não existem. A escolha do trabalho se deu a partir do meu interesse em programação e na disciplina de cálculo numérico, visando a parte da EDO como uma extensão dos estudos da disciplina. O software gratuito Scilab, foi escolhido a partir da proximidade com o programa, visto que já estava sendo trabalhado em cálculo numérico com o professor.

A importância da EDO nos dias atuais é bastante vasta, destaca-se sua importância na matemática, física e em áreas afins como engenharia, economia e em ciências. A aplicação é diversa, desde o estudo de população, posição e a velocidade de um corpo. Entretanto, diversos campos exigem somente a resolução numérica de uma EDO. Justificando, com isso, a importância da obtenção de aproximações. Além disso, pode-se destacar a vantagem da velocidade, já que é demasiado os esforços e cálculos para obter a resposta de uma EDO, e algumas não tem uma resolução algébrica. Ademais, é visto dois pontos importantes nos métodos numéricos, a precisão e a velocidade. Qual método pode oferecer uma velocidade de aproximação satisfatória e apresentar uma melhor aproximação do resultado exato?

Os métodos de resolução analítica de EDO's de primeira ordem empregados para o trabalho, são o fator integrante, a equação separável e a equação exata. Logo, os exemplos verificados e aplicados ao longo da monografia, foi-se verificado a solução ou a possível solução em ambos os métodos. Na parte numérica, foram estudados o método de Euler, Euler melhorada e Runge-Kutta. O método de Euler é derivado do estudo da expansão de Taylor de uma variável, e os métodos restantes é derivado da solução do sistema linear, igualando a expansão de Taylor de uma variável com a expansão de Taylor de duas variáveis.

Entretanto, apesar de existirem distintos métodos para a resolução de uma equação ordinária de primeira ordem, existem vários modelos de EDO em que não se tem uma resolução analítica ou, em alguns casos, a resolução analítica é devidamente extensa. Em ambos os casos, quando o objetivo é somente a resolução numérica da EDO, o que podemos fazer? Demanda um tempo significativo na resolução, quando existe e é extensa. Mas, o problema principal é quando não temos uma solução analítica. Com isso, devemos recorrer

aos métodos numéricos, verificando uma melhor aproximação do resultado exato. Mas, qual método deve ser escolhido? O mais preciso e que demanda mais tempo? ou o menos preciso e que demanda menor tempo na resolução? Essas perguntas serão respondidas ao longo do trabalho, utilizando os algoritmos que foram desenvolvidos no decorrer dos estudos.

O trabalho foi organizado em cinco capítulos.

No primeiro capítulo traz uma breve história do estudo de EDO's assim como das aplicações numéricas.

O segundo capítulo, visa discutir a respeito da EDO, o problema de valor inicial e as soluções analíticas estudadas para o trabalho.

O terceiro capítulo, discute a respeito dos métodos numéricos utilizados, como são desenvolvidos uma pequena discussão sobre o erro de cada método.

O quarto capítulo traz a resolução de dois exemplos utilizando os métodos numéricos, o primeiro exemplo tem uma solução analítica extensa e o segundo não tem uma solução analítica, pelos métodos de resolução estudados, mas tem-se a solução geral da EDO. Além disso, serão vistos os valores exatos de cada passo e a diferença nos valores distintos.

O quinto capítulo destaca a aplicação numérica, visando a discussão a respeito do tempo de cada resolução.

O sexto e último capítulo, a conclusão do trabalho, resume as aproximações e o tempo empregado nos programas.

Nos anexos, estão os métodos numéricos desenvolvidos por mim, para a obtenção e análise das aproximações.

Capítulo 1

Aspectos Históricos

A história da matemática é extensa e muitas vezes não tem a descrição correta de como ocorreram suas descobertas. Entretanto, é de extrema importância conhecer suas atribuições e sua evolução ao longo dos anos. Por ser uma área vasta, será apresentado matemáticos e físicos que contribuíram para a área de pesquisa de EDOs de primeira ordem, e, que contribuíram para a área da computação, obtendo as aproximações numéricas para as aproximações das EDO's.

As perspectivas históricas das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem estão intrinsecamente ligados a evolução geral da matemática. Os estudos da EDO teve início com Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) no século XVII. Newton contribuiu, classificando as equações diferenciais de primeira ordem como: $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$ e $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Também Desenvolveu um método de resolução da última, utilizando séries infinitas. Suas pesquisas e resultados só foram divulgados em 1687, pois muitos estudiosos na época só publicavam os resultados entre amigos, por medo de chacotas, caso sua teoria fossem provadas como erradas.

Leibniz(1646-1716), teve contribuições significativas na área de EDO de primeiro grau. Em 1691, desenvolveu os métodos de separação de variáveis, redução de equações homogêneas e separáveis. Ademais, em 1694, desenvolveu um procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem.

Leonhard Euler(1707-1783), conhecido como o grande matemático do século XVIII, além de contribuir em problemas de mecânica e no desenvolvimento de métodos para sua solução, identificou a condição para que as EDO's sejam exatas, além de desenvolver a teoria do fator integrante.

Capítulo 2

Equação diferencial ordinária de primeira ordem

Neste capítulo, serão apresentados o que é uma EDO de primeira ordem, e os métodos analíticos estudados para as resoluções dos exemplos na aplicação.

Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas, em outras palavras, sejam y uma função, x sua variável independente e n número inteiro positivo então, uma EDO é uma igualdade que envolva $x, y, y', y'', \dots, y^n$.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} = e^{\frac{x}{2}}$$

A ordem de uma EDO é o valor da maior derivada que se encontra nela. Exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} &= e^{\frac{x}{2}} \\ \frac{dy^3}{dx} + 2e^x \frac{dy^2}{dx} + y \frac{dy}{dx} &= x^4 \\ \frac{dy^5}{dx} + x \frac{dy}{dx} &= 2. \end{aligned}$$

Que apresentam ordem igual a 1, 3 e 5, respectivamente.

Uma solução de uma EDO é uma função y que verifica o resultado da equação para todo x . Exemplo:

$$\frac{dy^2}{dx} + y = 0$$

Observe que uma solução para essa EDO será $y(x) = c_1 \cdot \sin(x) + c_2 \cdot \cos(x)$, em que c_1, c_2 são constante. Note que:

$$y'(x) = c_1 \cos(x) - c_2 \sin(x)$$

e

$$y''(x) = -c_1 \sin(x) - c_2 \cos(x), \text{ logo:}$$

$$y''(x) + y(x) = -c_1 \sin(x) - c_2 \cos(x) + c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) = 0.$$

Uma solução particular de uma EDO é uma resolução específica da solução geral. No exemplo anterior, tomamos $c_1 = c_2 = 2$, então uma solução particular será:

$$y(x) = 2 \sin(x) + 2 \cos(x)$$

O Problema de Valor Inicial (PVI) consiste em uma EDO e uma condição com a função y . Sujeita a uma condição inicial que chamaremos de $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número qualquer dentro de um intervalo I e y_0 é um número real. Utilizando como exemplo a EDO e o PVI:

$$y' - y = 0$$

$$y(0) = 1$$

Observe que uma solução é $y(x) = c_1 e^x$, satisfazendo a igualdade.

$$y = c_1 e^x$$

$$y' = c_1 e^x$$

Em que:

$$y' - y = c_1 e^x - c_1 e^x = 0$$

Aplicando o PVI:

$$y(x_0) = c_1 e^{x_0}$$

$$1 = c_1 e^0$$

$$1 = c_1$$

Logo, a solução do PVI é:

$$y(x) = e^x$$

Os métodos numéricos é a aplicação de um algoritmo, em que, podemos resolver problemas matemáticos, com o objetivo principal de encontrar soluções aproximadas para exemplos complexos.

Os métodos da solução de uma EDO que serão apresentados, são denominados métodos analíticos, em que, minha solução pode ser encontrada de maneira explícita. No qual, para determinar as soluções, deverá reconhecer o tipo de EDO que está sendo trabalhada, e, distinguir qual método eu posso chegar em uma solução geral.

2.1 Fator integrante

Para utilizar o método do fator integrante, a EDO deve se apresentar da seguinte forma:

$$y' + p(t)y = g(t) \quad (2.1)$$

O objetivo é multiplicar 2.1 por um "fator integrante" e colocá-la em uma forma "integrável". Multiplicando ambos os termos da igualdade por uma função $\mu(t)$ indeterminada. Tem-se:

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t) \quad (2.2)$$

Deve-se reconhecer o lado esquerdo como a derivada de alguma função. Um fato importante que dos dois termos do lado esquerdo, um dos termos é $\mu(t)y'$ pela regra de cadeia de uma função de duas variáveis, temos a hipótese que se a derivada y' sugere que é uma derivada parcial de alguma função desconhecida, se for verdadeira, logo, $\mu(t)p(t) = \mu'(t)$ tem que ser verdade. Supondo inicialmente que $\mu(t)$ é positiva, podemos escrever da seguinte forma:

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t)$$

Sem perda de generalidade, podemos reescrever a fração como:

$$\frac{d}{dt} \ln \mu(t) = p(t)$$

Integrando ambos os lados, tem-se:

$$\ln \mu(t) = \int p(t)d(t) + c$$

Aplicando $c = 0$, logo:

$$\ln \mu(t) = \int p(t)dt$$

Sem perda de generalidade:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Observe que $\mu(t)$ tem que ser positiva.

Determinado o fator integrante, volta-se para 2.2, satisfazendo a igualdade com o fator integrante, tem-se:

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t)$$

Integrando ambos os membros, tem-se:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

ou

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}$$

Obtendo dessa forma a solução geral.

Teorema 2.1.1. Se as funções p e g são contínuas num intervalo aberto $I: \alpha < t < \beta$, que contém o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial $y' + p(t)y = g(t)$ para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial $y(t_0) = y_0$ onde y_0 é um valor inicial arbitrário.

Demonstração: A demonstração desse teorema se dá pelo desenvolvimento do fator integrante. Foi demonstrado que dada a equação $y' + p(t)y = g(t)$, temos a solução $y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}$. Analisando mais a fundo, pode-se observar que a equação deverá ter uma solução. Dado que p é contínua para $\alpha < t < \beta$, e, μ está definida nesse intervalo, e é uma função diferenciável não nula. Multiplicando a equação por $\mu(t)$ obtem-se:

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t)$$

Como μ e g são contínuas, a função $\mu.g$ é integrável e a equação $[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t)$ leva a $y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}$. Ademais, a integral de $\mu.g$ é diferenciável, de modo que y , dado por $y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}$, existe e é diferenciável no intervalo $\alpha < t < \beta$. Substituindo o valor de y , temos:

$$\begin{aligned} \left[\mu(t) \frac{\int \mu(t)g(t)dt+c}{\mu(t)} \right]' &= \mu'(t) \cdot y + \mu(t) \cdot y' = \mu'(t) \frac{\int \mu(t)g(t)dt+c}{\mu(t)} + \mu(t) \cdot \frac{\mu(t) \cdot g(t) \cdot \mu(t) - \mu'(t) \cdot \int \mu(t)g(t)}{(\mu(t))^2} = \\ \mu'(t) \frac{\int \mu(t)g(t)dt+c}{\mu(t)} &+ \frac{\mu(t) \cdot g(t) \cdot \mu(t) - \mu'(t) \cdot \int \mu(t)g(t)}{\mu(t)} = \frac{\mu(t) \cdot g(t) \cdot \mu(t)}{\mu(t)} = \mu(t) \cdot g(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Logo, a expressão é satisfeita no intervalo $\alpha < t < \beta$. Para finalizar, a condição inicial determina a constante c , de modo que vai existir apenas uma solução para o problema.

Observe que o teorema acima afirma que dado um problema de valor inicial terá uma solução, além disso, garante a existência e a unicidade da solução do problema com PVI.

Exemplo 1: Dada a EDO abaixo, encontre a solução do problema de valor inicial dado:

$$\begin{aligned} y' - y &= 2te^{2t} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Observe que é da forma 2.2, então:

$y'\mu(t) - y\mu(t) = 2te^{2t} \cdot \mu(t)$, com, $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$, ademais, $p(t) = -1$, então, o fator integrante é:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int -1 \cdot dt} \\ \mu(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

Substituindo $\mu(t)$.

$$\begin{aligned} y'e^{-t} - ye^{-t} &= 2te^{2t}e^{-t} \\ y'e^{-t} - ye^{-t} &= 2te^t \\ \frac{d}{dt}[y \cdot e^{-t}] &= 2te^t \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados

$$ye^{-t} = \int 2te^t dt$$

Resolvendo a integral acima, utilizando integração por partes, temos:

$$\begin{aligned} u &= 2t & dv &= e^t \\ du &= 2 & v &= e^t \end{aligned}$$

$$I = 2te^t - \int 2e^t dt$$

$$I = 2te^t - 2e^t + c$$

Substituindo,

$$ye^{-t} = 2te^t - 2e^t + c$$

$$y = \frac{2te^t - 2e^t + c}{e^{-t}}$$

$$y = 2te^{2t} - 2e^{2t} + c$$

Substituindo o PVI.

$$1 = 2.0.e^{2.0} - 2e^{2.0} + c$$

$$1 = -2 + c$$

$$c = 3$$

Logo, a solução particular é:

$$y = 2te^{2t} - 2e^{2t} + 3$$

2.2 Método das variáveis separáveis

Uma EDO de primeira ordem pode ser encontrada da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Pode-se reescreve-lá como:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.3)$$

É fácil verificar essa equivalência, já que podemos tomar $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$. Caso M seja uma função apenas de x e N seja uma função apenas de y , a equação se torna:

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Sem perda de generalidade

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (2.4)$$

É dita separável.

Na resolução, integra-se $M(x)$ em relação a x e $N(y)$ em relação a y .

Teorema 2.2.1. Sejam as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas num certo retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$, que contém o ponto (t_0, y_0) . Então, num certo intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$, contido em $\alpha < t < \beta$ há uma única solução $y = \Phi$ do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

A demonstração do teorema é demasiada complexa, mas se encontra no livro [2]

Exemplo 1: Dada a EDO abaixo, encontre a solução do problema de valor inicial dado:

$$y' = (1 - 2x).y^2$$

$$y(0) = \frac{-1}{6}$$

Observe que pode-se modificar para que fique da forma 2.4.

Sem perda de generalidade:

$$\frac{dy}{dx} = (1 - 2x)y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = (1 - 2x)dx$$

$$(y^{-2})dy = (1 - 2x)dx$$

Integrando ambos os lados, o lado esquerdo em relação a y e o lado direito em relação a x , tem-se:

$$\int (y^{-2})dy = \int (1 - 2x)dx$$

Resolvendo as integrais:

$$\int (y^{-2})dy = \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = \frac{y^{-1}}{-1} = -y^{-1}$$

e

$$\int (1 - 2x).dx = \int 1.dx - \int 2x.dx = x - x^2$$

Substituindo:

$$-y^{-1} = x - x^2 + c$$

$$y^{-1} = -x + x^2 + c$$

$$y = \frac{1}{x-x^2+c}$$

Aplicando o PVI.

$$\frac{-1}{6} = \frac{1}{c}$$

$$c = -6$$

Logo, a solução particular é:

$$y = \frac{1}{x-x^2-6}$$

2.3 Equações exatas

Tome uma equação diferencial do tipo $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ de forma que não se pode alterar a estrutura da EDO, como feito no método das variáveis separáveis.

Suponha que se pode identificar uma função ω de forma que:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \frac{\partial \omega}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \quad (2.5)$$

Se $\omega(x, y) = c$ obedecer implicitamente a equação $y = f(x)$, como uma função derivável de x , então:

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \omega}{\partial y}(x, y)y' = \frac{d}{dx}\omega[x, f(x)] = 0$$

É denominada equação exata, tendo a solução $\omega(x, y) = c$, onde c é uma constante arbitrária.

Teorema 2.3.1. Sejam M, N, M_y e N_x , onde os índices inferiores simbolizam derivadas parciais, funções contínuas no domínio retangular $R : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$, então:

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

é uma equação diferencial exata em R se e somente se

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

em cada ponto de R . Isto é, existe uma função ω , que satisfaz as equações.

$$\omega_x(x, y) = M(x, y) \quad \text{e} \quad \omega_y(x, y) = N(x, y)$$

se, e somente se, vale a equação

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

Demonstração:

A prova do teorema é constituída-se em duas partes. Primeiro, vai verificar que se tiver uma função ω tal que $\omega_x(x, y) = M(x, y)$ e $\omega_y(x, y) = N(x, y)$ ocorra, então, segue que $M_y(x, y) = N_x(x, y)$. Calculando 2.5, irar obter:

$$M_y = \omega_{xy}(x, y) \quad N_x(x, y) = \omega_{yx}(x, y)$$

Como M_y e N_x são contínuas, segue-se que $\omega_{xy}(x, y)$ e $\omega_{yx}(x, y)$ são contínuas também, garantindo a igualdade, tornando $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ verdade.

Agora será mostrado que se M e N satisfazem $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, etnã. A demonstração envolve a construção de uma função ω que obedece 2.5.

Integrando $\omega_x(x, y) = M(x, y)$ em relação a x , temos:

$$\omega(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y) \quad (2.6)$$

A função h é uma função arbitrária de y , que é uma constante arbitrária.

Agora, precisa-se mostrar que sempre pode-se escolher $h(y)$, tal que $\omega_y = N$. De 2.6, derivando ambos os lados em relação a y , tem-se:

$$\omega_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + h'(y) = \int M_y(x, y)dx + h'(y)$$

Tomando $\omega_y = N$ e resolvendo $h'(y)$

$$h'(y) = N(x, y) - \int M_y(x, y)dx$$

Derivando o segundo membro em relação a x , temos:

$$N_x(x, y) - M_y(x, y)$$

o que é zero. Substituindo a função $h(y)$ em 2.6, logo, terá:

$$\omega(x, y) = \int M(x, y)dx + \int [N(x, y) - \int M_y(x, y)dx]dy$$

Obtendo assim a demonstração e a solução geral. ■

Exemplo: Resolva a EDO:

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0$$

Primeiro devemos verificar se a equação é exata.

Tomando $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, então $M(x, y) = 2x + y^2$ e $N(x, y) = 2xy$

Observe que:

$$M_y(x, y) = 2y = N_x(x, y)$$

Logo é exata. Então, existe $\omega(x, y)$ tal que:

$$\omega_x(x, y) = 2x + y^2$$

e

$$\omega_y(x, y) = 2xy$$

Tomando a primeira equação, e integrando em relação a x :

$$\omega(x, y) = x^2 + y^2x + g(y)$$

Agora derivando em relação a y e tomando $\omega_y = N$. Logo:

$$\omega_y(x, y) = 0 + 2yx + g'(y) = 2yx$$

Isso implica que

$$g'(y) = 0 \rightarrow g(y) = 0c$$

Logo, a solução é

$$\omega(x, y) = x^2 + y^2x + c$$

Capítulo 3

Métodos numéricos para resolução de EDO's

Antes de introduzir a parte teórica do método de Euler, será necessário verificar algumas deduções do método das diferenças finitas. Supondo que os métodos numéricos estão na discretização do contínuo. Temos como primeiro passo definir essa discretização em uma região, denotado como malha. Seja então x_0 o ponto inicial da região, logo, utilizando o passo h , terá:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0 \\x_1 &= x_0 \pm h \\x_2 &= x_0 \pm 2h \\x_3 &= x_0 \pm 3h \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot\end{aligned}$$

$$x_i = x_0 \pm ih, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

As aproximações de $y(x)$ serão calculados nos pontos dessa malha. Como uma EDO vai envolver derivadas, então, terá que definir a discretização das derivadas. Como instrumento de apoio, é utilizado a expansão da série de Taylor de uma variável, que podemos observar vários fatos a partir do ponto x .

Definição 1. Se f tiver uma representação (expansão) em série de potência em a , isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n; \quad |x - a| < R \quad (3.2)$$

tal que existe um valor R tal que a série $|x - a| < R$ converge, e seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Com o erro na definição de lagrange, tem-se:

Teorema 3.0.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até ordem $n + 1$ e $x_0, x \in I$. Então existe c entre x_0 e x , tal que:

$$f(x) = \sum \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \cdot (x - x_0)^{(n+1)} \quad (3.3)$$

Demonstração: Suponha que $x_0 < x$, e tome $F : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$F(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(y)(x-y)^k}{k!} - A(x - y)^{n+1}, \forall y \in [x_0, x], \text{ onde } A \in \mathbb{R}$$

A é escolhido de forma que $F(x_0) = 0$. O intuito da demonstração é mostrar que $A(x - y)^{n+1}$ é o resto de Lagrange.

Observe que F é contínua e derivável em (x_0, x) e $F(x) = F(x_0) = 0$. Logo, pode utilizar o teorema de Rolle, de forma que, $\exists c \in (x_0, x)$ tal que $F'(c) = 0$.

Derivando a função $F(y)$, temos:

$$F'(y) = -f'(y) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{k+1}(y)(x-y)^k}{k!} - \frac{f^k(y)(x-y)^{(k-1)}}{(k-1)!} \right) + (n + 1) \cdot A(x - y)^n$$

$$F'(y) = -f'(y) + \sum_{k=1}^n \left(-\frac{f^{k+1}(y)(x-y)^k}{k!} + \frac{f^k(y)(x-y)^{(k-1)}}{(k-1)!} \right) + (n + 1) \cdot A(x - y)^n$$

Observe que desenvolvendo o somatório $\sum_{k=1}^n \left(-\frac{f^{k+1}(y)(x-y)^k}{k!} + \frac{f^k(y)(x-y)^{(k-1)}}{(k-1)!} \right)$, tem-se:

$$\begin{aligned} & -\frac{f''(y)(x-y)^1}{1!} + \frac{f'(y)(x-y)^0}{(0)!} - \frac{f'''(y)(x-y)^2}{2!} + \frac{f''(y)(x-y)^1}{(1)!} - \frac{f^{iv}(y)(x-y)^3}{3!} + \frac{f'''(y)(x-y)^2}{2!} - \dots - \\ & \frac{f^{n-1}(y)(x-y)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{f^n(y)(x-y)^{(n-1)}}{(n-1)!} - \frac{f^{n+1}(y)(x-y)^n}{n!} + \frac{f^n(y)(x-y)^{(n-1)}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Os elementos do somatório vão se eliminando de dois em dois, esse tipo de somatório é conhecido como soma da telescopia, em que, a soma será os termos em que $k = 1$ e $k = n + 1$. Logo:

$$\sum_{k=1}^n \left(-\frac{f^{k+1}(y)(x-y)^k}{k!} + \frac{f^k(y)(x-y)^{(k-1)}}{(k-1)!} \right) = f'(y) - \frac{f^{n+1}(x-y)^n}{n!}$$

Substituindo na derivada, tem-se:

$$F'(y) = -f'(y) + f'(y) - \frac{f^{n+1}(x-y)^n}{n!} + (n+1).A(x-y)^n.$$

Para $y = c$, tem-se:

$$F'(c) = -\frac{f^{n+1}(x-c)^n}{n!} + (n+1).A(x-c)^n$$

Pelo teorema de Rolle, $F'(c) = 0$, logo:

$$0 = -\frac{f^{n+1}(c)(x-c)^n}{n!} + (n+1).A(x-c)^n$$

$$\frac{f^{n+1}(c)(x-c)^n}{n!} = (n+1).A(x-c)^n$$

$$\frac{f^{n+1}(c)(x-c)^n}{n!.(n+1)} = A(x-c)^n$$

$$\frac{f^{n+1}(c)(x-c)^n}{(n+1)!} = A(x-c)^n$$

$$A = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}$$

Substituindo na função.

$$F(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(y)(x-y)^k}{k!} - \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-y)^{n+1}.$$

Para $y = x_0$

$$F(x_0) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)(x-x_0)^k}{k!} - \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Como, $F(x_0) = 0$, então:

$$0 = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)(x-x_0)^k}{k!} - \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \blacksquare$$

E obtendo a igualdade dessa expansão com 3.3. Suponha que $y(x)$ tem derivadas até $n+1$, no ponto x . Logo a expansão da série de Taylor com o resto de Lagrange no ponto x , será:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{y'(x).(x+h-x)}{1!} + \frac{y''(x).(x+h-x)^2}{2!} + \dots + \frac{y^{(n+1)}(c).(x+h-x)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

$$y(x+h) = y(x) + y'(x).h + \frac{y''(x).h^2}{2!} + \dots + \frac{y^{(n+1)}(c).h^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Utilizando 3.2 em uma vizinhança do ponto x , por exemplo, no ponto $x+h$.

Sendo, $\frac{y^{(n+1)}(c).h^{(n+1)}}{(n+1)!}$, o erro de Lagrange, e $c \in (x, x+h)$. Para um melhor entendimento do erro, será utilizado a função $O(h^{(n+1)})$.

Tomando $n = 1$, logo tem-se:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{y'(x).h}{1!} + O(h^2)$$

Sem perda de generalidade,

$$y(x+h) - y(x) - O(h^2) = h.y'(x)$$

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - O(h) \quad (3.4)$$

Será utilizado esses conceitos para o entendimento do método de Euler e suas demais ordens.

3.1 Método de Euler

Dado a EDO com PVI:

$$y'(x) = f(x, y) \quad (3.5)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (3.6)$$

Utilizando 3.4, sem o erro de Lagrange, temos então que:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Tomando a igualdade 3.5 e $y_{i+1} = y_i + h$, temos que:

$$f(x, y) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$y_{i+1} \approx y_i + h \cdot f(x, y) \quad (3.7)$$

Tornando o coeficiente angular a fórmula geral de Euler ou método de Runge-Kutta de primeira ordem.

3.2 Aprimoramento do método de Euler

O aprimoramento do método de Euler, ou Runge-Kutta de segunda ordem, é desenvolvida através da igualdade dos parâmetros na expansão da série de Taylor de uma e duas variáveis. Pelo PVI, tem-se que:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y), & x > a \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Teorema 3.2.1. Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferencial de x e y , onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t . Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} \quad (3.8)$$

Demonstração: Por hipótese, $z = f(x, y)$, é uma função diferenciável em (x, y) , logo Δz pode ser expresso como:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \epsilon_1 \cdot \Delta x + \epsilon_2 \cdot \Delta y$$

Onde, ϵ_1 e $\epsilon_2 \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Dividindo ambos os lados por Δt , temos:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Se tomar $\Delta t \rightarrow 0$, logo, $\Delta x = g(x + \Delta t) - g(t) \rightarrow 0$, pois, g é diferenciável. De forma análoga com Δy , então:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon_2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} + 0 \frac{dx}{dt} + 0 \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} \blacksquare$$

Suponha que $y(x)$ derive $n + 1$ vezes, logo, utilizando 3.8:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dx} \quad (3.9)$$

Como $\frac{dx}{dx} = 1$, então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dx} \quad (3.10)$$

Derivando $y'(x) = f(x, y)$, temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = f_y(x, y) \cdot y'(x)$$

Como $y'(x) = f(x, y)$, logo

$$f_y(x, y) f(x, y)$$

Então:

$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y)$$

Para uma melhor digitação e sem perda de generalidade, serão substituídos $y'(x) = f$, $f_x(x, y) = f_x$ e $f_y(x, y) = f_y$. Logo:

$$y''(x) = f_x + f_y f \quad (3.11)$$

Utilizando a expansão da série de Taylor 3.3, substituindo $y(x + h) = y_{i+1}$ e $y(x) = y_i$ e usando a igualdade 3.11, tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2}[f_x + f_y f] + O(h^3) \quad (3.12)$$

Utilizando a igualdade 3.7, temos:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f$$

Considerando o método de Runge-kutta de segunda ordem como:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \beta_0 f + \beta_1 f(x_k + \gamma.h, y_k + \delta.h)$$

Então,

$$y_{i+1} = y_i + h\beta_0 f + h\beta_1 f(x_k + \gamma.h, y_k + \delta.h) \quad (3.13)$$

Os parâmetros β_0, β_1, γ e δ , serão devidamente calculados.

Teorema 3.2.2. Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $(x_0, y_0) \in A$. Considere uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} em A . Definido o polinômio de Taylor de grau n associado a função f no ponto (x_0, y_0) como sendo o polinômio dado por:

$$p_n(x, y) = \frac{1}{n!} \times \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \times \partial y^j}(x_0, y_0) \times (x - x_0)^{n-j} \times (y - y_0)^j \quad (3.14)$$

Pela complexidade da demonstração, será ocultada, vista no trabalho de conclusão de curso [4].

Desenvolvendo $f(x_k + \gamma.h, y_k + \delta.h)$ com 3.14, para o erro h^2 . Temos:

$$f(x_k + \gamma.h, y_k + \delta.h) = f + h\gamma.f_x + \delta.h.f_y + O(h^2)$$

Substituindo essa expansão para a equação 3.13. Temos:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h\beta_0 f + h\beta_1 [f + h\gamma.f_x + \delta.h.f_y + O(h^2)] \\ y_{i+1} &= y_i + h\beta_0.f + h\beta_1.f + h^2\beta_1\gamma.f_x + h^2\beta_1\delta.f_y + O(h^3) \\ y_{i+1} &= y_i + h.\beta_0 f + h\beta_1 f + \frac{h^2}{2!} [2.\beta_1.\gamma.f_x + 2\beta_1\delta.f_y] + O(h^3) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$y_{i+1} = y_i + h[f.(\beta_0 + \beta_1)] + \frac{h^2}{2!} [2.\beta_1\gamma.f_x + 2\beta_1\delta.f_y] + O(h^3) \quad (3.16)$$

A escolha dos valores dos parâmetros β_0, β_1, γ e δ , se dá pelo fato da igualdade entre 3.12 e 3.16, logo, devem satisfazer as três condições:

$$h.[f(\beta_0 + \beta_1)] = hf$$

$$2\beta_1\gamma.f_x = f_x$$

$$2\beta_1\delta.f_y = f_y$$

Então:

$$\beta_0 + \beta_1 = 1$$

$$2\beta_1\gamma = 1$$

$$2\beta_1\delta = f$$

Como o número de equações é superior ao de incógnitas, logo, existem infinitos resultados que satisfaçam as equações. Tomando, $\beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{2}$, logo, $\gamma=1$ e $\delta = f$. Esses parâmetros definem o método de Euler aproximado. Substituindo em 3.13, temos:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{1}{2}f + h\frac{1}{2}f(x_k + 1.h, y_k + fh)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}[hf + hf(x_k + h, y_k + fh)]$$

Tomando $m_0 = hf$, então:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}[m_0 + hf(x_k + h, y_k + m_0)]$$

Tomando $m_1 = hf(x_k + h, y_k + m_0)$, logo:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}[m_0 + m_1] \quad (3.17)$$

Logo, obtemos Euler melhorada ou método de Runge-Kutta de segunda ordem.

3.3 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta ou Euler de quarta ordem, é desenvolvida de maneira análoga a Euler melhorada. Entretanto, expandindo a fórmula 3.12, 3.13 e 3.16, para $n=3$, para obter uma ordem maior e um erro menor. Dado a EDO com PVI:

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Tem-se que derivar até a ordem 4.

$$y''(x) = f_x + f_y f$$

Derivando novamente em relação a x , utilizando 3.8, tem-se:

$$\begin{aligned} y'''(x) &= f_{xx} + f_{yx}f + f_yf_x + (f_{xy} + f_{yy}f + f_yf_y)f \\ y'''(x) &= f_{xx} + f_{yx}f + f_yf_x + f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y^2f \end{aligned} \quad (3.18)$$

Teorema 3.3.1. Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b) . Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem abertas e contínuas em D , então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) \quad (3.19)$$

Demonstração: Considere as seguintes derivadas parciais:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

Com $h = \Delta x = x - x_0$ e $k = \Delta y = y - y_0$. Logo:

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{\partial^2 x f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y+k) - f_x(x, y)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h}] - [\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}]}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{h}]}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} [\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk}] \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} [\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk}] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [\lim_{k \rightarrow 0} \frac{[f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] - [f(x, y+k) - f(x, y)]}{hk}] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)}{k}] - [\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x+h, y) - f_y(x, y)}{h} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 x f(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por 3.19, então $f_{xy} = f_{yx}$, logo:

$$y'''(x) = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_yf_x + f_{yy}f^2 + f_y^2f \quad (3.20)$$

Derivando novamente em relação a x :

$$y^{iv} = f_{xxx} + f_{xxy}f + 2f_{xxy}\cdot f + 2f_{xyy}\cdot f + 2f_{xy}f_x + 2f_{xy}f_yf + f_{yyx}f^2 + f_{yyy}f^2f + f_{yy}f_xf + f_{yy}f_yf + f_{yy}f_yff + f_{yy}f_yff + f_{yx}f_x + f_{yy}f_xf + f_yf_{xx} + f_yf_{xy}f + f_{yx}f_yf + f_{yx}f_yf + f_{yy}f_yff + f_{yy}f_yff + f_y^2f_x + f_y^2f_yf$$

Por 3.19, logo:

$$y^{iv} = f_{xxx} + 3f_{xxy}f + 3f_{xy}f_x + f_{xx}f_y + f_{yyx}f^2 + 3f_{yy}f_xf + 2f_{xyy}f + f_y^2f_x + 5f_{xy}f_yf + f_{yyy}f^3 + 4f_{yy}f_yf^2 + f_y^2f_yf \quad (3.21)$$

Utilizando 3.3, para $n = 3$, tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2!}y'' + \frac{h^3}{3!}y''' + \frac{h^4}{4!}y^{iv} + O(h^5)$$

Substituindo as derivadas 3.11, 3.20 e 3.21, tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2!}[f_x + f_yf] + \frac{h^3}{3!}[f_{xx} + 2f_{xy}f + f_yf_x + f_{yy}f^2 + f_y^2f] + \frac{h^4}{4!}[f_{xxx} + 3f_{xxy}f + 3f_{xy}f_x + f_{xx}f_y + f_{yyx}f^2 + 3f_{yy}f_xf + 2f_{xyy}f + f_y^2f_x + 5f_{xy}f_yf + f_{yyy}f^3 + 4f_{yy}f_yf^2 + f_y^2f_yf] + O(h^5)$$

Expandindo 3.13

$$y_{i+1} = y_i + h\beta_0f + h\beta_1f(x_k + \gamma_1h, y_k + \delta_1h) + h\beta_2f(x_k + \gamma_2h, y_k + \delta_2h) + h\beta_3f(x_k + \gamma_3h, y_k + \delta_3h) \quad (3.22)$$

Os parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2$ e δ_3 , serão devidamente calculados.

De modo análogo, expandindo 3.14, para $n = 3$, tem-se:

$$f(x_k + \gamma_1h, y_k + \delta_1h) = f + h\gamma_1f_x + \delta_1hf_y + \frac{h^2}{2}[\gamma_1^2f_{xx} + 2\gamma_1\delta_1f_{xy} + \delta_1^2f_{yy}] +$$

$$\frac{h^3}{4!}[4f_{xxx}\gamma_1^3 + 12f_{xxy}\gamma_1^2\delta_1 + 12f_{xyy}\delta_1^2\gamma_1 + 4\delta_1^3f_{yyy}] + O(h^4) \quad (3.23)$$

A expansão é semelhante para $\gamma_2, \gamma_3, \delta_2$ e δ_3 . Logo, substituindo em 3.22, teremos:

$$y_{i+1} = y_i + h\beta_0f + h\beta_1[f + h\gamma_1f_x + \delta_1hf_y] + \frac{h^2}{2}[\gamma_1^2f_{xx} + 2\gamma_1\delta_1f_{xy} + \delta_1^2f_{yy}] + \frac{h^3}{4!}[4f_{xxx}\gamma_1^3 + 12f_{xxy}\gamma_1^2\delta_1 + 12f_{xyy}\delta_1^2\gamma_1 + 4\delta_1^3f_{yyy}] + O(h^4) + h\beta_2[f + h\gamma_2f_x + \delta_2hf_y] + \frac{h^2}{2}[\gamma_2^2f_{xx} + 2\gamma_2\delta_2f_{xy} + \delta_2^2f_{yy}] + \frac{h^3}{4!}[4f_{xxx}\gamma_2^3 + 12f_{xxy}\gamma_2^2\delta_2 + 12f_{xyy}\delta_2^2\gamma_2 + 4\delta_2^3f_{yyy}] + O(h^4) + h\beta_3[f + h\gamma_3f_x + \delta_3hf_y] + \frac{h^2}{2}[\gamma_3^2f_{xx} + 2\gamma_3\delta_3f_{xy} + \delta_3^2f_{yy}] + \frac{h^3}{4!}[4f_{xxx}\gamma_3^3 + 12f_{xxy}\gamma_3^2\delta_3 + 12f_{xyy}\delta_3^2\gamma_3 + 4\delta_3^3f_{yyy}] + O(h^4)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\beta_0 f + h\beta_1 f + h^2\beta_1\gamma_1 f_x + h^2\beta_1\delta_1 f_y + \frac{h^3}{2}[\beta_1\gamma_1^2 f_{xx} + 2\beta_1\gamma_1\delta_1 f_{xy} + \beta_1\delta_1^2 f_{yy}] + \frac{h^4}{4!}[4\beta_1 f_{xxx}\gamma_1^3 + 12\beta_1 f_{xxy}\gamma_1^2\delta_1 + 12\beta_1 f_{xyy}\delta_1^2\gamma_1 + 4\beta_1\delta_1^3 f_{yyy}] + O(h^5) + h\beta_2 f + h^2\beta_2\gamma_2 f_x + h^2\beta_2\delta_2 f_y + \frac{h^3}{2}[\beta_2\gamma_2^2 f_{xx} + 2\beta_2\gamma_2\delta_2 f_{xy} + \beta_2\delta_2^2 f_{yy}] + \frac{h^4}{4!}[4\beta_2 f_{xxx}\gamma_2^3 + 12\beta_2 f_{xxy}\gamma_2^2\delta_2 + 12\beta_2 f_{xyy}\delta_2^2\gamma_2 + 4\beta_2\delta_2^3 f_{yyy}] + O(h^5) + h\beta_3 f + h^2\beta_3\gamma_3 f_x + h^2\beta_3\delta_3 f_y + \frac{h^3}{2}[\beta_3\gamma_3^2 f_{xx} + 2\beta_3\gamma_3\delta_3 f_{xy} + \beta_3\delta_3^2 f_{yy}] + \frac{h^4}{4!}[4\beta_3 f_{xxx}\gamma_3^3 + 12\beta_3 f_{xxy}\gamma_3^2\delta_3 + 12\beta_3 f_{xyy}\delta_3^2\gamma_3 + 4\beta_3\delta_3^3 f_{yyy}] + O(h^5)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\beta_0 f + h\beta_1 f + h\beta_2 f + h\beta_3 f + h^2\beta_1\gamma_1 f_x + h^2\beta_2\gamma_2 f_x + h^2\beta_3\gamma_3 f_x + h^2\beta_1\delta_1 f_y + h^2\beta_2\delta_2 f_y + h^2\beta_3\delta_3 f_y + \frac{h^3}{2}[\beta_1\gamma_1^2 f_{xx} + \beta_2\gamma_2^2 f_{xx} + \beta_3\gamma_3^2 f_{xx} + 2\beta_1\gamma_1\delta_1 f_{xy} + 2\beta_2\gamma_2\delta_2 f_{xy} + 2\beta_3\gamma_3\delta_3 f_{xy} + \beta_1\delta_1^2 f_{yy} + \beta_2\delta_2^2 f_{yy} + \beta_3\delta_3^2 f_{yy}] + \frac{h^4}{4!}[4\beta_1 f_{xxx}\gamma_1^3 + 4\beta_2 f_{xxx}\gamma_2^3 + 4\beta_3 f_{xxx}\gamma_3^3 + 12\beta_1 f_{xxy}\gamma_1^2\delta_1 + 12\beta_2 f_{xxy}\gamma_2^2\delta_2 + 12\beta_3 f_{xxy}\gamma_3^2\delta_3 + 12\beta_1 f_{xyy}\delta_1^2\gamma_1 + 12\beta_2 f_{xyy}\delta_2^2\gamma_2 + 12\beta_3 f_{xyy}\delta_3^2\gamma_3 + 4\beta_1\delta_1^3 f_{yyy} + 4\beta_2\delta_2^3 f_{yyy} + 4\beta_3\delta_3^3 f_{yyy}] + O(h^5)$$

$$y_{i+1} = y_i + h[\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3]f + \frac{h^2}{2!}[2(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3)f_x + 2(\beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 + \beta_3\delta_3)f_y] + \frac{h^3}{3!}[3(\beta_1\gamma_1^2 + \beta_2\gamma_2^2 + \beta_3\gamma_3^2)f_{xx} + 6(\beta_1\gamma_1\delta_1 + \beta_2\gamma_2\delta_2 + \beta_3\gamma_3\delta_3)f_{xy} + 3(\beta_1\delta_1^2 + \beta_2\delta_2^2 + \beta_3\delta_3^2)f_{yy}] + \frac{h^4}{4!}[4(\beta_1\gamma_1^3 + \beta_2\gamma_2^3 + \beta_3\gamma_3^3)f_{xxx} + 12(\beta_1\gamma_1^2\delta_1 + \beta_2\gamma_2^2\delta_2 + \beta_3\gamma_3^2\delta_3)f_{xxy} + 12(\beta_1\delta_1^2\gamma_1 + \beta_2\delta_2^2\gamma_2 + \beta_3\delta_3^2\gamma_3)f_{xyy} + 4(\beta_1\delta_1^3 + \beta_2\delta_2^3 + \beta_3\delta_3^3)f_{yyy}] + O(h^5)$$

(3.24)

Comparando 3.22 e 3.24, logo os parâmetros obtido será:

$$\begin{aligned}\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 1 \\ 2(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3) &= 1 \\ 2(\beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 + \beta_3\delta_3) &= f \\ 3(\beta_1\gamma_1^2 + \beta_2\gamma_2^2 + \beta_3\gamma_3^2) &= 1 \\ 6(\beta_1\gamma_1\delta_1 + \beta_2\gamma_2\delta_2 + \beta_3\gamma_3\delta_3) &= 2f \\ 3(\beta_1\delta_1^2 + \beta_2\delta_2^2 + \beta_3\delta_3^2) &= f^2 \\ 4(\beta_1\gamma_1^3 + \beta_2\gamma_2^3 + \beta_3\gamma_3^3) &= 1 \\ 12(\beta_1\gamma_1^2\delta_1 + \beta_2\gamma_2^2\delta_2 + \beta_3\gamma_3^2\delta_3) &= 3f \\ 12(\beta_1\delta_1^2\gamma_1 + \beta_2\delta_2^2\gamma_2 + \beta_3\delta_3^2\gamma_3) &= f^2 \\ 4(\beta_1\delta_1^3 + \beta_2\delta_2^3 + \beta_3\delta_3^3) &= f^3\end{aligned}$$

A resolução desse sistema é extensa, logo, será ocultada, mas pode ser encontrada em [1].

Na resolução do sistema linear, terá as seguintes curvas.

Para $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$$m_0 = hf(x_k, y_k)$$

$$m_1 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_0}{2})$$

$$m_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_1}{2})$$

$$m_3 = hf(x_k + h, y_k + m_2)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3) \quad (3.25)$$

Capítulo 4

Aplicação analítica do método numérico

Esse capítulo será separado para a aplicação analítica dos métodos numéricos vistos. Para a resolução analítica, serão utilizados dois exemplos, o primeiro exemplo:

Exemplo 1: Dada a EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(2x+3)}{y^2} \quad (4.1)$$

Com o PVI

$$y(0) = 1$$

Resolvendo de forma analítica, logo, utilizando o passo $h = 0, 2$.

A resolução analítica dessa EDO é demasiada extensa. Tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(2x+3)}{y^2}$$

Sem perda de generalidade.

$$\begin{aligned} y^2 dy &= \ln(2x+3) dx \\ y^2 dy - \ln(2x+3) dx &= 0 \end{aligned}$$

Integrando o primeiro membro em relação a y :

$$\int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + c$$

E o segundo em relação a x :

$\int \ln(2x + 3)dx$, tomando $u = 2x + 3$, temos:

$$u = 2x + 3$$

$$du = 2dx$$

$$\frac{du}{2} = dx$$

Substituindo, temos:

$$\int \ln(u) \frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int \ln(u) du$$

Logo:

$$\frac{1}{2} [u \ln(u) - u + c]$$

Substituindo u :

$$\frac{1}{2} [(2x + 3) \ln(2x + 3) - (2x + 3) + c]$$

Colocando o $(2x + 3)$ em evidência.

$$\frac{[(2x+3)(\ln(2x+3)-1)]}{2} + c$$

Substituindo na solução da integral. Tem-se:

$$\frac{y^3}{3} + C - \frac{[(2x+3)(\ln(2x+3)-1)]}{2} + c = 0$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{[(2x+3)(\ln(2x+3)-1)]}{2} + c$$

Isolando y , então:

$$y^3 = 3^{\frac{[(2x+3)(\ln(2x+3)-1)]}{2}} + c$$

$$y = \sqrt[3]{3^{\frac{[(2x+3)(\ln(2x+3)-1)]}{2}} + c}$$

Aplicando o PVI.

$$1 = \sqrt[3]{3^{\frac{(2.0+3)(\ln(2.0+3)-1)}{2}} + c}$$

$$1 = \sqrt[3]{3^{\frac{(3)(\ln(3)-1)}{2}} + c}$$

$$1 = \frac{3.3(\ln(3)-1)}{2} + c$$

$$c = \frac{2-(3.3(\ln(3)-1))}{2}$$

$$c = \frac{2-(9(\ln(3)-1))}{2}$$

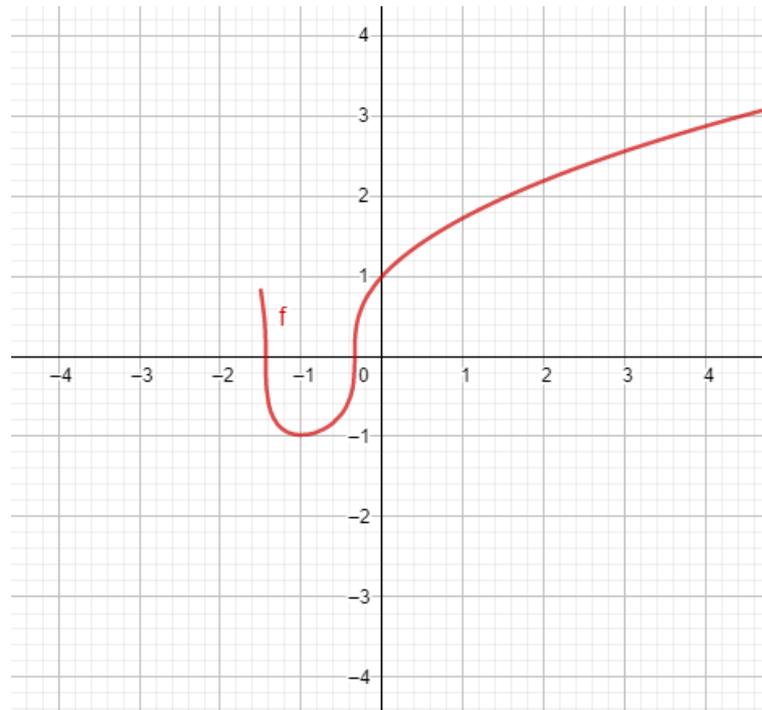
$$c = \frac{2-(9\ln(3)-9)}{2}$$

$$c = \frac{-9\ln(3)+11}{2}$$

Substituindo, tem-se:

$$y = \sqrt[3]{3^{\frac{[(2x+3)(\ln(2x+3)-1)]}{2}} + \frac{-9\ln(3)+11}{2}}$$

Abaixo, tem-se o gráfico da solução particular da EDO.

Figura 1 – Gráfico da solução particular de 4.1

Observe que a solução analítica é demasiada grande, além disso, é um processo trabalhoso a substituição dos valores na variável independente x . Para o exemplo, utilizando o mesmo valor de PVI, será resolvido mais adiante, com o passo $h = 0,2$, utilizando os métodos de aproximações Euler, Euler melhorada e Runge-Kutta.

O segundo exemplo, será utilizado uma EDO que não pode ser solucionado pelos métodos analíticos estudados, mas sabemos a solução particular.

Exemplo 2 Dada a EDO:

$$(3y + x) - (xe^y + 3xy) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (4.2)$$

Com o PVI

$$y(1) = 0$$

Não pode resolver pelo fator integrante, pois não é do formato $y' + p(x)y = g(x)$ e não pode manipular para utilizar o fator integrante. Não pode resolver pelo método das separáveis ou exatas, pois não pode ser reescrita como $M(y) + N(x).y' = 0$ e não se aplica a hipótese $M_x = N_y$. Mas a solução geral se encontra da seguinte forma:

$$y = \ln(x) + c \quad (4.3)$$

Observe que tomando:

$$y = \ln(x)$$

então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Substituindo em 4.2 temos:

$$(3\ln(x) + x) - (xe^{\ln(x)} + 3x\ln(x))\frac{1}{x} =$$

$$(3\ln(x) + x) - (x.x + 3x.\ln(x))\frac{1}{x} =$$

$$(3\ln(x) + x) - (x^2 + 3x\ln(x))\frac{1}{x} =$$

$$(3\ln(x) + x) - (x + 3\ln(x)) =$$

$$3\ln(x) + x - x - 3\ln(x) = 0$$

com a solução 4.3 tem-se:

$$0 = \ln(1) + c$$

$$0 = \ln(1) + c$$

$$0 = 0 + c$$

$$c = 0$$

Logo, a solução particular é:

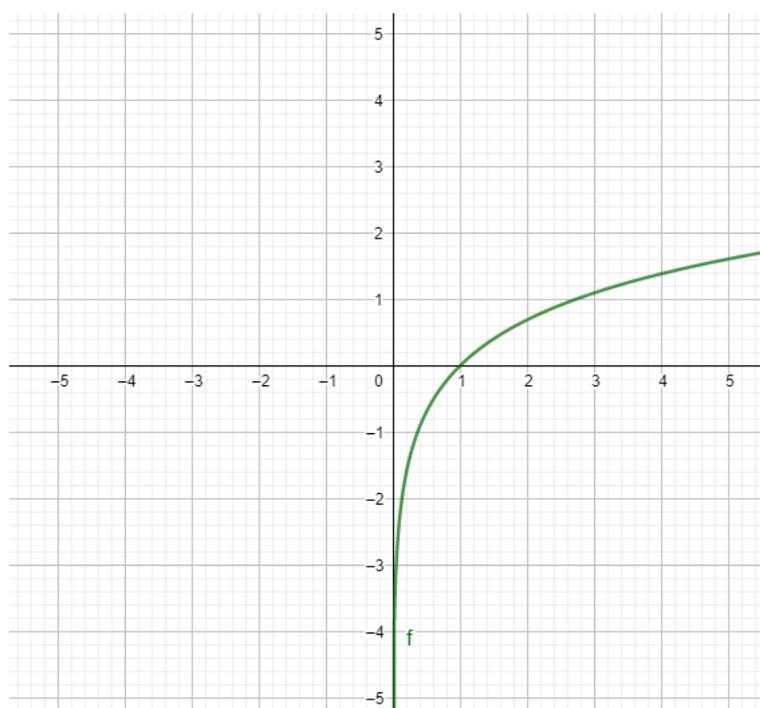
$$y = \ln(x)$$

A figura 2 mostra a resolução da analítica.

4.1 Método de Euler

4.1.1 Exemplo 1

Seja a EDO com PVI:

Figura 2 – Gráfico da solução particular 4.2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(2x+3)}{y^2}$$

$$y(0) = 1$$

Por 3.7, temos, $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, para $i = 0$, logo:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Verificando o PVI do exemplo 1.

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 1$$

Utilizando o passo $h = 0,2$, logo, tem-se:

$$y_1 = 1 + 0,2f(0,1) \tag{4.4}$$

Resolvendo $f(0,1)$

$$f(0,1) = \frac{\ln(2 \times 0 + 3)}{1^2} = \frac{\ln(3)}{1} \approx 1,0986$$

Substituindo em 4.4:

$$y_1 \approx 1 + 0,2(1,0986) \approx 1,2197$$

Tem-se:

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2$$

De forma análoga, teremos:

$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$. Substituindo

$$x_1 = 0,2$$

$$y_1 \approx 1,2197$$

$$h = 0,2$$

Tem-se:

$$f(0,2, 1,2197) = \frac{\ln(2 \times 0,2 + 3)}{1,2197^2} \approx 0,8226$$

Substituindo:

$$y_2 \approx 1,2197 + 0,2(0,8226) \approx 1,3842$$

Então:

$$x_2 = x_1 + h = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

Seguindo o procedimento para $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$ e $x_5 = 1$. Obterá os seguintes resultados.

$$y_3 \approx 1,5235$$

$$y_4 \approx 1,6471$$

$$y_5 \approx 1,7596$$

4.1.2 Exemplo 2

No segundo exemplo antes da verificação do PVI no 4.2, isolando o $\frac{dy}{dx}$, então:

$$(3y + x) - (xe^y + 3xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3y + x) = (xe^y + 3xy) \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{(3y+x)}{(xe^y+3xy)} = \frac{dy}{dx} \text{ com } x \neq 0$$

Agora verificando o PVI do exemplo 4.2

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 0$$

Utilizando o mesmo passo $h = 0,2$, logo, tem-se:

$$y_1 = 0 + 0,2f(1,0) \tag{4.5}$$

Resolvendo $f(1,0)$.

$$f(1,0) = \frac{(3 \times 0 + 1)}{(1e^0 + 3 \times 0 \times 1)} = \frac{1}{1} = 1$$

Substituindo em 4.5,

$$y_1 = 0 + 0,2 \times 1 = 0,2$$

Logo:

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0,2 = 1,2$$

De forma análoga, tem-se:

$$y_2 = y_1 + h.f(x_1, y_1)$$

Substituindo:

$$x_1 = 1,2$$

$$y_1 = 0,2$$

$$h = 0,2$$

Tem-se:

$$f(1, 2, 0, 2) = \frac{(3 \times 0,2 + 1,2)}{(1,2e^{0,2} + 3 \times 1,2 \times 0,2)} = \frac{1,8}{2,1857} \approx 0,8235$$

Substituindo:

$$y_2 \approx 0,2 + 0,2(0,8235) \approx 0,3647$$

Então:

$$x_2 = x_1 + h = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

Seguindo o procedimento para $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$ e $x_5 = 1$. Obtendo os seguintes resultados.

$$y_3 \approx 0,5053$$

$$y_4 \approx 0,6280$$

$$y_5 \approx 0,7370$$

4.2 Euler melhorado

4.2.1 Exemplo 1

Aplicando o exemplo 4.1, com o mesmo PVI e o mesmo passo, com o método de Euler melhorado, obtendo:

Com o 3.17, tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(m_0 + m_1);$$

$$m_0 = hf(x_i, y_i)$$

$$m_1 = hf(x_i + h, y_i + m_0)$$

Substituindo as variáveis. Tem-se:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}(m_0 + m_1);$$

$$m_0 = 0,2f(0,1)$$

$$m_1 = 0,2f(0,2 + 0,2,1 + m_0).$$

Resolvendo $f(0,1)$, temos:

$$f(0, 1) = \frac{\ln(2(0)+3)}{1^2} = \ln(3) \approx 1,0986$$

Substituindo em m_0 , temos:

$$m_0 \approx 0,2 \times 1,0986 \approx 0,2197$$

Substituindo em m_1

$$m_1 \approx 0,2f(0 + 0,2, 1 + 0,2197) \approx 0,2f(0,2; 1,2197);$$

$$f(0,2, 1,2197) = \frac{\ln(2 \times 0,2 + 3)}{(1,2197)^2} = \frac{\ln(3,4)}{1,4877} \approx 0,8226$$

Logo:

$$m_1 = 0,2 \times 0,8226 \approx 0,1645$$

Então:

$$y_1 \approx 1 + \frac{1}{2}(0,2197 + 0,1645) = 1,1921$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2$$

De forma análoga para y_2

$$y_2 = 1,1921 + \frac{1}{2}(m_0 + m_1)$$

$$m_0 = 0,2f(0,2, 1,1921)$$

$$m_1 = 0,2f(0,2 + 0,2, 1,1921 + m_0)$$

Resolvendo $f(0,2, 1,1921)$, tem-se:

$$f(0,2, 1,1921) = \frac{\ln(2(0,2)+3)}{1,1921^2} = \frac{\ln(3,4)}{1,4211} \approx 0,8611$$

Substituindo em m_0 , tem-se:

$$m_0 \approx 0,2 \times 0,8611 = 0,1722$$

$$m_1 = 0,2f(0,2 + 0,2, 1,1921 + 0,1722) = 0,2f(0,4, 1,3643);$$

$$f(0,4, 1,3643) = \frac{\ln(2 \times 0,4 + 3)}{(1,3643)^2} = \frac{\ln(3,8)}{1,8614} \approx 0,7172$$

Logo:

$$m_1 \approx 0,2 \times 0,7172 \approx 0,1434$$

Então:

$$y_2 \approx 1,1921 + \frac{1}{2}(0,1722 + 0,1434) \approx 1,3499$$

Resolvendo de maneira análoga para $x_2 = 0,4; x_3 = 0,6; x_4 = 0,8$ e $x_5 = 1$.
Obtendo os seguintes resultados.

$$y_3 = 1,4873$$

$$y_4 = 1,6105$$

$$y_5 = 1,7232$$

4.2.2 Exemplo 2

Resolvendo o 4.2, com o mesmo PVI e o mesmo passo, com Euler melhorada, obtendo:

Substituindo as variáveis, tem-se:

$$y_1 = 0 + \frac{1}{2}(m_0 + m_1);$$

$$m_0 = 0,2f(1,0)$$

$$m_1 = 0,2.f(1 + 0,2, 0 + m_0)$$

Resolvendo $f(1,0)$, tem-se:

$$f(1,0) = \frac{(3 \times 0 + 1)}{(1e^0 + 3 \times 0 \times 1)} = \frac{1}{1} = 1$$

Substituindo em m_0 , tem-se:

$$m_0 = 0,2 \times 1 = 0,2$$

$$m_1 = 0,2f(1 + 0,2, 0 + 0,2) = 0,2f(1,2,0,2);$$

$$f(1,2,0,2) = \frac{(3 \times 0,2 + 1,2)}{(1,2e^{0,2} + 3 \times 1,2 \times 0,2)} = \frac{1,8}{2,1857} \approx 0,8235$$

Logo:

$$m_1 \approx 0,2 \times 0,8235 = 0,1647$$

Então:

$$y_1 = 0 + \frac{1}{2}(0,2 + 0,1647) \approx 0,1823$$

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0,2 = 1,2.$$

De forma análoga para y_2

$$y_2 = 0,1823 + \frac{1}{2}(m_0 + m_1)$$

$$m_0 = 0,2f(1,2,0,1823)$$

$$m_1 = 0,2f(1,2 + 0,2,0,1823 + m_0).$$

Resolvendo $f(1,2,0,1823)$, tem-se:

$$f(1,2,0,1823) = \frac{(3 \times 0,1823 + 1,2)}{(1,2e^{0,1823} + 3 \times 0,1823 \times 1,2)} = \frac{1,7470}{2,0962} \approx 0,8334$$

Substituindo em m_0 , temos:

$$m_0 = 0,2 \times 0,8334 = 0,1667$$

$$m_1 = 0,2f(1,2 + 0,2,0,1823 + 0,1667) = 0,2f(1,4,0,350);$$

$$f(1,4,0,350) = \frac{(3 \times 0,350 + 1,4)}{(1,4e^{0,350} + 3 \times 0,350 \times 1,4)} = \frac{2,45}{3,4567} \approx 0,7087$$

Logo:

$$m_1 = 0,2 \times 0,7087 \approx 0,1417$$

$$y_2 \approx 0,1823 + \frac{1}{2}(0,1667 + 0,1417) \approx 0,3365$$

Seguindo o procedimento para $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$ e $x_5 = 1$. Obtendo os seguintes resultados.

$$y_3 = 0,4702$$

$$y_4 = 0,5880$$

$$y_5 = 0,6934$$

4.3 Runge Kutta de quarta ordem

4.3.1 Exemplo 1

Utilizando agora o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com o exemplo 4.1, com o mesmo PVI e o mesmo passo, por 3.22, tem-se:

Substituindo os valores do PVI e de h, tem-se:

$$m_0 = 0,2f(0,1)$$

$$m_1 = 0,2f\left(0 + \frac{0,2}{2}, 1 + \frac{m_0}{2}\right)$$

$$m_2 = 0,2f\left(x_0 + \frac{0,2}{2}, y_0 + \frac{m_1}{2}\right)$$

$$m_3 = 0,2f(x_0 + 0,2, y_0 + m_2)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3)$$

Substituindo para descobrir o valor de m_0 , então:

$$m_0 = 0,2f(0,1);$$

$$f(0,1) = \frac{\ln(2 \times 0 + 3)}{1^2} = \ln(3) \approx 1,0986.$$

Aplicando em m_0

$$m_0 = 0,2 \times 1,0986$$

$$m_0 = 0,2197$$

Substituindo em m_1

$$m_1 = 0,2f\left(0 + 0,1, 1 + \frac{m_0}{2}\right);$$

$$m_1 = 0,2f(0,1, 1, 1099)$$

$$f(0, 1, 1, 1099) = \frac{\ln(2 \times 0,1 + 3)}{1,1099^2} = \frac{\ln(3,2)}{1,1099^2} = 0,9442$$

Aplicando em m_1

$$m_1 = 0,2 \times 0,9442$$

$$m_1 = 0,1889$$

Substituindo em m_2 , tem-se:

$$m_2 = 0,2f\left(0 + \frac{h}{2}, 1 + \frac{m_1}{2}\right);$$

$$m_2 = 0,2f(0, 1, 1, 0944)$$

$$f(0, 1, 1, 0944) = \frac{\ln(2 \times 0,1 + 3)}{1,0944^2} = \frac{\ln(3,2)}{1,0944^2} = 0,9711$$

Substituindo em m_2

$$m_2 = 0,2 \times 0,9711$$

$$m_2 = 0,1942$$

Substituindo em m_3 , tem-se:

$$m_3 = 0,2f(0 + h, 1 + m_2);$$

$$m_3 = 0,2f(0, 2, 1, 1942)$$

$$f(0, 2, 1, 1942) = \frac{\ln(2 \times 0,2 + 3)}{1,1942^2} = \frac{\ln(3,4)}{1,1942^2} = 0,8581$$

Substituindo em m_3

$$m_3 = 0,2 \times 0,8581$$

$$m_3 = 0,1716$$

Substituindo os valores encontrados em y_1 , tem-se:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0,2197 + 2 \times 0,1889 + 2 \times 0,1942 + 0,1716)$$

$$y_1 = 1,1929$$

Tomando:

$$x_1 = x_0 + h;$$

$$x_1 = 0 + 0,2$$

$$x_1 = 0,2$$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3)$. Tem-se que descobrir o valor de m_0 , então:

$$m_0 = 0,2f(0,2,1,1929);$$

$$f(0,2,1,1929) = \frac{\ln(2 \times 0,2 + 3)}{1,1929^2} = \frac{\ln(3,4)}{1,4230} \approx 0,86$$

Substituindo em m_0

$$m_0 = 0,2 \times 0,86$$

$$m_0 = 0,1720$$

Substituindo em m_1

$$m_1 = 0,2f(0,2 + 0,1,1,1929 + \frac{m_0}{2});$$

$$m_1 = 0,2f(0,3,1,2790)$$

$$f(0,3,0,086) = \frac{\ln(2 \times 0,3 + 3)}{1,2790^2} = \frac{\ln(3,6)}{1,6357} = 0,7831$$

Substituindo em m_1

$$m_1 = 0,2 \times 0,7831$$

$$m_1 = 0,1566$$

Em m_2 , tem-se:

$$m_2 = 0,2f(0,2 + 0,1,1,1929 + \frac{m_1}{2});$$

$$m_2 = 0,2f(0,3,1,2712)$$

$$f(0,3,1,2712) = \frac{\ln(2 \times 0,3 + 3)}{1,2712^2} = \frac{\ln(3,6)}{1,6160} = 0,7926$$

Substituindo em m_2

$$m_2 = 0,2 \times 0,7926$$

$$m_2 = 0,1585$$

Substituindo em m_3 , tem-se:

$$m_3 = 0,2f(0,2 + 0,2, 1,1929 + 0,1585);$$

$$m_3 = 0,2f(0,4, 1,3514)$$

$$f(0,4, 1,3514) = \frac{\ln(2 \times 0,4 + 3)}{1,3514^2} = \frac{\ln(3,8)}{1,8263} = 0,7310$$

Substituindo em m_3

$$m_3 = 0,2 \times 0,7310$$

$$m_3 = 0,1462$$

Substituindo os valores encontrados em y_2 , tem-se:

$$y_2 = 1,1929 + \frac{1}{6}(0,1720 + 2 \times 0,1566 + 2 \times 0,1585 + 0,1462)$$

$$y_2 = 1,3510$$

Seguindo o procedimento para $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$ e $x_5 = 1$

Obtendo os seguintes resultados.

$$y_3 = 1,4883$$

$$y_4 = 1,6116$$

$$y_5 = 1,7243$$

4.3.2 Exemplo 2

Utilizando agora o método de Runge-Kutta de quarta ordem, agora com 4.2, com o mesmo PVI e o mesmo passo, por 3.22, tem-se:

$$m_0 = 0,2f(1,0)$$

$$m_1 = 0,2f\left(0 + \frac{0,2}{2}, 1 + \frac{m_0}{2}\right)$$

$$m_2 = 0,2f\left(x_0 + \frac{0,2}{2}, y_0 + \frac{m_1}{2}\right)$$

$$m_3 = 0,2f(x_0 + 0,2, y_0 + m_2)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3)$$

Temos que descobrir o valor de m_0 , então:

$$m_0 = 0,2f(1,0);$$

$$f(1,0) = \frac{3 \times 0 + 1}{1e^{0+3 \times 1 \times 0}} = \frac{1}{1} = 1$$

Substituindo em m_0

$$m_0 = 0,2 \times 1$$

$$m_0 = 0,2$$

Substituindo em m_1

$$m_1 = 0,2f(1 + 0,1, 0 + \frac{0,2}{2});$$

$$m_1 = 0,2f(1,1,0,1)$$

$$f(1,1,0,1) = \frac{3 \times 0,1 + 1,1}{1,1e^{0,1+3 \times 1,1 \times 0,1}} = \frac{1,4}{1,5457} \approx 0,9057$$

Substituindo em m_1

$$m_1 = 0,2 \times 0,9057$$

$$m_1 = 0,1811$$

Substituindo em m_2 , tem-se:

$$m_2 = 0,2f(1 + 0,1, 0 + \frac{0,1811}{2});$$

$$m_2 = 0,2f(1,1,0,0906)$$

$$f(1,1,0,0906) = \frac{3 \times 0,0906 + 1,1}{1,1e^{0,0906+3 \times 1,1 \times 0,0906}} = \frac{1,3718}{1,5033} \approx 0,9125$$

Substituindo em m_2

$$m_2 = 0,2 \times 0,9125$$

$$m_2 = 0,1825$$

Substituindo em m_3 , tem-se:

$$m_3 = 0,2f(1 + 0,2, 0 + m_2);$$

$$m_3 = 0,2f(1,2, 0,1825)$$

$$f(1,2, 0,1825) = \frac{3 \times 0,1825 + 1,2}{1,2e^{0,1825} + 3 \times 1,2 \times 0,1825} = \frac{1,7475}{2,0972} \approx 0,8332$$

Substituindo em m_3

$$m_3 = 0,2 \times 0,8332$$

$$m_3 = 0,1666$$

Substituindo os valores encontrados em y_1 , tem-se:

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6}(0,2 + 2 \times 0,1811 + 2 \times 0,1825 + 0,1666)$$

$$y_1 = 0,1823$$

Tomando:

$$x_1 = x_0 + h \text{ tal que}$$

$$x_1 = 1 + 0,2$$

$$x_1 = 1,2$$

De maneira análoga para y_2 .

$$m_0 = 0,2f(1,2, 0,1823);$$

$$f(1,2, 0,1823) = \frac{3 \times 0,1823 + 1,2}{1,2e^{0,1823} + 3 \times 1,2 \times 0,1823} = \frac{1,7470}{2,0962} \approx 0,8334$$

Substituindo em m_0

$$m_0 = 0,2 \times 0,8334$$

$$m_0 = 0,1667$$

Substituindo em m_1

$$m_1 = 0,2f(1,2 + 0,1,0,1823 + \frac{0,1667}{2});$$

$$m_1 = 0,2f(1,3,0,2656)$$

$$f(1,3,0,2656) = \frac{3 \times 0,2656 + 1,3}{1,3e^{0,2656} + 3 \times 1,3 \times 0,2656} = \frac{2,0970}{2,7313} \approx 0,7677$$

Substituindo em m_1

$$m_1 = 0,2 \times 0,7677$$

$$m_1 = 0,1535$$

Substituindo em m_2 , tem-se:

$$m_2 = 0,2f(1,2 + 0,1,0,1823 + \frac{0,1535}{2}), \text{ logo:}$$

$$m_2 = 0,2f(1,3,0,2591)$$

$$f(1,3,0,2591) = \frac{3 \times 0,2591 + 1,3}{1,3e^{0,2591} + 3 \times 1,3 \times 0,2591} = \frac{2,0772}{2,695} \approx 0,7707$$

Substituindo em m_2

$$m_2 = 0,2 \times 0,7707$$

$$m_2 = 0,1541$$

Substituindo em m_3 , tem-se:

$$m_3 = 0,2f(1,2 + 0,2,0,1823 + m_2);$$

$$m_3 = 0,2f(1,4,0,3364)$$

$$f(1,4,0,3364) = \frac{3 \times 0,3364 + 1,4}{1,4e^{0,3364} + 3 \times 1,4 \times 0,3364} = \frac{2,4093}{3,3727} \approx 0,7143$$

Substituindo em m_3

$$m_3 = 0,2 \times 0,7143$$

$$m_3 = 0,1430$$

Substituindo os valores encontrados em y_2 , tem-se:

$$y_2 = 0,1823 + \frac{1}{6}(0,1667 + 2 \times 0,1535 + 2 \times 0,1541 + 0,1430)$$

$$y_2 = 0,3364$$

Seguindo o procedimento para $x_2 = 1,4$; $x_3 = 1,6$; $x_4 = 1,8$ e $x_5 = 2$

Obtendo os seguintes resultados.

$$y_3 = 0,47$$

$$y_4 = 0,5878$$

$$y_5 = 0,6931$$

Nas tabelas abaixo, tem um resumo dos resultados obtidos no exemplo 1 e no exemplo 2, utilizando os 3 métodos e o valor exato.

Tabela 1 – Resultados obtidos em cada um dos métodos numéricos para o exemplo 1

x	Método de Euler	Euler melhorada	Método de Runge-Kutta	Exato
0	1	1	1	1
0,2	1,2197	1,1921	1,1929	1,1929
0,4	1,3842	1,3499	1,3510	1,3510
0,6	1,5235	1,4873	1,4883	1,4884
0,8	1,6471	1,6105	1,6116	1,6116
1	1,7596	1,7232	1,7243	1,7243

Tabela 2 – Resultados obtidos em cada um dos métodos numéricos para o exemplo 2

x	Método de Euler	Euler melhorada	Método de Runge-Kutta	Exato
1	0	0	0	0
1,2	0,2	0,1823	0,1823	0,1823
1,4	0,3647	0,3365	0,3364	0,3365
1,6	0,5053	0,4702	0,4700	0,4700
1,8	0,6280	0,5880	0,5878	0,5878
2	0,7370	0,6934	0,6931	0,6931

As tabelas a seguir mostra os erros de cada método.

Tabela 3 – Erro dos métodos numéricos utilizados do exemplo 1

x	Método de Euler	Euler melhorada	Método de Runge-Kutta
0	0	0	0
0,2	0,0268	0,0008	0,0001
0,4	0,0332	0,0011	0,0000
0,6	0,0351	0,0011	0,0001
0,8	0,0355	0,0011	0,0000
1,0	0,0353	0,0011	0,0000

Tabela 4 – Erro dos métodos numéricos utilizados do exemplo 2

x	Método de Euler	Euler melhorada	Método de Runge-Kutta
1	0	0	0
1,2	0,0177	0,0000	0,0000
1,4	0,0282	0,0001	0,0000
1,6	0,0353	0,0002	0,0000
1,8	0,0402	0,0002	0,0000
2	0,0438	0,0003	0,0000

Na resolução, foi utilizado o passo $h = 0,2$, e, arredondando com 4 casas decimais. Observe que o erro no método de Runge-Kutta é imperceptível. No capítulo a seguir, vai ser utilizando o mesmo exemplo, mas com seis números depois da vírgula, o passo $h = 0,1$ e com o auxílio da programação.

Capítulo 5

Aplicação numérica

Nos capítulos anteriores, foram vistos os aspectos históricos tanto da EDO, quanto dos métodos numéricos, além de toda metodologia para obtermos os métodos em uma malha $[x_0, x_n]$. Neste capítulo, utilizando os mesmos exemplos vistos anteriormente, ou seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(2x+3)}{y^2}$$

e

$$(3y + x) - (xe^y + 3xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

O objetivo agora é a construção de algoritmos, que serão implementados no Scilab, para a obtenção dos resultados numéricos. Os algoritmos para a resolução numérica de cada um dos exemplos se encontram em anexo, que foram desenvolvidos pelo autor para a análise e obtenção das aproximações. Utilizando os mesmos PVI's do capítulo anterior, mas, para um aprimoramento nos resultados, será feito com o passo $h = 0,1$.

A figura 3 refere-se ao exemplo 1 onde, na primeira coluna tem-se os valores de t , na segunda os valores da solução particular, na terceira as aproximações do método de Euler, na quarta da Euler melhorada e na última de Runge-Kutta.

Na figura 4, apresenta-se os respectivos erros numéricos de cada método, para o exemplo 1. Observe que o método de Euler apresenta o maior percentual de erro e o de Runge-Kutta o menor, pois, é utilizado mais subintervalos para o cálculo da aproximação numérica.

Na figura 5, o gráfico verde escuro são os valores do método de Euler, o verde claro são os valores da solução exata, o azul são os valores de Euler melhorada e o laranja

```

t-----Exato-----Método de Euler--Euler Melhorado--Rugge-Kutta
0.000000-----1.000000-----1.000000-----1.000000-----1.000000
0.100000-----1.102301-----1.109861-----1.102144-----1.102301
0.200000-----1.192898-----1.204289-----1.192663-----1.192899
0.300000-----1.275126-----1.288669-----1.274850-----1.275127
0.400000-----1.350982-----1.365803-----1.350685-----1.350983
0.500000-----1.421770-----1.437368-----1.421463-----1.421771
0.600000-----1.488396-----1.504468-----1.488085-----1.488397
0.700000-----1.551519-----1.567871-----1.551208-----1.551520
0.800000-----1.611638-----1.628143-----1.611330-----1.611639
0.900000-----1.669141-----1.685711-----1.668837-----1.669142
1.000000-----1.724336-----1.740913-----1.724037-----1.724337

```

Figura 3 – Resolução numérica dos 4 métodos - Exemplo 1

```

t-----Método de Euler--Euler Melhorado--Rugge-Kutta
0.000000-----0.000000-----0.000000-----0.000000
0.100000-----0.007561-----0.000156-----0.000001
0.200000-----0.011391-----0.000235-----0.000001
0.300000-----0.013543-----0.000276-----0.000001
0.400000-----0.014820-----0.000297-----0.000001
0.500000-----0.015598-----0.000307-----0.000001
0.600000-----0.016072-----0.000311-----0.000001
0.700000-----0.016352-----0.000311-----0.000001
0.800000-----0.016505-----0.000308-----0.000001
0.900000-----0.016570-----0.000304-----0.000001
1.000000-----0.016577-----0.000298-----0.000001

```

Figura 4 – Erro numérico dos 4 métodos - Exemplo 1

de Runge-Kutta. Como existe uma distinção maior no método de Euler, logo, é o único gráfico que podemos distinguir dos valores exatos.

Passando agora para o exemplo 2, onde os resultados são apresentados na figura 6, onde não temos uma solução analítica para o problema.

Na figura 7, apresentamos os respectivos erros de aproximação para o exemplo 2.

Na figura 8, o gráfico marrom são os valores do método de Euler, o verde claro são os valores da solução exata, o vermelho são os valores de Euler melhorada e o azul de Runge-Kutta. Como existe uma distinção maior no método de Euler, logo, é o único gráfico que podendo distinguir dos valores exatos.

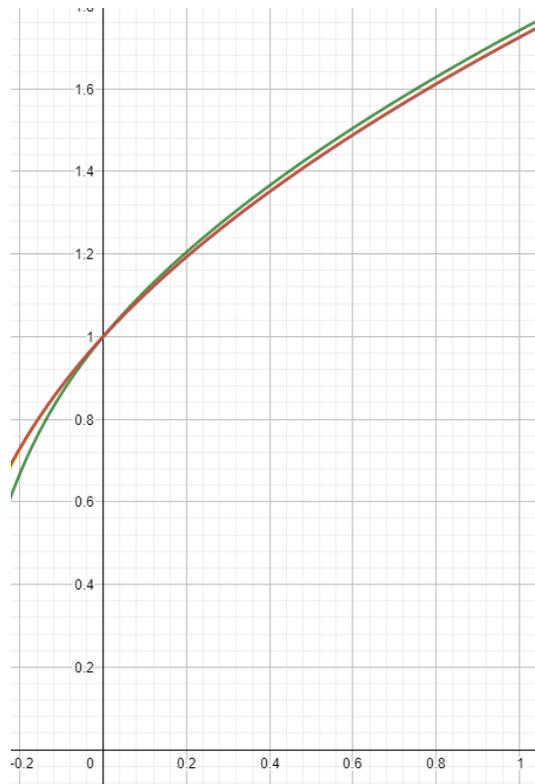


Figura 5 – Gráfico dos valores numéricos e do valor exato - Exemplo 1

t	Exato	Método de Euler	Euler Melhorado	Rugge-Kutta
1.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000
1.100000	-0.095310	-0.100000	-0.095287	-0.095310
1.200000	-0.182322	-0.190575	-0.182299	-0.182322
1.300000	-0.262364	-0.273443	-0.262350	-0.262365
1.400000	-0.336472	-0.349844	-0.336468	-0.336473
1.500000	-0.405465	-0.420727	-0.405471	-0.405465
1.600000	-0.470004	-0.486842	-0.470019	-0.470004
1.700000	-0.530628	-0.548792	-0.530652	-0.530629
1.800000	-0.587787	-0.607073	-0.587818	-0.587787
1.900000	-0.641854	-0.662096	-0.641891	-0.641854
2.000000	-0.693147	-0.714206	-0.693189	-0.693148

Figura 6 – Resolução numérica dos 4 métodos - Exemplo 2

t	Método de Euler	Euler Melhorado	Rugge-Kutta
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.100000	0.004690	0.000023	0.000000
1.200000	0.008253	0.000022	0.000000
1.300000	0.011078	0.000014	0.000000
1.400000	0.013372	0.000004	0.000000
1.500000	0.015262	0.000006	0.000000
1.600000	0.016838	0.000016	0.000000
1.700000	0.018164	0.000024	0.000000
1.800000	0.019286	0.000031	0.000000
1.900000	0.020242	0.000037	0.000000
2.000000	0.021059	0.000042	0.000000

Figura 7 – Erro numérico dos 4 métodos - Exemplo 2

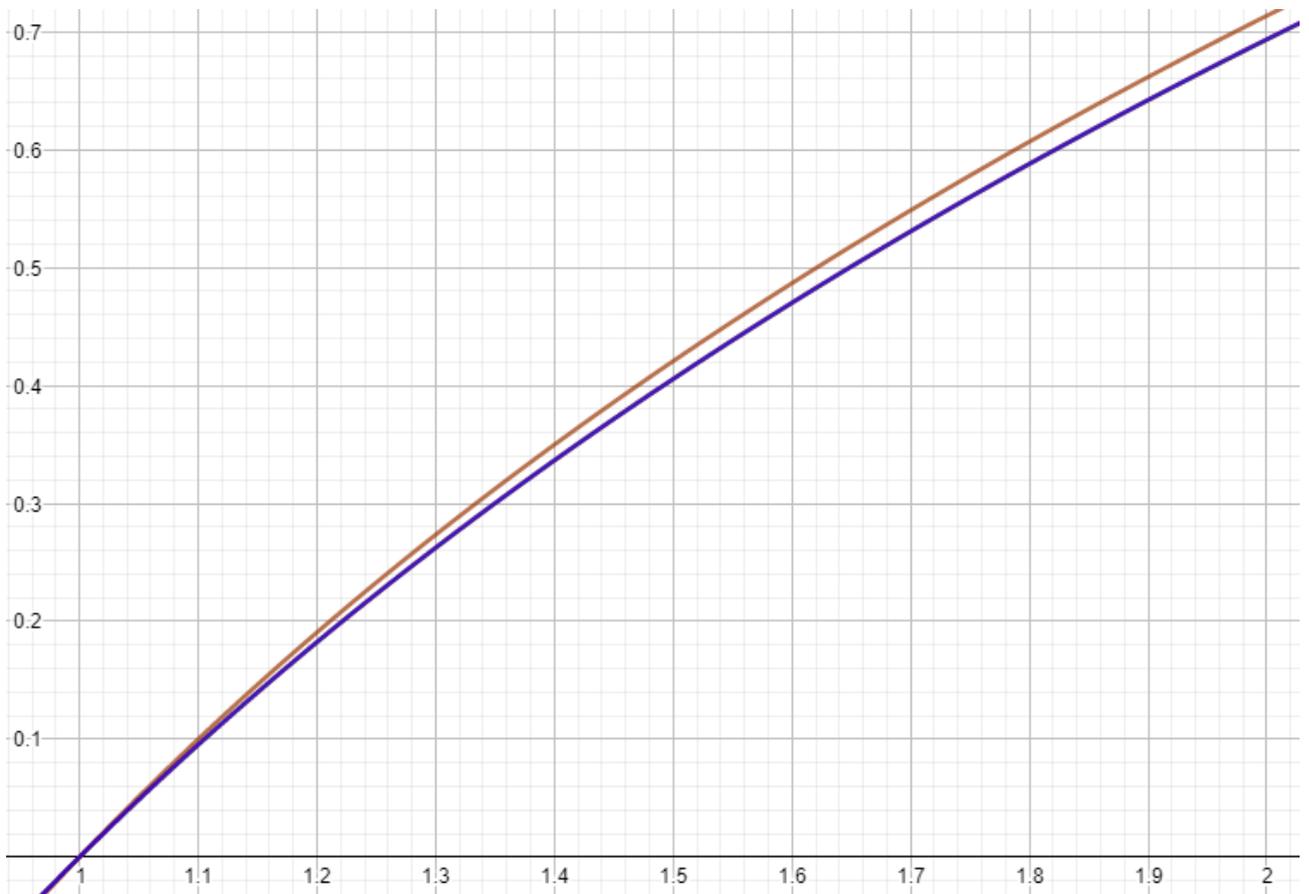


Figura 8 – Gráfico dos valores numéricos e do valor exato - Exemplo 2

Capítulo 6

Conclusão

Foi utilizado dois exemplos para aproximações com os métodos numéricos, ademais, o primeiro exemplo demanda esforço analítico para a solução da EDO e outro que não temos uma solução analítica, pelas resoluções analíticas estudadas.

Nos exemplos utilizados para a aproximação, podemos observar que o Método de Runge-Kutta demanda um erro menor que os anteriores. Visto na aplicação e podemos observar na teoria, tendo um erro $h^5(O)$. Nos testes que foram aplicados dos exemplos acima, no primeiro, temos o tempo de execução de cada programa 0,0083; 0,0071 e 0,0101, para o método de Euler, Euler melhorada e Runge-Kutta, respectivamente. No segundo exemplo, temos, 0,0076, 0,0133 e 0,0127, para o método de Euler, Euler melhorada e Runge-Kutta, respectivamente. Vale destacar, que foram feitos testes numéricos com $h = 0,1$.

Observe que no primeiro exemplo, temos que o método de Euler melhorada, demandou menos tempo, apresentando um erro significativo em relação ao Euler e Runge-Kutta. Além disso, no segundo exemplo temos uma diferença de tempo positiva. Mas, o erro de Runge-Kutta é próximo de zero.

Na aplicação em pesquisas, podem se utilizar passos menores na obtenção de melhores aproximações, como $h = 0,1$, $h = 0,01$, ou, $h = 0,001$. Com isso, teremos um tempo significativo no algoritmo, mas, teremos uma aproximação melhor.

Agora, vale destacar um ponto crucial, qual é o melhor método para se utilizar?. A resposta para essa pergunta é relativa, pois, depende do objetivo do usuário. Se o usuário estiver buscando um programa que não tem como prioridade a precisão, vale destacar o método de Euler, pela economia de tempo na execução do programa. Agora, se o objetivo for a precisão, o usuário terá duas alternativas, se quer precisão e não disponibiliza de um tempo relativamente grande, então a escolha será Euler Melhorada. Porém, se o usuário demanda de tempo e precisão, a escolha é Runge-Kutta, por entregar resultados com erros pequenos.

Referências

- [1] BARROSO, Leônidas da Conceição et al. **Cálculo numérico**:. (com aplicações). 2º. ed. São Paulo: HARBRA, 1987. 365 p. v. 1. ISBN 978-8529400891.5 Citado na página 32.
- [2] BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6º. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998. 532 p. v. 1. ISBN 85-216-1131-5 Citado na página 18.
- [3] CUNHA, M. Cristina C. **Métodos Numéricos**. 2º. ed. São Paulo: Unicamp, 2010. 280 p. v. 1. ISBN 978-8526808775 Nenhuma citação no texto.
- [4] ROSA, Carlos Fabiano. **Série de Taylor e Aplicações**. Orientador: Daniel Norberto Kozakevich. 2013. 56 p. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013. Citado na página 28.
- [5] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico**. Aspectos teóricos e computacionais. 2º. ed. São Paulo: Pearson Education, 1996. 406 p. v. 1. ISBN 85-346-0204-2 Nenhuma citação no texto.
- [6] STEWART, James. **Cálculo**. 6º. ed. São Paulo: Gengage Learning, 2012. 680 p. v. 2. ISBN 978-85-221-0661-5 Nenhuma citação no texto.

Anexos

Método de Euler

```

1  clc;
2  clear;
3  format - (7)
4  func=input("Digite a função em relação a x: ", "s");
5  deff("x=f(t,y)", func);
6  t0=input("Digite os valores iniciais de t0: ");
7  y0=input("Digite os valores iniciais de y0: ");
8  h=input("Defina a distancia de tn+1 para tn: ");
9  final=input("Defina o valor final de t: ")
10 t1=t0;
11 y2=y0;
12 printf("t-----Exata-----Euler-----Erro.\n")
13 tic()
14 for t=t1:h:final
15   ... yn=y0+f(t0,y0)*(h)
16   ... t0=t0+h
17   ... y1=ode(y2,t1,t,f)
18   ... printf("%f-----%f-----%f-----%f.\n", t, y1, y0, abs(y0-y1))
19   ... y0=yn
20 end
21 tempo=toc()

```

Figura 9 – Algoritmo - Método de Euler

A primeira e a segunda linha são comandos para limpar a tela e as variáveis que arquivaram valores de programas anteriores.

A terceira linha é definida para aumentar a quantidade de caracteres para os resultados que irão aparecer na tela.

A quarta e quinta linha são para definir uma função de duas variáveis independentes, t e y , em função da variável x .

A sexta e sétima linhas são para o usuário definir o PVI.

A oitava linha é para definir o passo que o programa deve seguir.

A nona linha é para definir em qual momento o valor t deve parar.

A décima e a décima primeira linhas, são para guardarem os valores do PVI.

A décima segunda linha é para aparecer a primeira linha da nossa tabela, informando os valores de t , os valores da solução exata, os valores do método de Euler e a diferença entre o valor exato e a aproximação.

A décima terceira linha é para começar a cronometrar o tempo do cálculo.

Da décima quarta linha até a vigésima é o cálculo 3.7, quando o usuário colocar um parâmetro para que o programa pare, indo do do valor inicial $t1$ ao passo h até o valor final. Nessas linhas é calculado a aproximação de Euler e o valor exato da EDO.

Na vigésima primeira linha é para que o cronômetro pare.

Euler Melhorada

```

1 clc;
2 clear;
3 format (6)
4 func=input("Digite a função em relação a x: ", "s");
5 def("x=f(t,y)", func);
6 t0=input("Digite os valores iniciais de t0:");
7 y0=input("Digite os valores iniciais de y0:");
8 h=input("Defina a distância de tn+1 para tn:");
9 final=input("Defina o valor final de t:");
10 t1=t0;
11 y2=y0;
12 printf("t-----Exata-----Euler com h=%f-----Erro.\n", h)
13 tic()
14 for t=t1:h:final
15     m0 = h*f(t0,y0)
16     m1 = h*f(t0 + h, y0 + h*f(t0,y0))
17     yn= y0 + (1/2)*[m0 + m1]
18     t0=t0+h
19     y1=ode(y2,t1,t,f)
20     printf("%f-----%f-----%f.\n", t, y1, y0, abs(yn-y1))
21     y0=yn
22 end
23 toc()

```

Figura 10 – Algoritmo - Euler Melhorada

A primeira e a segunda linha são comandos para limpar a tela e as variáveis que arquivaram valores de programas anteriores.

A terceira linha é definida para aumentar a quantidade de caracteres para os resultados que irão aparecer na tela.

A quarta e quinta linhas são para definir uma função de duas variáveis independentes, t e y , em função da variável x .

A sexta e sétima linha é para o usuário definir o PVI.

A oitava linha é para definir o passo que o programa deve seguir.

A nona linha é para definir em qual momento o valor t deve parar.

A décima e décima primeira linhas, são para guardarem os valores do PVI.

A décima segunda linha é para aparecer a primeira linha da nossa tabela, informando os valores de t , os valores da solução exata, os valores do método de Euler e a diferença entre o valor exato e a aproximação.

A décima terceira linha, é para começar a cronometrar o tempo do cálculo.

Da décima quarta linha até a vigésima segunda é o cálculo 3.7, quando foi colocado um parâmetro para que o programe pare, indo do do valor inicial $t1$ ao passo h até o valor final. Nessas linhas é calculado a aproximação de Euler e o valor exato da EDO.

Na vigésima terceira linha é para que o cronômetro pare.

Método de Runge-Kutta

```

1  clc;
2  clear;
3  format - (7)
4  func=input("Digite a função em relação a x: ", 's');
5  deff("x=f(t,y)", func);
6  t0=input("Digite os valores iniciais de t0: ");
7  y0=input("Digite os valores iniciais de y0: ");
8  h=input("Defina a distancia de tn+1 para tn: ");
9  final=input("Defina o valor final de t: ")
10 t1=t0;
11 y2=y0;
12 printf("t-----Exata-----Kutta-----Erro.\n")
13 tic()
14 for t=t1:h:final
15     k1=h*f(t0,y0)
16     k2=h*f(t0+h/2,y0+k1/2)
17     k3=h*f(t0+h/2,y0+k2/2)
18     k4=h*f(t0+h,y0+k3)
19     yn = y0+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
20     t0 = t0+h
21     y1=ode(y2,t1,t,f)
22     printf("%f-----%f-----%f-----%f.\n", t, y1, y0, abs(y0-y1))
23     y0=yn
24 end
25 tempo=toc()

```

Figura 11 – Algoritmo - Método de Runge-Kutta

A primeira e a segunda linhas são comandos para limpar a tela e as variáveis que arquivaram valores de programas anteriores.

A terceira linha é definida para aumentar a quantidade de caracteres para os resultados que irão aparecer na tela.

A quarta e quinta linhas são para definir uma função de duas variáveis independentes, t e y , em função da variável x .

A sexta e sétima linhas são para o usuário definir o PVI.

A oitava linha é para definir o passo que o programa deve seguir.

A nona linha é para definir em qual momento o valor t deve parar.

A décima e décima primeira linhas são para guardarem os valores do PVI.

A décima segunda linha é para aparecer a primeira linha da nossa tabela, informando os valores de t , os valores da solução exata, os valores do método de Euler e a diferença

entre o valor exato e a aproximação.

A décima terceira linha é para começar a cronometrar o tempo do cálculo.

Da décima quarta linha até a vigésima quarta é o cálculo 3.7, quando é colocado um parâmetro para que o programe pare, indo do do valor inicial t_1 ao passo a h até o valor final. Nessas linhas é calculado a aproximação de Euler e o valor exato da EDO.

Na vigésima quinta linha é para que o cronômetro pare.