UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALEXANDRE SILVA ANDRADE

ESPAÇOS DE BANACH E OS TEOREMAS DE HAHN-BANACH: UMA INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

Vitória da Conquista - BA
2023

ALEXANDRE SILVA ANDRADE

ESPAÇOS DE BANACH E OS TEOREMAS DE HAHN-BANACH: UMA INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Me. Ricardo Freire.

Vitória da Conquista - Bahia
2023

Folha de aprovação

Alexandre Silva Andrade

Espaços de Banach e os Teoremas de Hahn-Banach:
Uma Introdução à Análise Funcional

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em: xy de MÊS de ANO

BANCA EXAMINADORA

Ricardo Freire da Silva (Orientador)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

André Nagamine
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Alexsandra Oliveira Andrade
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Vitória da Conquista - BA
2023

Dedico este trabalho a mim e a minha família.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero expressar minha gratidão à minha mãe, pelo seu amor constante e pelo seu apoio incansável, que me capacitou e fortaleceu para enfrentar e vencer os obstáculos da minha jornada acadêmica. Meu agradecimento se estende a toda minha família, que sempre atribuíram valores positivos aos estudos. Além disso, compartilho o meu agradecimento a minha namorada que esteve ao meu lado durante todo o processo, me apoiando nos bons momentos e nas dificuldades.

Não posso deixar de agradecer meus amigos pela confiança e pelo apoio que me deram ao longo desta trajetória acadêmica. Em específico, agradeço a Jéssica e a Paulo, cujo companheirismo e norteamento foram essenciais para o meu crescimento como licenciando. Também agradeço ao meu orientador pela orientação excepcional ao longo deste trabalho, a qual foi essencial para que eu pudesse me desenvolver matematicamente e para a conclusão desta monografia.

Por fim, deixo meus agradecimentos à Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) por fornecer a estrutura para minha formação no curso de Licenciatura em Matemática, a todos os professores e colegas que participaram deste percurso e a Deus que me deu forças e sabedoria para enfrentar os desafios da minha trajetória acadêmica.

RESUMO

Neste trabalho, estudaremos alguns espaços de Banach fundamentais e um dos principais Teoremas da Análise Funcional: o Teorema de Hahn-Banach. Sobre o Teorema de Hahn-Banach, demonstraremos sua forma analítica (real e complexa), e suas formas geométricas e mostraremos algumas de suas belíssimas aplicações. Para o bom entendimento do Teorema serão introduzidos os espaços métricos e alguns elementos de teoria da medida para a Definição de alguns espaços de Banach fundamentais e uma forma do Axioma da Escolha, chamado de Lema de Zorn.

Palavras-chave: Espaços de Banach; Teoremas de Hahn-Banach; Lema de Riesz.

Sumário

Introdução

A Análise Funcional é uma síntese dos conceitos de Álgebra Linear, Análise e Topologia. Tal teoria estuda, essencialmente, os espaços normados de dimensão infinita (Os espaços de Banach), além das transformações lineares entre tais estruturas. Seu desenvolvimento ocorreu, parcialmente, devido ao estudo do comportamento de determinadas equações diferenciais e integrais.

Diante disso, o objetivo deste trabalho é realizar um estudo introdutório da Análise Funcional e demonstrar um de seus principais Teoremas: o Teorema de Hahn-Banach. No que tange aos Teoremas de Hahn-Banach, demonstraremos sua forma analítica (real e complexa) e suas formas geométricas, e mostraremos algumas de suas belíssimas aplicações. Vale ressaltar, que buscamos ser o mais detalhista ao longo do desenvolvimento teórico deste estudo, com o proposito de construir um texto didático, que pode servir como um ponto inicial para estudantes de graduação que buscam adquirir conhecimentos acerca da análise funcional.

Os dois primeiros capítulos introduzem algumas noções dos espaços métricos e da teoria da medida, as quais são essenciais para fundamentar a Definição de Espaços de Banach e para trabalhar com os exemplos, não triviais, dos espaços de Banach: os espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$ e $\ell_p(X, \Sigma, \mu)$, onde $1 < p \leq +\infty$ e (X, Σ, μ) é um espaço de medida.

No capítulo três introduzimos os espaços de Banach dando diversos exemplos e demonstrando algumas das suas propriedades. Além disso, ainda neste capítulo, fazemos um breve estudo sobre os operadores lineares contínuos, o qual é importante para enunciar o Teorema de Hahn-Banach.

Iniciando o capítulo quatro, falamos do lema de Zorn que é necessário para demonstrar o Toerema de Hahn-Banach. Posteriormente, provamos o Teorema de Hahn-Banach (caso real e analítico). Este teorema garante que funcionais lineares contínuos definidos em um subespaço G de um espaço normado E podem se estender a todo o espaço E, preservando a linearidade, continuidade e o valor da norma. Também demonstramos a primeira e segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach que assegura a separação de convexos por hiperplanos.

É difícil mensurar a importância dos Teorema de Hahn-Banach para a Análise Funcional, pois deles decorrem muitos corolários e aplicações importantes. Nesse caso, explicitamos no capítulo 5 algumas aplicabilidades relevantes destes lindíssimos resultados em espaços separáveis, no teorema fundamental do cálculo em espaços de Banach, o Lema de Riesz e na densidade de $C_C^\infty(\Omega)$ em $L_p(\Omega)$. Além disso, fazemos comentários sobre a unicidade do teorema de Hahn-Banach e o demonstramos sem utilizar o lema de Zorn, considerando a teoria dos espaços separáveis.

Capítulo 1

Espaços Métricos

Os espaços métricos introduzem conceitos fundamentais, como distância entre pontos, conjuntos abertos, conjuntos fechados e convergência de sequências em espaços métricos. Esses conceitos são essenciais para entender as propriedades dos Espaços de Banach. Em especial, caso o leitor tenha interesse no aprofundamento do estudo dos espaços métricos, pode consultar [5].

1.1 Definição e Primeiros Exemplos

Definição 1.1.1. *Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa cada par $(x, y) \in M \times M$ a um número real $d(x, y)$, denominado de distância entre x e y, e que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

1. $d(x, x) = 0$;
2. *Se* $x \neq y$, *então* $d(x, y) > 0$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Vale notar que o item 1 diz que a distância entre um ponto e ele mesmo é zero. O item 2 refere-se a positividade da função distância em pares (x, y), em que $x \neq y$. O item 3 trata da simetria da distância de dois pontos, pois é natural acreditar que a distância de um ponto x a um ponto y é a mesma distância do ponto y ao ponto x. Por fim, o item 4 é a desigualdade triangular, análoga à do plano euclidiano, em que a medida de um lado de um triângulo não excede a soma das medidas dos outros dois lados.

Definição 1.1.2. *Chamaremos de espaço métrico um par (M, d), no qual M é um conjunto e d é uma métrica em M. É importante ressaltar que os elementos de um espaço métrico serão chamados de pontos, isto é, as matrizes, as funções, os pontos, entre outros possíveis elementos de um espaço métrico, serão denominados de pontos.*

Exemplo 1.1.1. *Perceba que $d' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d'(x, y) = |x - y|$ é uma métrica em $\mathbb{R}$, pois dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ e se $x \neq y$, então $|x - y| > 0$. Particularmente, $|x - y| = |y - x|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e*

$$|x+y| = (|x+y|^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2 + 2xy + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq (x^2 + 2|x||y| + y^2)^{\frac{1}{2}} = ([|x| + |y|]^2)^{\frac{1}{2}} = |x| + |y|,$$

portanto, $|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$. Assim, d' atende os itens $1, 2, 3$ e 4 da Definição 1.1.1, sendo uma métrica em $\mathbb{R}$, mostrando que $(\mathbb{R}, d')$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.1.2. *Se (M, d) é um espaço métrico e $N \subseteq M$, então existe uma métrica d^* em N. Com efeito, basta considerar d^* a restrição de d ao conjunto $N \times N$, assim, a distância entre os elementos de N é a mesma distância que eles possuem como elementos de M. Quando fazemos isto, chamamos N de subespaço métrico de M e a métrica d^* é dita induzida pela de M.*

Exemplo 1.1.3. *Generalizando o exemplo 1.1.1, existem três maneiras naturais de se definir distância no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Os pontos do $\mathbb{R}^n$ são $n-$uplas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tal que $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Assim, dado $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, definiremos as funções $d_1, d_2, d_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por*

$$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

$$d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$$d_3 = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Claramente d_1, d_2 e d_3 cumprem as condições $1, 2$ e 3 da Definição 1.1.1. Particularmente, dado $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$d_2(x, z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = d_2(x, y) + d_2(y, z)$$

Portanto d_2 cumpre o item 4 da definção 1.1.1, sendo, de fato, uma métrica em $\mathbb{R}^n$, analogamente é possível mostrar que d_3 também é uma métrica. Para provar a desigualdade triangular de d_1, precisaremos de mais recursos, portanto demonstraremos esta propriedade a posteriori, no exemplo 1.1.10. Consideraremos, d_1 uma métrica por ora.

Proposição 1.1.1. *Considere as métricas d_1, d_2 e d_3 definidas no exemplo 1.1.3. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

$$d_3(x, y) \leq d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq n \cdot d_3(x, y)$$

Demonstração. Os casos $d_3(x,y) \leq d_1(x,y)$ e $d_2(x,y) \leq n \cdot d_3(x,y)$ são imediatos, restando mostrar apenas que $d_1(x,y) \leq d_2(x,y)$. Assim, note que $[d_1(x,y)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$, portanto

$$[d_1(x,y)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq 2\sum_{i<j}^{n}|x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = [d_2(x,y)]^2.$$

Logo $d_1(x,y) \leq d_2(x,y)$. □

Nesse caso, diremos que d_1, d_2 e d_3 são métricas equivalentes em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.4. *Considere X um conjunto arbitrário. Diremos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada, se existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < K$ para todo $x \in X$. Dessa maneira, definiremos $\mathcal{B}(X : \mathbb{R})$ como o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ limitadas. Em particular, a soma, a diferença e o produto de funções limitadas ainda é uma função limitada. Definiremos uma função em $\mathcal{B}(X : \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X : \mathbb{R})$ pondo, para $f, g \in \mathcal{B}(X : \mathbb{R})$ arbitrárias*

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Afirmamos que d é uma métrica em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. De fato, dados $f, g, h \in \mathcal{B}(X : \mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow 0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0 \\ \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Isto mostra que $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$. Como $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ para todo $x \in X$, então $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)|$, ou seja, d é simétrica. Por fim, da expressão $|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$ para todo $x \in X$, segue que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| \leq \sup_{x \in X}(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) = \\ \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} |g(x) - h(x)|, \end{aligned}$$

a qual demonstra a desigualdade triangular para d. Chamaremos essa métrica de métrica da convergência uniforme ou métrica do sup.

O símbolo $\mathbb{K}$ representará, indistintamente, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Chamaremos os elementos de $\mathbb{K}$ de escalares.

Definição 1.1.3. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma função $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in E$ um número real $||x||$, chamado de norma de x, é uma norma em E se satisfaz as seguintes condições para todo $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:*

1. $x \neq 0 \Rightarrow ||x|| \neq 0$;

2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

onde $|\lambda|$ é o valor absoluto de λ. Perceba que pelo item 2, temos que $||-x|| = ||x||$ e que $||\lambda x|| = 0$, se considerarmos $\lambda = 0$, pois $|0| \cdot ||x|| = 0 \cdot ||x|| = 0$. Pela contrapositiva do item 1, podemos notar que se $||x|| = 0$, então $x = 0$. Em especial, pelo item 3 podemos perceber que $0 = ||x + (-x)|| \leq ||x|| + ||-x|| = 2||x|| \Rightarrow ||x|| \geq 0$. Segue que $||x|| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Assim, podemos escrever a propriedade 1 da seguinte forma: $||x|| \geq 0$ e $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definição 1.1.4. *Chamamos de espaço vetorial normado um par $(E, ||\cdot||)$ onde $||\cdot||$ é uma norma do espaço vetorial E.*

Exemplo 1.1.5. *Sabemos que o $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Assim, os pares $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$, $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ e $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_3)$ são espaços normados, onde dado $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

$$||x||_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},\ ||x||_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,\ e\ ||x||_3 = \max |x_i|.$$

As demonstrações que $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ e $||\cdot||_3$ são normas, seguem do exemplo 1.1.3 considerando $d_i(x, 0)$ para $i = 1, 2, 3$, salvo a demonstração do item 2 da Definição 1.1.3 que é imediata.

Exemplo 1.1.6. *O espaço vetorial $\mathcal{B}(X : \mathbb{R})$ é um espaço normado com a norma $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$. A demonstração dos itens 1 e 3 da Definição 1.1.3 seguem do exemplo 1.1.4, observando que $||f||_\infty = d(f, 0)$. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, então $||\lambda f||_\infty = \sup\limits_{x\in X} |\lambda f(x)| = \sup\limits_{x\in X} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \sup\limits_{x\in X} |f(x)| = |\lambda| \cdot ||f||_\infty$, completando a demonstração.*

Exemplo 1.1.7. *Vale observar que todo espaço normado $(E, ||\cdot||)$ se torna um espaço métrico definindo $d(x, y) = ||x - y||$. Realmente, $||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, o que mostra que $d(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \neq y$. Como visto no item 2 da Definição 1.1.3, segue que $||x - y|| = ||y - x||$, portanto d é simétrica. Por fim, $||x - z|| \leq ||x - y + y - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z||$ atendendo a desigualdade triangular e encerrando a demonstração. A métrica $d(x, y) = ||x - y||$ no espaço normado $(E, ||\cdot||)$ é chamada de métrica proveniente da norma.*

Definição 1.1.5. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um produto interno em E é uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ a qual associa cada par ordenado de vetores $(x, y) \in E$ a um número real $\langle x, y\rangle$ chamado de produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer x, y e z em E e $\lambda \in \mathbb{R}$:*

1. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$;
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
4. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

Das três primeiras propriedades segue que

$$\langle x, y + z\rangle = \langle y + z, x\rangle = \langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,$$

$$\langle x, \lambda \cdot y\rangle = \langle \lambda \cdot y, x\rangle = \lambda \cdot \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$$

e que

$$\langle 0, y\rangle = 0 \cdot \langle 0, y\rangle = 0.$$

Exemplo 1.1.8. *Dados* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, com* $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$*, a função* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *é um produto interno em* $\mathbb{R}^n$*. Realmente, considere* $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ *e perceba que*

$$\langle x + y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)z_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i z_i + y_i z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

Além disso,

$$\langle \lambda \cdot x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \lambda \cdot \langle x, y\rangle,$$

também temos que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x\rangle.$$

Por fim, claramente,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0,$$

se $x \neq 0$*.*

A partir do produto interno, podemos definir a norma de um vetor $x \in E$ pondo $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, isto é, $||x||^2 = \langle x, x\rangle$. Para mostrar isso, precisamos provar a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Vale ressaltar que utilizaremos a notação $||x||^2 = \langle x, x\rangle$ para que o leitor se familiarize com esta propriedade.

Proposição 1.1.2 (Desigualdade de Cacuhy-Schwarz)**.** *Se* E *um espaço com produto interno, então dados* $x, y \in E$*, temos que* $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$*.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, se $x = 0$, então $0 = |\langle 0, y\rangle| \leq ||0|| \cdot ||y|| = 0$. Para $x \neq 0$, tome $\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||^2}$ e afirmo que o vetor $z = y - \lambda \cdot x$ é perpendicular a x. De fato, repare que

$$\langle x, y - \lambda \cdot x\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, \lambda \cdot x\rangle = \langle x, y\rangle - \lambda \cdot \langle x, x\rangle$$
$$= \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{||x||^2} \cdot \langle x, x\rangle = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{||x||^2} \cdot ||x||^2 = 0.$$

Assim, tomando o produto interno de $y = z + \lambda \cdot x$ por si mesmo, obtemos

$$||y||^2 = \langle y, y\rangle = \langle z + \lambda \cdot x, z + \lambda \cdot x\rangle = \langle z, z + \lambda \cdot x\rangle + \langle \lambda \cdot x, z + \lambda \cdot x\rangle$$

$$= \langle z, z\rangle + \langle z, \lambda \cdot x\rangle + \langle \lambda \cdot x, z\rangle + \langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x\rangle,$$

pela perpendicularidade de x com z, segue que $\langle z, \lambda \cdot x\rangle = \langle \lambda \cdot x, z\rangle = 0$, portanto,

$$||y||^2 = \langle z, z\rangle + \langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x\rangle = \langle z, z\rangle + \lambda^2 \cdot \langle x, x\rangle = ||z||^2 + \lambda^2 \cdot ||x||^2.$$

Dessa forma, $\lambda^2 \cdot ||x||^2 \leq ||y||^2$. Ora, perceba que

$$\lambda^2 \cdot ||x||^2 = \left(\frac{\langle x, y\rangle}{||x||^2}\right)^2 \cdot ||x||^2 = \frac{\langle x, y\rangle^2}{||x||^2},$$

assim, $\frac{\langle x,y\rangle^2}{||x||^2} \leq ||y||^2$, logo $\langle x, y\rangle^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$ e, como consequência, $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$. □

Exemplo 1.1.9. *Seja E um espaço com produto interno e tome $x \in E$. Então $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ é uma norma em E. De fato, sejam $x, y \in E$, sabemos que $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$. Perceba agora que*

$$||\lambda \cdot x|| = \sqrt{\langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot ||x||.$$

Por fim,

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2,$$

logo $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, mostrando que, de fato, $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ é uma norma em E.

Exemplo 1.1.10. *Vimos que se $x, y \in \mathbb{R}^n$ onde $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$, então $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ é um produto interno em $\mathbb{R}$, como consequência do exemplo 1.1.9,*

$$||x||_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

é uma norma em $\mathbb{R}^n$ e, portanto,

$$||x - y||_1 \leq ||x||_1 + ||y||_1,$$

o que mostra a desigualdade triangular para d_1 no exemplo 1.1.3.

1.2 Continuidade e Sequências de Funções

Definição 1.2.1. *Considere M e N espaços métricos. Dizemos que a aplicação $f : M \to N$ é continua no ponto $a \in M$, quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(a)) < \epsilon$ sempre que $d(x, a) < \delta$. Quando f for contínua para todo $a \in M$, diremos simplesmente que f é contínua.*

Observação 1.2.1. *Observe que na Definição anterior que estamos denotando a métrica tanto de M quanto de N pela mesma letra d. Mas de fato estas métricas não precisam ser iguais, na verdade elas podem ser bastante distintas a depender da natureza dos espaços métricos M e N.*

Exemplo 1.2.1. *Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$. Tome $\delta = \frac{a}{2}$ e note que $\Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a-x}{ax}\right| < \frac{\delta}{|a\cdot(a/2)|} = \frac{2\delta}{a^2}$. Dessa forma, basta tomar $\delta = \min\{\frac{a^2}{2}, \frac{a}{2}\}$ e teremos que $\left|f(x) - \frac{1}{a}\right| < \epsilon = \frac{2\delta}{a^2}$. Como escolhemos a arbitrariamente, segue que f é continua em $\mathbb{R}_+$.*

Definição 1.2.2. *Diremos que uma sequência de aplicações $f_n : X \to N$, com X arbitrário e N espaço métrico, converge uniformemente para $f : X \to N$ (notação: $f_n \longrightarrow f$ uniformemente), quando para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ sempre que $n > n_0$, qualquer que seja $x \in X$.*

Exemplo 1.2.2. *A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge uniformemente para função identicamente nula quando restrita qualquer subconjunto limitado $X \subseteq \mathbb{R}$. Com efeito, dado $x \in X$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$, tal que $|x| < c$. Particularmente, dado $\epsilon > 0$, tomando $n > n_0 > \frac{c}{\epsilon}$, segue que $\frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{c}$, logo $\epsilon > \frac{c}{n_0} > \frac{|x|}{n_0}$ com $\frac{1}{n_0} > \frac{1}{n}$, assim, $\epsilon > |\frac{x}{n}|$. Mas, podemos reparar que f_n não converge uniformemente em $\mathbb{R}$, afinal tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ e $x > n$, então $|\frac{x}{n}| > 1 > \epsilon$.*

Proposição 1.2.1 (Teorema do Limite Uniforme)**.** *Sejam M e N espaços métricos. Se uma sequência de aplicações $f_n : M \to N$, contínuas no ponto $a \in M$, converge uniformemente em M para uma aplicação $f : M \to N$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Pela hipótese da convergência uniforme da sequência f_n para f, dado $\epsilon > 0$, existe n_1 tal que $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ quando $n > n_1$. Particularmente, como cada aplicação f_n é contínua em a, então, para o $\epsilon > 0$ acima, existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x, a) < \delta$ então $d(f_n(x), f_n(a)) < \frac{\epsilon}{3}$. Novamente, como $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, então para o mesmo $\epsilon > 0$ existe n_2 tal que se $n > n_2$, temos $d(f_n(a), f(a)) < \frac{\epsilon}{3}$. Portanto, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e $n > n_0$, concluímos que se $d(x, a) < \delta$, então

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

concluindo a argumentação que f é contínua em a.

□

Corolário 1.2.1. *Se uma sequência de aplicações contínuas $f : M \to N$ converge uniformemente para $f : M \to N$, então f é contínua.*

Demonstração. A demonstração é análoga a demonstração da Proposição 1.2.1, basta considerar a um ponto qualquer em M.

□

Definição 1.2.3. *Considere os espaços métricos M e N. Dizemos que a aplicação $f : M \to N$ é uniformemente contínua quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, sejam quais forem $x, y \in M$, tem-se $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $d(x, y) < \delta$.*

Repare que toda função uniformemente contínua é contínua, basta fixar o y a um ponto qualquer em M. Mas ao contrário da continuidade da Definição 1.2.3 que é um fenômeno local, a continuidade uniforme é global, isto é, determina a continuidade de todos os pontos da aplicação simultaneamente.

Exemplo 1.2.3. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ é uniformemente contínua em cada conjunto compacto de $\mathbb{R}$. Mas não é uniformemente contínua em um conjunto ilimitado $X \subseteq \mathbb{R}$. De fato, considere f definida no conjunto compacto $[-a, a]$, perceba que dado $\epsilon > 0$, existe δ tal que se $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| < \delta \cdot 2a$. Basta tomar $\delta < \frac{\epsilon}{2a}$ e concluímos que f é uniformemente contínua em $[-a, a]$. No entanto, em f definida em $\mathbb{R}$, perceba que dado qualquer $\delta > 0$, tome $\epsilon = 1$, perceba que tomando $y = 1 + \frac{1}{x}$, temos que existe x tal que $|y - x| = |x + \frac{1}{x} - x| = |\frac{1}{x}| < \delta$, no entanto, $|f(y) - f(x)| = \left|\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - x^2\right| = \left|2 + \frac{1}{x}\right| > 2 > \epsilon$, ou seja, f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.*

1.3 Espaços Métricos Completos

Definição 1.3.1. *Seja M um espaço métrico. Dizemos que a é limite de uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, quando para todo número $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, a) < \epsilon$ sempre que $n > n_0$. Dizemos também que x_n tende a a, ou que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência convergente para a em M, e escreve-se ainda $x_n \longrightarrow a$.*

Definição 1.3.2. *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço métrico M, se dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ sempre que $n, m > n_0$.*

Observação 1.3.1. *Notemos que toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também de Cauchy, pois tomando a subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ da sequência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço métrico M, temos que dado $\epsilon > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ sempre que $m \geq n > n_0$. Tomando $n_k, m_k > n_0$, segue que $d(x_{n_k}, x_{m_k}) < \epsilon$, o que mostra que $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.*

Proposição 1.3.1. *Toda sequência convergente em um espaço métrico M é de Cauchy.*

Demonstração. Suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convirja para a em M. Por Definição, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x_m, a) < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $m, n > n_0$. Portanto,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em M.

□

Exemplo 1.3.1. *Podemos notar que nem toda sequência de Cauchy é convergente. Se considerarmos a sequência $x_1 = 3, x_2 = 3,1, x_3 = 3,14,...,$ com $\lim_n x_n = \pi$, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge em $\mathbb{R}$, portanto, é de Cauchy pela Proposição 1.3.1. Em particular, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy no conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, mas, claramente não converge em $\mathbb{Q}$.*

Proposição 1.3.2. *Toda sequência de Cauchy que possui subsequência convergente é convergente (nesse caso a sequência tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração. Considere a sequência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço métrico M. Tome a subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow a \in M$. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 > 0$ no qual $d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\epsilon}{2}$, sempre que $n_k > n_1$ e $n_k, n > n_2$, respectivamente. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que,

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Consequentemente, $x_n \longrightarrow a$.

□

Definição 1.3.3. *Dizemos que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.*

Observação 1.3.2. *Podemos observar que os espaços métricos completos estão relacionados com a ideia da ausência de "pontos faltando"ou "buracos". Como toda sequência de Cauchy converge para um ponto no espaço, não existe lacunas entre estes pontos. Em particular, podemos notar que $\mathbb{Q}$ não é um espaço métrico completo pelo exemplo 1.3.1, ou seja, a grosso modo, existem "buracos"entre os números racionais na reta real.*

Antes de continuar, precisaremos do Lema a seguir para mostrar que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

Lema 1.3.1 (Teorema de Bolzano-Weierstress)**.** *Toda sequência limitada de números reais, possui subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, segue que existe M tal que $-M < x_n < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $X = \{x \in \mathbb{R} : \text{existe } (x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \text{ no qual } x < x_{n_k}\}$. Claramente, $-M \in X$, além disso M é uma cota superior de X. Como X é não vazio e limitada superiormente, então X possui supremo. Seja o $\sup X = A$. Mostraremos que existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente para A.

Começaremos provando que, qualquer que seja $\epsilon > 0$, existem infinitos índices n tais que $A - \epsilon < x_n$ e somente um número finito satisfazendo $A + \epsilon < x_n$. De fato, sendo A o supremo de X, existe $x \in X$ e $\epsilon > 0$ tal que $A - \epsilon < x$, portanto, existe x_{n_k} tal que $A - \epsilon < x < x_{n_k}$ e não existe nenhuma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, onde $A + \epsilon < x_{n_k}$. do contrário, existiria $y \in (A, A + \epsilon)$, com $y \in X$ o que contradiz o fato de A ser o supremo de X.

Agora, tome $\epsilon = 1$ e seja x_{n_1} um elemento em $(A - 1, A + 1)$. Em seguida, seja $\epsilon = \frac{1}{2}$ e x_{n_2} um elemento em $(A - \frac{1}{2}, A + \frac{1}{2})$. Fazendo isso sucessivamente, tomaremos $\epsilon = \frac{1}{j}$ e x_{n_j}

em $(A - \frac{1}{j}, A + \frac{1}{j})$ para todo $j \in \mathbb{N}$, portanto temos que $|x_{n_j} - A| < \frac{1}{j}$ para j suficientemente grande, ou seja $x_{n_j} \longrightarrow A$, concluindo a demonstração.

$\square$

Proposição 1.3.3. $\mathbb{R}$ *é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Afirmamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada. De fato, tomando $\epsilon = 1$, existe n_0 tal que $|x_n - x_m| < 1$ para todo $n, m \geq n_0$, isto é, $x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$ sempre que $n \geq n_0$. Sejam α e β os valores máximo e mínimo, respectivamente, do conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}$, como consequência, $x_n \in [\alpha, \beta]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, Pelo Lema 1.3.1, a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente e pela Proposição 1.3.2, a própria sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge em $\mathbb{R}$, provando que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

$\square$

1.4 Conjuntos Fechados e Conjuntos Compactos

Definição 1.4.1. *Seja M um espaço métrico e $X \subseteq M$. Dizemos que $a \in M$ é um ponto aderente a X, se para todo $\epsilon > 0$, temos que $B(a, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$.*

Definição 1.4.2. *Seja M um espaço métrico e $X \subseteq M$. Definimos o fecho de X, denominado por $\overline{X}$, como o conjunto de pontos aderentes de X.*

Definição 1.4.3. *Considere M um espaço métrico. Dizemos que um conjunto $X \subseteq M$ é fechado, se $X = \overline{X}$. Em termos de sequências, diremos que X é fechado, se dado uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X, então $x_n \longrightarrow a \in X$.*

Definição 1.4.4. *Seja (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. Dizemos que X é compacto, se toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, admitir uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente para um ponto $p \in X$.*

Exemplo 1.4.1. *Todo subconjunto finito de um espaço métrico é compacto. De fato, seja $X = \{x_1, ..., x_k\}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$. Como X é finito, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que é constante, pois X é finito , portanto, $x : \mathbb{N} \to X$ não é injetiva. Logo, $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é converge para algum elemento de X.*

Proposição 1.4.1. *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto, é compacto.*

Demonstração. Seja M um espaço métrico compacto e X um subconjunto fechado de M. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X. Como M é compacto, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow x \in M$. Em particular, $x \in \overline{X} = X$, pois X é fechado. Como consequência, F é compacto.

$\square$

Proposição 1.4.2. *Todo subconjunto compacto X, de um espaço métrico M, é fechado.*

Demonstração. Sejam M um espaço métrico e X um conjunto compacto em M. Tome p um ponto aderente de X, ou seja, $p \in \overline{X}$, portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe

$$x_n \in B\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap X.$$

Note que $x_n \in X$, ainda mais, $x_n \longrightarrow p$. Como X é compacto, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, tal que $x_{n_k} \longrightarrow q \in X$. Mas como $x_n \longrightarrow p$, então toda subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para p, portanto $p = q \in X$. Logo X é fechado.

□

Proposição 1.4.3. *Todo conjunto compacto de um espaço métrico é limitado.*

Demonstração. Seja M um espaço métrico e $X \subseteq M$ compacto. Suponha que X é ilimitado. Considere $x_0 \in X$. Como X não é limitado, existe $x_1 \in X$ tal que

$$d(x_0, x_1) > 1.$$

Ainda mais, existe $x_2 \in X$, onde o

$$\min\{d(x_0, x_1), d(x_1, x_2)\} > 1.$$

De modo geral, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, com $x_n \in X$ para todo $\mathbb{N}$ tal que

$$\min\{d(x_n, x_j) : j = 1, .., n-1\} > 1.$$

Agora, note que se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ admitisse subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente, então $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ seria de Cauchy, ou seja, dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, teríamos que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2}$ para k suficientemente grande, o que contraria nossa construção. No entanto, note que se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não possui uma subsequência convergente, então X não pode ser compacto, o que contesta nossa hipótese, consequentemente, X precisa ser limitado.

□

Capítulo 2

Teoria da Medida

Em Análise matemática, um dos conceitos mais importantes é o de medida, a qual precisa de uma formulação precisa e rigorosa. Vale lembrar que denotaremos por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, onde os símbolos $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A aritmética com os símbolos $+\infty, -\infty$ são encontradas em qualquer livro de Teoria da Medida, em particular, recomendamos [1]. Além disso, para manter o foco no nos objetivos específicos deste trabalho, optamos por não apresentar as demonstrações completas de certos teoremas. Caso o leitor tenha interesse em um estudo mais aprofundado, consulte [1].

2.1 Funções Mensuráveis

Definição 2.1.1. *Chamamos de σ-álgebra uma família Σ de subconjuntos do conjunto X, se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \Sigma$;
2. *Dado $A \in \Sigma$, o complementar $X - A \in \Sigma$;*
3. *Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.*

Neste caso, chamaremos o par (X, Σ) de espaço mensurável, onde cada $A \in X$ será denominado de conjunto mensurável.

Exemplo 2.1.1. *O conjunto das partes de X, denotado por $\mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra de X. Com efeito, por Definição, $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$, além disso, dado $A \in \mathcal{P}(X)$, temos que $X - A \subseteq X$, portanto $X - A \in \mathcal{P}(X)$. Por fim, dado $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{P}(x)$, temos que $A_n \subseteq X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq X$ e, como consequência, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}(X)$.*

Definição 2.1.2. *Chamamos de σ-álgebra de Borel, a σ-álgebra $\Sigma(\tau)$, em que $\tau = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Definição 2.1.3. *Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável quando*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma$$

para todo $x \in \mathbb{R}$

Exemplo 2.1.2. *Se $E \in \Sigma$ e $\mathcal{X}_E : X \to \mathbb{R}$ é a função característica definida por*

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1 \ se \ x \in E \\ 0 \ se \ x \notin E \end{cases}$$

Então $\mathcal{X}_E$ é mensurável. De fato, dado $\alpha \in [1, +\infty)$, temos $\{x \in X : \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = \phi \in \Sigma$, caso $\alpha \in [0, 1)$, então $\{x \in X : \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = E \in \Sigma$, finalmente, se $\alpha \in (-\infty, 0)$, resulta em $\{x \in X : \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = X \in \Sigma$.

Proposição 2.1.1. *Dado $c \in \mathbb{R}$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável, então $(c \cdot f) : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Considerando $c = 0$, temos $(c \cdot f) : X \to \mathbb{R}$, onde $(c \cdot f(x)) = 0$. Sob a condição $c > 0$, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrariamente, podemos observar que $\{x \in X : (c \cdot f(x)) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \frac{\alpha}{c}\} \in \Sigma$, pois f é mensurável. Analogamente, se $c < 0$, observamos que $\{x \in X : (c \cdot f(x)) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) < \frac{\alpha}{c}\} = X - \{x \in X : f(x) \geq \frac{\alpha}{c}\} \in \Sigma$. Segue que, $(c \cdot f)$ é mensurável para todo $c \in \mathbb{R}$.

$\square$

Proposição 2.1.2. *Se $f : X \to \mathbb{R}$, então $f^2 : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Considere $0 \leq \alpha$. Temos que $\{x \in X : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \sqrt[2]{\alpha}\} \cup \{x \in X : -f(x) > \sqrt[2]{\alpha}\} \in \Sigma$. Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X : (f(x))^2 \geq 0 > \alpha\} = X \in \Sigma$, completando a argumentação.

$\square$

Proposição 2.1.3. *Se $f_1, f_2, \cdots, f_n : X \to \mathbb{R}$ são mensuráveis, então $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Dados arbritariamente $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$. Considere $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis. Denotaremos

$$S_r := \{x \in X : f_1(x) > r\} \cap \{x \in X : f_2(x) > \alpha - r\} \in \Sigma.$$

Afirmamos que

$$\{x \in X : f_1(x) + f_2(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r \in \Sigma.$$

Com efeito, se $x \in \{x \in X : f_1(x) + f_2(x) > \alpha\}$, então $f_1(x) > \alpha - f_2(x)$. Note que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, assim, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f_1(x) > r > \alpha - f_2(x)$, logo $f_1(x) > r$ e $f_2(x) > \alpha - r$, consequentemente, $x \in S_r \subseteq \bigcup_{r \in Q} S_r$. Reciprocramente, dado $x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$, temos

$f_1(x) > r$ e $f_2(x) > \alpha - r$, segue que $f_1(x) + f_2(x) > \alpha$. Assim, provamos que a soma de duas funções mensuráveis é mensurável, indutivamente não é difícil de mostrar que a soma $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) : X \to \mathbb{R}$ é mensurável, quando $f_1, f_2, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$ são mensuráveis.

$\square$

Proposição 2.1.4. *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são mensuráveis, então $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Assuma que f e g são mensuráveis. Perceba que

$$f \cdot g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

Portanto, pelas proposições 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3, temos que $f \cdot g$ é mensurável.

$\square$

Proposição 2.1.5. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável, então $|f| : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável. Note que $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : -f(x) > \alpha\} \in \Sigma$, portanto $|f| : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.

$\square$

Definição 2.1.4. *Denotaremos por $M(X, \Sigma)$ o conjunto das funções mensuráveis definidas em X assumindo valores em reais estendidos, isto é,*

$$M(X, \Sigma) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ é mensurável}\},$$

Proposição 2.1.6. *Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável, então*

1. $\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\} \in \Sigma$;

2. $\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) < -n\}\right]^c \in \Sigma$

Demonstração. Se $x \in \{x \in X : f(x) = +\infty\}$, então $f(x) = +\infty$, logo $f(x) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\}$. Agora, note que dado $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\}$, então $f(x) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto $f(x) > +\infty$, isto é, $f(x) = +\infty$. Como consequência $\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\}$. Analogamente, demonstramos 2.

$\square$

Proposição 2.1.7. *Uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se, os conjuntos $A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ e $B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$ pertencem a Σ e a função $\overline{f} : X :\to \mathbb{R}$ definida por*

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \notin A \cup B \\ 0 \text{ se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável.

Demonstração. Se f é mensurável, segue da Proposição 2.1.6, $A, B \in \Sigma$. Considere a função característica $\mathcal{X}_{(A\cup B)^c} : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{X}_{(A\cup B)^c}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in (A\cup B)^c \\ 0 \text{ se } x \notin (A\cup B)^c \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ se } x \notin A\cup B \\ 0 \text{ se } x \in A\cup B \end{cases}$$

Pelo exemplo 2.1.2, $\mathcal{X}_{(A\cup B)^c}$ é mensurável. Agora, pela hipótese que f é mensurável, notemos que

$$f(x)\cdot \mathcal{X}_{(A\cup B)^c}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \notin A\cup B \\ \quad 0 \text{ se } x \in A\cup B \end{cases}$$

é mensurável pela Proposição 2.1.4. Como $\overline{f} = f\cdot \mathcal{X}_{(A\cup B)^c}$, segue que $\overline{f}$ é mensurável.

Reciprocamente, considere $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ mensurável. Vamos mostrar que dado $\alpha \in \mathbb{R}$, os conjuntos $C_1 = \{x \in X : \overline{f}(x) > \alpha\}$ e $C_2 = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cap A^c$ são iguais. Assuma que $\alpha \geq 0$ e $x \in C_1$, logo $\overline{f}(x) > \alpha \geq 0$, isto é, $\overline{f}(x) \neq 0$ e, portanto, $f(x) = \overline{f}(x) > \alpha \geq 0$, logo $x \notin A\cup B$, particularmente, $X \notin A$, ou seja, $x \in A^c$, logo $x \in C_2$. Agora, tome $x \in C_2$, note que $x \notin A$ e $f(x) > \alpha \geq 0$, como consequência, $x \notin A\cup B$, assim, $\overline{f}(x) = f(x) > \alpha \leq 0$, em virtude disso, $x \in C_1$. Desta maneira, $C_2 = C_1 \in \Sigma$. Por outro lado, se $\alpha < 0$, então considere os conjuntos $D_1 = \{x \in X : \overline{f}(x) > \alpha\}$ e $D_2 = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup B$. Perceba que $D_1^c\{x \in X : \overline{f}(x) \leq \alpha\}$ e $D_2^c = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \cap B^c$. De maneira similar, provamos que $D_1^c = D_2^c$, logo $D_2^c \in \sigma(X)$, com isso, $D_2 \in \Sigma$ e, por fim, $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, em decorrência disso, f é mensurável, concluindo a demonstração.

□

Proposição 2.1.8. *Se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções em $M(X,\Sigma)$ que converge para f, então $f \in M(X,\Sigma)$.*

2.2 Medida

Definição 2.2.1. *Uma medida definida numa σ-álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto X é uma função real extendida $\mu : \Sigma \to [0,\infty]$ tal que:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, *para qualquer coleção enumerável de conjuntos de X, dois a dois disjuntos.*

Por exemplo, na reta dos números reais, temos a σ-álgebra Σ dos Borelianos, gerada pelos intervalos abertos (a,b) de $\mathbb{R}$. É possível demonstrar que existe uma única medida μ definida em Σ que coincide com o comprimento em intervalos abertos. (Com isso queremos dizer, $\mu((a,b)) = b - a$). Esta medida única é chamada de medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Na seção 3.4 definiremos a medida de contagem μ_c para mostrar que o espaço de sequências ℓ_p é na verdade o espaço $L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ para $1 < p \leq +\infty$.

Definição 2.2.2. *Um espaço de medida é uma tripla (X, Σ, μ) consistindo em um conjunto X, uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de X e uma medida μ definida em X.*

Há uma questão terminológica que precisa ser mencionada e que será frequentemente empregada. Diremos que uma determinada Proposição vale μ-quase sempre, se existir um subconjunto $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ tal que a Proposição vale no complementar de N (quando $\mu(N) = 0$ dizemos que N tem medida nula). Assim, dizemos que duas funções f, g são iguais μ-quase sempre, se $f(x) = g(x)$ no complemento de um conjunto de medida nula. Neste caso, abreviaremos

$$f = g, \ \ \mu - q.s.$$

Da mesma forma, dizemos que uma sequência $(f_n)_n^\infty$ de funções em X converge μ-quase sempre para f, se existe um conjunto $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = \lim_n f_n(x)$ no complementar de N. Neste caso, frequentemente escrevemos

$$f = \lim_n f_n, \ \ \mu - q.s.$$

2.3 Integral de Lebesgue

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ uma função simples, isto é,

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}(x)$$

com $\alpha_k \in \mathbb{R}$ e $E_k \in \Sigma$. Pelo exemplo 2.1.2 e pela Proposição 2.1.3, resulta que ϕ é uma função mensurável. Se $\alpha_k \geq 0$ para todo $k = 1, 2, \cdots n$, definimos a integral com respeito a medida μ de ϕ como

$$\int_X \phi d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k) \tag{2.1}$$

ficando bem convencionado que $+\infty \cdot 0 = 0$.

Definição 2.3.1. *Seja $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável não-negativa, definimos a integral de Lebesgue de f com respeito a medida μ por*

$$\int_X f d\mu = \sup \int_X \phi d\mu\,,$$

onde o supremo é estendido sobre todas as funções simples não negativas $\phi(x)$ que satisfazem $\phi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

Finalmente, se f muda de sinal, damos a seguinte Definição de integral:

Definição 2.3.2. *Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável, definem-se as partes po-*

sitivas e negativas, respectivamente como:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Ambas f^+ e f^- são mensuráveis não-negativas e $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. A função f é dita Lebesgue integrável em X com respeito a μ se ambas as integrais

$$\int_X f^+ d\mu$$

e

$$\int_X f^- d\mu$$

forem finitas e portanto, sua integral é definida como:

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\,.$$

Se f possui integral no sentido acima, diremos simplesmente que ela é integrável. Enunciaremos três resultados notáveis sobre convergência na integral de Lebesgue. De fato não existem versões de tais Teoremas para Integral de Riemann:

Teorema 2.3.1 (Teorema da Convergência monótona). *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em integráveis satisfazendo*

1. $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots$ *μ-q.s. em X*
2. $\sup_n \int_X f_n d\mu < \infty$

Então $f_n(x)$ converge μ-q.s. em X para um limite finito, o qual denotaremos por $f(x)$. Ademais, f é integrável e

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0.$$

Teorema 2.3.2 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções integráveis satisfazendo*

1. $f_n(x) \to f(x)$ *μ-q.s. em X,*
2. *Existe uma função integrável g tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-q.s. em X.*

Então f é integrável e

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0.$$

Lema 2.3.1 (Lema de Fatou)**.** *Seja* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções mensuráveis satisfazendo* $f_n(x) \geq 0$ μ*-q.s. em* X*, para todo* n*, então*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f(x)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu.$$

Capítulo 3

Espaços de Banach e Operadores Lineares Contínuos

A teoria dos espaços de Banach fornece uma estrutura fundamental para estudarmos espaços vetoriais de dimensão infinita, o que não acontece na Álgebra Linear. A completude destes espaços permite um estudo com generalizações e extensões de resultados já conhecidos para espaços vetoriais de dimensão finita, assim como, as distinções entre os resultados obtidos em espaços com dimensão finita e infinita. Também estudaremos os operadores lineares neste capítulo, os quais desempenham um papel essencial, pois relacionam espaços de Banach distintos, o que possibilita compreender como as propriedades de um espaço de Banach pode afetar as propriedades do outro.

3.1 Espaços de Banach

Definição 3.1.1. *Um espaço normado E é chamado de espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida na norma.*

Em particular, uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E, equipado com norma $||\cdot||$ converge para $x \in E$ se

$$\lim ||x_n - x|| = 0.$$

Nesse caso, dizemos que x é o limite da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e escrevemos $x = \lim_n x_n$ ou $x_n \longrightarrow x$.

Exemplo 3.1.1. *Vamos mostrar que $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach. Pelo exemplo 1.1.5, $\mathbb{R}^n$ é um espaço normado, bastando mostrar a completude do $\mathbb{R}^n$. Considere uma sequência de Cauchy $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$, tal que $x_k = (x_k^1, ..., x_k^n)$, segue que, dado $\epsilon > 0$, então*

$$||x_k - x_m||_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x_m^i)^2} < \epsilon$$

quando k, m são suficientemente grandes. Em particular, x_k^i é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, portanto, pela Proposição 1.3.3, é convergente em $\mathbb{R}$. Assim considere, $\lim_n x_k^i = x^i$, ou seja, $\lim_n |x_k^i - x^i| = 0$. Agora, repare que x_k converge para $x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$. De fato, perceba que

$$\lim_k ||x_k - x||_1 = \lim_k \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_k^i - x^i)^2} = \sqrt{\lim_k \sum_{i=1}^{n}(x_k^i - x^i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lim_k (x_k^i - x^i)^2} =$$
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lim_k [x_k^i - x^i])^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 0^2} = 0.$$

Pela Proposição (1.1.1), segue o mesmo resultado para as normas $|| \cdot ||_2$ e $|| \cdot ||_3$. Assim, concluímos que o $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.

No exemplo 3.7.1 mostraremos que $\mathbb{C}$ é um Espaço de Banach, bem como $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 3.1.2. *O conjunto $\mathcal{P}[0,1]$ dos polinômios $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$, pois sendo os polinômios funções contínuas no compacto $[0,1]$ são, portanto, funções limitadas. Assim, utilizaremos em $\mathcal{P}[0,1]$ a norma:*

$$||p|| = \sup_{t \in [0,1]} |p(t)|.$$

No entanto, é possível notar que $\mathcal{P}[0,1]$ não é um espaço de Banach com esta norma. De fato, considere a sequência $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$p_n = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + ... + \tfrac{x^n}{n!}$$

Do cálculo, sabemos que $p_n \longrightarrow e^x$ uniformemente no intervalo $[0,1]$, portanto, $|p_n - p_m| < \epsilon$ quando n, m são suficientemente grandes. Assim, temos uma sequência de Cauchy p_n que não converge para um ponto em $\mathcal{P}[0,1]$.

Exemplo 3.1.3. *Considere X um conjunto não-vazio. Uma função $f : X \to \mathbb{K}$ é limitada se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para qualquer $x \in X$. O conjunto $B(X : \mathbb{K})$ de todas as funções limitadas $f : X \to \mathbb{K}$ é um espaço de Banach com a norma*

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Com efeito, dada uma sequência de Cauchy $f_n \in B(X : \mathbb{K})$, seque que para todo $\epsilon > 0$, existem m, n suficientemente grandes tal que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_x |f_n(x) - f_m(x)| = ||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$, portanto, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço de Banach $\mathbb{K}$, então converge em $\mathbb{K}$. Considere que $f_n(x) \longrightarrow \alpha(x)$ para qualquer $x \in X$. Assim, definimos a função $f : X \to \mathbb{K}$, tal que $f(x) = \alpha(x)$. Agora, perceba que $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \alpha(x) + \alpha(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - \alpha(x)| + |\alpha(x) - f(x)| < \epsilon + 0 = \epsilon$ para n suficientemente grande e para todo $x \in X$. Assim,

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para } n \text{ grande o bastante.}$$

Resta mostrar que $f \in B(X, \mathbb{K})$. Repare que $|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < \epsilon + ||f_n||$, como $||f_n||$ é constante pela limitação de f_n, segue que f é limitada, isto é, $f \in B(X : \mathbb{K})$. Logo f_n converge para f em $B(X : \mathbb{K})$.

Proposição 3.1.1. *Seja F um subconjunto do Espaço de Banach E. Uma condição necessária e suficiente para que F seja um espaço de Banach é que F seja fechado.*

Demonstração. Considere a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy em F fechado. Em particular, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente em E, pois E é um Espaço de Banach, Como F é fechado, segue que, toda sequência convergente de F converge em F, portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge em F, ou seja, F é um espaço de Banach. Reciprocamente, seja F um subespaço de Banach de E. Dado uma sequência convergente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, segue que, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy, logo, converge em F, portanto F é um conjunto fechado.

□

Exemplo 3.1.4. *O conjunto $C([a,b]:\mathbb{K})$ das funções contínuas $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ é um subespaço vetorial de $B([a,b]:\mathbb{K})$, pois $[a,b]$ é compacto, e portanto sendo f contínua, segue que é limitada. Pela Proposição 3.1.1, é suficiente mostrar que $C([a,b]:\mathbb{K})$ é fechado (na mesma norma de $B([a,b]:\mathbb{K})$, veja o exemplo 1.1.2) para seja um espaço de Banach. Assim, considere uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}\in C([a,b]:\mathbb{K})$ convergente para $f:[a,b]\to\mathbb{K}$. Precisamos mostrar que $f\in C([a,b]:\mathbb{K})$. Como a convergência de f_n para f na norma $||\cdot||_\infty$ significa que*

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\longrightarrow 0, \text{ quando } n\longrightarrow\infty,$$

isso significa que a convergência de f_n para f é uniforme. Logo, pelo Corolário 1.2.1 do Teorema do limite uniforme, $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ é uma aplicação contínua, portanto $f\in C([a,b]:\mathbb{K})$ e, como consequência, $C([a,b]:\mathbb{K})$ é fechado. Resulta que $C([a,b]:\mathbb{K})$ segue que é um espaço de Banach.

Exemplo 3.1.5. *Definiremos o espaço das funções continuamente diferenciáveis em $[a,b]$, como*

$$C^1([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [a,b] \text{ e } f'\in C[a,b]\}$$

Consideraremos nos extremos do intervalo, os limites laterais respectivos. Repare que C^1 naturalmente tem estrutura de espaço vetorial, afinal aprendemos nos cursos de cálculo que $(f+g)'=f'+g'$ e $(\lambda f)'=\lambda f'$. Mas C^1 não é fechado em $[a,b]$ com a norma $||\cdot||_\infty$ (veja o exemplo 2.4.4 da referência [2]). Assim, consideraremos em $C^1([a,b],\mathbb{R})$ a norma

$$||f||_{C^1}=||f||_\infty+||f'||_\infty.$$

Inicialmente, vamos mostrar que $||f||_{C^1}$ é uma norma. Repare que $||f||_\infty,||f'||_\infty\geq 0$, portanto $||f||_{C^1}\geq 0$ e que

$$0=||f||_{c^1}\Leftrightarrow ||f||_\infty+||f'||_\infty=0\Leftrightarrow ||f||_\infty,||f'||_\infty=0\Leftrightarrow f(x),f'(x)=0,$$

pois $||\cdot||_\infty$ é uma norma. Como $f(x)=0\Rightarrow f'(x)=0$, então $||f||_{C^1}=0\Leftrightarrow f(x)=0$ com $x\in[a,b]$. Perceba também que

$$\begin{gathered}||\lambda f||_{c^1}=||\lambda f||_\infty+||(\lambda f)'||_\infty=||\lambda f||_\infty+||\lambda f'||_\infty=|\lambda|\cdot||f||_\infty+\\ \Leftrightarrow|\lambda|\cdot||f'||_\infty=|\lambda|(||f||_\infty+||f'||_\infty)=|\lambda|\cdot||f||_{C^1}.\end{gathered}$$

Além disso, a desigualdade triangular é mostrada da seguinte forma

$$\begin{aligned}||f+g||_{C^1} &= ||f+g||_\infty + ||(f+g)'||_\infty = ||f+g||_\infty + ||f'+g'||_\infty \\ &\leq ||f||_\infty + ||g||_\infty + ||f'||_\infty + ||g'||_\infty \\ &= (||f||_\infty + ||f'||_\infty) + (||g||_\infty + ||g'||_\infty) = ||f||_{C^1} + ||g||_{C^1},\end{aligned}$$

portanto $||\cdot||_{C^1}$ *é, de fato, uma norma. Agora, vamos verificar que* $(C^1[a,b], ||\cdot||_{C^1})$ *é um espaço de Banach. Considere a sequência de Cauchy* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in C^1[a,b]$, *então* $f_n, f_n' \in C[a,b]$. *Como* $||f_n - f_m||_\infty \leq ||f_n - f_m||_{C^1} < \epsilon$ *e* $||f_n' - f_m'||_\infty \leq ||f_n - f_m||_{C^1} < \epsilon$ *para* n *e* m *suficientemente grandes, resulta que* f_n *e* f_n' *são sequências de Cauchy no espaço de Banach* $C[a,b]$ *equipado com a norma* $||\cdot||_\infty$, *logo convergem em* $C[a,b]$; *Assim, existem funções* $f, g \in C[a,b]$ *tais que* $f_n \longrightarrow f$ *e* $f_n' \longrightarrow g$ *uniformemente. Pelo Teorema fundamental do cálculo*

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$$

para todo $x \in [a,b]$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Tomando* $n \longrightarrow \infty$, *concluímos que*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt = \int_a^x f'(t)dt$$

Assim, segue que $f' = g \in C[a,b]$, *logo* $f \in C^1$. *Particularmente,*

$$\lim_n ||f_n - f||_{C^1} = \lim_n (||f_n - f||_\infty + ||f_n' - f'||_\infty) = \lim_n ||f_n - f||_\infty + \lim_n ||f_n' - f'||_\infty = 0,$$

devido as convergências uniformes $f_n \longrightarrow f$ *e* $f_n' \longrightarrow g$. *Portanto,* $f_n \longrightarrow f \in C^1[a,b]$.

Do cálculo sabemos que a segunda derivada de uma função fornece informações essenciais sobre sua convexidade e concavidade. Diante disso, daremos tratamento matemático ao espaço vetorial das funções duas vezes continuamente diferenciáveis, isto é,

$$C^2[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f' \text{ é diferenciável em } [a,b] \text{ e } f' \in C^1[a,b]\}.$$

De forma analoga à $C^1[a,b]$, $C^2[a,b]$ se torna um espaço de Banach com a norma

$$||f||_{C^2} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty + ||f''||_\infty.$$

Indutivamente, definimos o espaço vetorial das funções $k \in \mathbb{N}$ vezes continuamente diferenciáveis, por

$$C^k[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f^{k-1} \text{ é diferenciável em } [a,b] \text{ e } f' \in C^{k-1}[a,b]\},$$

o qual se torna, analogamente, um espaço de Banach com a norma

$$||f||_{C^k} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty + ||f''||_\infty +, ..., + ||f^{(k)}||_\infty.$$

Nosso objetivo neste momento é mostrar que todo espaço normado de dimensão finita é completo. Diante disso, precisaremos do Lema 3.1.1.

Lema 3.1.1. *Seja $B = \{u_1, \cdots, y_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço normado E. Então existe uma constante $c > 0$, que depende do conjunto B, tal que*

$$c(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) \leq ||a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n||$$

para quaisquer escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Inicialmente, devemos perceber que $|| \cdot ||_1 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, onde

$$||(a_1, \ldots, a_n)||_1 = ||\sum_{i=1}^{n} a_iu_i||$$

é uma norma em $\mathbb{K}^n$, afinal

$$||\sum_{i=1}^{n} a_iu_i|| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_iu_i = 0 \Leftrightarrow a_1, a_2, \cdots, a_n = 0,$$

pois os vetores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ são linearmente independentes. Particularmente, se $a_i \neq 0$, então $\sum_{i=1}^{n} a_iu_i \neq 0$, pelo resultado anterior, portanto, $||\sum_{i=1}^{n} a_iu_i|| > 0$. Agora, repare que dado $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda a_iu_i|| = ||\lambda \sum_{i=1}^{n} a_iu_i|| = ||\lambda w||,$$

com $w \in E$, notavelmente $|| \cdot ||$ é uma norma de E, então,

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda a_iu_i|| = ||\lambda w|| = |\lambda| \cdot ||w|| = |\lambda| \cdot ||\sum_{i=1}^{n} a_iu_i||.$$

Analogamente, temos que existem $w, v \in E$ tal que

$$||\sum_{i=1}^{n} a_iu_i + \sum_{i=1}^{n} b_iu_i|| = ||w + v|| \leq ||w|| + ||v|| = ||\sum_{i=1}^{n} a_iu_i|| + ||\sum_{i=1}^{n} b_iu_i||.$$

Agora, como $||(a_1, a_2, \cdots, a_n)|| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ é uma norma em $\mathbb{K}^n$ e como as normas de $\mathbb{K}^n$ são equivalentes, segue que existe $c > 0$, tal que $c(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) \leq ||a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n||$

□

Teorema 3.1.1. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração. Dado um espaço normado E de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Considere $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base normalizada de E, isto é, $||u_i|| = 1$ para $i = 1, 2, ..., n$. Agora, considere uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in E$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existem escalares $a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k$ tal que $x_k = a_1^ku_1 + a_2^ku_2 +, ..., + a_n^ku_n$. Dado $\epsilon > 0$, temos que $||x_k - x_m|| < c \cdot \epsilon$ para k e m suficientemente grandes, tal que c é a constante do Lema 3.1.1. para o conjunto de vetores linearmente independente $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j^k - a_j^m| \leq \frac{1}{c}||\sum_{j=1}^{n}(a_j^k - a_j^m)u_j|| = \frac{1}{c}||x_k - x_m|| < c \cdot \frac{1}{c} \cdot \epsilon = \epsilon$$

para k e m grandes o bastante. Portanto, $|a_j^k - a_j^m| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j^k - a_j^m| < \epsilon$, assim a sequência de escalares $(a_j^k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ para cada $j = 1, 2, ..., n$, logo é convergente. Considere $\lim_k a_j^k = bj$ para $j = 1, 2, ..., n$. Nesse caso, obtemos que $\lim_k |a_j^k - b_j| = 0$. Definindo $x = b_1u_1 + b_2u_2 +, ..., +b_nu_n \in E$, então,

$$\lim_k ||x_k - x|| = \lim_k ||\sum_{j=1}^{n}(a_j^k - b_j)u_j|| \leq \lim_k \sum_{j=1}^{n} |a_j^k - bj| = \sum_{j=1}^{n} \lim_k |a_j^k - bj| = 0$$

Logo $x_k \longrightarrow x$ mostrando que E é um espaço de Banach.

□

Corolário 3.1.1. *Todo subespaço F de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E.*

Demonstração. Considerando a norma de E restrita a F, segue que, F é um espaço normado de dimensão finita, pelo Teorema 3.1.1, F é um espaço de Banach. Pela Proposição 3.1.1, F é fechado em E.

□

Exemplo 3.1.6. *Denotaremos por c_0 o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para 0, isto é,*

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^{\infty}\ a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \longrightarrow 0\}$$

Não é difícil notar que c_0 é um subespaço vetorial do espaço das sequências, pois dado $x_n, y_n \in c_0$, então $\lim_n(x_n + y_n) = \lim_n x_n +$ e $\lim_n y_n = 0 = \lambda \lim_n x_n = \lim_n \lambda x_n$. Assim, definiremos a norma

$$||(a_k)_{k=1}^{\infty}||_{\infty} = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

em c_0, tornando-o um espaço normado completo. De fato, considere uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Seja $x_n = (a_n^k)_{k=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, considere a desigualdade

$$|a_n^j - a_m^j| \leq \sup\{|a_n^k - a_m^k| : k \in \mathbb{N}\} = ||x_n - x_m||_{\infty} < \epsilon$$

quando n, m são grandes o suficiente. Segue que $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, portanto converge em $\mathbb{K}$. Considere $\lim_n a_n^j = b_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Seja $x = (b_j)_{j=1}^{\infty}$. Por Definição, dado $n \in \mathbb{N}$, $|a_n^j - 0| < \epsilon$ para j suficientemente grande. Segue que

$$|b_j - 0| = |b_j - a_n^j + a_n^j| \leq |b_j - a_n^j| + |a_n^j| < |b_j - a_n^j| + \epsilon$$

para j adequadamente grande, se $n \longrightarrow \infty$, então $|b_j - 0| < \epsilon$, isto é, $b_j \longrightarrow 0$, assim, $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$. Por fim, o

$$\lim_n ||x_n - x||_{\infty} = \lim_n \sup\{|a_n^j - b_j| : j \in \mathbb{N}\} = \lim_n \sup\{0\}$$

para j suficientemente grande. Assim, $\lim_n ||x_n - x||_\infty = \lim_n 0 = 0$*, completando a demonstração que* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *converge em* c_0*. O esquema a seguir mostra o comportamento de* $(x_n)_{n=1}^\infty$*.*

$$\begin{array}{l} x_1 = (a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1, ...) \longrightarrow 0 \\ x_2 = (a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2, ...) \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n = (a_1^n, a_2^n, ..., a_n^n, ...) \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \;\; \downarrow \quad\quad \downarrow \\ x \;\; = (a_1, a_2, ..., a_n, ...) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Exemplo 3.1.7. *Seja* c_{00} *o subespaço de* c_0 *das sequências eventualmente nulas, ou seja,*

$$c_{00} = \{(a_k)_{k=1}^\infty : \textit{existe } k_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que } k \geq k_0 \Rightarrow a_k = 0\}$$

Assim, considere os seguintes vetores de c_{00}*:*

$$x_1 = (1, 0, 0, ...), x_2 = (1, \tfrac{1}{2}, 0, ...), ..., x_n = (1, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{n}, ...), ...$$

Segue que $(x_n)_{n=1}^\infty$ *é uma sequência em* c_{00}*, afinal* x_i *é eventualmente nulo dado* $k > i$*, para todo* $i \in \mathbb{N}$*. Perceba que* $x = (\frac{1}{k})_{k=1}^\infty$ *não é um elemento de* c_{00}*, caso supusemos que existe* k_0 *tal que* $k \geq k_0 \Rightarrow \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow 1 = 0$*, mas* $\frac{1}{k} \longrightarrow 0$*, portanto,* $x \in c_0$*. Agora, note que* $\lim_n ||x_n - x||_\infty = \lim_n \sup\{|x_n - \dfrac{1}{n}| : n \in \mathbb{N}\} = \lim_n \dfrac{1}{n+1} = 0$*, segue que* $x_n \longrightarrow x \in c_0$ *, portanto* c_{00} *não é um espaço de Banach, pois não é fechado.*

3.2 Espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$

Nesta seção, utilizaremos os conceitos estudados no capítulo 2, pois os exemplos envolverão funções integráveis. Em especial, provaremos as desigualdades de Hölder e Minkowski para integrais, que serão necessários, posteriormente, para demonstrar que o espaço $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach.

Definição 3.2.1. *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida e* $1 < p < +\infty$*.O conjunto das funções* $f : X \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

sera chamado de $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$

Proposição 3.2.1 (Desigualdade de Young)**.** *Considere* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, com* $p, q \in \mathbb{R}$*. Se* $0 \leq a, b$*, então* $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$*. Em particular,* $a^p = b^q$ *se, e somente se,* $ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$*.*

Demonstração. Perceba que

$$a^p = b^q \Leftrightarrow ab = a(b^q)^{\frac{1}{q}} = a(a^p)^{\frac{1}{q}} = aa^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{p}}a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{p}+\frac{p}{q}} = a^{p(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} = a^p.$$

Fazendo o processo análogo para $ab = (a^p)\frac{1}{p}b = (b^q)^{\frac{1}{p}}b$, percebemos que $a^p = ab = b^q$, portanto

$$ab = a^p \cdot 1 = a^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Agora, mostraremos a desigualdade. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = e^x$. Sabemos que $f"(x) > 0$ para todo x, assim, pelo Cálculo, sabemos que f é estritamente convexa, portanto dado $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$, temos que $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$. Agora, notemos que

$$ab = e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a^p{}^{\frac{1}{p}} + \ln b^q{}^{\frac{1}{q}}} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} =$$

$$e^{\frac{1}{p}\ln a^p + (1-\frac{1}{p})\ln b^q} < \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)e^{\ln b^q}$$

pela convexidade de f. Assim, obtemos que $ab < \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$.

□

Teorema 3.2.1 (Desigualdade de Hölder para Integrais)**.** *Considere* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *com* $1 < p, q$. *Se* f, g *são funções mensuráveis, então*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

Em especial, $f, g \in \mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$*, se* $f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ *e* $g \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu)$.

Demonstração. Considere $||f||_p = 0$ (é análogo para $||g||_q = 0$), por Definição, $(\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = 0$, assim $|f|$ é nula em quase todos os pontos, segue que $|f| \cdot |g| = |fg|$ é quase identicamente nula, consequentemente, $\int_X |fg|d\mu = 0$ atendendo a desigualdade de Hölder.

Agora, vamos supor que $||f||_p \neq 0 \neq ||g||_q$ para $1 < p, q < +\infty$. Considere $a = \frac{|f|}{||f||_p}$ e $b = \frac{|g|}{||g||_q}$, particularmente, $a, b \geq 0$. Assim, pela desigualdade de Young

$$\frac{|f| \cdot |g|}{||f||_p \cdot ||g||_q} = ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{(\frac{|f|}{||f||_p})^p}{p} + \frac{(\frac{|g|}{||g||_q})^q}{q} = \frac{|f|^p}{||f||_p^p} \cdot \frac{1}{p} + \frac{|g|^q}{||g||_q^q} \cdot \frac{1}{q}.$$

Notadamente

$$\int_X \frac{|f| \cdot |g|}{||f||_p \cdot ||g||_q} d\mu \leq \int_X \left(\frac{|f|^p}{||f||_p^p} \cdot \frac{1}{p} + \frac{|g|^q}{||g||_q^q} \cdot \frac{1}{q}\right) d\mu = \int_X \frac{|f|^p}{||f||_p^p} \cdot \frac{1}{p} d\mu + \int_X \frac{|g|^q}{||g||_q^q} \cdot \frac{1}{q} d\mu$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{||f||_p^p} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{||g||_q^q} \int_X |g|^q d\mu.$$

Repare que $||f||_p^p = \int_X |f|^p d\mu$. Da mesma forma, $||g||_q^q = \int_X |g|^q d\mu$. Portanto

$$\int_X \frac{|f| \cdot |g|}{||f||_p \cdot ||g||_q} d\mu \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{||f||_p^p}{||f||_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{||g||_q^q}{||g||_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Logo,

$$\frac{1}{||f||_p \cdot ||g||_q} \int_X |fg| d\mu = \int_X \frac{|f| \cdot |g|}{||f||_p \cdot ||g||_q} d\mu \leq 1,$$

com isso, $||fg||_1 = \int_X |fg| d\mu \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$, o que encerra a dedução.

$\square$

Teorema 3.2.2 (Desigualdade de Minkowski para Integrais)**.** *Considere* $1 \leq p < +\infty$ *e* (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Se* $f, g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$*, então* $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ *e*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Demonstração. Se $p = 1$, temos que

$$||f + g||_1 = \int_X |f + g| d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) d\mu = \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu = ||f||_1 + ||g||_1.$$

Observe também que se $||f+g||_p = 0$, como $0 \leq ||f||_p, ||g||_p$, então $||f+g||_p = 0 \leq ||f||_p + ||g||_p$.

Agora supondo que $p > 1$, podemos notar que

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \cdot \max\{|f|, |g|\})^p = 2^p \cdot \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

portanto $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$. Consequentemente,

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X 2^p(|f|^p + |g|^p) d\mu = 2^p \left(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu \right) < +\infty,$$

pois $2^p < +\infty$ e f e g pertencem a $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, logo $\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$, isto é, $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$.

Em particular, perceba que

$$\begin{aligned} |f + g|^p &= |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq (|f| + |g|) \cdot |f + g|^{p-1} \\ &= |f| \cdot |f + g|^{p-1} + |g| \cdot |f + g|^{p-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Agora considere $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($pq \cdot (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \Rightarrow q + p = pq \Rightarrow p = pq - q$) e note que $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$. Com efeito, observamos que

$$\left(\int_X (|f + g|^{p-1})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |f + g|^{pq-q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

uma vez que $f+g \in \mathcal{L}_p(X,\Sigma,\mu)$. Pela desigualdade de Hölder, nota-se que

$$\int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1}d\mu = ||f(f+g)^{p-1}||_1 \leq ||f||_p \cdot ||(f+g)^{p-1}||_q =$$

$$\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^{pq-q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

do mesmo modo,

$$\begin{aligned}\int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1}d\mu &= ||g(f+g)^{p-1}||_1 \\ &\leq ||g||_p \cdot ||(f+g)^{p-1}||_q = (\int_X |g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_X |f+g|^{pq-q}d\mu)^{\frac{1}{q}},\end{aligned} \tag{3.2}$$

Por (3.1) e (3.2), segue que

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1}d\mu + \int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1}d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^{pq-q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^{pq-q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = ||f||_p \cdot \left(\int_X |f+g|^{pq-q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + ||g||_p \cdot \left(\int_X |f+g|^{pq-q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (||f||_p + ||g||_p) \cdot \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

com isso

$$||f||_p + ||g||_p \geq \frac{\displaystyle\int_X |f+g|^p d\mu}{\left(\displaystyle\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} = \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} = (\int_X |f+g|^p d\mu)^p = ||f+g||_p,$$

encerrando a demonstração.

$\square$

Podemos notar que $||\cdot||_p$ é semelhante a uma norma em $\mathcal{L}_p(X,\Sigma,\mu)$, pois $||f||_p \geq 0$, além disso

$$||\lambda f||_p = \left(\int_X |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |\lambda|\cdot|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\lambda| \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \cdot ||f||_p.$$

Pela desigualdade de Minkowski, $||\cdot||_p$ atende a desigualdade triangular, mas repare que se $||f||_p = 0$, não significa que f é identicamente nula. De fato, considere a função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

tal que $f(x) = 1$ se $x = a$ e $f(x) = 0$ se $x \in]a, b]$. Particularmente, dado $\epsilon > 0$, temos que

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^{a+\epsilon} |f(x)|^p dx + \int_{a+\epsilon}^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^{a+\epsilon} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq ([a + \epsilon - a] \cdot \max\{|f(x)|^p : x \in [a, a + \epsilon]\})^{\frac{1}{p}} = (\epsilon \cdot 1^p)^{\frac{1}{p}} = \epsilon^{\frac{1}{p}},$$

portanto $||f||_p = 0$, no entanto f não é identicamente nula.

Portanto, vamos definir uma relação de equivalência no espaço $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, a qual dada duas funções $f, g : X \to \mathbb{K}$, dizemos que estas são equivalentes se $f = g$ μ-quase sempre, ou seja, se existe um conjunto de medida nula $N \in \sigma$ tal que $f(x) \neq g(x)$ para $x \in N^c$. Denotaremos a classe de equivalência de uma função f por $[f]$ e chamaremos o conjunto quociente de

$$L_p(X, \Sigma, \mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)\}$$

definindo as operações $[f + g] = [f] + [g]$ e $[cf] = c[f]$ e $||[f]||_p = ||f||_p$, tornando L_p um espaço vetorial normado. Corrigindo o problema da integral ser nula e a função não necessariamente, uma vez que se $||[f]|| = 0$, então f é equivalente a função identicamente nula, portanto $[f] = 0$. Por fim, é importante observar que apesar que o conjunto $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um conjunto quociente, formado por classes de equivalência, utilizaremos usualmente f em vez de $[f]$, sem qualquer prejuízo ao estudo.

Teorema 3.2.3. *Se $1 \leq p < +\infty$, então $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração. Já sabemos que $|| \cdot ||_p$ é uma norma em $L_p(X, \Sigma, \mu)$, portanto basta mostrar a completude com a norma $|| \cdot ||_p$. Considere a sequência de funções $(f_n)_{n=1}^\infty$ de Cauchy em $L_p(X, \Sigma, \mu)$, onde $f_n : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Seja $(g_k)_{n=1}^\infty$ uma subsequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ tal que $g_k = f_{n_k}$ satisfazendo

$$||g_{k+1} - g_k||_p \leq \frac{1}{2^k}$$

para todo $k \geq 1$,. Assim, definiremos a função $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ onde

$$g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^\infty |(g_{k+1} - g_k)(x)|.$$

A função g é mensurável não-negativa. Afirmamos que a aplicação $g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$. Com efeito, perceba que

$$|g(x)|^p = \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^\infty |(g_{k+1} - g_k)(x)| \right)^p = \lim_n \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |(g_{k+1} - g_k)(x)| \right)^p,$$

logo,

$$\int_X |g(x)|^p d\mu = \int_X \lim_n \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |(g_{k+1} - g_k)(x)| \right)^p d\mu.$$

Então pelo Lema de Fatou (Lema 2.3.1)

$$\int_X |g(x)|^p d\mu = \int_X \liminf_n \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |(g_{k+1} - g_k)(x)| \right)^p d\mu$$

$$\leq \liminf_n \int_X \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |(g_{k+1} - g_k)(x)| \right)^p d\mu.$$

Como consequência da desigualdade de Minkowski,

$$||g||_p = \left(\int_X |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \liminf_n \left(\int_X \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |(g_{k+1} - g_k)(x)| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= ||g_1(x)||_p + \sum_{k=1}^{\infty} ||(g_{k+1} - g_k)(x)||_p.$$

Assim,

$$||g||_p \leq ||g_1||_p + \sum_{k=1}^{\infty} ||(g_{k+1} - g_k)(x)||_p \leq ||g_1||_p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty,$$

pelo fato de que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 1$. Dessa forma, g é finita $\mu-$quase sempre, dado que $\int_X |g(x)|^p d\mu < +\infty$, em especial, o conjunto $A = \{x \in X : g(x) < \infty\}$ satisfaz $\mu(X - A) = 0$. Agora, definiremos

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1} - g_k)(x), & \text{se } g(x) < +\infty \\ 0, & \text{se } g(x) = \infty. \end{cases}$$

Vamos verificar agora que $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ e que $\lim_k ||g_k - f||_p = 0$. Perceba que

$$f(x) = \lim_n \left(g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k)(x) \right).$$

Agora, repare que

$$|g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k)(x)| \leq |g_1(x)| + |\sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k)(x)| \leq g(x)$$

implica que

$$|g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k)(x)|^p \leq |g(x)|^p,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, além disso, $\displaystyle\int_X |g(x)|^p d\mu < +\infty$, portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = \int_X \lim_n \left(g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k)(x) \right)^p d\mu = \lim_n \int_X \left(g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k)(x) \right)^p d\mu. \tag{3.3}$$

Em decorrência disso e da Desigualdade de Minkowski,

$$||f||_p^p = \lim_n ||g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k)(x)||_p \leq \lim_n \left(||g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k)(x)||_p \right)$$

$$\leq \lim_n \left(||g_1||_p + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \right) = ||g_1||_p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Como consequência $f \in L_p(X, \sum, \mu)$. Por fim, perceba que, como $g_k = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + (g_k(x) - g_{k-1})$, então,

$$f(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1} - g_k)(x) = g_1(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (g_{j+1} - g_j)(x) + \sum_{j=k}^{\infty} (g_{j+1} - g_j)(x)$$

$$= g_k(x) + \sum_{j=k}^{\infty} (g_{j+1} - g_j)(x) \Rightarrow f(x) - g_k(x) = \sum_{j=k}^{\infty} (g_{j+1} - g_j)(x),$$

para quase todo $x \in X$, portanto, (pela desigualdade de Minkowski aplicada cuidadosamente)

$$||f - g_k||_p = ||\sum_{j=k}^{\infty} (g_{j+1} - g_j)(x)||_p \leq \sum_{j=k}^{\infty} ||(g_{j+1} - g_j)(x)||_p \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 - 2\left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2} \right).$$

Fazendo $k \to \infty$, concluímos da desigualdade acima que $\lim_k ||g_k - f||_p = 0$. Dessa forma, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ que converge para f em $L_p(X, \Sigma, \mu)$, logo $f_n \longrightarrow f$ pela Proposição 1.3.2, concluindo que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach.

□

3.3 O Espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$

Seja $\mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto de todas as funções limitadas $\mu-$quase sempre, ou seja, existem um conjunto $N \in \Sigma$ e um número real K tais que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq K$ para todo $x \notin N$.

Definição 3.3.1. *Seja $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ e $N \in \Sigma$ um conjunto de medida nula, definiremos*

$$S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\} \ e$$

$$||f||_\infty = \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \ e \ \mu(N) = 0\}.$$

Observe que, novamente, pode acontecer $||f||_\infty = 0$ com f não sendo necessariamente a função identicamente nula. Para contornar esse problema , também recorremos às classes de equivalência, de forma similar ao que fizemos no caso do $L_p(X, \Sigma, \mu)$, ou seja, dizemos que duas funções são equivalentes (pertencem à mesma classe de equivalência) se coincidem μ-quase sempre. O conjunto $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ é o conjunto de todas as classes de equivalência das funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{K}$ que são limitadas $\mu-$quase sempre. De maneira análoga a que fizemos na seção anterior, podemos mostrar que $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as mesmas operações definidas a priori. Se $[f] \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$, definimos

$$||[f]||_\infty = ||f||_\infty.$$

Proposição 3.3.1. *Se $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$, então $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ $\mu-$quase-sempre.*

Demonstração. Pela Definição de $||f||_\infty$, existe $(N_n)_{n=1}^\infty$ de conjuntos de medida nula tais que

$$\lim_n S_f(N_n) = ||f||_\infty \text{ e } |f(x)| \leq S_f(N_n) \text{ para todo } x \notin N_n.$$

Agora, tomando $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ resulta que N tem medida nula e

$$|f(x)| \leq S_f(N_n) \text{ para todo } x \notin N.$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$, obtemos

$$|f(x)| \leq ||f||_\infty$$

$\mu-$quase-sempre.

□

Exemplo 3.3.1. *$||\cdot||_\infty$ é uma norma em $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$. Com efeito, perceba que $0 \leq |f(x)| \leq ||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Observe agora que*

$$||\lambda \cdot f||_\infty = \inf\{S_{\lambda \cdot f}(N) : N \in \Sigma \ e \ \mu(N) = 0\},$$

e como

$$S_{\lambda \cdot f}(N) = \sup\{|\lambda \cdot f(x)| : x \notin N\} = |\lambda| \cdot \sup\{|f(x)| : x \notin N\} = |\lambda| \cdot S_f(N),$$

segue que

$$||\lambda \cdot f||_\infty = \inf\{|\lambda|_f(N) : N \in \Sigma \ e \ \mu(N) = 0\} = |\lambda| \cdot \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \ e \ \mu(N) = 0\}$$

$$= |\lambda| \cdot ||f||_\infty.$$

Por fim, note que

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty,$$

consequentemente $S_{(f+g)}(N) \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$, *portanto*

$$||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

Tal norma é chamada de supremo essencial de f.

Teorema 3.3.1. $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Como $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço vetorial normado, resta mostrar que é completo com a norma $||\cdot||_\infty$. Nesse caso, seja $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$, pela Proposição 3.3.1, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $M_j \in \Sigma$ tal que $\mu(M_j) = 0$ e

$$|f_j(x)| \leq ||f_j||_\infty \text{ para todo } x \notin M_j.$$

Defina $M_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j$ e perceba que

$$|f_j(x)| \leq ||f_j||_\infty \text{ para todo } x \notin M_0.$$

Além disso, para cada par $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, existe $M_{n,m} \in \Sigma$ com $\mu(M_{n,m}) = 0$ e

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \text{ para todo } x \notin M_{n,m}.$$

Considere $M = M_0 \cup \left(\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} M_{n,m} \right)$. Note que $\mu(M) = 0$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, e

$$\begin{cases} |f_j(x)| \leq ||f_j||_\infty \ \text{ para todo } \ \mathrm{x} \notin M_0 \\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \ \text{ para todo } \ \mathrm{x} \notin M_{n,m}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Assim, para cada $x \notin M$, a sequência $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, portanto convergente em $\mathbb{K}$. Tome $f : X \to \mathbb{R}$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_n f_n(x) \text{ se } x \notin M \\ 0 \text{ se } x \in M \end{cases}.$$

Consequentemente, f é mensurável. Como $(f_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy, pela equação 3.4, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o $\sup\limits_{x \notin M} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ sempre que $m, n \geq n_0$. Fazendo $m \longrightarrow +\infty$ segue que

$$\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \tag{3.5}$$

sempre que $n \geq n_0$. Assim, $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uniformemente convergente para $f \in X - M$. Da equação 3.5, temos que $f_n - f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ para n grande o suficiente. Logo, $f = f_n - (f_n - f) \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$. Como consequência, podemos escrever a equação 3.5, da seguinte maneira

$$||f_n - f|| \leq \sup_{x \notin M} |f_n - f| \leq \epsilon,$$

sempre que n é grande o bastante. Portanto, podemos concluir que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge para f em $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$.

□

3.4 Espaços de Sequências

Nesta seção estudaremos alguns espaços notáveis de sequências, além do c_0 e c_{00} já estudados. Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$\ell_p = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < +\infty \right\}.$$

Seja $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ equipado com a medida de contagem μ_c definida por

$$\mu_c(X) = \begin{cases} \#X & \text{se } X \text{ é finito} \\ +\infty & \text{se } X \text{ é infinito} \end{cases}$$

onde $\#X$ é a cardinalidade de um conjunto mensurável X da σ-álgebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Note que ℓ_p é na verdade o espaço $L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$. De fato, se $f \in L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$, então, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, portanto é uma sequência, a qual podemos considerar na forma $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Além disso, vejamos que a integral se transforma num somatório, para isto, sem perda de generalidade, consideraremos f não-negativa e consideraremos o Teorema da Convergência Monótona. Para $n \in \mathbb{N}$, defina a sequência $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(k) = \begin{cases} f(k) & \text{se } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então claramente, quando $n \to \infty$, $f_n \to f$ pontualmente; além disso a sequência é monótona crescente, pois $f(k) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu_c \to \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_c \text{ quando } n \to \infty.$$

Observe que podemos decompor $\mathbb{N}$ na forma

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \{2\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \{n+1, n+2, \ldots\},$$

e que esses conjuntos são todos mensuráveis. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu_c &= \int_{\{1\}} f_n \, d\mu_c + \cdots + \int_{\{n\}} f_n \, d\mu_c + \int_{\{n+1,n+2,\ldots\}} f_n \, d\mu_c \\ &= \int_{\{1\}} f_n(1) \, d\mu_c + \cdots + \int_{\{n\}} f_n(n) \, d\mu_c + \int_{\{n+1,n+2,\ldots\}} 0 \, d\mu_c, \end{aligned}$$

onde usamos acima que f_n é constante em cada um desses conjuntos, por Definição. Então, usando que cada integral no lado direito é a integral de uma função simples (pois $f_n(i)$ é constante!), segue conforme a Definição na equação (2.1) que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu &= f_n(1) \cdot \mu_c(\{1\}) + f_n(2) \cdot \mu_c(\{2\}) + \cdots + f_n(n) \cdot \mu_c(\{n\}) + 0 \\ &= 1 \cdot f_n(1) + 1 \cdot f_n(2) + \cdots + 1 \cdot f_n(n) \\ &= f(1) + \cdots + f(n).\end{aligned}$$

Então, resulta que

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_c = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu_c = \lim_{n\to\infty} (f(1) + \cdots + f(n)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Em especial, a norma $|| \cdot ||_p$ se torna

$$||(a_j)_{j=1}^{\infty}||_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Diante disso, observamos que ℓ_∞ é um espaço de Banach com as operações usuais de sequências e com a norma $||\cdot||_p$. Particularmente, dos Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 seguem os seguintes resultados:

Proposição 3.4.1 (Desigualdade de Holder para Sequências). *Se $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares $a_1, .., a_n, b_1, ..., b_n$.

Proposição 3.4.2 (Desigualdade de Minkowski para Sequências). *Para $p \geq 1$, temos*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $n \in N$ e escalares $a_1, .., a_n, b_1, ..., b_n$.

Para $p = \infty$, definimos ℓ_∞ como o espaço das sequências limitadas de escalares, isto é:

$$\ell_\infty = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < +\infty \right\}.$$

Observando que $\ell_\infty = L_\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$, podemos concluir que ℓ_∞ é um espaço de Banach com as operações usuais de sequências e com a norma

$$||(a_j)_{j=1}^{\infty}||_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}.$$

Em particular, toda sequência convergente é limitada, como consequência, c_0 é subespaço de ℓ_∞ que é Banach, portanto, c_0 é um subespaço fechado de ℓ_∞ pela Proposição 3.1.1.

3.5 Conjuntos Compactos em Espaços Vetoriais Normados

A compacidade de conjuntos determina um papel essencial na Análise. Em particular, na analise na reta, se temos uma função f contínua defina em um conjunto compacto, então f é limitada e assume máximo e mínimo. Além dessa, existem outras diversas implicações importantes da compacidade de conjuntos. Sendo assim, trouxemos alguns resultados de conjuntos compactos em espaços vetoriais normados nesta seção.

Proposição 3.5.1. *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então os compactos em E são precisamente os conjuntos limitados e fechados.*

Demonstração. Pelas proposições 1.4.2 e 1.4.3, os conjuntos compactos em espaços métricos são sempre fechados e limitados. Resta provar que todo conjunto limitado e fechado $X \subseteq E$ é compacto. Nesse caso, considere n a dimensão de E e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base normalizada de E. Como estamos em espaços métricos, basta mostrar que toda sequência em X admite subsequência convergente em X. Portanto, tome $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência de pontos em X. Para qualquer m, existem escalares $a_1^m, ...a_n^m$ tais que $x_m = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j^m e_j$. Como X é limitado, existe $L > 0$, tal que $||x_m|| \leq L$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Consideremos em $\mathbb{K}^n$ a norma da soma $|| \cdot ||_2$. Pelo Lema 3.1.1, existe $c > 0$ tal que

$$L \geq ||x_m|| = \left|\left|\sum_{j=1}^{n} a_j^m e_j\right|\right| \geq c\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|\right) = c \cdot ||(a_1^m, ..., a_n^m)||_2,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Dessa forma, a sequência $(a_1^m, ..., a_n^m)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $\mathbb{K}^n$. Pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass esta sequência possui subsequência $(a_1^m{}_k, ..., a_n^m{}_k)_{k=1}^{\infty}$ que converge para um certo $b = (b_1, ..., b_n)$ em $\mathbb{K}^n$. Agora note que

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} a_j^{m_k} e_j - \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\right|\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j^{m_k} - b_j| = ||(a_1^m{}_k, ..., a_n^m{}_k) - b||_2 \longrightarrow 0,$$

concluindo que $x_{m_k} \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$. Por X ser fechado, segue que $\sum_{j=1}^{n} b_j e_j \in X$.

□

Definição 3.5.1. *Seja E um espaço normado. O conjunto*

$$B_E = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$$

é chamado de bola unitária fechada em E.

Corolário 3.5.1. *A bola unitária fechada em um espaço normado de dimensão finita é compacta.*

Exemplo 3.5.1. *A bola unitária fechada no espaço c_0 (do exemplo 3.1.6) não é compacta. Com efeito, considere a sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$u_1 = (1, 0, 0, \cdots), u_2 = (0, 1, 0, \cdots), \cdots$$

Perceba que $||u_n||_\infty = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ainda mais, $||u_n - u_m||)_\infty = 1$ para todo $n \neq m$. Assim, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ não é uma sequência de Cauchy, nem possui subsequência de Cauchy. Portanto, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ não possui subsequência convergente em B_{c_0}, assim, contraintuitivamente B_{c_0} não é compacta.

3.6 Espaços Normados Separáveis

Em um curso de Análise na Reta, sabemos que a densidade do conjunto $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é essencial para entendermos determinadas propriedades de $\mathbb{R}$. De forma similar, é interessante quando um espaço normado possui um conjunto denso e enumerável, o que acaba sendo útil para diversas situações. Inclusive, mostraremos que é possível demonstrar o Teorema de Hahn-Banach considerando esta característica. No entanto, nem todo espaço normado possui subespaço enumerável e denso. Dessa maneira, destacaremos nessa seção os espaços normados que possuem essa propriedade.

Definição 3.6.1. *Seja E um espaço normado e $M \subseteq E$. Dizemos que M é denso em E, se dado $y \in E$ e qualquer $\epsilon > 0$, existe $x \in M$ tal que $||y - x|| < \epsilon$.*

Definição 3.6.2. *Um espaço normado E que contém um subconjunto enumerável e denso em E é dito separável. Mais geralmente, um espaço métrico M é separável quando contém um subconjunto denso e enumerável.*

Exemplo 3.6.1. *Espaços normados de dimensão finita são separáveis. Seja E um espaço normado de dimensão n. Fixe uma base $\{x_1, ..., x_n\}$ de E e, no caso real, considere o conjunto*

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q} \right\},$$

das combinações lineares dos vetores da base com escalares racionais. Perceba que A é denso em E. De fato, tome $x \in E$ e $\epsilon > 0$. Em especial existem $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $x = \alpha_1 x_1 +, ..., \alpha_n x_n$. Sabemos do curso de Análise na Reta que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, portanto existem $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{Q}$ tal que $|\alpha_i - \beta_i| < \frac{\epsilon}{n||x_i||}$ para qualquer $\epsilon > 0$ e $i = 1, ..., n$. Seja $y = \beta_1 x_1 +, ..., +\beta_n x_n \in A$. Assim, note que

$$||x - y|| = ||\alpha_1 x_1 +, ..., \alpha_n x_n - (\beta_1 x_1 +, ..., +\beta_n x_n)|| = ||(\alpha_1 - \beta_1)x_1 +, ..., (\alpha_n - \beta_n)x_n|| \leq$$
$$||(\alpha_1 - \beta_1)x|| +, ..., +||(\alpha_n - \beta_n)x_n|| = |(\alpha_1 - \beta_1)| \cdot ||x|| +, ..., +|(\alpha_n - \beta_n)| \cdot ||x_n|| <$$
$$\tfrac{\epsilon}{n||x_1||} \cdot ||x_1|| +, ..., + \tfrac{\epsilon}{n||x_n||} \cdot ||x_n|| = \epsilon.$$

No caso, complexo, consideraremos $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ ao invés de $\mathbb{Q}$ em A e a demonstração será análoga.

O Lema a seguir será útil na demonstração de que vários dos espaços com que estamos trabalhando são separáveis. Dado um subconjunto A de um espaço vetorial E, por $[A]$ estamos denotando o subespaço de E gerado por A.

Lema 3.6.1. *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $[A]$ é denso em E.*

Demonstração. Se A for enumerável e denso em E, então $E = A \subseteq [A] \subseteq E$, e portanto $[A]$ é denso em E. Reciprocamente, suponhamos que exista um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $[A] = E$. Chamemos de B o conjunto formado por todas as combinações lineares finitas de elementos em A com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$, onde $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}} = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, isto é:

$$B = \{a_1x_1+, ..., +a_nx_n : x_1, ..., x_n \in A, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

Perceba que $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é enumerável, além disso, o conjunto das combinações lineares de n elementos de A com escalares em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é enumerável pelo exemplo 3.6.1. Em particular $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_1x_1+, ..., a_nx_n\}$, isto é, B é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis, portanto, B é enumerável. Provaremos agora que B é denso em E. Para isso, sejam $x \in E$ e $\epsilon > 0$. Por hipótese, $[A] = E$, assim existe $y_0 \in [A]$ tal que $||x - y_0|| < \frac{\epsilon}{2}$. Assuma que $y_0 = b_1x_1+, ..., +b_kx_k$, onde $k \in \mathbb{N}$, $b_1, ..., b_n \in \mathbb{K}$ e $x_1, ..., x_n \in A$. Pela densidade de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ em $\mathbb{K}$, existem $a_1, ..., a_k \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ tais que

$$|a_j - b_j| < \frac{\epsilon}{2\displaystyle\sum_{i=1}^{k}||x_i||} \text{ para qualquer } j = 1, ..., k.$$

Tome $y = a_1x_1+, ..., a_nx_n$ e, claramente, $y \in B$. Agora, observe que

$$||x-y|| = ||x-y_0+y_0-y|| \leq ||x-y_0||+||y_0-y|| = ||-y_0|||+||b_1x_1+, ..., +b_kx_k-(a_1x_1+, ..., a_nx_n)||$$

$$= ||x - y_0|| + ||(b_1 - a_1)x_1+, ..., +(b_k - a_k)x_k|| < \frac{\epsilon}{2} + |b_1 - a_1| \cdot ||x_1||+, ..., |b_k - a_k| \cdot ||x_k||$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \max_{j=1,...,k} |b_j - a_j|(||x_1||+, ..., +||x_k||) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2\displaystyle\sum_{i=1}^{k}||x_i||} \cdot \sum_{i=1}^{k}||x_i|| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

provando que $\overline{B} = E$, logo E é separável.

$\square$

Exemplo 3.6.2. *c_0 e ℓ_p com $1 < p < +\infty$ são separáveis. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere*

$$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$$

a sequência formada por 1 na n-ésima coordenada e 0 nas demais coordenadas. Os vetores $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ são chamados de vetores unitários canônicos dos espaços de sequências. Considere $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$, temos

$$\lim_k \left|\left|x - \sum_{j=1}^{k} a_je_j\right|\right|_{\infty} = \lim_k ||(0, ..., 0, a_{k+1}, a_{k+2}, ...)||_{\infty} = \lim_k \sup_{j>k} |a_j| = 0,$$

pois $a_j \longrightarrow 0$, *quando* $j \longrightarrow \infty$. *Segue que* $\sum_{j=1}^{k} a_j e_j \longrightarrow x$ *em* c_0, *se* $k \longrightarrow \infty$. *Em paricular* $\sum_{j=1}^{k} a_j e_j \in [e_1, ..., e_n, ..]$ *para qualquer* $k \in \mathbb{N}$, *portanto, pelo Lema 3.6.1, temos que* c_0 *é separável.* *Agora, seja* $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, *note que*

$$\lim_k \left|\left| x - \sum_{j=1}^{k} a_j e_j \right|\right|_p = \lim_k ||(0, ..., 0, a_{k+1}, a_{k+2}, ...)||_p = \lim_k \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j|^p = 0,$$

pois $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p$ *é convergente. Assim, utilizando o mesmo argumento que usamos em* c_0, *mostramos que* ℓ_p *é separável.*

Exemplo 3.6.3. ℓ_∞ *não é separável. Suponha que* ℓ_∞ *contenha uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *densa. Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *defina* $x_n = (a_j^n)_{j=1}^{\infty}$. *Seja* $y = (b_j)_{j=1}^{\infty}$ *a sequência definia por* $b_j = 0$ *se* $|a_j^j| = 0$ *e* $b_j = |a_j^j| + 1$ *se* $|a_j^j| < 1$. *Note que* $y \in \ell_\infty$, *pois* $|b_j| < 2$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$, *ou seja,* $\sup_{j \in \mathbb{N}} |b_j| < +\infty$. *Da densidade da sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $||y - x_{n_0}||_\infty < 1$. *No entanto,*

$$\begin{aligned} ||y - x_n||_\infty &= \sup\{|b_1 - a_1^n|, ..., |b_n - a_n^n|, ...\} \geq |b_n - a_n^n| \\ &= \begin{cases} |0 - a_n^n| \ se \ |a_n^n| \geq 1 \\ |a_n^n + 1 - a_n^n| \ se \ |a_n^n| < 1 \end{cases} = \begin{cases} |a_n^n| \ se \ |a_n^n| \geq 1 \\ 1 \ se \ |a_n^n| < 1 \end{cases} \geq 1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ *o que contradiz a densidade* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. *Como consequência,* ℓ_∞ *não é separável.*

Proposição 3.6.1. *Todo subespaço de um espaço normado separável é também separável.*

3.7 Operadores Lineares Contínuos

Um operador linear contínuo de um espaço normado E no espaço normado F, ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, é uma função $T : E \to F$ linear, homogênea e contínua, ou seja, dado $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos que:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ (Linearidade);
2. $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ (Homogeneidade);
3. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $||T(x) - T(x_0)|| < \epsilon$ sempre que $||x - x_0|| < \delta$ para qualquer $x_0 \in E$ (Continuidade).

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$. Claramente $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathcal{K}$ com as operações usuais de funções. Quando F é o corpo dos escalares $\mathbb{K}$, escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, chamaremos E' de espaço dual de E e chamaremos seus elementos de funcionais lineares.

Dois espaços normados E e F são isomorfos, se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \to F$ cujo operador inverso $T^{-1} : F \to E$ é linear, homogêneo e contínuo. Tal operador T é chamado de isomorfismo linear.

3.7.1 Caracterização dos Operadores Lineares Contínuos

O Teorema 3.7.1 mostra conceitos equivalentes a um operador linear ser contínuo, o que é importante, pois os operadores lineares contínuos possuem um bom comportamento e serão muito relevantes ao longo do desenvolvimento do nosso trabalho. Em particular, tais funções serão essenciais para a construção e a demonstração do Teorema de Hahn-Banach versão geométrica.

Teorema 3.7.1. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \to F$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) T é lipschitziano.
(b) T é uniformemente contínuo.
(c) T é contínuo.
(d) T é contínuo em algum ponto de E.
(e) T é contínuo na origem.
(f) $\sup\{||T(x)|| : x \in E$ e $||x|| \leq 1\} < +\infty$.
(g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $||T(x)|| \leq C||x||$ para qualquer $x \in E$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que T é lipschitziano, assim, existe $L > 0$ tal que $||T(x) - T(y)|| \leq L||x - y||$ para todo $x, y \in M$. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta > 0$ e $x, y \in M$, tal que $||x - y|| < \delta = \frac{\epsilon}{L}$, logo $||T(x) - T(y)|| \leq L||x - y|| < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon$, portanto, T é uniformemente contínua.
(b) $\Rightarrow$ (c) Se T é uniformemente contínua, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $||T(x) - T(y)|| < \epsilon$, sempre que $||x - y|| < \delta$. Tomando, $y = u$ qualquer em E, então $||x - u|| < \delta$ impliaca que $||T(x) - T(u)|| < \epsilon$, logo, T é contínua para todo u em E, portanto é contínua.
(c) $\Rightarrow$ (d) É óbvio, pois T é contínua, portanto é contínua em todo ponto $u \in E$.
(d) $\Rightarrow$ (e) Seja T contínuo em $x_o \in E$. Se $x_0 = 0$, então a demonstração está concluída. Caso x_0 seja não nulo, então dado $\epsilon > 0$, sempre existe δ tal que se $||x - x_0|| < \epsilon$, então $||T(x) - T(x_0)|| < \epsilon$. Em particular, tome $x \in E$ onde $||x|| < \delta$ e note que

$$||T(x)|| = ||T((x + x_0) - x_0)|| = ||T(x + x_0) - T(x_0)|| < \epsilon$$

quando $||x + (x_0 - x_0)|| = ||x|| < \delta$.
(e) $\Rightarrow$ (f) Como T é contínuo na origem, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $||T(x)|| < 1$, sempre que $||x|| < \delta$. Se $||x|| < 1$, então $||\delta x|| < \delta$. Segue que, $1 > ||f(\delta x)|| = \delta||f(x)||$, portanto, $||f(x)|| < \frac{1}{\delta}$ para todo $x \in E$, assim, $\sup\limits_{||x||<1} ||T(x)|| < \dfrac{1}{\delta} < +\infty$.
(f) $\Rightarrow$ (g) Se $x = 0$ a desigualdade é imediata. Portanto, considere x não nulo, segue que $||T(\frac{x}{||x||})|| \leq \sup\{||T(y)||, y \in E$ e $||y|| \leq 1\} \leq C$ para algum $C > 0$. Segue que

$$C||x|| \geq T\left(\frac{x}{||x||}\right)||x|| = ||T\left(\frac{x}{||x||} \cdot ||x||\right)|| = ||T(x)||.$$

(g) $\Rightarrow$ (a) Considere $x_1, x_2 \in E$, segue que existe $L > 0$ tal que

$$||T(x_1) - T(x_2)|| = ||T(x_1 - x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||$$

portanto T é lipschitziano.

$\square$

Corolário 3.7.1. *Seja $T : E \to F$ um operador linear bijetor entre espaços normados. Então T é um isomorfismo se, e somente, se existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $C_1||x|| \leq ||T(x)|| \leq C_2||x||$ para qualquer $x \in E$.*

Demonstração. Se T é um isomorfismo, então T é contínuo, portanto existe $C_2 > 0$ tal que $||T(x)|| \leq C_2||x||$ para todo $x \in E$, pelo Teorema 3.7.1 (g). Agora, note que, T^{-1} também é contínua e linear, assim, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $||T^{-1}(y)|| \leq C_1^{-1}||y||$ para qualquer $y \in F$. Em particular, $T(x) = y$, portanto, $||x|| = ||T^{-1}(T(x))|| = ||T^{-1}(y)|| \leq C_1^{-1}||y|| = C_1^{-1}||T(x)||$, segue que $C_1||x|| \leq ||T(x)|| \leq C_2||x||$. Analogamente, provamos a volta.

$\square$

Proposição 3.7.1. *Sejam E e F espaços normados.*
(a) A expressão

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| : x \in E \textbf{ e } ||x|| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.
(b) $||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||$ para qualquer $T \in \mathcal{L}(E, F)$, e $x \in E$.
(c) Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é um espaço de Banach.

Demonstração. (a) Se T é um operador linear não nulo, então, existe x não nulo em E, tal que $T(x)$ é não nulo, portanto $||T(x)|| > 0$, segue que $||T\left(\frac{x}{||x||}\right)|| = \frac{1}{||X||} \cdot ||T(x)|| > 0$. Logo

$$0 < ||T\left(\frac{x}{||x||}\right)|| \leq ||T||,$$

portanto $||T|| \neq 0$. Note também que dado $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que

$$||\alpha T|| = \sup\{||\alpha T(x)||, x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1\} = \sup\{|\alpha| \cdot ||T(x)||, x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1\} = \\ |\alpha| \sup\{||T(x)||, x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1\} = |\alpha| \cdot ||T||.$$

Além disso, dado $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, temos

$$||T_1 + T_2|| = \sup\{||T_1(x) + T_2(x)||, x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1\} \leq \sup\{||T_1(x)|| + ||T_2(x)||, x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1\} = \sup\{||T_1(x)||, x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1\} + \sup\{||T_2(x)||, x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1\} = ||T_1|| + ||T_2||.$$

completando a argumentação.

A demonstração de (b) segue direto do Teorema 3.7.1 item (f). Assim provemos (c). Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||T_n(x) - T_m(x)|| < \epsilon$ sempre que $m, n > n_0$, logo

$$||T_n(x) - T_m(x)|| = ||(T_n - T_m)(x)|| = ||T_n - T_m|| \cdot ||x|| \leq \epsilon ||x|| \tag{3.6}$$

para todo $x \in E$. Assim, para cada $x \in E$, a sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F, portanto, é convergente em F, pois F é um espaço de Banach. Defina

$$T : E \to F, T(x) = \lim_n T_n(x)$$

. Note que, dado $x, y \in E$, temos $T(x+y) = \lim_n T_n(x+y) = \lim_n (T_n(x) + (y)) = \lim_n T_n(x) + \lim_n T_n(y) = T(x) + T(y)$, isto é, T é linear. Fazendo $m \to +\infty$ em (3.6), obtemos

$$||T_n(x) - T(x)|| = ||(T_n - T)(x)|| = ||T_n - T|| \cdot ||x|| \leq \epsilon ||x|| \tag{3.7}$$

Para todo $n > n_0$ e $x \in E$. Em especial,

$$||T_{n_0}(x) - T(x)|| = ||(T_{n_0} - T)(x)|| = ||T_{n_0} - T|| \cdot ||x|| \leq \epsilon ||x||$$

Para qualquer $x \in E$. Pelo Teorema 3.7.1, segue que $T_{n_0} - T$ é contínua, ou seja, $T_{n_0} - T \in \mathcal{L}(E, F)$, logo $T = T_{n_0} - (T_{n_0} - T) \in \mathcal{L}(E, F)$. De (3.7), observamos que $|||(T_n - T)\left(\frac{x}{||x||}\right)|| \leq \epsilon$ para todo $x \in E$ e $n > n_0$, assim, $||T_n - T|| = \sup ||(T_n - T)\left(\frac{x}{||x||}\right)|| < \epsilon$ para todo $n_0 > n$, e, consequentemente, $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$.

□

Teorema 3.7.2. *Seja $T : X \to Y$ um isomorfismo entre espaços normados. Se X é um espaço de Banach, então Y é um espaço de Banach.*

Demonstração. Considere o isomorfismo $T : X \to Y$, onde X é um espaço de Banach. Tome a sequência de Cauchy $(y)_{n=1}^{\infty}$ em Y, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 natural, que satisfaz $||y_n - y_m|| < \frac{\epsilon}{L}$ sempre que $n, m > n_0$ e $L > 0$. Pela continuidade de T, existe x_n tal que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como T^{-1} é continua, existe $L > 0$, no qual

$$||x_n - x_m|| = ||T^{-1}(y_n) - T^{-1}(y_m)|| = ||T^{-1}(y_n - y_m)|| \leq L||y_n - y_m|| < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon$$

Segue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço de Banach X, portanto convergente em X. Considere que $x_n \longrightarrow x$. Em particular, pela continuidade da T, temos que $y = T(x_n) \longrightarrow T(x)$, com $T(x) \in Y$, provando que Y é um espaço de Banach.

□

3.7.2 Exemplos

Exemplo 3.7.1. *Sabemos que $\mathbb{C}$ é isomorfo ao $\mathbb{R}^2$, segue pelo exemplo 3.1.1 e pelo Teorema* (3.7.2) *que $\mathbb{C}$ é um espaço de Banach. Resulta que o corpo dos escalares $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dos espaços vetoriais em consideração são espaços de Banach. Além disso $\mathbb{C}^n$ é um Espaço de Banach, analogamente.*

Exemplo 3.7.2. *Seja $1 \leq p < +\infty$. Considere uma sequência $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e seja o operador*

$$T : \ell_\infty \to \ell_p, T((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_j b_j)_{j=1}^\infty.$$

Chamaremos T *de operador diagonal pela sequência* $(b_j)_{j=1}^\infty$. *Perceba que* $T((a_j)_{j=1}^\infty + (c_j)_{j=1}^\infty) = ((a_j + (c_j)_{j=1}^\infty))b_j)_{j=1}^\infty = (a_jb_j + c_jb_j)_{j=1}^\infty = (a_jb_j)_{j=1}^\infty + (c_jb_j)_{j=1}^\infty = T((a_j)_{j=1}^\infty) + T((c_j)_{j=1}^\infty)$ *e, sem dúvidas,* $T(c(a_j)_{j=1}^\infty) = cT((a_j)_{j=1}^\infty)$ *para quaisquer* $(a_j)_{j=1}^\infty, (c_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$ *e* $c \in \mathbb{K}$. *Sabemos que*

$$||T((a_j)_{j=1}^\infty)|| = ||(a_j)_{j=1}^\infty (b_j)_{j=1}^\infty||_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |a_jb_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_j |a_j| = ||(b_j)_{j=1}^\infty||_p \cdot ||(a_j)_{j=1}^\infty||_\infty$$

para qualquer sequência $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$, *o que nos leva a conlcuir que* T *é contínua, além disso* $||T|| = ||T\left(\frac{(a_j)_{j=1}^\infty}{||(a_j)_{j=1}^\infty||_\infty}\right)|| \leq ||(b_j)_{j=1}^\infty||_p$. *Se considerarmos a sequência* $(1)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$, *então* $||(1)_{j=1}^\infty||_\infty = 1$ *e* $||T((1)_j^\infty)|| = ||(b_j)_{j=1}^\infty||_p$, *logo* $||(b_j)_{j=1}^\infty|| = ||T((1)_j^\infty)|| \leq ||T|| \leq ||(1)_{j=1}^\infty||_\infty \cdot ||(b_j)_{j=1}^\infty||_p$, *ou seja,* $||T|| = ||(b_j)_{j=1}^\infty||_p$.

Exemplo 3.7.3. *Análogo ao exemplo 3.7.2, considerando os espaços de funções* C, *seja* $1 \leq p < +\infty$ *e tome* $g \in L_p[0,1]$. *Defina*

$$T : C[0,1] :\to L_p[0,1], T(f) = fg.$$

De forma similar ao exemplo 3.7.2 mostramos que T *é um operador linear que será denotada por operador multiplicação pela função* g. *Observe que*

$$||T(f)|| = ||fg||_p = \left(\int |fg|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_j |f| \cdot \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = ||f||_\infty \cdot ||g||_p.$$

Dessa forma, assim como no exemplo 3.7.2, provamos que T *é contínuo e* $||T|| = ||g||_p$.

Agora, veremos que nem sempre operadores lineares em espaços de dimensão infinita são contínuos, isto é outro resultado que evidencia a diferença entre a Álgebra Linear e a Análise Funcional.

Proposição 3.7.2. *Todo operador linear cujo o domínio é um espaço normado de dimensão finita é contínuo*

Exemplo 3.7.4. *Seja* $\mathcal{P}[0,1]$ *o conjunto das funções polinomiais* $p : [0,1] \to \mathbb{R}$. *Da álgebra linear, sabemos que* $\mathcal{P}[0,1]$ *é um subespaço vetorial de* $C[0,1]$, *assim, a norma* $|| \cdot ||_\infty$ *é herdada por* $\mathcal{P}[0,1]$ *de* $C[0,1]$. *Agora, notando que o operador derivação*

$$T : \mathcal{P}[0,1] \to \mathcal{P}[0,1], T(p) = p' = \textit{derivada de } p$$

é linear, vamos supor que T *é contínuo. Nesse caso, existe* C, *no qual* $||T(p)||_\infty \leq C||p||_\infty$ *para qualquer polinômio* $p \in \mathcal{P}[0,1]$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *tome o polinômio* $p_n \in \mathcal{P}[0,1]$ *tal que* $p(n) = t^n$, *portanto,* $p'(n) = nt^{n-1}$. *Consequentemente*

$$n = n \sup_{t\in[0,1]} |t^{n-1}| = ||p_n'||_\infty = ||T(p_n)|| \leq C||p_n|| = C \sup_{t\in[0,1]} |t^{n-1}| = C,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, *o que contrária o fato de* $\mathbb{N}$ *não ser limitado, portanto, uma contradição. Como consequência,* T *não é contínuo.*

Capítulo 4

Teoremas de Hahn-Banach

Essencialmente, o Tereoma de Hahn-Banach permitirá que funcionais lineares contínuos definidos em um subespaço G de um espaço normado E possam ser estendidos para todo o espaço E conservando a linearidade, continuidade e o valor da norma. A extensão garantida por este poderosíssimo Teorema, será obtida utilizando o Lema de Zorn.

4.1 Lema de Zorn

Para entender a demonstração do Teorema de Hahn-Banach, precisamos primeiramente revisar o enunciado do Lema de Zorn.

Definição 4.1.1. *Dizemos que um conjunto X é parcialmente ordenado se existe uma relação binária $\prec$ em X, satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$x \prec x$, para todo $x \in X$ (Propriedade Reflexiva);*

2. *Se $x \prec y$ e $y \prec x$, então $x = y$, para todo $x, y \in X$ (Propriedade Antissimétrica);*

3. *Se $x \prec y$ e $y \prec z$, então $x \prec z$, para todo $x, z, y \in X$ (Propriedade Transitiva).*

Exemplo 4.1.1. *Um exemplo trivial da teoria dos números é: $\mathbb{Z}$ é um conjunto parcialmente ordenado com a relação $\leq$ a qual, dado $a, b \in \mathbb{Z}$, definimos que $a \leq b$ se existe $r \in \mathbb{Z}_+$, onde $a + r = b$. De fato, dado $n, m, p \in \mathbb{Z}$, claramente $n \leq n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, agora note que se $n \leq m$, então existe $k_1 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n + k_1 = m$, e se $m \leq n$, então existe $k_2 \in \mathbb{Z}_+$, no qual $m + k_2 = (n + k_1) + k_2 = n$, logo $k_1 + k_2 = 0$, como são positivos, então $k_1 = k_2 = 0$, ou seja, $k_1 = k_2$. Também podemos observar que se $n < m$ e $m < p$, então existem constantes $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, sob a condição que $n+q_1 = m$ e $m+q_2 = p$, segue que, $(n+q_1)+q_2 = n+(q_1+q_2) = p$, com $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}_+$, portanto $n \leq p$.*

Exemplo 4.1.2. *O termo parcial na relação de ordem indica que nem todos os elementos podem ser comparados no conjunto, essencialmente. Como exemplo, considere o $\mathbb{Z}^2$ com a relação de ordem $(a, b) \prec (c, d)$, se $a \leq b$ e $c \leq d$. Claramente, $\prec$ é uma relação de ordem no conjunto $\mathbb{Z}^2$, mas note que não podemos comparar os elementos $(1, 2)$ e $(2, 1)$, tornando a relação de ordem parcial.*

Definição 4.1.2. *O conjunto X é totalmente ordenado pela relação binária $\prec$, se $\prec$ atende as condições $1, 2$ e 3 da Definição 4.1.1 e dado $x, y \in X$, temos que $x \prec y$, ou $y \prec y$, ou $x = y$, isto é, podemos comparar quaisquer elementos de X pela relação $\prec$.*

Exemplo 4.1.3. *$\mathbb{Z}$ com a relação definina no exemplo 4.1.1 é totalmente ordenado. Com efeito, sem perda de generalidade, se $x \neq y$ e $x - y \in \mathbb{Z}_+$, então, tomando $r = x - y$, temos que $x = y + r$, ou seja, $y \leq x$.*

O Lema de Zorn é equivalente ao Axioma da Escolha. A demonstração dessa equivalência pode ser encontrada em qualquer bom livro de Teoria dos Conjuntos, por exemplo em [18, Capítulo 7].

Definição 4.1.3. *Seja $Y \subseteq X$ um subconjunto de X. Nós dizemos que $x_0 \in X$ é uma cota superior para Y se $x \prec x_0$ para cada $x \in Y$.*

Definição 4.1.4. *Considere X um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\prec$, chamamos $x_0 \in X$ de elemento maximal de X, se para todo $y \in X$, com $x_0 \prec y$, então $y = x_0$.*

Exemplo 4.1.4. *As definições de cota superior e de elemento maximal podem causar confusão no sentido de parecerem ser o mesmo conceito. Mas de fato, um elemento maximal não precisa ser uma cota superior. Considere como exemplo um conjunto X com pelo menos dois elementos. Defina uma ordem parcial $\prec$ em X por,*

$$a \prec b \Leftrightarrow a = b, \text{ para todo } a, b \in X.$$

Seja $Y \subseteq X$ um subconjunto contendo pelo menos dois elementos. Claramente, cada elemento de Y é um elemento maximal de Y, mas Y não possui nenhuma cota superior. Portanto, um elemento maximal não precisa ser uma cota superior.

Lema 4.1.1 (Lema de Zorn)**.** *Considere um conjunto parcialmente ordenado e não vazio $\mathcal{P}$. Se todo subconjunto $\mathcal{Q}$ totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ possui cota superior, então $\mathcal{P}$ admite um elemento maximal.*

4.2 Teorema de Hahn-Banach Analítico

A essência do Teorema de Hahn–Banach, em sua versão para espaços normados, é que funcionais lineares contínuos definidos em um subespaço G de um espaço normado E podem ser estendidos a todo o espaço E preservando linearidade, continuidade e até mesmo o valor da norma. A peça fundamental da demonstração do Teorema de Hahn–Banach é um argumento algébrico que mostra que tal extensão é possível de G para $G \oplus [v]$ com $v \in G$. Em seguida o Lema de Zorn é aplicado como instrumento técnico de indução, que pode ser substituído por um argumento canônico de indução finita no caso em que E é separável.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Hahn banach - Caso Real)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ uma função sublinear, isto é,*

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \text{ para todo } \alpha > 0 \text{ e todo } x \in E \text{ (Positividade homogênea), e}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E \text{ (Subadtividade).}$$

Considerem também G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então, existe um funcional $\tilde{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ que estende φ, ou seja, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e que satisfaz $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Inicialmente, vamos considerar uma família $\mathcal{P}$ de funcionais lineares em subespaços de E que contenham G e que estendem φ:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \{\phi : D(\phi) \subseteq E \to \mathbb{R} : D(\phi) \text{ é um subespaço de } E, \phi \text{ é linear}, G \subseteq \\ D(\phi), \phi \text{ estende } \varphi \text{ e } \phi \leq p(x) \text{ para todo } x \in D(\phi)\}. \end{aligned}$$

Perceba que $\mathcal{P}$ é não vazio, pois $\varphi \in \mathcal{P}$. Agora, definiremos a seguinte relação em $\mathcal{P}$:

$$\begin{gathered} \phi_1 \leq \phi_2 \Leftrightarrow D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2) \text{ e } \phi_2 \text{ estende } \phi_1, \text{ ou seja,} \\ \phi_2(x) = \phi_1(x) \text{ para todo } x \in D(\phi_1). \end{gathered}$$

Agora vamos verificar que a relação $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}$. Tome $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in E$, e observe que

1. (Reflexiva) Como $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_1)$ e ϕ_1 estende ϕ_1 por serem funções iguais, então $\phi_1 \leq \phi_1$.

2. (Antissimétrica) (i) Suponha que $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2)$ e $D(\phi_2) \subseteq D(\phi_1)$. (ii) Também considere que ϕ_2 estende ϕ_1 e ϕ_1 estende ϕ_2. Por (i) $D(\phi_1) = D(\phi_2)$, e por (ii) $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ para todo $x \in D(\phi_1) = D(\phi_2)$, portanto $\phi_1 = \phi_2$. Assim, temos que $\phi_1 \leq \phi_2$ e $\phi_2 \leq \phi_1 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$.

3. (Transitiva) Assuma que $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2)$ e ϕ_2 estende ϕ_1. Agora, suponha que $D(\phi_2) \subseteq D(\phi_3)$ e ϕ_3 estende ϕ_2. Perceba que $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2) \subseteq D(\phi_3)$, portanto, $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_3)$. Além disso, $\phi_3(x) = \phi_2(x)$ para todo $x \in D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2)$ e $\phi_2(x) = \phi_1(x)$ para qualquer $x \in D(\phi_1)$, logo, se $x \in D(\phi_1)$, então $\phi_3(x) = \phi_1(x)$, isto é, ϕ_3 estende ϕ_1, segue que $\phi_1 \leq \phi_3$. Como consequência $\phi_1 \leq \phi_2$ e $\phi_2 \leq \phi_3 \Rightarrow \phi_1 \leq \phi_3$.

Em particular, podemos notar que $\leq$ não, necessariamente, é uma relação de ordem total em $\mathcal{P}$, pois podem existir ϕ_1 e ϕ_2 tal que $\phi_1(x) \neq \phi_2(x)$ para qualquer $x \in D(\phi_1) - G$. Assim, tomemos o conjunto $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ totalmente ordenado e vamos mostrar que $\mathcal{Q}$ possui cota superior. Com efeito, considere $\overline{\phi} :\to \mathbb{R}$ tal que

$$D(\overline{\phi}) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta) \text{ e } \phi(x) = \theta(x) \text{ para todo } x \in D(\theta).$$

Observe que $\overline{\phi}$ está bem definida devido a ordenação total em $\mathcal{Q}$, isto é, se $x \in D(\theta_1) \cap D(\theta_2)$, então $\theta_1 \leq \theta_2$ ou $\theta_2 \leq \theta_1$. Em qualquer uma das possibilidades $\theta_1(x) = \theta_2(x)$. Notemos que $\bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta)$ é um subespaço vetorial de E, pois dado $x, y \in \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta)$, então existe θ_1 e θ_2 tal que $x \in D(\theta_1)$ e $y \in D(\theta_2)$, sem perda de generalidade, $D(\theta_1) \subseteq D(\theta_2)$ pela ordem total em $\mathcal{Q}$, portanto, $D(\theta_1) \cup D(\theta_2)$ é um espaço vetorial, logo $x + y \in D(\theta_1) \cup D(\theta_2) \subseteq \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta)$, segue que $x + y \in \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta)$. Analogamente, é possível mostrar que dado $x \in \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $(\lambda \cdot x) \in \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta)$, concluindo que $\bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta)$ é um subespaço vetorial de E. Por construção, a $\overline{\phi}$ é linear, estende a φ, $G \subseteq D(\overline{\phi})$ e $\overline{\phi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(\overline{\phi})$, portanto $\overline{\phi} \in E$. Além do mais, claramente dado $\theta \in \mathcal{Q}$, então $\theta \leq \overline{\phi}$. Consequentemente, todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ possui uma cota superior, logo, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{P}$ tem um elemento maximal. Em especial, considere $\tilde{\varphi} : D(\tilde{\varphi}) \to \mathbb{R}$ o elemento maximal de $\mathcal{P}$. Afirmamos que $D(\tilde{\varphi}) = E$. Efetivamente, suponhamos por contradição que $D(\tilde{\varphi})$ é um subespaço próprio de E, portanto existe $x_0 \in E - D(\tilde{\varphi})$. Defina $\tilde{\phi} : D(\tilde{\phi}) \to \mathbb{R}$ tal que

$$D(\tilde{\phi}) = D(\tilde{\varphi}) \oplus [x_0] \text{ e } \tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\phi}(x) + t\alpha,$$

onde α é uma constante que será escolhida posteriormente de modo a garantir que $\tilde{\phi} \in \mathcal{P}$. Perceba que, dado $x_1 + t_1x_0, x_2 + t_2x_0 \in D(\tilde{\phi})$, temos $x_1 + t_1x_0 + x_2 + t_2x_0 = (x_1 + x_2) + (t_1 + t_2)x_0$, particularmente, $x_1 + x_2 \in D(\tilde{\varphi})$ e $t_1 + t_2 \in \mathbb{R}$, portanto, $(x_1 + x_2) + (t_1 + t_2)x_0 \in D(\tilde{\phi})$, de forma similar é possível mostrar que dado $x + tx_0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, assim, $\lambda \cdot (x + tx_0) \in D(\tilde{\phi})$, mostrando que $D(\tilde{\phi})$ é um subespaço vetorial de E. Também perceba que dado $x_1 + t_1x_0, x_2 + t_2x_0 \in D(\tilde{\phi})$, então

$$\tilde{\phi}(x_1 + t_1x_0 + x_2 + t_2x_0) = \tilde{\phi}((x_1 + x_2) + (t_1x_0 + t_2x_0)) = \tilde{\varphi}(x_1 + x_2) + \alpha(t_1 + t_2) =$$
$$\tilde{\varphi}(x_1) + \tilde{\varphi}(x_2) + \alpha t_1 + \alpha t_2 = \tilde{\varphi}(x_1) + \alpha t_1 + \tilde{\varphi}(x_2) + \alpha t_2 = \tilde{\phi}(x_1 + t_1x_0) + \tilde{\phi}(x_2 + t_2x_0),$$

logo $\tilde{\phi}$ é linear. Note que $G \subseteq D(\tilde{\varphi}) \subseteq D(\tilde{\varphi}) + [x_0]$ e $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\varphi}(x)$ para todo $x \in G \subseteq D(\tilde{\varphi})$, como $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ para qualquer $x \in G$, segue que, dado $x \in G$, temos $\tilde{\phi}(x) = (x)$, logo $\tilde{\phi}$ estende φ. Vamos agora encontrar α que satisfaça a condição $\tilde{\phi} \leq p(x)$ para todo $x \in D(\tilde{\phi})$. Nesse caso, precisamos escolher α de modo que as equações 3.3 e 3.4 sejam cumpridas:

$$\tilde{\varphi}(x) + \alpha = \tilde{\phi}(x + x_0) \leq p(x + x_0), \text{ e} \tag{4.1}$$

$$\tilde{\varphi}(x) - \alpha = \tilde{\phi}(x - x_0) \leq p(x - x_0). \tag{4.2}$$

Isto é,

$$\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0) \leq \alpha \leq p(x - x_0) - \tilde{\varphi}(x)$$

ainda, podemos dizer que

$$\sup_x \{\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_x \{p(x + x_0) - \tilde{\varphi}(x)\}$$

Finalmente, esta escolha é possível. Dado $x, y \in D(\tilde{\varphi})$, temos

$$\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(x + y) \leq p(x + y) = p(x - x_0 + y + x_0) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0)$$

Portanto,

$$\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0) \leq \tilde{\varphi}(y) + p(y + x_0)$$

Assim,

$$\sup_x\{\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0)\} \leq \inf_y\{p(y + x_0) - \tilde{\varphi}(y)\}$$

Em especial, $\mathbb{R}$ é um corpo completo, portanto existe α real que satisfaz

$$\sup_x\{\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_y\{p(y + x_0) - \tilde{\varphi}(y)\}$$

Assim, as equações (1) e (2) estão satisfeitas. Feito isso, podemos concluir que para qualquer $x \in D(\tilde{\varphi})$ e

- $t > 0$

$$\tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\phi}(t(\tfrac{x}{t} + x_0)) = t\tilde{\phi}(\tfrac{x}{t} + x_0) = t(\tilde{\varphi}(\tfrac{x}{t}) + \alpha) \leq tp(\tfrac{x}{t} + x_0) = p(x + tx_0)$$

- $t < 0$

$$\tilde{\phi}(x+tx_0) = \tilde{\phi}(-t(\tfrac{-x}{t} - x_0)) = -t\tilde{\phi}(\tfrac{-x}{t} - x_0) = -t(\tilde{\varphi}(\tfrac{-x}{t}) - \alpha) \leq -tp(\tfrac{-x}{t} - x_0) = p(x+tx_0)$$

- $t = 0$

$$\tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\phi}(x) = \tilde{\varphi}(x) \leq p(x) = p(x + tx_0)$$

Segue que $\tilde{\phi}(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$, para todo $x + tx_0 \in D(\tilde{\phi})$, logo $\tilde{\phi} \in \mathcal{P}$. Como consequência $\tilde{\varphi} \leq \tilde{\phi}$ e $\tilde{\varphi} \neq \tilde{\phi}$ o que é um absurdo, pois contradiz o fato de $\tilde{\varphi}$ ser o elemento maximal de $\mathcal{P}$. Portanto $D(\tilde{\varphi}) = E$, completando essa belíssima argumentação.

□

A seguir demonstraremos a versão do Teorema de Hahn–Banach que também é válida para espaços vetoriais complexos:

Teorema 4.2.2 (Teorema de Hahn-Banach - Caso Complexo). *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ uma função sublinear, isto é,*

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{K} \text{ e todo } x \in E, \text{ e} \tag{4.3}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E. \tag{4.4}$$

Considerem também G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \to \mathbb{K}$ tal que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então, existe um funcional $\tilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ que estende φ, ou seja, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e que satisfaz $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Antes de tudo, perceba que $p(0) = p(0 + 0) \leq p(0) + p(0)$, logo $0 \leq p(0)$. Além disso, pela equação (3), segue que $p(-x) = |-1|p(x) = p(x)$, donde, utilizando (4)

$$2p(x) = p(x) + p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(x + (-x)) = p(x - x) = p(0) \geq 0$$

assim $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Provamos, a priori, estes fatos, pois serão utilizados durante a argumentação.

Trataremos primeiro do caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Por hipótese $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$, assim, pelo Teorema 4.2.1, segue que existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ que estende φ e $\tilde{\varphi} \leq p(x)$ para todo $x \in E$, em particular

$$-\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(-x) \leq p(-x) = p(x)$$

Portanto $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Agora, consideramos o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Assim, E é um espaço vetorial complexo e $\varphi : G \to \mathbb{C}$. Defina $\varphi_1, \varphi_2 : E \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi_1(x) = Re(\varphi(x))$ e $\varphi_2(x) = Im(\varphi(x))$ para todo $x \in G$. Isto é $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$, logo, φ e φ_2 claramente são lineares. Como artíficio, tome $G_{\mathbb{R}}$ e $E_{\mathbb{R}}$ como os espaços vetoriais subjacentes a G e E, respectivamente, ou seja o espaço é o mesmo, com a mesma operação de adição e a mesma operação por escalar, mas com escalares estritamente reais. Dessa forma, φ_1 e φ_2 são funcionais lineares sobre $G_{\mathbb{R}}$ e dado $x \in G$,

$$\varphi_1(x) \leq |\varphi_1(x)| \leq |\varphi(x)| \leq p(x)$$

Consequentemente, existe um funcional linear $\tilde{\varphi_1} : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ que estende φ e $\tilde{\varphi_1} \leq p(x)$ para todo $x \in E$, pelo Teorema 4.2.1. Estudaremos agora φ_2. Perceba que dado $x \in G$,

$$\begin{cases} \varphi(ix) = \varphi_1(ix) + i\varphi_2(ix) \\ i\varphi(x) = i\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \end{cases}$$

Por φ ser linear, então $\varphi(ix) = i\varphi(x)$, portanto $\varphi_1(ix) = -\varphi_2(x)$ para qualquer $x \in G$. Agora, definindo

$$\tilde{\varphi(x)} : E \to \mathbb{C},\ \tilde{\varphi(x)} = \tilde{\varphi_1}(x) - i\tilde{\varphi_1}(ix)$$

podemos notar que se $x \in G$, então $\tilde{\varphi(x)} = \tilde{\varphi_1}(x) - i\tilde{\varphi_1}(ix) = \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) = \varphi(x)$. Agora, verifiquemos se $\tilde{\varphi}$ é um funcional linear no espaço linear complexo. Claramente $\tilde{\varphi}$ é linear, uma vez que $\tilde{\varphi_1}$ e $\tilde{\varphi_2}$ são lineares. Para mostrar a homogeneidade de $\tilde{\varphi}$, tomemos $x \in E$ e $(a + bi) \in \mathbb{C}$, com isso

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi}((a+bi)x) = \tilde{\varphi_1}((a+bi)x) - i\tilde{\varphi_1}(i(a+bi)x) = \tilde{\varphi_1}(ax+bix) - i\tilde{\varphi_1}(aix - bx) = \\ a\tilde{\varphi_1}(x) + b\tilde{\varphi_1}(ix) - i(a\tilde{\varphi_1}(ix) - b\tilde{\varphi}(x)) = a\tilde{\varphi}(x) + b\tilde{\varphi_1}(ix) - ai\tilde{\varphi_1}(ix) + bi\tilde{\varphi_1}(x) = \\ a\tilde{\varphi_1}(x) + bi\tilde{\varphi_1}(x) - ai\tilde{\varphi_1}(xi) + b\tilde{\varphi_1}(ix) = (a+bi)\tilde{\varphi_1}(x) - i(a\tilde{\varphi_1}(ix) + \tfrac{b}{-i}\tilde{\varphi_1}(ix)) = \\ (a+bi)\tilde{\varphi_1}(x) - i(a\tilde{\varphi_1}(ix) + bi\tilde{\varphi_1}(ix)) = (a+bi)\tilde{\varphi_1}(x) - i(a\tilde{\varphi_1}(ix) + bi\tilde{\varphi_1}(ix)) = \\ (a+bi)\tilde{\varphi_1}(x) - i(a+bi)\tilde{\varphi_1}(x) = (a+bi)(\tilde{\varphi_1}(x) - i(\tilde{\varphi_1}(x)) = (a+bi)\tilde{\varphi}(x). \end{gathered}$$

Agora, mostraremos, finalmente que $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para qualquer $x \in E$. Se $\tilde{\varphi}(x) = 0$, então, claramente $|\tilde{\varphi}(x)| = 0 \leq p(x)$ como vimos anteriormente. Em especial, caso $\tilde{\varphi}(x)$ seja não nula, então existe θ real, tal que $\tilde{\varphi}(x) = |\tilde{\varphi}(x)|e^{i\theta}$, assim, $|\tilde{\varphi}(x)| = \tilde{\varphi}(x)e^{-i\theta} = \tilde{\varphi}(xe^{-i\theta})$. Como $|\tilde{\varphi}(x)|$ é real, segue por (3) que

$$\begin{gathered} |\tilde{\varphi}(x)| = \tilde{\varphi}(xe^{-i\theta}) = \tilde{\varphi_1}(xe^{-i\theta}) \leq p(xe^{-i\theta}) = |e^{-i\theta}|p(x) = |\cos(\theta) - i\sin(\theta)|p(x) = \\ \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \cdot p(x) = p(x). \end{gathered}$$

encerrando essa belíssima argumentação.

□

Para ser coerente com a terminologia consagrada pela literatura, chamaremos a seguinte consequência imediata do Teorema de Hahn–Banach em espaços vetoriais normados, também de Teorema de Hahn–Banach.

Corolário 4.2.1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K}$ e seja $\varphi : G \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $||\tilde{\varphi}|| = ||\varphi||$.*

Demonstração. Considere o funcional linear $\varphi : G \to \mathbb{K}$ e a função $p : E \to \mathbb{K}$, onde $p(x) = ||\varphi|| \cdot ||x||$. Note que, dado $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x, y \in E$, temos que $p(\alpha x) = ||\varphi|| \cdot ||\alpha x|| = ||\varphi|| \cdot |\alpha| \cdot ||x|| = |\alpha| \cdot (||\varphi|| \cdot ||x||) = |\alpha| p(x)$, além disso, $p(x + y) = ||\varphi|| \cdot ||x + y|| \leq ||\varphi|| \cdot (||x|| + ||y||) = ||\varphi|| \cdot ||x|| + ||\varphi|| \cdot ||y|| = p(x) + p(y)$. Notemos que p cumpre as condições (3) e (4), assim, pelo belíssimo Teorema de Hahn-Banach caso complexo (Teorema 4.2.2), existe $\tilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ que estende φ e que $|\tilde{\varphi}(x)| \leq ||\varphi|| \cdot ||x||$ para todo $x \in E$, logo $\tilde{\varphi}$ é contínuo. Além disso, $||\tilde{\varphi}|| = \sup |\tilde{\varphi}\left(\dfrac{x}{||x||}\right)| \leq ||\varphi||$. Em particular, $||\varphi|| = \sup\limits_{||x|| \leq 1} |\varphi(x)| = \sup\limits_{||x|| \leq 1} |\tilde{\varphi}(x)| \leq \sup\limits_{||x|| \leq 1} |\tilde{\varphi}(x)| = ||\tilde{\varphi}||$, pois $G \subseteq E$. Portanto, $||\tilde{\varphi}|| = ||\varphi||$ para todo $x \in E$.

□

Exemplo 4.2.1. *A extensão que preserva a norma é única se E é estritamente convexo. Quando nos referimos a E ser estritamente convexo, queremos ressaltar que dado $x_1, x_2 \in E$, segue que $||\frac{x_1+x_2}{2}|| < ||x_1||$ se $||x_1|| = ||x_2||$. Sejam G um subespaço de um espaço normado E e $\varphi : G \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Considere pelo Teorema de Hahn-Banach $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : E \to \mathbb{R}$ distintas que estendem φ e $||\tilde{\varphi}_1|| = ||\varphi|| = ||\tilde{\varphi}_2||$. Defina $\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2}{2}$. Repare que $\tilde{\varphi}$ estende φ, pois dado $x \in G$, temos $\tilde{\varphi}(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)_1+\tilde{\varphi}_2(x)}{2} = \frac{\varphi(x)+\varphi(x)}{2} = \varphi(x)$. Agora, repare que pela convexidade estrita de E, se $||\tilde{\varphi}_1|| = ||\tilde{\varphi}_2||$, segue que, $||\tilde{\varphi}|| = ||\frac{\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2}{2}|| < ||\tilde{\varphi}_1||$. No entanto, repare que se $x \in G$ e $||x|| < 1$, então $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \leq \sup\{|\tilde{\varphi}(x)| : ||x|| \leq 1\} = ||\tilde{\varphi}||$, portanto, $||\varphi|| = \sup\{|\varphi(x)| : ||x|| < 1\} \leq ||\tilde{\varphi}||$. Além disso, $||\tilde{\varphi}|| = \left|\left|\frac{\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2}{2}\right|\right| \leq \frac{||\tilde{\varphi}_1||+||\varphi_2||}{2} = ||\varphi||$, e, como consequência, $\frac{||\tilde{\varphi}_1||+||\tilde{\varphi}_2||}{2} = ||\tilde{\varphi}|| = ||\varphi||$ o que é contradiz a estrita convexidade de E, portanto $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$.*

Corolário 4.2.2. *Seja E um espaço normado. Para todo x_0 não nulo em E, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $||\varphi|| = 1$ e $\varphi(x_0) = ||x_0||$.*

Demonstração. Sejam x_0 não nulo em E e $G = [x_0] = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Notemos que $||\varphi|| = \sup\limits_{\lambda \neq 0} \dfrac{|\varphi(\lambda x_0)|}{||\lambda x_0||}$ é uma norma no espaço vetorial $S = \{\varphi : [x_o] \to \mathbb{K} : \ x_0$ é um elemento não nulo em $E\}$. Com efeito, se φ não é ideticamente nula, então $||\varphi(\lambda x_0)|| \neq 0$ para $\lambda \neq 0$, segue que $||\varphi|| \neq 0$. Perceba também que dado $\alpha \in \mathbb{K}$, $||\alpha\varphi|| = \sup\limits_{\lambda \neq 0} = \dfrac{||\alpha f(\lambda x_0)||}{||\lambda x_0||} = \sup\limits_{\lambda \neq 0} = \dfrac{|\alpha| \cdot ||f(\lambda x_0)||}{||\lambda x_0||} = |\alpha| \cdot \sup\limits_{\lambda \neq 0} = \dfrac{||f(\lambda x_0)||}{||\lambda x_0||} = |\alpha| \cdot ||\varphi||$. Além disso, dado φ_1 e $\varphi_2 \in S$, segue que, $||\varphi_1 + \varphi_2|| =$

$\sup_{\lambda\neq 0}\dfrac{||\varphi_1(\lambda x_0)+\varphi_2(\lambda x_0)||}{||\lambda x_0||} \leq \sup_{\lambda\neq 0}\dfrac{||\varphi_1(\lambda x_0)||+||\varphi_2(\lambda x_0)||}{||\lambda x_0||} = ||\varphi_1||+||\varphi_2||$. Assim, Considere $\varphi \in S$ onde $\varphi(\lambda x_o) = \lambda||x_0||$, com $||\varphi|| = \sup_{\lambda\neq 0}\dfrac{||\varphi(\lambda x_0)||}{||\lambda x_0||} = \sup_{\lambda\neq 0}\dfrac{||\lambda x_0||}{||\lambda x_0||} = \sup_{\lambda\neq 0} 1 = 1$. Pelo Teorema 4.2.1, existe uma extensão $\tilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ tal que $||\tilde{\varphi}|| = ||\varphi|| = 1$ para todo $x \in E$ e que estende φ, portanto $\tilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = \varphi(1 \cdot x_0) = 1 \cdot ||x_0|| = ||x_0||$.

□

Corolário 4.2.3. *Sejam E um espaço normado não nulo e $x \in E$. Nós temos que*

$$||x|| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \ e\ ||\varphi|| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \ e\ ||\varphi|| \leq 1\}.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.7.1 (b), $|\varphi(x)| \leq ||\varphi|| \cdot ||x||$. Portanto, segue que

$$\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } ||\varphi|| \leq 1\} \leq ||x||.$$

É suficiente verificar que existe $\varphi \in E'$ tal que o supremo acima é atingido. Com efeito, pelo Corolário 4.2.2, para tal x, existe $\varphi \in E'$ tal que $||\varphi|| = 1$ e $\varphi(x) = ||x||$. Isto completa a prova.

□

4.3 Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção demonstraremos dois Teoremas encantadores e importantíssimos, conhecidos como primeira e segunda formas geométricas do Teorema de Hahn–Banach. Esses resultados dizem, essencialmente, que se A e B são subconjuntos do espaço normado real E que não são muito entrelaçados, então existe um funcional linear contínuo definido em E tal que separa A e B.

Definição 4.3.1. *Seja E um espaço vetorial não-nulo. Dizemos que H é um hiperplano de E se H é um subespaço próprio de H, ou seja, $H \neq E$ e dado $W \subseteq E$ tal que se $H \subseteq W$, então ou $W = E$ ou $W = H$.*

Proposição 4.3.1. *Seja E um espaço vetorial não nulo. O subespaço próprio H de E é um hiperplano se, e somente se, existe um funcional linear não-nulo $\varphi : E \to \mathbb{R}$ tal que $\ker(\varphi) = H$.*

Demonstração. Suponha que H é um hiperplano de E. Como H é um subespaço próprio de E, então podemos tomar $v_0 \in E/H$. Em especial, considere $W = H \cup [v_0]$ e note que $H \subseteq W$, mas $W \neq H$, consequentemente, $W = E$, onde $v \in E$ é escrito como $u + \alpha v_0$, com $u \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Defina

$$\varphi : E \to \mathbb{R} \text{ tal que } \varphi(u + \alpha v_0) = \alpha$$

Em particular, claramente, φ é não nulo e linear. Notemos também que $\ker(\varphi) = \{u + \alpha v_0 \in E : \varphi(u + \alpha v_0) = 0 = \alpha\} = \{u \in E\} = W$.

Reciprocamente, consideremos $\varphi : E \to \mathbb{R}$ um funcional não-nulo, cujo o $\ker(\varphi) = H$. Como φ é não nulo, segue que $\ker(\varphi) \neq E$. considere o subespaço W de E, onde $\ker(\varphi) \subseteq W$.

Agora, basta mostrar que $W = H$ para mostrarmos que $\ker(\varphi)$ é um hiperplano de E. Com efeito, considere $\ker \neq W$ e seja $v_0 \in W/\ker(\varphi)$. Dado $v \in V$, seja $u = v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} \cdot v_0$. Note que

$$\varphi(u) = \varphi\left(v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} \cdot v_0\right) = \varphi(v) - \varphi\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} \cdot v_0\right) = \varphi(v) - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} \cdot \varphi(v_0) = 0$$

portanto $u \in \ker(\varphi) \subseteq W$, segue que $v = u + \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} \in W$, logo $W = E$, completando a demonstração.

□

Definição 4.3.2. *Sejam H um hiperplano do espaço vetorial E e $v_0 \in E$. O conjunto*

$$v_0 + H = \{v_0 + u : u \in H\}$$

é denotado por hiperplano afim de E. Da Proposição 4.3.1, existe um funcional linear não-nulo $\varphi : E \to \mathbb{R}$ tal que

$$v_0 + H = \{v_0 + u : u \in H\} = \{v \in E : \varphi(v) = \alpha\}$$

tal que $\alpha \in \mathbb{R}$. De agora em diante, chamaremos os hiperplanos afins de hiperplanos, apenas.

Proposição 4.3.2. *Seja $H = \{v \in E : \varphi(v) = \alpha\}$ um hiperplano do espaço normado E, tal que φ é um funcional linear definido em E e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, é necessário e suficiente que o hiperplano H seja fechado para que o funcional linear φ seja contínuo.*

Supondo que φ é contínua, o hiperplano H é a pré-imagem $\varphi^{-1}(\{\alpha\})$ de um conjunto fechado por uma função contínua, isto é, H é fechado. Mutuamente, suponha que H é um hiperplano fechado, logo, E/H é aberto e, claramente, não vazio. Portanto, tome $x_0 \in E/H$, segue que, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq E/H$. Como $\varphi(x_0) \neq \alpha$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varphi(x_0) < \alpha$. Afirmamos que existe $r_0 > 0$ tal que $\varphi(x) < \alpha$ para todo $x \in B(x_0, r_0)$. De fato, suponha que existe $x_1 \in B(x_0, r_0)$ tal que $\varphi(x_1) > \alpha$, então $0 < \varphi(x_1) - \alpha < 1$ e $0 < \varphi(x_1) - \varphi(x_0) < r_0$, logo $0 < t = \frac{\varphi(x_1)-\alpha}{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)} < 1$, portanto, pela convexidade de $B(x_0, r_0)$, temos que $tx_0 + (1-t)x_1 \in B(x_0, r_0)$ e

$$\varphi(tx_0 + (1-t)x_1) = t\varphi(x_0) + (1-t)\varphi(x_1) = \frac{\varphi(x_1)-a}{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}\varphi(x_0) + \left(1 - \frac{\varphi(x_1)-a}{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}\right)\varphi(x_1) =$$
$$\varphi(x_1) - \frac{\varphi(x_1)-a}{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}(\varphi(x_1) - \varphi(x_0)) = a$$

contradizendo o fato de $B(x_0, r_0) \subseteq E/H$. Assim, dado $z \in E$, com $||z|| < 1$, temos que $||x_0 - (x_0 + r_0 z)|| = ||r_0 z|| = r_0||z|| < r_0$, consequentemente, $x_0 + r_0 z \in B(x_0, r_0)$, isto é, $\varphi(x_0) + r_0\varphi(z) = \varphi(x_0 + r_0 z) < \alpha$. Segue que

$$\varphi(z) < \frac{a - \varphi(x_0)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}.$$

Ultilizando o racicínio análogo para $-z$, notando que $||-z|| = ||z||$, obtemos

$$\varphi(-z) < \frac{a - \varphi(x_0)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)} \Rightarrow \frac{\varphi(x_0) - a}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)} < \varphi(z)$$

Portanto

$$\frac{\varphi(x_0)-a}{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)} < \varphi(z) < \frac{a-\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}$$

Em virtude disso, $||\varphi|| = \sup\limits_{||z||<1} |\varphi(z)| < \dfrac{a-\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)} < +\infty$, o que garante a continuidade de φ.

Introduziremos agora o funcional de Minkowski, que será de suma importância na obtenção das formas geométricas do Teorema de Hahn–Banach.

Definição 4.3.3. *Seja C um conjunto convexo, aberto e que contém a origem do espaço normado E. A aplicação*

$$p_C : E \to \mathbb{R}, p_C(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$

é chamado de operador de Minkowski de C.

Proposição 4.3.3. *O funcional de Minkowski possui as seguintes propriedades:*
(a) $p_C(\beta x) = \beta p_C(x)$ para todo $b > 0$ e $x \in E$;
(b) $C = \{x \in E : p_C(x) < 1\}$;
(c) Existe M tal que $0 \le P_c(x) \le M||x||$ para todo $x \in E$;
(d) $p_C(x+y) \le p_C(x) + p_C(y)$ para quaisquer $x, y \in C$.

Demonstração. (a) Note que $p_C(\beta x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{\beta x}{\alpha} \in C\right\} = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\frac{\alpha}{\beta}} \in C\right\}$. Seja $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, logo $\beta\cdot\lambda = \alpha$, consequentemente $p_C(\beta x) = \inf\left\{\beta\cdot\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\right\} = \beta\cdot\inf\left\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\right\} = \beta p_C(x)$.
(b) Como C é aberto, para qualquer $x \in C$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(1+\epsilon)x \in C$, logo $\frac{x}{(1+\epsilon)^{-1}} \in C$. Como consequência, $p_C(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} \le (1+\epsilon)^{-1} = \frac{1}{1+\epsilon} < 1$, assim, $C \subseteq \{x \in E : p_C(x) < 1\}$. Mutuamente, podemos notar que se $p_C(x) < 1$, então existe $0 < \alpha < 1$, tal que $p_C(x) \le \alpha$ e $\frac{x}{\alpha} \in C$. Pela convexidade de C, segue que, $x = \alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)\cdot 0 \in C$, logo, $\{x \in E : p_C(x) < 1\} \subseteq C$, provando que $C = \{x \in E : p_C(x) < 1\}$.
(c) Se x é o vetor nulo, então a desigualdade é óbvia. Caso, $x \neq 0$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq C$. Notemos que $\frac{r\cdot x}{2||x||} \in B(x,r)$, pois $||\frac{r\cdot x}{2||x||}|| = \frac{r}{2} < r$. Segue que, $p_C(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\} \le \left(\frac{r}{2||x||}\right)^{-1} = \frac{2||x||}{r}$. Consequentemente, o resultado está provado com $M = \frac{2}{r}$.
(d) Considere $x, y \in C$ e $\epsilon > 0$. Podemos notar que $\frac{x}{p_C(x)+\epsilon} \in C$. Com efeito, por (a), temos que

$$p_C\left(\frac{x}{p_C(x)+\epsilon}\right) = \frac{p_C(x)}{p_C(x)+\epsilon} < 1$$

e por (b), segue que $\frac{x}{p_C(x)+\epsilon} \in C$. Analogamente, mostramos que $\frac{y}{p_C(y)+\epsilon} \in C$. Tome $t = \frac{p_C(x)+\epsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}$. Claramente $t \in (0,1)$ e pela convexidade de C, podemos observar que $t\frac{x}{p_C(x)+\epsilon} + (1-t)\frac{y}{p_C(y)+\epsilon} \in C$, logo

$$t\tfrac{x}{p_C(x)+\epsilon} + (1-t)\tfrac{y}{p_C(y)+\epsilon} = \tfrac{p_C(x)+\epsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}\cdot\tfrac{x}{p_C(x)+\epsilon} + \left(1 - \tfrac{p_C(x)+\epsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}\right)\cdot\tfrac{y}{p_C(y)+\epsilon} =$$
$$\tfrac{x}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon} + \left(\tfrac{p_C(y)+\epsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}\right)\tfrac{y}{p_C(y)+\epsilon} = \tfrac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon} \in C$$

Segue por (a) e (b) que

$$\frac{p_C(x+y)}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon} = p_C\left(\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}\right) < 1$$

e, como consequência, $p_C(x+y) < p_C(x) + p_C(y) + 2\epsilon$, fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, temos $p_C(x+y) < p_C(x) + p_C(y)$ provando a desigualdade triangular para o funcional de Minkowski.

□

Lema 4.3.1. *Considere C um subconjunto convexo, aberto, e não vazio do espaço normado E. Se $x_0 \in E - C$, então existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$ para todo $x \in C$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos considerar que $0 \notin C$. Escolha $z_0 \in C$ e defina $D = \{x - z_0 : x \in C\}$. Seja $y_0 = x_0 - z_0$, podemos notar, claramente, que $0 \in D$ e $y_0 \notin D$, pois $x_0 \notin C$. Também note que D é convexo e aberto. Com efeito, dado $t \in [0,1]$ e $y_1, y_2 \in D$ tal que $y_1 = x_1 - z_0$ e $y_2 = x_2 - z_0$ com $x_1, x_2 \in C$. Perceba que $t(x_1 - z_0) + (1-t)(x_2 - z_0) = tx_1 + (1-t)x_2 - z_0 \in D$, pois pela convexidade de C, temos que $tx_1 + (1-t)x_2 \in C$. Dado $b \in D$, com $b = a - z_0$. Podemos considerar, portanto, o funcional de Minkowski $p_D : E \to \mathbb{R}$ de D. Tome $G = [y_0]$ e $g : G \to \mathbb{R}$ tal que $g(ty_0) = t \cdot p_D(y_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Observe que $g(x) \leq p_D(x)$ para todo $x \in G$. De fato, para $t > 0$, temos

$$g(ty_0) = tp_D(y_0) = p_D(ty_0)$$

Pela Proposição 4.3.3. E para $t \leq 0$, temos

$$g(ty_0) = tp_D(y_0) \leq 0 \leq p_D(ty_0)$$

pois, pela Definição 4.3.3 $p_D(x) \geq 0$ para todo $x \in G$. Com base no Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\varphi : E \to \mathbb{R}$ que estende a função g e $\varphi(x) \leq p_D(x)$ para todo $x \in E$. Conforme a Proposição 4.3.3, existe $M > 0$ tal que $\varphi(x) \leq p_D(x) \leq M||x||$ para qualquer $x \in E$, o que garante a continuidade de φ. Da Proposição 4.3.3 (b) segue que $\varphi(x) \leq p_D(x) < 1$ para todo $x \in C$, como $y_0 \notin C$, segue que $p_D(y_0) \geq 1$, daí

$$\varphi(x) < 1 \leq p_D(y_0) = g(y_0) = \varphi(y_0) = \varphi(x_0 - z_0)$$

para todo $x \in D$. Da desigualdade anterior e da Definição de D segue que

$$\varphi(x) = \varphi(x - z_0 + z_0) = \varphi(x - z_0) + \varphi(z_0) < \varphi(x_0 - z_0) + \varphi(z_0) =$$
$$\varphi(x_0 - z_0 + z_0) = \varphi(x_0),$$

para todo $x \in C$. Agora, considerando que $x \in C$, tome $z_0 = 0$ e obtemos o mesmo resultado.

□

Lema 4.3.2. *Sejam E um espaço normado. Se $\varphi \in E'$ um funcional não nulo e A um subconjunto convexo, aberto e não-vazio de E, então $\varphi(A)$ é um intervalo aberto (não necessariamente limitado).*

Demonstração. Primeiramente, podemos notar que se φ é não nulo, então φ é sobrejetor, pois $\varphi(E)$ é um subespaço de $\mathbb{R}$ pela linearidade e homogeneidade de φ, isto é, $\varphi(E) = \mathbb{R}$, pois φ é não nulo por hipótese. Agora, notemos que pela convexidade de A, dado $t \in [0, 1]$ e $x, y \in A$, segue que $tx+(1-t)y \in A$, segue que, $t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y) = \varphi(tx+(1-t)y) \in \varphi(A)$, mostrando a convexidade de $\varphi(A)$, que, portanto, é um intervalo. Agora, vamos supor, sem perda de generalidade, que $\varphi(A)$ é um intervalo limitado superiormente, considere que $\sup \varphi(A) = a$ e que $a \in \varphi(A)$, isto é, existe x em A, tal que $\varphi(x) = a$ e $\varphi(y) \leq a = \varphi(x)$ para todo $y \in A$. Como A é aberto, existe $r > 0$ tal que a bola aberta de centro x e raio r está contida em A. Seja $z \in E$ um vetor não nulo. Perceba que

$$||x + \tfrac{r}{2||z||} \cdot z - x|| = \tfrac{r}{2||z||} \cdot ||z|| = \tfrac{r}{2} < r$$

consequentemente, $x + \frac{r}{2||z||} \cdot z \in A$. Nesse caso,

$$a + \tfrac{r}{2||z||} \cdot \varphi(z) = \varphi(x) + \tfrac{r}{2||z||} \cdot \varphi(z) = \varphi\left(x + \tfrac{r}{2||z||} \cdot z\right) \leq a$$

O que nos faz concluir que $\varphi(z) \leq 0$ para qualquer $z \in E$, o que contradiz o fato de $\varphi(E) \subseteq \mathbb{R}$, portanto $a \notin \varphi(A)$. Assim, completamos essa deslumbrante demonstração.

□

Para simplificar a notação, o hiperplano $H = \{x \in E : \varphi(x) = a\}$ será denotado pelo símbolo $[\varphi = a]$.

Teorema 4.3.1 (Primeira forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam A e B subconjuntos convexos , não-vazios e disjuntos do espaço normado E. Se A é aberto, então existe um funcional $\varphi \in E'$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) < a \leq \varphi(y) \text{ para todo } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Neste caso, dizemos que o hiperplano fechado $[\varphi = a]$ separa A e B.

Demonstração. Considere $C = A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$ e note que:
(i) $C = \bigcup_{y \in B} (A - \{y\})$, logo C é aberto.
(ii) C é convexo, pois dado $t \in [0, 1]$ e $z_1, z_2 \in C$, onde $z_1 = x_1 - y_1$ e $z_2 = x_2 - y_2$, com $x_1, x_2 \in A$ e $y_1, y_2 \in B$, temos que $tz_1 + (1-t)z_2 = t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2) = tx_1 - ty_1 + (1-t)x_2 - (1-t)y_2 = tx_1 + (1-t)x_2 - [ty_1 + (1-t)y_2]$. Pela convexidade de A e B, temos que $tx_1 + (1-t)x_2 \in A$ e $[ty_1 + (1-t)y_2] \in B$, consequentemente, $tz_1 + (1-t)z_2 = tx_1 + (1-t)x_2 - [ty_1 + (1-t)y_2] \in A - B = C$.
(iii) $C \neq E$, pois $0 \notin C$. Com efeito, se $0 \in C$, então existiria $x \in A$ e $y \in B$ tal que $x - y = 0$, isto é $x = y$ o que contrariaria a hipótese de A e B serem disjuntos. Além disso, C é não vazio, pois A e B são não vazios.

Pelo Lema 4.3.1, como $0 \in E/C$, então existe um funcional $\varphi \in E'$, tal que $\varphi(z) \leq \varphi(0) = 0$ para todo $z \in C$. Segue que

$$\varphi(x) = \varphi(x - y + y) = \varphi(x - y) + \varphi(y) < 0 + \varphi(y) = \varphi(y) \tag{4.5}$$

para todo $x \in A$ e $y \in B$. Notando, que B é não vazio, tomemos $a := \inf \varphi(B)$ e definimos o hiperplano constante $[\varphi = a]$ fechado, pois é contínuo. Repare que $\varphi(A) \subseteq (-\infty, a)$ pelo Lema 4.3.2 e $a \leq \varphi(y)$ para todo $y \in B$. Segue que $\varphi(x) < a \leq \varphi(y)$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

$\square$

Teorema 4.3.2 (Segunda forma geométrica do Teorema de Hanh-Banach)**.** *Sejam A e B subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado E. Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional um funcional $\varphi \in E'$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y) \text{ para todo } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Dizemos que o hiperplano fechado $[\varphi = c]$, com $c \in (a, b)$ separa A e B estritamente.

Demonstração. Notemos que é possível escolher $\epsilon > 0$ tal que $A + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ e $B + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ sejam abetos, convexos e disjuntos:
(i) Para qualquer $\epsilon > 0$, os conjuntos $A + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ e $B + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ são abertos. Com efeito,

$$A + \mathcal{B}(0, \epsilon) = \bigcup_{\alpha \in A} (\alpha + \mathcal{B}(0, \epsilon)) = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{B}(\alpha, \epsilon)$$

analogamente,

$$B + \mathcal{B}(0, \epsilon) = \bigcup_{\beta \in B} \mathcal{B}(\beta, \epsilon)$$

portanto, são conjuntos abertos.
(ii) Para qualquer escolha de $\epsilon > 0$, temos que $\mathcal{B}(0, \epsilon)$ é convexo. Como A, B são convexos, então, claramente, $A + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ e $B + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ são convexos de maneira análoga a que fizemos para mostrar que C é convexo no 4.3.1.
(iii) Agora, basta mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que $A + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ e $B + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ sejam disjuntos. Com efeito, suponha que $A + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ e $B + \mathcal{B}(0, \epsilon)$ tenha intersecção não vazia para qualquer $\epsilon > 0$. Neste caso, tome $\epsilon = \frac{1}{n}$ e note que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left(A + \mathcal{B}\left(0, \tfrac{1}{n}\right)\right) \bigcap \left(B + \mathcal{B}\left(0, \tfrac{1}{n}\right)\right) \neq \emptyset$$

Portanto, existem $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq B$ e $(z_n)_{n=1}^{\infty}, (w_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}(0, \frac{1}{n})$ tais que $x_n + z_n = y_n + 2_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Como consequência,

$$||x_n - y_n|| = ||w_n - z_n|| \leq ||w_n|| + ||z_n|| < \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} = \tfrac{2}{n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pela compacidade de B, a sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergênte em B, suponha então que $y_{n_k} \longrightarrow \beta \in B$, logo, $x_{n_k} \longrightarrow \beta$. Como A é fechado, temos que $\beta \in A$, segue que, $\beta \in A \cap B$ o que contraria a hipótese de disjunção de A e B.

Assim, considere ϵ_0 tal que $A + \mathcal{B}(0, \epsilon_0)$ e $B + \mathcal{B}(0, \epsilon_0)$ sejam disjuntos. Pelo 4.3.1, existe um hiperplano fechado $[\varphi = c]$ de E que separa $A + \mathcal{B}(0, \epsilon_0)$ e $B + \mathcal{B}(0, \epsilon_0)$. Assim,

$$\varphi(x) + \sup_{||z_1|| < \epsilon_0} \varphi(z_1) \leq c \leq \varphi(y) + \inf_{||z_1|| < \epsilon_0} \varphi(z_2)$$

para todo $x \in A$ e $y \in B$. Da linearidade de φ, segue que

$$\varphi(x) + \epsilon_0 \cdot \sup_{||\frac{z_1}{\epsilon_0}||<1} \varphi\left(\frac{z_1}{\epsilon}\right) \leq c \leq \varphi(y) + \epsilon_0 \cdot \inf_{||\frac{z_1}{\epsilon_0}||<1} \varphi\left(\frac{z_2}{\epsilon_0}\right)$$

Daí, $\varphi(x) + \epsilon_0 \cdot ||\varphi|| \leq c \leq \varphi(y) - \epsilon_0||\varphi||$ para todo $x \in A$ e $y \in B$, assim, $\varphi(x) \leq c - \epsilon_0||\varphi|| < c < c + \epsilon_0||\varphi|| \leq \varphi(y)$. Diante, disso podemos, considerar $a = c - \epsilon_0||\varphi||$ e $b = c + \epsilon_0||\varphi||$, completando essa primorosa argumentação.

□

Corolário 4.3.1. *Seja M um subespaço fechado do espaço normado E. Então para todo $x_0 \in E - M$ existe um funcional $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x_0) = 1$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Claramente o conjunto $\{x_0\}$ é compacto e M é fechado por hipótese. Assim, podemos aplicar o Teorema 4.3.2 em $A = M$ e $B = \{x_0\}$, portanto, existem um funcional $\omega \in E'$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(x) < c < \omega(x_0)$ para qualquer $x \in M$. Sabemos que a imagem de um espaço vetorial aplicado num operador linear é um subespaço do contradomínio, logo, $\omega(M)$ é um subespaço de $\mathbb{R}$, portanto, $\omega(M) = \{0\}$, pois é o único subespaço de $\mathbb{R}$ limitado. Como consequência, $\omega(x_0) > 0$. Tome $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) = \frac{1}{\omega(x_0)} \cdot \omega(x)$. Note que φ satisfaz todas as condições que estamos buscando.

□

Corolário 4.3.2. *Seja M um subespaço do espaço normado E. Então para todo $x_0 \in E$, $x_0 \in \overline{M}$ se, e somente, se $\varphi(x_0) = 0$ para todo $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(M) = \{0\}$. Ou seja,*

$$\overline{M} = \bigcap\{\ker(\varphi) : \varphi \in E' \text{ e } M \subseteq \ker(\varphi)\}$$

Demonstração. Suponha que $x_0 \in \overline{M}$. Considere $\varphi \in E'$ tal que $M \subseteq \ker(\varphi)$, portanto $\overline{M} \subseteq \overline{\ker(\varphi)} = \ker(\varphi)$, pois $\ker(\varphi)$ é fechado.

Reciprocamente, suponha que $x_0 \notin \overline{M}$. Como $\overline{M}$ é um subespaço fechado de E, pelo Corolário 4.3.2 existe um funcional φ_0 tal que $\varphi(x_0) = 1$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$. Logo, $x_0 \notin \bigcap\{\ker(\varphi) : \varphi \in E'$ e $M \subseteq \ker(\varphi)\}$, o que o fato de $\varphi(x_0) = 0$ para todo $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(M) = \{0\}$. Dessa maneira, $x_0 \in \overline{M}$.

□

Capítulo 5

Algumas Observações e aplicações dos Teoremas de Hanh-Banach

Algumas observações interessantes sobre o Teorema de Hanh-Banach são as seguintes:

- Na demonstração do Teorema de Hahn–Banach usamos o Axioma da Escolha na forma do Lema de Zorn. O leitor pode se perguntar se, a exemplo do próprio Lema de Zorn, do Teorema de Zermelo (Princípio da Boa Ordenação) e de vários outros enunciados conhecidos, o Teorema de Hahn–Banach é equivalente ao Axioma da Escolha. A resposta é negativa. Porém a demonstração desse fato ultrapassa, e muito o objetivo desse texto, além de que usa argumentos avançados da Teoria de Conjuntos. Nos limitamos a fazer o seguinte breve comentário: existe um Teorema na Teoria dos Conjuntos chamado Teorema do Ultrafiltro. É conhecido que

  $$\{ \text{ Axioma da Escolha } \} \Longrightarrow \{ \text{ Teorema do Ultrafiltro } \}.$$

  Halpern em 1964 provou que não vale a implicação contrária, isto é, o Teorema do Ultrafiltro não implica no Axioma da Escolha. Lo's e Ryll-Nardzewski em 1951 e Luxemburg 1962, provaram que

  $$\{ \text{ Teorema do Ultrafiltro } \} \Longrightarrow \{ \text{ Teorema de Hahn–Banach } \}.$$

  Pincus em 1972 provou que não vale a implicação contrária, isto é, o Teorema de Hahn–Banach não implica no Teorema do Ultrafiltro. Portanto, nós temos a seguinte hierarquia de implicações irreversíveis:

  $$\{ \text{ Axioma da Escolha } \} \Longrightarrow \{ \text{ Teorema do Ultrafiltro} \} \Longrightarrow \{ \text{ Teorema de Hahn–Banach} \}.$$

- Podemos observar que a primeira forma Geométrica do Teorema de Hanh-Banach, usa a forma analítica do Teorema de Hanh-Banach para espaços normados em sua demonstração. Uma pergunta natural que pode ser feita é, se podemos recuperar a forma analítica em espaços normados do Teorema de Hanh-Banach a partir de sua forma Geométrica? A resposta é positiva e pode ser provada no contexto de espaços vetoriais topológicos em geral. A demonstração pode ser encontrada em [7].

5.1 Demonstração do Teorema de Hanh-Banach sem o Lema de Zorn

Poderíamos demonstrar o Teorema 4.2.1 sem o Lema de Zorn? Esta questão é interessante, principalmente porque o Lema de Zorn não fornece um método de construção do funcional extensão. Mostramos abaixo que se E tiver a propriedade de ser separável (Veja a Definição 3.6.2), o funcional extensão pode ser construído por meio de um argumento indutivo.

Demonstração. Se E for normado e separável, então podemos encontrar um conjunto enumerável de vetores $\{x_0, x_1, \cdots\}$, todos linearmente independentes e não pertencentes a G, de modo que cada elemento em E pode ser aproximado por combinações lineares de vetores de G e $\{x_0, x_1, \cdots\}$. Considere os subespaços de E da forma G_i, para $i \in \mathbb{N}$, com $G_0 = G$ e $G_i = G_{i-1} + \lambda x_i$. Se $y \in G_i$, podemos escrever $y = x + \lambda x_i$, onde $x \in G_{i-1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Defina a extensão de φ a G_i da seguinte forma: $\varphi_0 = \varphi$ e

$$\varphi_i : G_i \to \mathbb{R}$$

$$\varphi_i(x + \lambda x_i) = \varphi_{i-1}(x) + \lambda c_i$$

onde c_i é escolhido da mesma forma que α na versão analítica do Teorema de Hanh Banach para garantir que φ_i permaneça dominada pelo funcional sublinear p, para cada $i \in \mathbb{N}$. Isso mostra como podemos estender φ recursivamente (apenas indução) para um subconjunto denso e enumerável de E. Chame essa extensão de ϕ, que é naturalmente linear. Por construção, $\phi \leq p$ para todo $x \in S$, onde S é um é um subconjunto denso de E. Agora, para estender ϕ para E, basta um argumento de limite, usando a densidade: seja $x \in E$. Como S é um subconjunto denso, podemos considerar (s_n) uma sequência de S convergindo para x. Então, o limite $\lim_{n\to\infty} \phi(s_n)$ está bem definido; chame este de $\tilde{\varphi}(x)$. Isso define $\tilde{\varphi}$ pontualmente. $\tilde{\varphi}$ é obviamente linear e por construção estende φ. Além disso, como $\phi(s_n) \leq p(s_n)$ para todo $s_n \in S$, temos $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

□

5.2 Comentários sobre a Unicidade do Teorema de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn de Hahn-Banach é um belíssimo Teorema fundamental na Análise Funcional, pois garante a extensão contínua de funcionais lineares em espaços normados. No entanto, o leitor atento deve se questionar: essa extensão é única? E o exemplo 5.2.1 nos mostra que o Teorema de Hahn-Banach não garante a unicidade da extensão do funcional linear, ou seja, nem tudo é isento de falhas.

Exemplo 5.2.1. *Notemos que o Teorema de Hahn-Banach não garante a unicidade na extensão do funcional φ. Considerem $G = \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 = E$ e $p(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$. Claramente, o funcional $\varphi : G \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y, 0) = x + y$ é linear e $\varphi(x, y, 0) \leq p(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Agora, defina $\tilde{\varphi}_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ no qual $\tilde{\varphi}_\alpha = x + y + \alpha z$. Observe que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}_\alpha$ é uma extensão de φ, ainda mais, para $|\alpha| \leq 1$, temos que $\tilde{\varphi}_\alpha(x, y, z) \leq p(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Portanto, podemos notar que a quantidade de extensões de φ é não enumerável.*

Definição 5.2.1. *Seja E um espaço normado. Dizemos que E é um espaço estritamente convexo, se E é convexo e dado $x_1, x_2 \in E$, onde $||x_1|| = ||x_2||$, então $||\frac{x_1+x_2}{2}|| \leq ||x_1||$.*

O interessante de E ser um espaço normado estritamente convexo, é que podemos estender o funcional linear que preserva a norma como mostraremos no exemplo 5.2.2.

Exemplo 5.2.2. *A extensão que preserva a norma é única no Teorema 4.2.1, se E é estritamente convexo. Sejam G um subespaço de um espaço normado E e $\varphi : G \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Considerem pelo Teorema de Hahn-Banach $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : E \to \mathbb{R}$ distintas que estedem φ e $||\tilde{\varphi}_1|| = ||\varphi|| = ||\tilde{\varphi}_2||$. Defina $\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2}{2}$. Repare que $\tilde{\varphi}$ estende φ, pois dado $x \in G$, temos $\tilde{\varphi}(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)_1+\tilde{\varphi}_2(x)}{2} = \frac{\varphi(x)+\varphi(x)}{2} = \varphi(x)$. Agora, repare que pela convexidade estrita de E, se $||\tilde{\varphi}_1|| = ||\tilde{\varphi}_2||$, segue que, $||\tilde{\varphi}|| = ||\frac{\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2}{2}|| < ||\tilde{\varphi}_1||$. No entanto, repare que se $x \in G$ e $||x|| < 1$, então $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \leq \sup\{|\tilde{\varphi}(x)| : ||x|| \leq 1\} = ||\tilde{\varphi}||$, portanto, $||\varphi|| = \sup\{|\varphi(x)| : ||x|| < 1\} \leq ||\tilde{\varphi}||$. Além disso, $||\tilde{\varphi}|| = \left|\left|\frac{\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2}{2}\right|\right| \leq \frac{||\tilde{\varphi}_1||+||\varphi_2||}{2} = ||\varphi||$, e, como consequência, $\frac{||\tilde{\varphi}_1||+||\tilde{\varphi}_2||}{2} = ||\tilde{\varphi}|| = ||\varphi||$ o que é contradiz a estrita convexidade de E, portanto $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$.*

5.3 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach para Espaços Separáveis

Havíamos mencionado que os espaços separáveis possuem de propriedades especiais que enriquecem toda nossa construção teórica. Veremos nesta seção os primeiros indícios deste fenômeno.

Definição 5.3.1. *Se A é um subconjunto de um espaço normado E e $x \in E$, então $dist(x, A) = \inf\{||x - y|| : y \in A\}$.*

Proposição 5.3.1. *Sejam E um espaço normado, M um subespaço fechado de E, $y_0 \in E - M$ e $d = dist(y_0, M)$. Então existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $||\varphi|| = 1, \varphi(y_0) = d$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Considere $N = M \oplus [y_0]$. Dessa maneira, dado $z \in N$, existem únicos $a \in \mathbb{K}$ e $x \in M$, tais que $z = x + ay_0$. Defina

$$\varphi_0 : N \to \mathbb{K}, \varphi_0(x + ay_0) = 0x + ad = ad.$$

Perceba que dados $x_1 + a_1y_0, x_2 + a_2y_0 \in N$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que $\varphi_0((x_1 + a_1y_0) + (x_2 + a_2y_0)) = \varphi_0((x_1+x_2)+(a_1+a_2)y_0) = (a_1+a_2)d = a_1d+a_2d = \varphi(x_1+a_1y_0)+\varphi(x_2+a_2y_0)$ e $\varphi(\lambda(x_1 + a_1y_0)) = \varphi(\lambda x_1 + \lambda a_1y_0) = \lambda(ad) = \lambda\varphi(x_1 + a_1y_0)$, assim, φ é linear. Ainda mais, $\varphi(M) = \{\varphi(x) : x \in M\} = \{0\cdot x+0 : x \in M\} = 0$ e $\varphi(y_0) = \varphi(0+1\cdot y_0) = 1\cdot d = d$. Resta verificar que $||\varphi|| = 1$. Tome $z = x + ay_0 \in N$, com $a \neq 0$. Note que

$$||z|| = ||x+ay_0|| = |a|\cdot\left|\left|\frac{x}{-a} - y_0\right|\right| \geq |a|\cdot\inf ||y_0 - y|| : y \in M\} = |a| \cdot d = |ad| = |\varphi_0(z)|.$$

No caso em que $a = 0$, a desigualdade $||z|| \geq |\varphi_0(z)|$ é óbvia. Segue que $\varphi(\frac{z}{||z||}) \leq 1$, ou seja, $||\varphi_0|| \leq 1$. Dado $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in M$ tal que $d \leq ||y_0 - x_\epsilon|| \leq d + \epsilon$. Seja $z_\epsilon = \frac{y_0 - x_\epsilon}{||y_0 - x_\epsilon||}$. Perceba que $z_\epsilon \in N, ||z_\epsilon|| = 1$ e que

$$\varphi_0(z_\epsilon) = \frac{d}{||a - x_\epsilon||} \geq \frac{d}{d + \epsilon}.$$

Como $\epsilon > 0$ arbitrário, segue que $||\varphi_0|| \geq \varphi_0(z_\epsilon) \geq \frac{d}{d+\epsilon}$, consequentemente, $||\varphi_0|| \geq \sup\left\{\frac{d}{d+\epsilon} : \epsilon > 0\right\} = 1$. Assim, $||\varphi_0|| = 1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi \in E'$ que estende φ_0 tal que $||\varphi|| = ||\varphi_0|| = 1$.

□

Proposição 5.3.2. *Se E' é separável, então E também é separável.*

Demonstração. Considere $S_{E'}$ a esfera unitária de E'. Assim, pela Proposição 3.6.1, $S_{E'}$ é separável. Considere $A = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável e denso de $S_{E'}$. Como o $||\varphi_n|| = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in E$ tal que $|\varphi(x_n)| \geq \frac{1}{2}$. Seja $M = \overline{[x_1, ..., x_n, ...]}$ e afirmamos que M é um subespaço de E. Com efeito, como $[x_1, ..., x_n, ...]$ é um subespaço de E, dado $u, v \in M$, existem sequências $(u_n)_{n=1}^\infty, (v_n)_{n=1}^\infty$ em $[x_1, ..., x_n, ...]$ que convergem para u, v, respetivamente. Como $u_n + v_n \in [x_1, ..., x_n, ...]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que, $u_n + v_n \longrightarrow u + v$, portanto, $u + v \in \overline{[x_1, ..., x_n, ...]} = M$. Analogamente, é possível mostrar que M é fechado para o produto com escalares em $\mathbb{K}$.

Agora, queremos mostrar que $M = E$. Para isso, suponha por contradição que existe $x_0 \in E - M$. Pela Proposição 5.3.1, existe um funcional $\varphi \in E'$ com $||\varphi|| = 1$ tal que $\varphi(x_0) = d(x_0, M) = d$ e $\varphi(M) = \{0\}$. Portanto,

$$||\varphi - \varphi_n|| = \sup_{x \in B_E} |(\varphi - \varphi_n)(x)| \geq |\varphi(x_n) + \varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}.$$

O que contradiz A ser denso em $S_{E'}$. Sendo assim, $M = E$ e a separabilidade de E segue do Lema 3.6.1.

□

5.4 Densidade do espaço $C_c^\infty(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Defina $C_c^\infty(\Omega)$ como o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em Ω, que possuem suporte compacto, ou seja, se anulam fora de um conjunto compacto. É claro que $C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$, pois as funções em $C_c^\infty(\Omega)$ são nulas, exceto em um conjunto compacto, na qual são integráveis. Provaremos o seguinte Teorema:

Teorema 5.4.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Então, nessas condições, o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

O Teorema acima tem importância fundamental, especialmente porque permite aproximar uma função de L^p por uma sequência de funções muito regulares, o que em geral permite demonstrar desigualdades e propriedades em $C_c^\infty(\Omega)$ e por meio de um argumento de densidade, afirmar que estas são válidas em $L^p(\Omega)$. Para demonstrar o Teorema 5.4.1, usaremos o seguinte Teorema, consequência da 2ª forma geométrica do Teorema de Hanh-Banach, o qual é muito utilizado para mostrar que um subespaço de um espaço normado é denso.

Teorema 5.4.2 (Continuação Única)**.** *Seja E um espaço normado e $F \subseteq E$ um subespaço vetorial tal que $\overline{F} \neq E$. Então, existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. Defina $A = \overline{F}$ e $B = \{x_0\}$. Como A é fechado convexo e B é compacto convexo, então, resulta da 2ª forma geométrica do Teorema de Hanh-Banach que existe $f \in E'$, $f \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) + \varepsilon < \alpha < f(x_0) - \varepsilon \text{ para todo } x \in \overline{F}.$$

Note que um funcional linear ou é sobrejetivo ou é nulo, isto é, $f(F) = \mathbb{R}$ ou $f(F) = 0$. Mas da condição $f(x) < \alpha - \varepsilon$, segue que a imagem $f(F)$ é limitada. Então $f(F) = 0$, ou seja $f(x) = 0$ para todo $x \in F$. Resulta que

$$0 + \varepsilon < \alpha < f(x_0) - \varepsilon \text{ para todo } x \in \overline{F},$$

ou seja, $f(x_0) \neq 0$ o que conclui o Teorema.

$\square$

Demonstração do Teorema 5.4.1. Suponha por contradição que $C_c^\infty(\Omega)$ não seja denso em $L^p(\Omega)$. Isto significa que $\overline{C_c^\infty(\Omega)} \neq L^p(\Omega)$. Conforme o Teorema acima, com $E = L^p(\Omega)$ e $F = C_c^\infty(\Omega)$, existe $f \in [L^p(\Omega)]'$, $f \neq 0$ tal que $f(g) = 0$ para toda $g \in C_c^\infty(\Omega)$. Mas conforme o Teorema da representação de Riesz (que caracteriza que o espaço dual do espaço L^p é $L^{p'}$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, Veja o Teorema 4.2.1 de [3]), existe $u \in L^{p'}$, $u \neq 0$ (com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) tal que

$$f(v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \text{ para toda } v \in L^p(\Omega).$$

Em particular

$$0 = f(g) = \int_\Omega u(x)g(x)dx \text{ para toda } g \in C_c^\infty(\Omega).$$

Nessa situação podemos usar o seguinte resultado da Teoria da Integração, que pode ser encontrado na referência [4] (Lema IV.2 pg.61):

Lema 5.4.1. *Seja $g : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função tal que $g \cdot \chi_K$ é integrável para todo conjunto compacto $K \subseteq \Omega$ e tal que $\int_\Omega g(x)u(x)dx = 0$ para toda $g \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $u(x) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$.*

Para concluir que $u(x) = 0$ quase sempre (observe que u cumpre as condições do Lema , pois pela desigualdade de Hölder $\int_\Omega u \cdot \chi_K dx \leq ||u||_p |K|^{1/p'} < \infty$ onde $|K|$ denota a medida de Lebesgue do compacto K), mas isso implica que o funcional f é nulo em todo $L^p(\Omega)$, o que é uma contradição. $\square$

5.5 Teorema Fundamental do Cálculo em Espaços de Banach

Seja $f : [x, y] \to E$ uma função de classe C^1 tomando valores em um espaço Banach E, onde $[x, y] \subseteq \mathbb{R}$ com y. Aqui, $\mathbb{R}$ está equipado com a medida de Lebesgue $\mu = dx$. Vamos verificar que

$$\int_x^y f' \, dx = f(y) - f(x),$$

onde a integral à esquerda é a de Bochner. A integral de Bochner de uma função $f : \mathbb{R} \to E$ é definida essencialmente da mesma maneira que a integral de Lebesgue. Primeiro, defina uma função simples como qualquer soma finita da forma

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(x) b_i$$

onde o E_i são membros disjuntos da σ -álgebra dos Borelianos de $\mathbb{R}$ e b_i são elementos distintos do Espaço de Banach E. A integral é então definida por

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) b_i \right] dx = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) b_i$$

exatamente como é para a integral comum de Lebesgue. Uma função mensurável $f : \mathbb{R} \to E$ é Bochner integrável se existir uma sequência de funções simples integráveis s_n tal que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|f - s_n\|_E \, dx = 0,$$

onde a integral do lado esquerdo é uma integral de Lebesgue comum. Neste caso, a integral de Bochner é definida por

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n \, dx.$$

Entendemos

$$\int_x^y f' \, dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x,y]} \cdot f' dx.$$

Se $\varphi \in E^{'}$, então $\varphi \circ f' : [x, y] \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua definida em um intervalo compacto, portanto integrável (no sentido Riemann), logo temos:

$$\begin{aligned} \varphi \left(\int_x^y f' dx \right) &= \int_x^y \varphi \circ f' dx = \int_x^y \varphi' \circ f' dx \\ &= \int_x^y (\varphi \circ f)' dx = \varphi\left(f(y)\right) - \varphi\left(f(x)\right) = \varphi\left(f(y) - f(x)\right). \end{aligned}$$

Na primeira igualdade usamos um conhecido Teorema que nos diz que qualquer operador linear limitado comuta com a integral de Bochner, na segunda usamos o conhecido resultado de análise que diz que a derivada de uma aplicação linear é ela mesma, na terceira a regra da cadeia, e na quarta igualdade o Teorema Fundamental do Cálculo comum de análise real.

Usando a linearidade de φ, obtemos

$$\varphi \left(\int_x^y f' dx - (f(y) - f(x)) \right) = 0$$

para todos $\varphi \in E^{'}$. Afirmamos que nessa situação

$$x_0 = \int_x^y f' \, dx - (f(y) - f(x)) = 0.$$

Com efeito, se $x_0 \neq 0$, sendo $x_0 \in E$, pelo Corolário 4.2.2 do Teorema de Hanh-Banach, podemos encontrar um funcional $\varphi \in E^{'}$ tal que $||\varphi|| = 1$ e $\varphi(x_0) = ||x_0||$. Mas isso é uma contradição, uma vez que por hipótese $\varphi(x_0) = 0$ para todos $\varphi \in E^{'}$ e $\varphi(x_0) = ||x_0|| \neq 0$ pelo Teorema de Hanh-Banach. Isto dá o desejado.

5.6 Lema de Riesz e não compacidade da bola em dimensão infinita

A seguir apresentamos um famoso resultado, devido a F. Riesz, que será fundamental para mostrar que a bola unitária fechada em espaços de dimensão infinita nunca é compacta.

Lema 5.6.1. *Seja M um subespaço fechado próprio de um espaço normado E e seja θ um número real tal que $0 < \theta < 1$. Então existe $x \in E - M$ tal que $||x|| = 1$ e $||x - y|| \geq \theta$ para todo y em M.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.4.2, existe $f \in E'$ com $||f|| = 1$ (caso precise, considere $f_1 = \frac{f}{||f||}$) e que $f(M) = 0$. Perceba que

$$||f|| = 1 \Leftrightarrow \sup\{|f(x)| : x \in E \text{ e } ||x|| = 1\} = 1.$$

Dessa forma, existe $x_0 \in E, ||x_0|| = 1$ para qualquer $\theta \in (0, 1)$, tal que

$$|f(x_0)| > \theta.$$

Agora, tome $y \in M$, e note que

$$||x_0 - y|| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } ||\varphi|| = 1\} \geq |f(x_0) - f(y)| = |f(x_0) - f(y)| = |f(x_0)| > \theta.$$

□

Teorema 5.6.1. *Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de E é compacta.*

Demonstração. Resta-nos provar que se a bola é compacta, então o espaço tem dimensão finita. Suponha que E tenha dimensão infinita. Tome $x_1 \in E$, tal que $||x_1|| = 1$. Como a dimensão de E é ∞, o subespaço $[x_1]$, isto é, o subespaço gerado por x_1 é um subespaço próprio de E. Por ter dimensão finita, $[x_1]$ é um subespaço fechado de E pelo Corolário 3.1.1. Pelo Lema de Riesz, existe $x_2 \in E - [x_1]$, dado $\theta = \frac{1}{2}$ de norma 1 tal que

$$||x_2 - x_1|| \geq \frac{1}{2}.$$

Considere $[x_1, x_2]$ onde $x_2 \in E$, de forma similar, podemos notar que existe $x_3 \in E - [x_1, x_2]$ com $||x_3|| = 1$ tal que

$$||x_3 - x_j|| \geq \frac{1}{2}, j = 1, 2.$$

Recursivamente, podemos continuar esse procedimento indefinidamente e em todas as etapas teremos um subespaço de E com dimensão finita, logo fechado e próprio. Desse modo, construímos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em B_E tal que

$$||x_n - x_m|| \geq \frac{1}{2},$$

sempre que $m \neq n$. Como consequência, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em B_E que não possui subsequência convergente, o que impede que B_E seja compacta.

$\square$

Observação 5.6.1. *Podemos observar com o Lema de Riesz que na topologia da norma, em todo espaço normado de dimensão infinita a bola unitária não é compacta. Então fica uma pergunta, será que podemos obter compacidade da bola unitária fechada em dimensão infinita sob alguma hipótese? A resposta é sim, desde que o espaço em consideração seja espaço de Banach, com a propriedade adicional de reflexividade e equipado com uma topologia especial, chamada de Topologia Fraca. Isto é conteúdo do Famoso Teorema de Kakutani, veja o Teorema 3.17 em [3]. Aliás, tal topologia é Hausdorff (separa pontos) devido ao Teorema de Hanh-Banach.*

Considerações finais

Apresentamos neste trabalho os Teoremas de Hahn-Banach, assim como, algumas aplicações relevantes destes Teoremas. As demonstrações foram feitas de forma detalhada para que o leitor não tenha dificuldades em compreender as argumentações.

Iniciamos o trabalho com noções de espaços métricos, as quais são fundamentais para definir os espaços de Banach da Análise Funcional. Além disso, optamos por abordar tópicos de teoria da medida, pois mostramos que os espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$ e $\ell_p(X, \Sigma, \mu)$, onde $1 < p \leq +\infty$ e (X, Σ, μ) é um espaço de medida, são espaços de Banach, não triviais.

Também fizemos um breve estudo sobre os funcionais lineares, antes de introduzir o Lema de Zorn para demonstrar os Teoremas de Hanh-Banach (caso real e caso complexo). Ainda mais, introduzimos os conceitos de hiperplanos em espaços de dimensão infinita e os funcionais de minkowiski para demonstrar a $1^{\underline{o}}$ e a $2^{\underline{o}}$ forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach.

Além do mais, fizemos reflexões sobre a unicidade dos Teoremas de Hahn-Banach e evidênciamos algumas aplicações importantes deste Teorema em espaços serparáveis, em relação a a densidade do espaço $C_C^\infty(\Omega)$ em $L_p(\Omega)$, o teorema fundamental do cálculo em espaços de Banach e o Lema de riesz.

Por fim, pretendo seguir carreira acadêmica na área de Análise Matemática, diante disso, este trabalho possibilitou meu aprofundamento nesta belíssima área e ressaltou meu desejo de continuar estudando-a. Além do mais, acredito que a leveza e o detalhamento nas demonstrações apresentadas neste trabalho, faz deste estudo, uma porta de entrada para alunos de graduação que buscam estudar os conteúdos fundamentais da Análise Funcional.

Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, Robert G. The elements of integration and Lebesgue measure. John Wiley & Sons, 2014.

[2] BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. Fundamentos de análise funcional. SBM, 2012.

[3] BRÉZIS, Haim. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York: Springer, 2011.

[4] BRÉZIS, Haim. Functional analysis. Theory and applications.(Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.). Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. 1994.

[5] LIMA, Elon Lages. Espaços Métricos.(3aediçao). Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

[6] KREYSZIG, Erwin. Introductory functional analysis with applications. John Wiley & Sons, 1991.

[7] SCHAEFER, Helmut H. et al. Topological Vector Spaces. Volume 3 Graduate texts in mathematics. Macmillan, 1971.