Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

O corpo dos números reais:

um estudo via

Método dos Cortes de Dedekind

Maritza Camilli Almeida Brito

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA, BRASIL
DEZEMBRO DE 2018

O CORPO DOS NÚMEROS REAIS: UM ESTUDO VIA MÉTODO DOS CORTES DE DEDEKIND

Maritza Camilli Almeida Brito

Trabalho de conclusão de curso submetido ao corpo docente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado por:

Prof. Dr. Marcio Antônio de Andrade Bortoloti.
(Orientador)

Prof. Dr. André Nagamine.

Prof. Dr. Sérgio da Silva Aguiar.

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA, BRASIL
DEZEMBRO DE 2018

Resumo do trabalho de conclusão de curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

O CORPO DOS NÚMEROS REAIS: UM ESTUDO VIA MÉTODO DOS CORTES DE DEDEKIND

Maritza Camilli Almeida Brito

DEZEMBRO/2018

Orientador: Marcio Antônio de Andrade Bortoloti

Este trabalho tem como objetivo apresentar, por meio de uma perspectiva mais rigorosa, a extensão dos números racionais a fim de obter os números reais via Método dos Cortes de Dedekind. Inicialmente, discorre-se sobre alguns aspectos históricos cruciais no processo de evolução conceitual dos números reais. A posteriori, apresenta-se um método axiomático com a finalidade de expor a construção do corpo ordenado dos números reais. Discute-se ainda, de forma substanciada, a abordagem desse conjunto em alguns dos mais importantes aportes teóricos da Análise.

Palavras-chave: Conjunto dos números reais, Método dos Cortes de Dedekind, Análise.

Summary of the monograph presented to the Course of Mathematics Teachers of the State Southwest Bahia University as part of the necessary requirements to obtain the degree in Mathematics.

THE FIELD OF REAL NUMBERS: A STUDY VIA DEDEKIND CUTS METHOD

Maritza Camilli Almeida Brito

DECEMBER/2018

Advisor: Marcio Antônio de Andrade Bortoloti, DSc.

This work aims to present a study of the extension of the rational numbers in order to obtain the real numbers by considering the Dedekind Cut Method. First, some crucial historical aspects are discussed in the process of conceptual evolution of real numbers. Then, an axiomatic method is presented aiming to expose the construction of the Field of Real Numbers. It is also discussed, in a brief way, the approach of this structure in some of the most important theoretical contributions of the Analysis.

Keywords: Real Number Field, Dedekind Cut Method, Analysis.

Com todo o meu amor e admiração, à minha vozinha!

Agradecimentos

A Deus por todas as bênçãos concedidas.

À minha família, principalmente a minha avó Dalva Brito e ao meu pai Miguel Júnior, por todo apoio, incentivo e credibilidade.

Às minhas duas mães que Deus me permitiu escolher, Mirilene Brito e Mariana Torreão, por todo amor, carinho e palavras de incentivo durante esta caminhada.

Ao Prof. Marcio Antônio de Andrade Bortoloti pela orientação e extrema paciência. Palavras não podem expressar minha gratidão e minha admiração tanto como pessoa quanto como profissional.

À minha querida amiga de infância, Malena Cabral, por todas as vezes que esteve ao meu lado quando precisei.

À minha querida amiga, Hélenn Tamise, um dos melhores presentes dessa graduação. Obrigada por ter cuidado de mim todas as vezes em que precisei. Do início ao fim para toda a vida.

Aos Professores da UESB, em especial Maria Aparecida Ramos, Sérgio Silva, Antônio Augusto, Júlio César, Altemar Brito, André Nagamine, Ana Paula Perovano, Fabiana Andrade e Vírginia Baldown.

Aos membros da banca, pelos valiosos comentários e sugestões.

A todos os funcionários da UESB, em especial o nosso querido Tio Geovane e Saulo.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O anseio em compreender o conjunto dos números reais em seu aspecto mais rigoroso e construtivo originou-se no contato com a disciplina de Análise Real, componente curricular do curso de Matemática. A priori, estávamos interessados em estudar suas características, operações e propriedades.

Ao longo de minhas pesquisas, deparei-me com relatos intrigantes acerca da construção do conjunto dos números reais: o questionamento feito pelo matemático Dedekind sobre o que há na grandeza geométrica contínua (reta numérica) que a distingue dos números racionais; a constante presença da geometria como espinha dorsal da Análise no que diz respeito as demonstrações e formulações de teoremas e definições importantes sobre limite e continuidade, isso pelo fato de não existir uma definição formal de número real. Nesse momento, percebi que nunca havia me questionado para além das operações e propriedades desse conjunto. Acomodada em apenas operar com números reais, a preocupação e curiosidade em entender a necessidade de sua construção não havia se tornado algo relevante.

Claro que, antes de analisar a construtibilidade desse conjunto, precisaremos direcionar nossos estudos para os aspectos históricos relacionados ao seu descobrimento, aos grandes matemáticos envolvidos nesse processo e aos contextos nos quais se deu essa descoberta.

Objetivamos, com este trabalho, estudar a construção dos números reais via Método dos Cortes de Dedekind e analisar alguns dos aportes teóricos mais utilizados nos cursos de Análise dando enfase a abordagem do conjunto dos números reais.

Aspectos Históricos

Acostumamos com relatos de que os números possuem sua origem no processo de contagem de ovelhas aos quais se associavam tracinhos marcados geralmente em argilas, representando assim uma quantidade. Mas na verdade esses processos de contagens, como mostram estudos recentes, eram um pouco mais complexos. Na Mesopotâmia antiga, por volta de 4 mil anos a.C, segundo (ROQUE, 2012), este processo era realizado de forma mais sofisticada com o uso de *tokens*, pequenas esculturas de argila de formato geométrico, no qual cada formato geométrico serviria para contar objetos de naturezas diferentes. Estes *tokens* eram armazenados em invólucros de argila nos quais eram ocos e continham *tokens* de naturezas diferentes. Na argila ainda molhada, eram impressos com o próprio *token* uma marca na superfície do invólucro para controlar quantos *tokens* tinham dentro, pois uma vez fechado este invólucro era preciso saber quantos *tokens* ele continha. E assim eram feitos o controle e a administração de rebanhos, bens e insumos produzidos.

Com a complexificação da sociedade os egípcios perceberam que este método não era mais adequado, pois a diversidade de objetos existentes tornava praticamente impossível que fosse desenvolvido um tipo de *token* para representar cada objeto. Os egípcios perceberam que para tornar o processo mais fácil eles poderiam representar estes diferentes objetos através de marcas feitas em tabletes de argila que representariam a quantidade dos objetos, e assim foi descoberto o conceito numérico dos objetos.

Ao observar de longe as ovelhas pastarem, os egípcios começaram a observar tudo que havia a sua volta, as árvores, o rebanho, as pedras, as nuvens, o sol, o pastor. Como agrupar esses diferentes tipos? Poderiam agrupar de acordo com o que era vivo e não vivo, ou pelo que era comestível ou não comestível, ou até mesmo por aqueles que ficavam na terra ou no céu. Mas por que não associar a sua quantidade? Assim, a cada quantidade de um certo tipo de objeto se associava um número. E é nesse processo de associação de número a quantidades que surge o conjunto que hoje conhecemos como o conjunto dos números naturais, ou intuitivamente, o conjunto dos números que servem para contar ou números utilizados no processo de contagem.

Não suficiente, a Matemática precisava de mais. Apenas os números naturais não davam conta de suprir as necessidades. Então, pela primeira vez na China, aparece os números negativos. Este fato se deu pelos indianos, que ao tentar estabelecer um algoritmo para resolver equações quadráticas observaram que algumas delas tinham como solução números negativos. Porém, estes não aceitavam que um número negativo poderia ser solução para estas equações.

Algumas regras já eram utilizadas pelos gregos envolvendo subtrações, mas foram os hindus que as transformaram em regras numéricas envolvendo números positivos e negativos. Por volta do século III o matemático Diofanto operava com números negativos com muita frequência em problemas aritméticos, porém, por não saber lhe dar com estes números, declarava o problema como absurdo. Com a presença constante destes novos números em diversos outros problemas envoltos no avanço da aritmética o conceito de número passou a ser ampliado e a partir de então obtemos um novo conjunto de números, os inteiros.

A adição e a subtração dos números continuam a ser tão importantes para nós assim como foram para os egípcios. Segundo EVES (2004), o Papiro de Rhind é uma fonte primária rica sobre a Matemática egípcia antiga e é nele que se encontra o problema da divisão de 9 pães para 10 trabalhadores, problema esse que pode ter sido responsável pela primeira aparição das frações.

Com base nos escritos de SAITO (2011), analisemos o raciocínio desenvolvido pelos egípcios para a solução desse problema: suponhamos que fosse dia de pagar dez trabalhadores e os funcionários do faraó tenha trazido apenas nove pães. A grosso modo, sabemos que não seria possível entregar um pão a cada trabalhador. Um trabalhador ficaria sem receber seu salário? Tal injustiça poderia causar muitos conflitos entre os trabalhadores. Sendo assim, os egípcios foram obrigados a resolver este problema criando novos números. Estes números eram representadas da seguinte forma, o número e um círculo em cima deste, por exemplo, o número dois com um círculo em cima representava a fração

$1/2$. Porém, nesta época, os egípcios se limitaram a utilizar frações com numeradores iguais a 1, exceto $2/3$, e as demais frações eram extensões destas. É importante ressaltar que naquela época os egípcios não trabalhavam com o termo fração, porém o utilizaremos para facilitar a narrativa.

Após criarem essas frações o problema da divisão dos pães estava resolvido, os egípcios desenvolveram o seguinte raciocínio: primeiro utilizariam a maior fração conhecida por eles, no caso $2/3$, sendo assim seriam distribuídos $2/3$ dos pães para os dez trabalhadores. Depois foi necessário encontrar uma fração que dividiria o restante em dez partes, por tentativa e erro, os egípcios encontraram $1/5$, e assim foi feito. O restante então precisou ser divido em $1/30$ partes para que só assim os dez trabalhadores recebessem a mesma quantidade de pães, ou seja, cada trabalhador ficou com $2/3+1/5+1/30$ de pães. Atualmente, esta soma pode ser conhecida como a fração $9/10$ (lê-se nove décimos).

Não somente em situações como estas mas como também em situações envolvendo geometria, esses números começaram a aparecer com grande frequência. Por este motivo, houve a necessidade de se ampliar o conceito de número. Hoje, o que antes era conhecido como frações que representavam partes de um todo, podemos denotar como o conjunto dos números racionais, números decimais que também podem ser escritos em forma de fração. Assim, o conjunto dos números racionais é o conjunto formado pela união dos naturais, inteiros e as frações.

De acordo com (ÁVILA, 2010), durante muito tempo diversas teorias e resultados matemáticos foram desenvolvidos com base na existência dos números racionais. Porém, por volta do século V a.C uma descoberta feita pelos pitagóricos desestruturou a crença de que tudo poderia se resumir a números inteiros, uma vez que para eles uma razão entre números inteiros não era uma fração e nem outro tipo de número. Na tentativa de resolverem problemas geométricos os pitagóricos descobriram que algumas razões, como por exemplo a razão entre a diagonal do quadrado e seu lado, isso para quadrados de lado medindo 1, não podiam ser expressas por números inteiros. Segundo (POSSANI), esta descoberta foi feita pelo pitagórico Hipaso de Metaponto. A esses números que fugiam dos padrões os matemáticos atribuíram o nome de grandezas incomensuráveis.

Claro que os pitagóricos por muito tempo mantiveram esta descoberta em sigilo, pois esta traria prejuízos no que diz respeito a toda matemática criada e desenvolvida por eles. Defendendo a hipótese de que os números regiam o universo, a descoberta dos incomensuráveis fez cair por terra esta afirmação, pois os números inteiros não eram suficientes para exprimir qualquer razão entre duas grandezas quaisquer. A descoberta da incomensurabilidade proporcionou uma crise na Matemática no século V a.C.

Incentivados pela necessidade de uma estruturação aritmética das grandezas, os gregos encontraram uma forma de lidar com razões, mesmo sendo estas incomensuráveis, contornando o problema da incomensurabilidade, desenvolvendo a Teoria das Proporções. Muitos resultados matemáticos desta época tiveram suas demonstrações com base em uma definição em específico desta teoria.

Segundo (CERRI, 2006), a definição citada foi atribuída ao matemático pitagórico Eudoxo, enunciada a seguir: ‵‵sejam A, B, C e D, grandezas do mesmo tipo diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os números naturais m e n, sempre que $mA < nB$ então $mC < nD$ ou $mA > nB$ então $mC > nD$ ou $mA = nB$ então $mC = nD$″.

Quando as grandezas são comensuráveis, afirmar que A está para B assim como C está para D é o mesmo que dizer que se $mA = nB$ então $mC = nD$. Porém, não podemos afirmar o mesmo para grandezas incomensuráveis. Sendo assim, Eudoxo desenvolveu uma nova definição para a igualdade de razões, dizendo, com um novo critério, quando uma razão será maior, menor ou igual a outra baseando-se apenas em números inteiros (ou grandezas), incluindo tanto razões comensuráveis quanto as incomensuráveis.

Na verdade a descoberta da incomensurabilidade e toda a instabilidade causada por ela trouxeram consigo a existência de novos números, números que fugiam dos padrões. Esses números são conhecidos hoje como números irracionais. Com o surgimento desses números irracionais, chegamos então ao que de fato nos interessa neste trabalho.

A definição desenvolvida por Eudoxo não se aproxima da definição de número real mas foi uma forma de contornar o problema de incomensurabilidade. Foi por volta do século XIX que um dos ramos mais importantes da Matemática, a Álgebra, começou a se desenvolver e junto veio a necessidade de atribuir ao número real uma definição formal. Assim, muitos matemáticos, como Heine, Méray, Dedekind, Cantor, Weierstrass, entre outros, destacaram-se acerca das definições dadas. Com esses estudos, cujo foco principal era entender os números, houve a necessidade de estabelecer métodos que os construíssem. Com base em (HEFEZ, 2014), as abordagens que mais se destacaram e que até hoje são motivos de estudo e pesquisa foram desenvolvidas pelos matemáticos Dedekind e Cantor. Em nível de curiosidade, o método desenvolvido por Cantor baseia-se no uso de sequências convergentes e de Cauchy de números racionais. Para o leitor que queira saber mais sobre este método indicamos (HEFEZ, 2014). Neste trabalho, nos limitaremos a estudar o método desenvolvido por Dedekind.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916) nasceu em Braunschweig na Alemanha e aos dezenove anos entrou na Universidade de Göttingen, adquirindo seu título de doutor aos vinte anos com uma tese sobre Cálculo, elogiada até por Gauss. Teve como professor o matemático Dirichlet e dedicou-se ao ensino secundário em Brunswick até os últimos anos de sua vida.

Preocupado com a natureza das funções e dos números, Dedekind julgava imprescindível investigar acerca da origem aritmética da continuidade, ou seja, do seu conceito aritmético, com o intuito de atribuí-la características. Esse interesse surgiu enquanto dava aulas de Cálculo, nas quais tentava mostrar que uma função crescente e limitada possui limite. Sendo assim, Dedekind se viu obrigado a reconsiderar o problema da definição de um número real. Nesse viés, Dedekind desenvolveu um método conhecido como Método dos Cortes, no qual ele propõe que:

> Se a é um número qualquer definido, então todos os números do sistema de $\mathbb{R}$ caem em duas classes, A_1 e A_2, cada uma das quais contém um número infinito de indivíduos, a primeira classe A_1 compreende todos os números a_1 que são menores que a, a segunda classe A_2 compreende todos os números a_2 que são maiores que a, o número a em si pode ser atribuído a seu bel prazer para a primeira ou segunda classe, sendo respectivamente, o maior número da primeira classe ou o menor da segunda. Em cada caso a separação do sistema de $\mathbb{R}$ em duas classes A_1 e A_2 é tal que cada número da primeira classe A_1 é menor do que cada número da segunda classe A_2. (Traduzido para o Português por (SANTOS, 2012))

Observando o relato de Dedekind, a ideia geral para resolver o problema da continuidade foi criar os cortes, nos quais permitem dar um estatuto numérico aos incomensuráveis e definir os números irracionais. Sabendo que os racionais apresentavam uma incompletude em relação ao contínuo da reta, Dedekind se dedicou a completar o domínio dos números racionais com o objetivo de conseguir um domínio numérico contínuo. Então a proposta é definir os números irracionais como cortes que são produzidos por valores não racionais. Assim, Dedekind consegue determinar um domínio contínuo usando os cortes produzidos por números não racionais, provando a incompletude dos racionais.

Apresentação dos Capítulos

Esse trabalho está estruturado em 4 capítulos.

No capítulo 1, que desenvolve-se no momento, contém a motivação na qual resultou esse trabalho e alguns aspectos históricos que ocasionaram o desenvolvimento do mesmo.

No capítulo 2, apresenta-se o método para a construção dos números reais via Cortes de Dedekind. Inicialmente, faremos a definição de corte e apresentaremos alguns exemplos que definem números racionais e irracionais. Discutiremos e demonstraremos resultados importantes que envolvem os cortes. Nesse capítulo, objetivamos mostrar que o conjunto dos cortes abrange a estrutura de um corpo ordenado completo, definindo assim $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais.

Pelo fato de não percebermos esse tipo de abordagem ao conjunto dos números reais em muitos materiais por nós utilizados, dedicamos o capítulo 3 para a apresentação das nossas observações em relação a alguns livros importantes na área da Análise. Levamos em consideração a estrutura, a linguagem, a abordagem axiomática, os aspectos históricos e as notas complementares desses livros. É importante ressaltar que todos os comentários desse capítulo restringem-se não ao livro como um todo, mas aos capítulos referentes aos números reais.

O capítulo 4, contém as considerações finais desse trabalho, nas quais serão abordadas comentários acerca do que foi discutido ao longo dos demais capítulos, com o intuito de avaliarmos a necessidade e importância que teve a elaboração do método construtivo dos números reais para a compreensão desse conjunto e para o desenvolvimento de posteriores conhecimentos na área da matemática pura.

Capítulo 2

Método dos Cortes de Dedekind

Este capítulo é destinado ao estudo do Método dos Cortes de Dedekind desenvolvido a fim de construir o conjunto dos números reais. Para tal, partiremos do corpo ordenado dos números racionais. Indicamos, em nível de curiosidade, o livro do HEFEZ (2014) para estudo aprofundado deste conjunto.

Apresentaremos, no decorrer deste capítulo, a definição de corte, seguido de exemplos, propriedades e proposições que nos possibilitarão mais proximidade com o tema em questão. É importante ressaltar que este capítulo foi desenvolvido com base nos escritos de (RUDIN, 1953), (QUEIROZ, 2015) e (PONTES, 2014).

2.1 Cortes de Dedekind

Definição 1 *Um corte α é um subconjunto contido em $\mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$ (α é um subconjunto próprio de $\mathbb{Q}$)

(ii) Se $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}$ com $q < p$ então $q \in \alpha$.

(iii) Se $p \in \alpha$ então $\exists\, r \in \alpha$ tal que $p < r$.

Observação 1 *De (ii) temos:*

- *Se $p \in \alpha$ e $r \notin \alpha$ então $p < r$.*

- *Se $p \notin \alpha$ e $p < r$ então $r \notin \alpha$*

Observação 2 *De (iii) podemos concluir que um corte não possui maior elemento.*

Exemplo 1 *O conjunto $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} | p < r\}$, no qual r é um número racional, é um corte.*

Vamos verificar:

(i) Podemos notar que $\alpha \neq \emptyset$ pois se tomarmos $p = r - 1$ teremos que $p \in \alpha$. Da mesma forma podemos ver que $\alpha \neq \mathbb{Q}$ uma vez que se tomarmos $q = r + 1$ teremos $q \in \mathbb{Q}$ com $q \notin \alpha$.

(ii) Sejam $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}$ com $q < p$ temos que $p < r$ e por hipótese $q < p$ então $q < r$, logo $q \in \alpha$.

(iii) Se $p \in \alpha$ devemos mostrar que existe $q \in \alpha$ com $p < q$, ou seja, α não possui maior elemento. De fato, se tomarmos $q = p + 1/n$ com $n \in \mathbb{N}$ teremos $p < q$. Agora devemos encontrar um n de forma que $q < r$, ou seja,

$$p + \frac{1}{n} < r. \tag{2.1}$$

Ao efetuarmos as devidas manipulações algébricas em (2.1) *, obtemos:*

$$n > \frac{1}{r - p}.$$

Sendo assim, se tomarmos $n > 1/(r - p)$ teremos $q < r$ e então $q \in \alpha$.

Podemos concluir com este exemplo que qualquer que seja o número racional r esse sempre efetuará um corte de todos os outros números racionais separando-os em dois conjuntos: os menores que r e os maiores que r, podendo ser r considerado o menor do segundo conjunto.

Exemplo 2 *O conjunto $\beta = \mathbb{Q}_- \bigcup \{x \in \mathbb{Q}_+ / x^2 < 2\}$ é um corte.*

Verifiquemos:

(i) Podemos notar que $\beta \neq \emptyset$ uma vez que $\mathbb{Q}_- \subset \beta$. Além disso, $\beta \neq \mathbb{Q}$, pois se tomarmos $x = 5$ teremos $x^2 > 2$, logo $5 \notin \beta$.

(ii) Se tomarmos um $x \in \beta$ e um $q \in \mathbb{Q}$ de modo que $q < x$ teremos que mostrar que $q \in \beta$. Para isso temos que analisar os seguintes casos:

- *Caso 1:*

Para $x > 0$ e $q \leqslant 0$ temos $q \in \beta$ pois $q < x$.

- *Caso 2:*

Para $x < 0$, como $q < x$ então $q \in \mathbb{Q}_-$ e assim $q \in \beta$.

- *Caso 3:*

Para $x, q > 0$ teremos $x^2 < 2$ e $q^2 < x^2$ pois, por hipótese, $q < x$. Sendo assim, $q \in \beta$ pelo fato de $q^2 < x^2$.

(iii) Se $p \in \beta$ então devemos exibir um $s \in \beta$ de modo que $p < s$. Façamos as contas:

Como $p < s$ então tomemos $s = p + 1/n$ com $n \in \mathbb{N}$ e analisemos as seguintes desigualdades:

$$p^2 < 2 \tag{2.2}$$

e

$$p^2 < p^2 + \frac{1}{n}\left(2p + \frac{1}{n}\right). \tag{2.3}$$

Subtraindo (2.2) por (2.3) e fazendo as devidas contas, teremos:

$$\frac{1}{n}\left(2p + \frac{1}{n}\right) < 2 - p^2. \tag{2.4}$$

Partindo do fato que $n \in \mathbb{N}$ então tomaremos $n \geqslant 1$ implicando em $\frac{1}{n} \leqslant 1$, ou seja, se adicionarmos $2p$ em ambos os membros dessa ultima desigualdade obtemos:

$$2p + \frac{1}{n} \leqslant 2p + 1, \tag{2.5}$$

que multiplicado por $1/n$ e marjorando, nos permite afirmar que:

$$\frac{1}{n}\left(2p + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(2p + 1\right). \tag{2.6}$$

Tomando como verdadeira a igualdade em (2.6), podemos concluir que:

$$\frac{1}{n}\left(2p + 1\right) < 2 - p^2.$$

Realizando os devidos cálculos conseguimos encontrar a condição necessária sobre n para que $s^2 < 2$: $n > (2p+1)/(2-p^2)$, ou seja,

$$\frac{1}{n} < \frac{2-p^2}{2p+1}. \tag{2.7}$$

Agora, o que queremos é verificar se realmente essa condição é válida. Para isso, adicionaremos p em ambos os lados de (2.7) e a elevaremos ao quadrado, obtendo:

$$\left(p + \frac{1}{n}\right)^2 < \left(p + \frac{2-p^2}{2p+1}\right)^2, \tag{2.8}$$

que efetuando todos os cálculos necessários, obtemos:

$$\left(p + \frac{1}{n}\right)^2 < p^2 + \left(\frac{2-p^2}{2p+1}\right)\left(2p + \frac{2-p^2}{2p+1}\right). \tag{2.9}$$

Precisamos aqui levar em conta o fato de termos assumido que $1/n \leqslant 1$ pois isso nos permite que $(2-p^2)/(2p+1) \leqslant 1$ e melhor, se tomarmos como verdade a igualdade, nossa desigualdade (2.9) passa a ser:

$$\left(p + \frac{1}{n}\right)^2 < p^2 + \left(\frac{2-p^2}{2p+1}\right)(2p+1), \tag{2.10}$$

que após efetuarmos todos os cálculos algébricos, fica: $s^2 < 2$.

É possível mostrarmos que o complementar de $\mathbb{Q}$ em relação a α, ou seja, $\mathbb{Q}\backslash\alpha$ não possui elemento de mínimo.

Consideremos

$$s = p - \frac{1}{n}, \tag{2.11}$$

com $n \in \mathbb{N}^*$. Devemos encontrar n de forma que $s^2 > 2$. Sendo assim,

$$s^2 = \left(p - \frac{1}{n}\right)^2, \tag{2.12}$$

que, ao expandir o produto notável, obtemos:

$$s^2 = p^2 - \frac{2p}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2. \tag{2.13}$$

Como, por hipótese, $s^2 > 2$ *temos que*

$$p^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{2p}{n} > 2. \tag{2.14}$$

Devemos então resolver (2.14)*. Agora, se* $n \geq 1$ *então* $0 \leq 1/n \leq 1$ *e assim* $0 \leq (1/n)^2 \leq 1$.

Por conseguinte,

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{2p}{n} \geq -\frac{2p}{n}. \tag{2.15}$$

Considerando a igualdade em (2.15) *e comparando com* (2.14) *podemos obter uma solução para a inequação:*

$$-\frac{2p}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{2p}{n} > 2 - p^2, \tag{2.16}$$

ou seja,

$$-\frac{2p}{n} > 2 - p^2, \tag{2.17}$$

que após algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$n > \frac{2p}{p^2 - 2}.$$

Sendo assim, qualquer n *que satisfaça* $(1/n)^2 - (2p/n) > -(2p/n)$ *satisfará* $n > (2p/r^2 - 2)$ *e é solução para* $s^2 > 2$*. Verifiquemos:*

$$s^2 = \left(p - \frac{1}{n}\right)^2 > (p - 1/(2p/p^2 - 2))^2,$$

que resulta em:

$$p^2 - p^2 + 2 + \frac{(p^2-2)^2}{4p^2} = 2 + \frac{(p^2-2)^2}{4p^2}.$$

Como $(p^2-2)^2 > 0$ *e* $4p^2 > 0$ *temos que* $(p^2-2)^2/4p^2 > 0$ *e* $2 + (p^2-2)^2/4p^2 > 2$*. Portanto,* $s^2 > 2$.

Ao analisarmos este exemplo, o que podemos constatar é que o corte em questão efetuado separa o conjunto dos números racionais em dois conjuntos: um composto por todas as raízes de 2 por falta (α) e o outro por todas as raízes de 2 por excesso (β). A lógica estabelecida pelo Dedekind foi a seguinte: se o conjunto das raízes por falta não possuir um maior elemento e o das raízes por excesso não possuir um menor elemento, esse corte definirá um número irracional. No caso, o corte β define o número irracional $\sqrt{2}$.

Sendo assim, pela definição proposta por Dedekind, um corte será produzido por um número não racional quando o mesmo não possuir elemento mínimo e quando o seu complementar não possuir elemento máximo.

Em suma, Dedekind elaborou um método por meio da extensão dos números racionais criando assim os números irracionais, preenchendo as lacunas da incompletude aritmética dos números estabelecendo com isso uma relação biunívoca entre o conjunto dos números reais (adjunção dos racionais com os irracionais) e o contínuo geométrico, ou seja, dos pontos da reta.

2.2 Relação de ordem nos cortes

Após definirmos corte faz-se necessário que estabeleçamos uma relação de ordem neste novo conjunto, uma vez que precisamos entender como podemos relacioná-los. Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados que dão suporte a esta relação.

Definição 2 *Sejam α e β cortes. Dizemos que α está contido em β e escrevemos $\alpha \subset \beta$ se todo p pertencente a α também pertencer a β.*

Definição 3 *Sejam α e β dois cortes. Dizemos que $\alpha = \beta$ se todo $p \in \alpha$ implica $p \in \beta$ e todo $q \in \beta$ implica $q \in \alpha$. Caso contrário dizemos que $\alpha \neq \beta$.*

Definição 4 *Sejam α e β dois cortes. Dizemos que α é maior do que ou igual (vale também para menor do que ou igual) a β e, escrevemos $\alpha \geq \beta$ (ou $\alpha \leq \beta$) se $\beta \subset \alpha$ (ou $\alpha \subset \beta$).*

Definição 5 *Sejam α e β dois cortes. Dizemos que α é maior do que (vale também para menor do que) a β e, escrevemos $\alpha > \beta$ (ou $\alpha < \beta$) se $\beta \subset \alpha$ e $\beta \neq \alpha$ (ou $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$).*

Proposição 1 *Sejam α e β dois cortes. Então $\alpha < \beta$ se, e somente se, existe um racional $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$.*

Demonstração

Temos, por hipótese, que se $\alpha < \beta$ então, por definição, $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$. Sendo assim, existe $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$.

Por hipótese, existe $p \in \mathbb{Q}$ com $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$. Isso implica dizer que $\alpha \neq \beta$. Agora temos que verificar que $\alpha \subset \beta$. Sabendo que $p \in \beta$, por definição, todo $r < p$ pertence a β. Sendo assim, como α é um corte, temos que $\alpha \subset \beta$. Logo, como $\alpha \neq \beta$ e $\alpha \subset \beta$ então $\alpha < \beta$.

Os próximos resultados garantem que são válidas a transitividade e a tricotomia no conjunto dos cortes.

Proposição 2 *Sejam α e β cortes, então, no máximo, uma das relações pode se manter:*

(i) $\alpha = \beta$

(ii) $\alpha < \beta$

(iii) $\beta < \alpha$

Demonstração

Suponhamos que $\alpha = \beta$ então, pela Definição 3, temos que (ii) e (iii) não podem acontecer.

Para provarmos que (ii) e (iii) são válidas devemos supor que uma dessas é falsa.

Consideremos que α não seja subconjunto apropriado de β, então $\exists\, p \in \alpha$ com $p \notin \beta$. Se $q \in \beta$, segue que $q < p$ desde que $p \notin \beta$. Logo, $q \in \alpha$ pelo item (ii) da definição 2. Portanto, β é subconjunto apropriado de α, ou seja, $\beta < \alpha$.

Agora, suponhamos que β não seja subconjunto apropriado de α, então $\exists\, p \in \beta$ com $p \notin \alpha$. Se $q \in \alpha$, segue que $q < p$ desde que $p \notin \alpha$, logo $q \in \beta$ pelo item (ii) da definição 2. Portanto, α é subconjunto apropriado de β, ou seja, $\alpha < \beta$.

Observação 3 *Essa proposição enunciada e provada acima garante uma ordenação no conjunto dos cortes.*

Proposição 3 *Sejam α, β e γ cortes. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ então $\alpha < \gamma$.*

Demonstração

Temos que, se $\alpha < \beta$ então $\exists\ p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$. E mais, como $\beta < \gamma$. Como consequência da definição temos:

- $p \in \beta$ e $q \notin \alpha$ então $p < q$
- $p \in \alpha$ e $p < q$ então $q \notin \alpha$

Sendo assim, $q \in \gamma$ e $q \notin \alpha$ implicando em $\alpha < \gamma$

Assim, podemos encerrar esta seção, uma vez que foi definida a relação de ordem. As seções seguintes serão reservadas para atribuir uma estrutura de corpo ao conjunto dos cortes definindo as operações de adição e multiplicação.

2.3 Operação de adição nos cortes

Definição 6 *Sejam, α e β dois cortes. Podemos definir a soma $\alpha + \beta$ como o conjunto formado por todos os elementos da forma $r + s$ tal que $r \in \alpha$ e $s \in \beta$.*

Mostraremos primeiramente, que $\alpha + \beta$ é um corte e em seguida que essa operação satisfaz as propriedades elementares como o fechamento da soma, a comutatividade, a associatividade, a existência do elemento neutro e do elemento inverso, e outras mais necessárias.

Proposição 4 *Sejam α e β dois cortes. Então $\alpha + \beta = \{r + s; r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\}$ é um corte.*

Demonstração

Devemos mostrar que $\alpha + \beta$ satisfaz os itens (i), (ii) e (iii) da definição de corte.

(i) Como α e β são cortes, sabemos que α e β são não vazios, ou seja, existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Sendo assim, temos $r + s \in \alpha + \beta$. Logo, $\alpha + \beta$ é não vazio. Agora, devemos mostrar que $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$. Como α e β são diferentes de $\mathbb{Q}$ temos que existem $p \notin \alpha$ e $q \notin \beta$ com p e q racionais. Por definição de $\alpha + \beta$ temos que $p + q \notin \alpha + \beta$. Logo, $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Seja $u = r + s \in \alpha + \beta$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, e seja $v \in \mathbb{Q}$ com $v < u$, então devemos mostrar que $v \in \alpha + \beta$. Como $v \in \mathbb{Q}$ temos que $\exists\, x \in \mathbb{Q}$ tal que $v = x + s$. Por hipótese $v < u$, ou seja, $x + s < r + s$, logo $x < r$. Como $r \in \alpha$ e $x \in \mathbb{Q}$ com $x < r$ temos $x \in \alpha$. Mas $v = x + s$ com $x \in \alpha$ e $s \in \beta$, portanto $v \in \alpha + \beta$, como queríamos.

(iii) Seja $u = r + s \in \alpha + \beta$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como α e β são cortes então $r < k$ para algum $k \in \alpha$ e $s < l$ para algum $l \in \beta$. Se somarmos ambas desigualdades teremos $r + s < k + l$ com $k + l \in \alpha + \beta$ pois $k \in \alpha$ e $l \in \beta$. Sendo assim, se $r + s \in \alpha + \beta$ então $r + s < k + l$ para algum $k + l \in \alpha + \beta$, como queríamos.

A proposição enunciada e demonstrada a seguir garantirá a validade das propriedades da operação de adição no conjunto dos cortes.

Observação 4 *Em nível de notação denotaremos o produto de α por β como sendo $\alpha\beta$.*

Proposição 5 *Sejam α, β e γ cortes. Então a operação de adição satisfaz as seguintes propriedades:*

(A_1) Associatividade: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(A_2) Comutatividade: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(A_3) Lei do Cancelamento: $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$.

(A_4) Existência e unicidade do elemento neutro: $\exists$ um corte 0^* tal que $\alpha + 0^* = \alpha$.

Demonstração

(A_1) Devemos mostrar que $(\alpha+\beta)+\gamma \subset \alpha+(\beta+\gamma)$ e que $\alpha+(\beta+\gamma) \subset (\alpha+\beta)+\gamma$. Sabemos que os elementos pertencentes a $(\alpha+\beta)+\gamma$ devem ser da forma $u = s+t$ tal que $s \in \alpha+\beta$, ou seja, $s = a+b$ com $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, e $t \in \gamma$. Sendo assim, u pode ser escrito da seguinte forma, $u = a + (b + t)$, uma vez que a, b e t são racionais e nesse conjunto vale a associatividade. Logo, $a \in \alpha$ e $b + t \in \beta + \gamma$, ou seja, $u \in \alpha + (\beta + \gamma)$. Portanto, $(\alpha+\beta)+\gamma \subset \alpha+(\beta+\gamma)$. De maneira análoga, mostramos que $\alpha+(\beta+\gamma) \subset (\alpha+\beta)+\gamma$.

Logo, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(A_2) Tomemos $v \in \alpha + \beta$, então $v = x + y$ com $x \in \alpha$ e $y \in \beta$. Como x e y são racionais vale a propriedade comutativa da soma nesse conjunto, então podemos escrever $v = y + x$, sendo $y \in \beta$ e $x \in \alpha$ então $v \in \beta + \alpha$. Sendo assim, todo elemento de $\alpha + \beta$ está em $\beta + \alpha$. Analogamente, podemos mostrar que todo elemento de $\beta\alpha$ está em $\alpha\beta$. Logo, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(A_3) Para mostrarmos que se $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ então $\alpha = \beta$, iremos mostrar que $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \alpha$. Pois bem, seja $p \in \alpha$, então existe $r \in \alpha + \gamma$ tal que $r = p + q$ com $q \in \gamma$. Mas $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, então existe $s \in \beta$ tal que $r = s + q$. Como $r = r$ então $p + q = s + q$. Sabendo que p, q e s são racionais então vale a lei do cancelamento e $p = s$. Como $s \in \beta$ e $p = s$ então $p \in \beta$. Logo $\alpha \subset \beta$. Para mostrarmos a outra inclusão basta utilizarmos o mesmo raciocínio. Logo, $\alpha = \beta$.

(A_4) Utilizaremos as inclusões para mostrarmos a existência do elemento neutro, ou seja, mostraremos que $\alpha + 0^* \subset \alpha$ e $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Primeiramente, vamos definir 0^* como sendo o conjunto $\{p \in \mathbb{Q}; p < 0\}$. Pois bem, seja $r \in \alpha + 0^*$ então $r = p + q$ com $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$. Assim, $p + q < p$ uma vez que $q < 0$. Por definição de corte, temos $p \in \alpha$ e $p + q < p$ então $p + q \in \alpha$. Logo $\alpha + 0^* \subset \alpha$.

Agora, suponhamos $r \in \alpha$ e tomemos $s \in \alpha$ com $r < s$, então $r - s < 0$ e $r - s \in 0^*$. Podemos então escrever $r = s + (r - s)$ com $s \in \alpha$ e $r - s \in 0^*$. Sendo assim, $r \in \alpha + 0^*$. Logo, $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Portanto, $\alpha + 0^* = \alpha$, garantindo assim a existência do elemento neutro da soma no conjunto dos cortes.

Devemos agora mostrar que esse corte 0^* é único. Suponhamos que 0^* não seja único, ou seja, existe outro corte φ tal que $\alpha + \varphi = \alpha$. Temos, por hipótese, $\alpha = \alpha + 0^*$, ou seja, $\alpha + \varphi = \alpha + 0^*$ e pela lei do cancelamento dos cortes temos que $\varphi = 0^*$.

Agora, precisamos mostrar a existência e unicidade do elemento simétrico, mas para tal provaremos o teorema a seguir.

Teorema 1 *Seja α um corte e $r > 0$ um racional. Existem racionais p, q tais que $p \in \alpha$, $q \notin \alpha$, q não é o supremo de α e $q - p = r$.*

Demonstração

Consideremos um racional $s \in \alpha$. Para $n = 0, 1, ...$, seja $s_n = s + nr$. Então existe um único inteiro m tal que $s_m \in \alpha$ e $s_{m+1} \notin \alpha$. Se s_{m+1} não for o número superior mínimo de α, consideremos $p = s_m$ e $q = s_{m+1}$, ou seja, $p = s + mr$ e $q = s + mr + r$. Sendo assim, temos:

$$q - p = (s + mr + r) - (s + mr),$$

obtendo, após efetuarmos os devidos cálculos,

$$q - p = r,$$

como queríamos.

Agora, se s_{m+1} for o número superior mínimo de α, consideremos $p = s_m + r/2$ e $q = s_{m+1} + r/2$, ou seja,

$$p = \frac{2s + 2mr + r}{2} \text{ e } q = \frac{2s + 2mr + 3r}{2}.$$

Sendo assim, teremos:

$$q - p = \frac{2s + 2mr + 3r}{2} - \frac{2s + 2mr + r}{2},$$

que ao realizarmos as devidas manipulações algébricas, obtemos:

$$q - p = r,$$

como queríamos.

Observação 5 *Chamaremos de S o conjunto de todas as cotas superiores de α e de Sup(α) a menor das cotas superiores de S a fim de facilitar as notações. Para entendimento dos conceitos de cotas e supremo de conjuntos indicamos o livro (LIMA, 1993).*

Proposição 6 *Seja α um corte. Existe um único corte β tal que $\alpha + \beta = 0^*$.*

Demonstração

Primeiramente, vamos definir β como sendo o conjunto $\{q \in \mathbb{Q}; -q - r \notin \alpha\}$ com $-q \in S$, $-q \neq \text{Sup}(\alpha)$ e $r > 0$ tal que $q - p = r$ com $p \in \alpha$.

Nessa demonstração teremos três etapas: primeiro vamos mostrar que β é um corte , em seguida que $\alpha + \beta = 0^*$ e por fim, a unicidade de β.

Para provarmos que β é um corte basta provarmos as três condições da definição de corte.

(i) Devemos mostrar que $\beta \neq \emptyset$ e $\beta \neq \mathbb{Q}$, De fato, como α é um corte temos que $\alpha \neq \mathbb{Q}$ e assim, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $q \notin \alpha$ e $q \neq$ Sup(α). Se tomarmos $p \in \alpha$, o teorema anterior garante que existe $r > 0$ com $r = q - p$ de forma que $-q - r \notin \alpha$, sendo assim $q \in \beta$. Logo, $\beta \neq \emptyset$. Agora, como $\alpha \neq \emptyset$ então existe algum $p \in \alpha$ e daí $p \notin S$ então $p \in \beta$. Logo $\beta \neq \mathbb{Q}$, pois $p \in \mathbb{Q}$

(ii) Se p e q são racionais com $p \in \beta$ e $q < p$, devemos mostrar que $q \in \beta$. Por definição, temos que se $p \in \beta$ então $-p \in S$ e $-p \neq$ Sup(α), ou seja, $-p \notin \alpha$. De $q < p$ temos que $-p < -q$, o que implica em $-q \in S$ com $-q \neq$ Sup(α) e então $q \in \beta$, como queríamos.

(iii) Se $p \in \beta$ precisamos mostrar que $p < r$ para qualquer $r \in \alpha$. Como $p \in \beta$, $-p \in S$ e $-p \neq$ Sup(α) então existe um racional q tal que $-q < -p$ e $-q \notin \alpha$. Se tomarmos r como sendo o ponto médio da distância entre p e q teremos $r = (p + q)/2$ e $-q < -r < -p$ com $-r \in S$. Da última desigualdade temos que $-r < -p$ então $p < r$ com $r \in \beta$, pois $-r \in S$, como queríamos. Logo, β é um corte.

Agora, vamos mostrar que $\alpha + \beta = 0^*$. Para tal, devemos mostrar que $\alpha + \beta \subset 0^*$ e $0^* \subset \alpha + \beta$.

- $\alpha + \beta \subset 0^*$

  Suponhamos $p \in \alpha + \beta$ então $p = q + r$ com $q \in \alpha$ e $r \in \beta$. Portanto, $-q \notin \alpha$ e $-q \in S$, logo $q < -r$. Da desigualdade, obtemos que $q + r < 0$, o que implica em $p \in 0^*$. Portanto, $\alpha + \beta \subset 0^*$.

- $0^* \subset \alpha + \beta$

  Agora, suponhamos $p \in 0^*$ então $p < 0$. Podemos determinar racionais $q \in \alpha$, $r \notin \alpha$ com $r \neq$ Sup(α) de modo que $r - q = -p$. Como $-r \in \beta$, temos $p = q - r$ com $q \in \alpha$ e $-r \in \beta$, logo $p \in \alpha + \beta$. Portanto, $0^* \subset \alpha + \beta$. Sendo assim, $\alpha + \beta = 0^*$.

Para finalizarmos esta demonstração, vamos mostrar que β é único. Suponhamos que β não seja único, então existe β_1 tal que $\alpha+\beta_1 = 0^*$, mas $\alpha+\beta = 0^*$ então $\alpha+\beta_1 = \alpha+\beta$. Pela lei do cancelamento dos cortes temos que $\beta_1 = \beta$, provando assim a unicidade do elemento inverso na adição nos cortes.

Observação 6 *Designamos por $-\alpha$ o corte β da proposição anterior.*

Para finalizarmos esta seção vamos mostrar que, é válida a compatibilidade da adição com relação à ordem, com a proposição a seguir.

Proposição 7 *Sejam α, β e γ cortes. Se $\alpha < \beta$ então $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.*

Demonstração

Pela definição de ordem podemos entender $\alpha < \beta$ como sendo $\alpha \subset \beta$. Para mostrarmos devemos tomar um elemento em $\alpha + \gamma$ e concluir que este pertence a $\beta + \gamma$. Pois bem, seja $p \in \alpha + \gamma$ então $p = r + s$ com $r \in \alpha$ e $s \in \gamma$. Como $\alpha < \beta$ então $r \in \beta$, logo $p \in \beta + \gamma$, pois $p = r + s$ com $r \in \beta$ e $s \in \gamma$. Portanto, $\alpha + \gamma \subset \beta + \gamma$ implicando em $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

2.4 Operação de multiplicação nos cortes

Nesta seção definiremos a multiplicação no conjunto dos cortes e mostraremos que este conjunto determina um corpo. Nessa operação devemos levar em consideração os diferentes casos que correspondem aos sinais dos fatores (cortes).

Definição 7 *Sejam α, β cortes tais que $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$. Definimos o produto de α por β como sendo:*

$$\mathbb{Q}_- \cup \{pq/p \in \alpha, q \in \beta, p > 0, q > 0\}.$$

Teorema 2 *Se α e β são cortes tais que $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$ então*

$$\gamma = \mathbb{Q}_- \cup \{pq/p \in \alpha, q \in \beta, p > 0, q > 0\}$$

é um corte.

Demonstração

Para provarmos devemos validar as três condições da definição de corte.

(i) $\gamma \neq \emptyset$ e $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

Como $\mathbb{Q}_- \subset \gamma$ temos que $\gamma \neq \emptyset$ pois $\mathbb{Q}_- \neq \emptyset$. Agora, por α e β serem cortes existem $r \notin \alpha$ e $s \notin \beta$ com r e s racionais. Sendo assim, $rs \notin \gamma$ por definição. Logo, $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Se $x \in \gamma$, $y \in \mathbb{Q}$ e $y < x$ então $y \in \gamma$.

Temos alguns casos a considerar:

(C_1) Se $x \leqslant 0$ então teremos $y < x \leqslant 0$ implicando em $y < 0$, ou seja, $y \in \mathbb{Q}_-$. Logo, $y \in \gamma$ pois $\mathbb{Q}_- \subset \gamma$.

(C_2) Se $x > 0$ e $y \leqslant 0$. Como $y < x$ e $x > 0$ temos que $y \leqslant 0$. Logo, $y \in \gamma$.

(C_3) Se $x > 0$ e $y > 0$ então $x = pq$ com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$ com $p > 0$ e $q > 0$. Por hipótese temos $0 < y < x$, ou seja, $y < pq$ que equivale a $(y/p) < q$ com $(y/p) > 0$. Como $q \in \beta$ e $0 < y/p < q$ com $y/p \in \beta$. E mais, podemos escrever $y = p(y/p)$, com $p \in \alpha$ e $y/p \in \beta$, logo $y \in \gamma$, como queríamos.

(iii) Se $x \in \gamma$ então $x < y$ para algum $y \in \gamma$. Como $x \in \gamma$ temos que $x = pq$ com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Sendo α e β cortes então existe $r \in \alpha$ tal que $p < r$ e existe $s \in \beta$ tal que $q < s$. Por definição temos que $rs \in \gamma$ e mais, como $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$ e $s > 0$ podemos afirmar então que $pq < rs$. ou seja. $x < rs$. Tomando $y = rs$, provamos o que queríamos.

Portanto, γ é um corte.

Definição 8 *Levando em consideração os sinais dos fatores podemos generalizar a definição do produto de α por β, ambos cortes, como sendo:*

$$\alpha\beta = \begin{cases} 0^*, \textit{ se } \alpha = 0^* \textit{ ou } \beta = 0^* \\ -[(-\alpha)\beta], \textit{ se } \alpha < 0^* \textit{ e } \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)], \textit{ se } \alpha > 0^* \textit{ e } \beta < 0^* \\ (-\alpha)(-\beta), \textit{ se } \alpha < 0^* \textit{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

Após definida a operação de multiplicação no conjunto dos cortes enunciaremos e provaremos as propriedades usuais desta operação. Vale ressaltar que as demonstrações destas propriedades estarão incompletas, uma vez que seria necessário considerar todos os casos de acordo com o sinal, o que tornaria o processo demasiadamente longo. Porém, os demais casos seguem o mesmo raciocínio, podendo ser realizados pelo leitor, caso queira.

Proposição 8 *Sejam α, β e γ cortes. A multiplicação satisfaz as seguintes propriedades:*

(M_1) Associatividade: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

(M_2) Comutatividade: $\alpha\beta = \beta\alpha$

(M_3) Lei do Cancelamento: $\alpha\gamma = \beta\gamma \Longrightarrow \alpha = \beta$ com $\gamma \neq 0^*$

(M_4) Existência e unicidade do elemento neutro: existe um corte 1^* tal que $\alpha 1^* = \alpha$, $\forall\alpha$

(M_5) Distributividade da multiplicação em relação a adição: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Demonstração

(M_1)

Caso 1: $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma > 0^*$

Para provarmos a igualdade mostraremos que $(\alpha\beta)\gamma \subset \alpha(\beta\gamma)$ e $\alpha(\beta\gamma) \subset (\alpha\beta)\gamma$.

(i) $(\alpha\beta)\gamma \subset \alpha(\beta\gamma)$:

Consideremos $p \in (\alpha\beta)\gamma$ então, pela definição de multiplicação de cortes, $p \in \mathbb{Q}_-$ ou $p = rs$ com $r \in \alpha\beta$ tal que $r > 0$ e $s \in \gamma$ com $s > 0$. Mediante isto temos duas possibilidades para p, ou $p \in \mathbb{Q}_-$ ou $p = (ab)s$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$ e $s \in \gamma$, com todos eles maiores que zero. Agora, se $p \in \mathbb{Q}_-$ então claramente $p \in \alpha(\beta\gamma)$ pois $\mathbb{Q}_- \subset \alpha(\beta\gamma)$ por definição. Porém, se $p = (ab)s$ temos pela propriedade associativa dos racionais que $p = a(bs)$ nos quais $a \in \alpha$ e $bs \in \beta\gamma$ por definição, logo $p \in \alpha(\beta\gamma)$. Portanto, $(\alpha\beta)\gamma \subset \alpha(\beta\gamma)$.

(ii) $\alpha(\beta\gamma) \subset (\alpha\beta)\gamma$:

Seja $p \in \alpha(\beta\gamma)$ então $p \in \mathbb{Q}_-$ ou $p = rs$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta\gamma$, ou seja, $p = r(bc)$ com $b \in \beta$ e $c \in \gamma$ com r, b e c maiores que zero. Se $p \in \mathbb{Q}_-$ então $p \in (\alpha\beta)\gamma$ pois $\mathbb{Q}_- \subset (\alpha\beta)\gamma$. Agora, se $p = rs$ então $p = r(bc)$ e pela associatividade dos racionais temos $p = (rb)c$ com $rb \in \alpha\beta$ e $c \in \gamma$, logo $p \in (\alpha\beta)\gamma$. Portanto, $\alpha(\beta\gamma) \subset (\alpha\beta)\gamma$.

Caso 2: $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$

Como $\alpha < 0^*$ e $\beta < 0^*$ então por definição temos que $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta) > 0^*$ e

$\gamma < 0^*$, logo:

$$(\alpha\beta)\gamma = -\left[((-\alpha)(-\beta))(-\gamma)\right],$$
$$(\alpha\beta)\gamma = -\left[(-\alpha)((-\beta)(-\gamma))\right] \text{ pelo caso 1},$$
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \text{ pela definição de multiplicação de cortes},$$

como queríamos.

Caso 3: $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma < 0^*$

Por definição, temos:

$$(\alpha\beta)\gamma = -\left[(\alpha\beta)(-\gamma)\right],$$
$$(\alpha\beta)\gamma = -\left[\alpha(\beta(-\gamma))\right] \text{ pelo caso 1},$$
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \text{ por definição.}$$

Caso 4: $\alpha = 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma < 0^*$

Por definição, temos:

$$(\alpha\beta)\gamma = (0^*\beta)\gamma = 0^*\gamma = 0^* = 0^*(\beta\gamma) = \alpha(\beta\gamma),$$

como queríamos.

(M_2)

Caso 1: $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$

Para mostrarmos a validade da igualdade mostraremos que $\alpha\beta \subset \beta\alpha$ e que $\beta\alpha \subset \alpha\beta$.

(i) $\alpha\beta \subset \beta\alpha$:

Consideremos $p \in \alpha\beta$ então $p \in \mathbb{Q}_-$ ou $p = rs$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ ambos maiores que zero. Como r e s são racionais então vale a comutatividade, e assim podemos escrever $p = sr$. Então se $p \in \mathbb{Q}_-$ então $p \in \beta\alpha$ pois $\mathbb{Q}_- \subset \beta\alpha$ ou se $p = sr$ então $p \in \beta\alpha$. Assim, $\alpha\beta \subset \beta\alpha$.

(ii) $\beta\alpha \subset \alpha\beta$:

Seja $p \in \beta\alpha$ então $p \in \mathbb{Q}_-$ ou $p = rs$ com $r \in \beta$ e $s \in \alpha$, ambos maiores que zero. Como r e s são racionais então vale a comutatividade e, assim podemos escrever $p = sr$. Se $p \in \mathbb{Q}_-$ então $p \in \alpha\beta$ pois $\mathbb{Q}_- \subset \alpha\beta$, ou se $p = sr$ então $p \in \alpha\beta$. Assim, $\beta\alpha \subset \alpha\beta$. Logo, $\alpha\beta = \beta\alpha$, como queríamos.

Caso 2: $\alpha > 0^*$ e $\beta < 0^*$

$$\alpha\beta = -\left[\alpha(-\beta)\right],$$

$$\alpha\beta = -\left[(-\beta)\alpha\right] \text{ pelo caso 1,}$$

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$

como queríamos.

Caso 3: $\alpha < 0^*$ e $\beta > 0^*$

$$\alpha\beta = -\left[(-\alpha)\beta\right],$$

$$\alpha\beta = -\left[\beta(-\alpha)\right] \text{ pelo caso 1,}$$

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$

como queríamos.

Caso 4: $\alpha = 0^*$

Por definição, temos:

$$\alpha\beta = 0^*\beta = 0^* = \beta 0^* = \beta\alpha$$

Para $\beta = 0^*$ provamos de forma análoga a $\alpha = 0^*$

(M_3) Devemos provar que se $\alpha\gamma = \beta\gamma$ então $\alpha = \beta$. Para tal, será necessário analisarmos cinco casos:

Caso 1: Por hipótese, $\alpha\gamma = \beta\gamma$ então se $\alpha\gamma > 0^*$ teremos $\beta\gamma > 0^*$ com $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma > 0^*$.

Iremos provar que $\alpha = \beta$ e para isso provaremos que $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \alpha$.

(i) $\alpha \subset \beta$

Seja $p \in \alpha$, então existe $r \in \alpha\gamma$ tal que $r = ps$ no qual $s \in \gamma$. Como, por hipótese, $\alpha\gamma = \beta\gamma$ temos que existe $q \in \beta$ de forma que $r = qs$. Como $r = r$ então $ps = qs$ e pela lei do cancelamento dos racionais temos que $p = q$, ou seja, $p \in \beta$. Garantindo $\alpha \subset \beta$.

(ii) $\beta \subset \alpha$

Seja $p \in \beta$ então existe $q \in \beta\gamma$ tal que $q = pr$ no qual $r \in \gamma$. Como, por hipótese, $\alpha\gamma = \beta\gamma$ então existe $s \in \alpha$ de forma que $q = sr$. Como $q = q$ então $pr = sr$ e pela lei do cancelamento dos racionais temos $p = s$, ou seja, $p \in \alpha$. Logo, $\beta \subset \alpha$.

Portanto, $\alpha = \beta$.

Caso 2: Por hipótese, $\alpha\gamma = \beta\gamma$ então se $\alpha\gamma > 0^*$ teremos $\beta\gamma > 0^*$ com $\alpha < 0^*$,

$\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

Temos, por definição, que:

$$\alpha\gamma = (-\alpha)(-\gamma) \text{ e } \beta\gamma = (-\beta)(-\gamma).$$

Como $\alpha\gamma = \beta\gamma$ temos que:

$$(-\alpha)(-\gamma) = (-\beta)(-\gamma),$$

$$(-\alpha) = (-\beta) \text{ pelo caso 1},$$

$$\alpha = \beta, \text{ pois } \alpha < 0^* \text{ e } \beta < 0^*.$$

Caso 3: Por hipótese, $\alpha\gamma = \beta\gamma$ então se $\alpha\gamma < 0^*$ teremos $\beta\gamma < 0^*$ com $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma > 0^*$.

Por definição temos:

$$\alpha\gamma = -\left[(-\alpha)\gamma\right] \text{ e } \beta\gamma = -\left[(-\beta)\gamma\right]$$

então

$$-\left[(-\alpha)\gamma\right] = -\left[(-\beta)\gamma\right],$$

$$(-\alpha)\gamma = (-\beta)\gamma,$$

$$(-\alpha) = (-\beta) \text{ pelo caso 1},$$

$$\alpha = \beta \text{ pois } \alpha < 0^* \text{ e } \beta < 0^*.$$

Caso 4: Por hipótese, $\alpha\gamma = \beta\gamma$ então se $\alpha\gamma < 0^*$ teremos $\beta\gamma < 0^*$ com $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

Por definição temos:

$$\alpha\gamma = -\left[\alpha(-\gamma)\right] \text{ e } \beta\gamma = -\left[\beta(-\gamma)\right]$$

então

$$-\left[\alpha(-\gamma)\right] = -\left[\beta(-\gamma)\right]$$

$$\alpha(-\gamma) = \beta(-\gamma)$$

$$\alpha = \beta, \text{ pelo caso 1}.$$

Caso 5: Por hipótese, $\alpha\gamma = \beta\gamma$ então se $\alpha\gamma = 0^*$ teremos $\beta\gamma = 0^*$ com $\gamma \neq 0^*$.

Por definição temos: $\alpha\gamma = 0^*$ então $\alpha = 0^*$ pois $\gamma \neq 0^*$ Por outro lado, $\beta\gamma = 0^*$ então $\beta = 0^*$ pois $\gamma \neq 0^*$. Sendo assim, $\alpha = \beta = 0^*$.

Logo, é válida a lei do anulamento em relação a multiplicação.

(M_4) Devemos mostrar que $\alpha 1^* = \alpha$. Consideremos $1^* = \{y \in \mathbb{Q}/y < 1\}$ um corte (provado no exemplo 1). Devemos considerar os seguintes casos:

Caso 1: $\alpha > 0^*$

Para provarmos que $\alpha 1^* = \alpha$ mostraremos que $\alpha 1^* \subset \alpha$ e $\alpha \subset \alpha 1^*$.

(i) $\alpha 1^* \subset \alpha$:

Consideremos $p \in \alpha 1^*$ então $p \in \mathbb{Q}_-$ ou $p = rs$ com $r \in \alpha$ e $s \in 1^*$, ou seja, $r > 0$ e $0 < s < 1$. Se $p \in \mathbb{Q}_-$ então $p \in \alpha$ pois $\mathbb{Q}_- \subset \alpha$. Agora. se $p = rs$ então teremos $rs < r$ pois $0 < s < 1$ e mais, como $r \in \alpha$ com $rs < r$ temos que $rs \in \alpha$. Assim, $\alpha 1^* \subset \alpha$.

(ii) $\alpha \subset \alpha 1^*$:

Consideremos $p \in \alpha$ então se $p \in \mathbb{Q}_-$ podemos afirmar que $p \in \alpha 1^*$ pois $\mathbb{Q}_- \subset \alpha 1^*$. Agora, se $p > 0$ então existe $r \in \alpha$ com $p < r$. Assim, podemos escrever $p = r(p/r)$ com $r \in \alpha$ e $p/r \in \alpha 1^*$, pois se $p < r$ então $p/r < 1$. Logo, $p \in \alpha 1^*$ e $\alpha \subset \alpha 1^*$.

Portanto, $\alpha 1^* = \alpha$.

Caso 2: $\alpha < 0^*$

Pela definição de multiplicação de cortes, temos:

$$\alpha 1^* = -[(-\alpha)1^*],$$

$$\alpha 1^* = -(-\alpha),$$

$$\alpha 1^* = \alpha.$$

Caso 3: $\alpha = 0^*$

Por definição temos:

$$\alpha 1^* = 0^* 1^* = 0^* = \alpha.$$

Logo, para todo corte α temos $\alpha 1^* = \alpha$.

Agora, vamos mostrar que 1^* é único. Suponhamos que exista um corte Δ tal que

$\alpha\Delta = \alpha$. Temos que $\alpha 1^* = \alpha\Delta$ e pela lei do cancelamento $1^* = \Delta$.

(M_5) Devemos provar que $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ mas para isso será necessário considerarmos alguns casos:

Caso 1: $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma > 0^*$

Para provarmos a igualdade utilizaremos a continência de conjuntos:

(i) $(\alpha+\beta)\gamma \subset \alpha\gamma + \beta\gamma$:

Seja $p \in (\alpha+\beta)\gamma$ então se $p \leqslant 0$ teremos que $p \in \alpha\gamma+\beta\gamma$ pois $\mathbb{Q}_- \subset \alpha\gamma+\beta\gamma$. Agora, se $p > 0$ então $p = (r+s)q$ com $r+s \in \alpha+\beta$, sendo $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, e $q \in \gamma$. Assim, aplicando a propriedade distributiva dos racionais teremos que $p = rq + sq$ com $rq \in \alpha\gamma$ e $sq \in \beta\gamma$, ou seja, $rq + sq \in \alpha\gamma+\beta\gamma$ e consequentemente $p \in \alpha\gamma+\beta\gamma$.

(ii) $\alpha\gamma+\beta\gamma \subset (\alpha+\beta)\gamma$:

Seja $w \in \alpha\gamma+\beta\gamma$ então se $w \leqslant 0$ teremos que $w \in (\alpha+\beta)\gamma$ pois $\mathbb{Q}_- \subset (\alpha+\beta)\gamma$. Agora, se $w > 0$ então $w = qp + sr$ com $qp \in \alpha\gamma$ e $sr \in \beta\gamma$ sendo $p, r \in \gamma$, $q \in \alpha$ e $s \in \beta$. Suponhamos que $p \leqslant r$ então $p/r < 1$ e mais, $(p/r)q < q$ e como $q \in \alpha$ então $(p/r)q \in \alpha$. Sendo assim, podemos escrever $w = ((p/r)q + s)r$ com $(p/r)q \in \alpha$, $s \in \beta$ e $r \in \gamma$. Logo, $w \in (\alpha+\beta)\gamma$. Agora, suponhamos $r \leqslant p$ então $r/p < 1$ e $(p/r)s < s$, ou seja, $(p/r)s \in \gamma$. Sendo assim, podemos escrever $w = p(q + (p/r)s)$ com $p \in \alpha$, $q \in \beta$ e $(p/r)s \in \gamma$. Logo, $w \in (\alpha+\beta)\gamma$.

Portanto, $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$

Caso 2: $\alpha > 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma > 0^*$ tal que $\beta + \gamma > 0^*$.

$$\alpha\gamma = \alpha\left[(\beta+\gamma) + (-\beta)\right],$$
$$\alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma) + \alpha(-\beta) \text{ pelo caso 1,}$$
$$\alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma) - \alpha\beta,$$
$$\alpha\gamma + \alpha\beta = \alpha(\beta+\gamma).$$

Caso 3: $\alpha > 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma > 0^*$ tal que $\beta + \gamma < 0^*$.

$$\alpha(-\beta) = \alpha\left[\gamma + (-(\beta+\gamma))\right],$$
$$\alpha(-\beta) = \alpha\gamma + \alpha(-(\beta+\gamma)) \text{ pelo caso 1,}$$
$$-\alpha\beta = \alpha\gamma - \alpha(\beta+\gamma),$$
$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\gamma + \alpha\beta.$$

Os demais casos tem suas provas derivadas dos casos aqui já provados e da definição de multiplicação no conjunto dos cortes. Sendo assim, $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\gamma + \alpha\beta$.

Para provarmos a existência do elemento inverso precisaremos do próximo teorema.

Teorema 3 *Sejam $\alpha > 0^*$ um corte, r um número racional tal que $0 < r < 1$. Então existem racionais $p \in \alpha$ e $q \in S$, com $p \neq$ Sup(α), caso S tenha mínimo, tais que $p/q = r$.*

Demonstração

Seja $s \notin \alpha$ um racional tal que $s > 0$. Consideremos o racional $s_n = sr^n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $s_n > 0$. Tomemos n^* o maior natural tal que $n^* \in S$ e $s_{n^*+1} \in \alpha$. Para demonstrarmos devemos considerar dois casos:

Caso 1: $s_{n^*+1} \in \alpha$, $s_{n^*} \in S$ e $s_{n^*} \neq$ Sup(S).

Tomando $q = s_{n^*}$ e $p = s_{n^*+1}$ teremos:

$$\frac{p}{q} = \frac{s_{n^*+1}}{s_{n^*}}.$$

Mas, por hipótese, temos que

$$\frac{s_{n^*+1}}{s_{n^*}} = \frac{sr^{n^*+1}}{sr^{n^*}},$$

e

$$\frac{sr^{n^*+1}}{sr^{n^*}} = \frac{sr^{n^*}r}{sr^{n^*}}.$$

Logo,

$$\frac{p}{q} = \frac{sr^{n^*}r}{sr^{n^*}} = r.$$

Caso 2: $s_{n^*+1} \in \alpha$, $s_{n^*} \in S$ e $s_{n^*} =$ Sup(S).

Para efetuarmos as contas será necessário considerarmos:

$$q = \frac{s_{n^*}}{\frac{r+1}{2}} \text{ e } p = \frac{s_{n^*+1}}{\frac{r+1}{2}},$$

o que nos garante:

$$\frac{p}{q} = \frac{\frac{s_{n^*+1}}{\frac{r+1}{2}}}{\frac{s_{n^*}}{\frac{r+1}{2}}}.$$

Efetuando os cálculos obtemos:

$$\frac{p}{q} = \frac{s_{n^*+1}}{s_{n^*}}.$$

Por hipótese,

$$\frac{s_{n^*+1}}{s_{n^*}} = \frac{sr^{n^*+1}}{sr^{n^*}},$$

ou seja,

$$\frac{p}{q} = \frac{sr^{n^*}r}{sr^{n^*}},$$

que implica em $p/q = r$.

Além disso, teremos duas possibilidades para analisar:

(i) $q > s_{n^*}$ pois

$$0 < r < \frac{r+1}{2} < 1$$

.

Efetuando os devidos cálculos e multiplicando por s_{n^*} ambos os lados da desigualdade, obtemos:

$$\frac{s_{n^*}}{\frac{r+1}{2}} > s_{n^*},$$

ou seja, $q > s_{n^*}$.

Como $s_{n^*} < q$ então $q \in S$.

(ii) $p < s_{n^*}$, pois

$$0 < r < \frac{r+1}{2} < 1.$$

Aplicando a propriedade do inverso e multiplicando por s_{n^*} ambos os lados da desigualdade acima, obtemos:

$$\frac{s_{n^*}}{r} > \frac{s_{n^*}}{\frac{r+1}{2}}.$$

Substituindo s_{n^*} por sr^{n^*}, temos: $sr^{n^*} > sr^{n^*+1}$, implicando em $q \in S$ pois $p <$ Sup(S).

Portanto, sendo $\alpha > 0^*$ um corte, r um número racional $o < r < 1$, existem racionais $p \in \alpha$ e $q \in S$, com $p \neq$ Sup(S), tais que $p/q = r$.

Proposição 9 *Seja α um corte qualquer com $\alpha \neq 0^*$. Então existe um único corte β tal que $\alpha\beta = 1^*$.*

Demonstração

Como α é qualquer corte diferente de zero, tomemos $\alpha > 0^*$. Agora, consideremos o corte:

$$\beta = \mathbb{Q}_- \cup \{p \in \mathbb{Q}/p > 0, 1/p \in S, 1/p \neq Sup(\alpha)\}.$$

(i) $\beta \neq \emptyset$ e $\beta \neq \mathbb{Q}$

Como $\mathbb{Q}_- \subset \beta$ temos que $\beta \neq \emptyset$. Agora, como $\alpha > 0^*$ existe algum racional positivo $p \in \alpha$, isto é, $p \notin S$. Podemos escrever $p = 1/(1/p)$, isto significa que $1/p \notin \beta$, garantindo $\beta \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Se $p \in \beta$ e $q \in \mathbb{Q}$ com $q < p$ então devemos mostrar que $q \in \beta$. Temos dois casos a analisar:

Caso 1: Se $q \leqslant 0$ com $q < p$ então $q \in \beta$.

Caso 2: Se $q > 0$ com $q < p$.

Como $p \in \beta$, $1/p \notin S$ e $1/p \neq Sup(\alpha)$ e como $1/q > 1/p$ teremos que $1/q \in S$ e $1/q \neq Sup(\alpha)$. Sendo assim, $1/q \in S$ com $1/q \neq Sup(\alpha)$ implicando em $q \in \beta$.

(iii) Se $p \in \beta$ então $p < q$ para algum $q \in \beta$. Precisaremos analisar dois casos:

Caso 1: $p \leqslant 0$:

Se $p \leqslant 0$ então pela definição do corte β existe algum racional $q \in \beta$ de forma que $p < q$ uma vez que $q > 0$.

Caso 2: $p > 0$:

Como $p > 0$ e $p \in \beta$ teremos $1/p \in S$ com $1/p \neq Sup(\alpha)$. Sendo assim, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \in S$ e $r < 1/p$, e mais $r < s < 1/p$ com $s \in \mathbb{Q}$ implicando em $s \in S$ com $s \neq Sup(\alpha)$. Escrevendo s como $1/(1/s)$ temos que $1/s \in \beta$ e pela última desigualdade teremos $1/s > p$. Pois bem, basta considerarmos $q = 1/s$ com $q > p$ e consequentemente $q \in \beta$, como queríamos.

Portanto, fica provado que β é um corte. Agora, verifiquemos que $\alpha\beta = 1^*$ e para tal mostraremos que $\alpha\beta \subset 1^*$ e $1^* \subset \alpha\beta$. Além disso, mostraremos a unicidade deste elemento.

Caso 1: $\alpha > 0^*$

(i) $\alpha\beta \subset 1^*$:

Temos que se $\alpha > 0^*$ então $\beta > 0^*$. Tomemos $r \in \alpha\beta$ então $r = pq$ com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Sendo assim. $1/q \in S$ com $1/q \neq Sup(\alpha)$, logo $1/q > p$ e consequentemente $pq < 1$ e assim $r \in \alpha\beta$, como queríamos.

(ii) $1^* \subset \alpha\beta$:

Seja $r \in 1^*$. Temos que se $r \leqslant 0$ então $r \in \alpha\beta$ pois $\mathbb{Q}_- \subset \alpha\beta$. Agora, suponhamos $0 < r < 1$, pelo teorema anterior existem racionais $p \in \alpha$ e $q \in S$ com $q \neq Sup(\alpha)$ tais que $p/q = r$, ou, $r = p(1/q)$. Logo, $r \in \alpha\beta$ e $1^* \subset \alpha\beta$.

Caso 2: $\alpha < 0^*$

Se $\alpha < 0^*$ então $-\alpha > 0^*$, logo existe β tal que $(-\alpha)\beta = 1^*$. Como $(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta)$ então $\alpha(-\beta) = 1^*$, como queríamos.

Agora, precisamos provar a unicidade do elemento inverso da multiplicação dos cortes. Suponhamos que exista um corte γ tal que $\alpha\gamma = 1^*$ e como $\alpha\beta = 1^*$ então $\gamma = 1^*\gamma$.

Como $\alpha\beta = 1^*$, teremos: $\gamma = (\alpha\beta)\gamma$.

Agora, aplicando a comutatividade e em seguida a associatividade da multiplicação dos cortes, teremos $\gamma = \beta(\alpha\gamma)$ implicando em $\gamma = \beta$ pois $\alpha\gamma = 1^*$.

Após definirmos as duas operações no conjunto dos cortes, enunciarmos e demonstrarmos suas propriedades, podemos afirmar que o conjunto dos cortes determina um corpo ordenado, uma vez que foi estabelicida uma relação de ordem e o mesmo é fechado para as operações de adição e multiplicação.

2.5 Identificação dos números racionais como cortes

Nesta seção faremos a identificação do corpo ordenado dos números racionais como o corpo ordenado dos cortes racionais utilizando como recurso o isomorfismo de corpos que preserva a relação de ordem.

Definição 9 *O corte definido por um número racional r, isto é, $\{p \in \mathbb{Q}/p < r\}$ será de-*

nominado r^*.

Definição 10 *O conjunto de todos os cortes racionais será denotado por $\bar{\mathbb{Q}}$.*

Teorema 4 *Considere $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$ definida por $f(r) = r^*$, que a cada racional r associa um corte racional r^*. A função f é um isomorfismo de corpos que preserva ordem, isto é, para quaisquer $r,\ s \in \mathbb{Q}$, temos:*

(i) f é bijetora,

(ii) $f(r + s) = f(r) + f(s)$

(iii) $f(rs) = f(r)f(s)$

(iv) $r < s \Longleftrightarrow f(r) < f(s)$

Demonstração

(i) f é bijetora,

Para provarmos a bijeção em f mostraremos que f é injetora e sobrejetora.

- f é injetora

Sejam r e $s \in \mathbb{Q}$. Como $r \neq s$ então temos duas possibilidades: $r < s$ ou $s < r$. Se $r < s$ então, por definição de corte, teremos $r \in s^*$ e consequentemente $r \notin r^*$ donde $r^* < s^*$e daí $f(r) < f(s)$, ou seja, $f(r) \neq f(s)$. Agora, se $s < r$ então $s \in r^*$ e $s \in s^*$ implicando em $s^* < r^*$ e daí $f(s) < f(r)$, isto é, $f(s) \neq f(r)$. Logo, para ambos os casos, f é injetora.

- f é sobrejetora

Seja $r^* \in \bar{\mathbb{Q}}$ sabemos, por definição, que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(r) = r^*$. Logo, f é sobrejetora.

(ii) $f(r + s) = f(r) + f(s)$

Mostrar esta igualdade equivale a mostrar que $(r + s)^* = r^* + s^*$.

- $(r + s)^* \subset r^* + s^*$

Seja $p \in (r + s)^*$ então $p < r + s$. Consideremos:

$$q = r - \frac{r + s - p}{2} \text{ e } t = s - \frac{r + s - p}{2}.$$

Por hipótese, $r + s > p$, ou seja, $r + s - p > 0$ e $-(r + s - p) < 0$. Sendo assim, $r - (r + s - p)/2 < r$ implicando em $q < r$, assim como $s - (r + s - p)/2 < s$, que implica em, $t < s$. Logo, $q \in r^*$ e $t \in s^*$. Agora,

$$q + t = r - \frac{r + s - p}{2} + s - \frac{r + s - p}{2},$$

que ao efetuarmos os devidos cálculos , obtemos:

$$q + t = \frac{2p}{2} = p.$$

Como $q + t \in r^* + s^*$ e $q + t = p$ então $p \in r^* + s^*$.

- $r^* + s^* \subset (r + s)^*$

Seja $p \in r^* + s^*$ então $p = q + t$ com $q \in r^*$ e $t \in s^*$, isto é, $q < r$ e $t < s$. Como $q + t < r + s$ e $p = q + t$ então $p < r + s$, ou seja, $p \in (r + s)^*$.

Logo, $f(r + s) = f(r) + f(s)$.

(iii) $f(rs) = f(r)f(s)$

Vamos mostrar que $(rs)^* = r^*s^*$ pois são igualdades equivalentes. Como se trata da multiplicação de cortes faz-se necessário considerarmos alguns casos quanto ao sinal.

Caso 1: $r^* > 0^*$ e $s^* > 0^*$

- $(rs)^* \subset r^*s^*$

Seja $p \in (rs)^*$ então $p < rs$. Consideremos $q = (p/s + r)(1/2)$. Como q é a média aritmética de p/s e r então $p/s < q < r$ e consequentemente $q \in r^*$. Como $p/q < q$ então $p/q < s$ e $p/q \in s^*$. Escrevendo $p = q(p/q)$ então $p \in r^*s^*$ pois $q \in r^*$ e $p/q \in s^*$.

- $r^*s^* \subset (rs)^*$

Seja $p \in r^*s^*$. Se $p \in \mathbb{Q}_-$ então $p \in (rs)^*$ pois $\mathbb{Q}_- \subset (rs)^*$. Caso $p > 0$ então $p = qt$ nos quais $q \in r^*$ e $t \in s^*$. Sendo assim, $q < r$ e $t < s$ implicando em $qt < rs$. Logo, $p \in (rs)^*$.

Portanto, $f(rs) = f(r)f(s)$.

Caso 2: $r^* < 0^*$ e $s^* > 0^*$

Pela definição de multiplicação de corte, temos:

$$r^*s^* = -\left[(-r)^*s^*\right],$$

$$r^*s^* = -\left[-(rs)^*\right] \text{ pelo caso 1},$$

$$r^*s^* = (rs)^*.$$

Caso 3: $r^* > 0^*$ e $s^* < 0^*$

$$r^*s^* = -\left[r^*(-s^*)\right],$$

$$r^*s^* = -\left[-(rs)^*\right] \text{ pelo caso 1},$$

$$r^*s^* = (rs)^*.$$

Caso 4: $r^* < 0^*$ e $s^* < 0^*$

$$r^*s^* = (-r^*)(-s^*),$$

$$r^*s^* = \left[(-r(-s))^*\right] \text{ pelo caso 1},$$

$$r^*s^* = (rs)^*.$$

Caso 5: $r^* = 0^*$

$$r^*s^* = o^* = (0s)^* = (rs)^*$$

Para $s^* = 0^*$ a demosntração é análoga.

Portanto, $f(rs) = f(r)f(s)$.

(iv) $r < s \Longleftrightarrow f(r) < f(s)$

Se $r < s$ então $r \in s^*$ e $r \notin r^*$, ou seja, $r^* < s^*$ implicando em $f(r) < f(s)$. Agora, se $f(r) < f(s)$, ou seja, $r^* < s^*$ então existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in s^*$ e $q \notin r^*$ e assim $q < s$ e $r < q$ então $r < s$. Portanto, $r < s$ se, e somente se, $f(r) < f(s)$.

Vimos nesta seção que a substituição dos números racionais r pelo correspondente corte racional r^* preserva somas, produtos e ordem. Este fato pode ser expresso como o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ é isomorfo ao corpo ordenado $\bar{\mathbb{Q}}$, cujos os elementos são cortes racionais. Claro, r^* não é de forma alguma o mesmo que r, mas estamos preocupados com as propriedades dos dois corpos. É essa identificação de $\mathbb{Q}$ com $\bar{\mathbb{Q}}$ que nos permite identificar $\mathbb{Q}$ como um subcorpo de $\mathbb{R}$.

Definição 11 *A partir de agora, o conjunto dos cortes será denominado por conjunto dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$. Os cortes racionais serão identificados com os números racionais e todo corte que não for racional será denominado número irracional.*

2.6 Completude dos números reais

Mesmo com a identificação dos números racionais como cortes racionais a construção dos números reais ainda está incompleta. Quando pensamos na existência do elemento separador quando o corte não é racional ficamos tentados a repetir esse processo utilizando agora o conjunto dos cortes com o intuito de estender ainda mais o corpo dos reais. Porém, o Teorema de Dedekind afirma que todo corte de números reais possui um número real como elemento separador, garantindo que esse processo não é possível de ser realizado.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema de Dedekind mostraremos uma proposição que será utilizada na demonstração do teorema.

Proposição 10 *Sejam α e β cortes com $\alpha < \beta$. Então existe um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$.*

Demonstração

Como $\alpha < \beta$ temos que existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p \notin \alpha$. Pelo fato de $p \in \beta$ e β ser corte temos que $p < r$ para algum $r \in \beta$. Mas, como $r \in \beta$ então $r^* < \beta$ e mais, como $p \in r^*$, já que $p < r$ e $p \notin \alpha$ então $\alpha < r^*$. Logo, $\alpha < r^* < \beta$.

Teorema 5 $\{$***Teorema de Dedekind***$\}$ *Sejam A e B subconjuntos de números reais tais que :*

(i) $A \cup B = \mathbb{R}$,

(ii) $A \cap B = \emptyset$,

(iii) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$,

(iv) se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$ com $\alpha < \beta$.

Então existe um único número real γ tal que $\alpha \leqslant \gamma$ para todo $\alpha \in A$ e $\gamma \leqslant \beta$, para todo $\beta \in B$, ou seja, $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$.

Demonstração

A priori, devemos mostrar a existência do corte γ. Seja γ o conjunto de todos os racionais p tais que $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$ então mostraremos que γ é um corte.

(i) $\gamma \neq \emptyset$ e $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

Como $A \subset \gamma$ temos que $\gamma \neq \emptyset$. Agora, como $B \neq \emptyset$ então tomemos $\beta \in B$. Por hipótese, $\alpha < \beta$ então para todo $\alpha \in A$ existe $q \in \beta$ tal que $q \notin \alpha$. Sendo assim, $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Se $p \in \gamma$ e $q \in \mathbb{Q}$ com $q < p$ então $q \in \gamma$.

Como $p \in \gamma$ temos que $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Como $q < p$ e α é um corte, então $q \in \alpha$. Mas $\alpha \in \gamma$ então $q \in \gamma$.

(iii) Se $p \in \gamma$ então $p < r$ para $r \in \gamma$.

Como $p \in \gamma$ temos que $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Pelo fato de α ser corte então existe $q > p$ tal que $q \in \alpha$. Logo, $q \in \gamma$.

Portanto, γ é um corte e consequentemente é um número real e além disso $\alpha \leqslant \gamma$ para todo $\alpha \in A$.

Agora, vamos mostrar que $\gamma \leqslant \beta$ para todo $\beta \in B$. Suponhamos que $\beta < \gamma$ para algum $\beta \in B$, ou seja, existe um racional $p \in \gamma$ tal que $p \notin \beta$. Sendo assim, $\beta < \alpha$, absurdo, pois por hipótese, $\alpha < \beta$. Logo, $\gamma \leqslant \beta$ para todo $\beta \in B$.

Provaremos agora a unicidade de γ. Suponhamos que existam γ_1 e γ_2 números reais distintos e que ambos satisfaçam o Teorema de Dedekind. Pelo teorema temos então que $\alpha \leqslant \gamma_1$, $\alpha \leqslant \gamma_2$, $\gamma_1 \leqslant \beta$ e $\gamma_2 \leqslant \beta$, para todo $\alpha \in A$ e $\beta \in B$. Agora, pela proposição anterior, temos que $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$ para algum γ_3. Das hipóteses, temos que $\gamma_3 \in A$ pois $\gamma_3 < \gamma_2$ e $\alpha \leqslant \gamma_2$ para algum $\alpha \in A$. Por outro lado, $\gamma_1 < \gamma_3$ e $\gamma_1 \leqslant \beta$ então $\gamma_3 \in \beta$ para algum $\beta \in B$, absurdo, pois $A \cap B = \emptyset$ pelo Teorema de Dedekind. Sendo assim, $\gamma_1 = \gamma_2$ para satisfazer as hipóteses do Teorema de Dedekind.

Corolário 1 *Nas condições do Teorema de Dedekind, ou existe em A, um número máximo, ou em B, um número mínimo.*

Demonstração

Seja γ o conjunto dos racionais $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Pelo Teorema de Dedekind $A \cap B = \emptyset$ então $\gamma \in A$ ou $\gamma \in B$ e mais, $\alpha \leqslant \gamma$ e $\gamma \leqslant \beta$ então se $\gamma \in \alpha$ então γ é o maior número de α, agora se $\gamma \in \beta$ então γ é o menor número de β.

Agora, enunciaremos e demonstraremos a proposição que garante que o corpo ordenado dos números reais é completo. Para tal, basta mostrarmos que todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$.

Vale salientar que para a demonstração dessa proposição o leitor precisará ter entendimento de alguns conceitos como limitante superior, cota, supremo, dentre outros. Indicamos como referência bibliográfica (LIMA, 1993).

Proposição 11 *Seja C um conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente. Então existe o supremo de C em $\mathbb{R}$.*

Demonstração

Consideremos os conjuntos A e B tais que: $\alpha \in A$ se, e somente se, existe $x \in C$ tal que $\alpha < x$ e B tal que $A \cap B = \emptyset$. Pelo Teorema de Dedekind temos que nenhum elemento de A é cota superior de C, e todo elemento de B é cota superior de C. Sendo assim, mostraremos que B possui mínimo que equivale a mostrar que C tem máximo (supremo). Como os conjuntos A e B satisfazem as hipóteses do Teorema de Dedekind então pelo corolário temos que ou A tem máximo ou B tem mínimo. Porém, A não possui máximo pois se caso tivesse, existiria um $\alpha \in A$ máximo tal que $\alpha < x$ para algum $x \in C$. Considerando α_1 tal que $\alpha < \alpha_1 < x$, teríamos $\alpha_1 \in A$ de modo que α não seria máximo de A. Logo, B possui mínimo, implicando em C possuir supremo em $\mathbb{R}$.

Sendo assim, a proposição acima garante a $\mathbb{R}$ uma característica que $\mathbb{Q}$ não possui. Dessa forma, as lacunas existentes no conjunto dos racionais são preenchidas através do método desenvolvido por Dedekind, visto que todo corte de números reais possui um número real como elemento separador. Assim, encerramos a apresentação do Método dos Cortes desenvolvido por Dedekind mostrando que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.

Capítulo 3

Análise de Livros Didáticos

A abordagem axiomática demonstrativa, mescla de teses e hipóteses, da disciplina de Análise, foi o fator causador da curiosidade em entender o processo de construção dos números reais. O objetivo dessa disciplina, a princípio, era abordar um tratamento diferenciado para conteúdos já vistos durante a graduação, como por exemplo sequências, séries, funções, continuidade, dentre outros. No curso de Cálculo Diferencial e Integral estudamos esses conceitos visando compreender a importância e aplicação dos mesmos como ferramentas indispensáveis na resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento. Já na Análise, esses conceitos são enfatizados de maneira precisa, com encadeamento lógico das proposições e apreciação das propriedades mais relevantes dos objetos estudados. A priori, voltamos nosso trato ao conjunto dos números reais com o intuito de compreendermos, de forma minuciosa, suas propriedades não somente como conjunto, mas como um corpo ordenado completo.

Ao passo que avançávamos nos estudos percebi o quanto o corpo ordenado dos números reais juntamente com seus conceitos (cotas, ínfimo, supremo, dentre outros) eram de extrema relevância para a demonstração de resultados importantes na Análise, que de uma forma ou de outra, reduziam-se a algum tipo de limite. Nesse viés, não seria relevante se perguntar de onde vieram os números reais, como foi construído esse conjunto e o quanto o mesmo influenciou no avanço da Análise?

Para responder minhas inquietações busquei nos livros didáticos da Análise respostas ou caminhos auxiliáres. Pelo fato de serem frequentemente utilizados como referências bibliográficas em cursos de Análise nas grandes instituições de ensino, optei pelos seguintes livros clássicos: (FIGUEIREDO, 1995), (LIMA, 1993), (ÁVILA, 2006) e (RUDIN, 1953). A partir de então, apresentaremos comentários acerca das obras mencionadas.

3.1 Introdução à Análise Matemática do Geraldo Ávila

O livro do (ÁVILA, 2006) contêm uma abordagem diferenciada em relação aos outros. Mesmo possuindo elementos essênciais como formalismo e rigor, o autor aposta em uma apresentação mais equilibrada, priorizando o pensamento intuitivo. Segundo o autor, o objetivo dessa abordagem é facilitar a transmissão das ideias e o próprio aprendizado.

No que diz respeito a estrutura, o livro propõe um estilo de exposição diferenciado, caracterizado por apresentar no final dos capítulos "Notas históricas e complementares ", a fim de orientar o leitor na compreensão da evolução das ideias, uma vez que a evolução histórica é estimulante e enriquecedora na formação do aluno, sobretudo de sua capacidade de apreciação crítica.

O primeiro capítulo desse livro é introduzido com tópicos referentes ao conjunto dos números reais como corpo ordenado completo, enfatizando a propriedade do supremo. O trato desse capítulo restringe-se ao estudo das propriedades desse conjunto, não se preocupando com uma teoria dos números reais.

Nas notas históricas complementares o autor parte da relação existente entre o Método dos Cortes de Dedekind e a Teoria das Proporções de Eudoxo. Segundo o autor, o método foi desenvolvido no século XIX objetivando construir os números reais.

(ÁVILA, 2006) retrata aspectos históricos que se inicia na descoberta dos incomensuráveis, perpassa a Teoria das Proporções até chegar no Método dos Cortes. A abordagem desse método foi realizada de forma intuitiva, na qual o autor se preocupa em apresentar a essência do método e o raciocínio lógico subjacente. A priori, (ÁVILA, 2006, pág. 13) define corte como sendo

> um par de classe E e D de números racionais, tais que: a) E e D são conjuntos não vazios cuja união é o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais; b) todo número menor que algum número de E pertence a E , e todo número maior que algum número de D pertence a D.[...] Dedekind postulou, de um modo geral, que *todo corte possui um elemento de separação* (supremo da classe E e ínfimo da classe D); isso, como se vê, equivale a postular que equivale a postular que E tem supremo ou D tem ínfimo. E o efeito desse postulado é a criação dos números irracionais.

Pudemos observar que a abordagem do método realizada por (ÁVILA, 2006) é meramente axiomática, sendo o Postulado de Dedekind, descrito acima, apenas o ínicio da construção dos números reais. Além disso, seria preciso definir relação de ordem, operações de adição e multiplicação no conjunto dos cortes, com suas respectivas propriedades.

Em continuidade, o autor faz a identificação dos cortes com o conjunto dos números racionais via isomorfismo e explica que não é possível repetir este processo partindo do conjunto dos cortes com o objetivo de criar outros números. Sendo assim, o conjunto dos números reais, construído via cortes de Dedekind, é um corpo ordenado completo.

3.2 Análise I do Djairo Guedes de Figueiredo

Em seu primeiro capítulo, (FIGUEIREDO, 1995) versa sobre o conjunto dos números reais, apostando em uma abordagem dedutiva rigorosa, mas que segundo o autor mantem-se agradável e bonita, assemelhando-se com o (ÁVILA, 2006). É interessante a forma como esses dois autores interagem com o leitor ao longo dos capítulos de forma a tornar o estudo mais interessante e descontraído.

Diferentemente dos demais autores, (FIGUEIREDO, 1995) faz uma breve revisão dos conceitos importantes relacionados a conjuntos e funções e intercala durante o capítulo exercícios para a aplicação do conteúdo. Outras características que chamam atenção são os comentários e questionamentos feitos pelo autor para despertar a curiosidade e o interesse do leitor. Entre uma seção e outra, (FIGUEIREDO, 1995) menciona o Postulado de Dedekind: "Todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, constituído de elementos positivos, tem um ínfimo.", que segundo ele determina o corpo dos números reais entre todos os corpos ordenados via isomorfismos de grupos.

No tópico **Comentários sobre a definição de número real**, o autor relata a participação e importância de Richard Dedekind na apresentação rigorosa do conceito de número real, que foi feita em um pequeno livro *Continuidade e Números Irracionais* - (DEDEKIND, 1901), no qual defini-se corte, conjunto utilizado para provar que existe um corpo ordenado, que satisfaz o Postulado de Dedekind.

Em seguida,(FIGUEIREDO, 1995) apresenta alguns comentários breves porém relevantes sobre o Método dos Cortes de Dedekind. Na verdade, o autor nada mais faz do que uma apresentação intuítiva do método, explicando as principais ideias. Segundo ele, o método consiste em partir do corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais e construir um outro corpo, no caso, o conjunto dos cortes.

Posteriormente, é necessário definir as operações de adição e multiplicação, relação de ordem, para que só depois fosse demonstrado que esse corpo satisfaz o Postulado de Dedekind. Todo esse processo resultaria no corpo ordenado completo dos números reais.

3.3 Análise Real do Elon Lages Lima

O livro do (LIMA, 1993), diferentemente dos demais livros, apresenta um tratamento puramente teórico, simples e direto. Segundo o autor, esse tratamento foi adotado com o propósito de evitar digressões. Por este motivo, o livro não conta com seções que tratam de aspectos históricos ou notas complementares. A introdução do capítulo referente aos números reais deixa bem claro que será realizada apenas a descrição das propriedades do conjunto dos números reais e suas consequências.

Ao longo do capítulo não foi mencionado o Método dos Cortes de Dedekind para a construção dos números reais, assim como nenhum outro método. Partindo dessa investigação, optamos por não utilizar este livro para o fim no qual pretendiamos. Porém, o utilizamos para compreensão de conceitos como cota, supremo, ínfimo, dentre outros.

3.4 *Principles of Mathematical Analysis* do Walter Rudin

O livro do (RUDIN, 1953), quando comparado aos demais livros analisados, no que diz respeito ao nosso objetivo, é o mais completo. Seu primeiro capítulo, não diferente dos outros, trata dos números reais. Segundo (RUDIN, 1953), conceitos importantes da Análise, como continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade devem ser baseados em um conceito de número definido com precisão. O autor parte dos números racionais, não se preocupando com a axiomática dos inteiros.

A abordagem do (RUDIN, 1953), nesse capítulo, distingue dos demais. O autor passeia por conceitos importantes da Álgebra, como grupos, corpos, operações de adição e multiplicação de corpos, para só depois apresentar o conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo. Além disso, (RUDIN, 1953) discorre sobre a extensão dos números reais dando origem ao corpo dos números complexos.

O autor finaliza esse capítulo apresentando a construção dos números reais via Método dos Cortes Dedekind. Diferentemente dos demais autores, (RUDIN, 1953) apresenta o método de forma mais rigorosa, não tratando-o apenas de forma intuitiva, mas estruturando-o em nove passos, nos quais temos definição de cortes, propriedade do supremo para subconjunto dos números reais, definição das operações de adição e multiplicação no conjunto dos cortes, identificação dos números racionais com o conjunto dos cortes e por fim a completude do conjunto dos números reais, tornando-o um corpo ordenado completo.

Nesse viés, optamos por utilizar este livro como principal referência bibliográfica para elaboração desse trabalho. Sua linguagem puramente axiomática e rigorosa não impediu o estudo do método.

Capítulo 4

Conclusões

No que diz respeito aos números, no viés da Análise Real, pouco interessa as diversas representações/escritas que estes adquiriram ao longo da história em diferentes contextos. Na Análise Real, preocupa-se com a forma pela qual foi obtido o conceito de número, uma vez que o uso de suas propriedades é extensivo nesse ramo da Matemática.

Ao longo deste trabalho pudemos voltar nossa atenção para aspectos históricos que colaboraram para a formalização do conceito de número. E mais que isso, debruçamos sobre um dos métodos cruciais para a construção desse conjunto, o que nos leva ao objetivo principal deste trabalho.

Estávamos interessados em compreender o conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo com o uso de uma estrutura axiomática. Para tal, apresentamos e analisamos, minuciosamente, o método dos Cortes de Dedekind, proporcionando ao leitor, de forma ampla e significativa, o entendimento desse conjunto. Nesse sentido, fez-se necessário abordar propriedades e proposições que embasassem essa definição.

Ressaltamos neste trabalho a importância que os livros didáticos da área da Análise, de grande uso no ensino superior, tiveram para nossos estudos, apresentando alguns comentários acerca das abordagens dos mesmos.

Sendo assim, esperamos que este trabalho sirva de motivação para leitores que buscam aprimorar seus conhecimentos no que diz respeito ao conjunto dos números reais, mais precisamente sobre os aspectos históricos que nortearam o processo no qual esse conjunto passou até adquirir o conceito formal que temos hoje e também no ponto de vista construtivo.

Referências Bibliográficas

ÁVILA, G. S. S. (2006). *Introdução à Análise Matemática.* Edgard Blücher, São Paulo.

ÁVILA, G. S. S. (2010). Eudoxo, dedekind, números reais e o ensino da matemática. *Revista do Professor de Matemática*, 7.

CERRI, C. (2006). Desvendando os números reais. .

DEDEKIND, R. (1901). *Essays on the Theory of Numbers. BEMAN, W. (Trad..* The Open Court Publishing Company, Chicago.

EVES, H. (2004). *Introdução à História da Matemática: tradução de H. H. DOMINGUES.* . Editora da UNICAMP, São Paulo.

FIGUEIREDO, D. G. (1995). *Análise I.* L.T.C, Rio de Janeiro.

HEFEZ, A. (2014). *Curso de Álgebra.* IMPA, Rio de Janeiro.

LIMA, E. L. (1993). *Análise Real.* IMPA, Rio de Janeiro.

PONTES, K. M. (2014). Existência e unicidade dos números reais via cortes de dedekind.

POSSANI, C. H. B. G. C. C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na grécia antiga. *Matemática Universitária*, 47.

QUEIROZ, F. M. (2015). Um estudo sobre construção dos números reais.

ROQUE, T. (2012). *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e crenças.* Zahar, Rio de Janeiro.

RUDIN, W. (1953). *Principles of Mathematical Analyses*. Mc Graw Hill Books Company, New York.

SAITO, R. R. G. F. (2011). O papiro de rhind: um estudo preliminar. *Rev. Prod. Disc. Educ. Matem*, 1,:123–132.

SANTOS, L. F. C. (2012). Cortes de dedekind? uma discussão sobre as abordagens de dedekind e tannery. *Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*.