UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WELMA OLIVEIRA HEISIG

SER OU NÃO SER: EIS O ZERO.
É DAÍ QUE TEMOS QUE PARTIR?

Vitória da Conquista

Fevereiro de 2018

WELMA OLIVEIRA HEISIG

SER OU NÃO SER: EIS O ZERO.
É DAÍ QUE TEMOS QUE PARTIR?

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do professor Ms. Antônio Augusto Oliveira Lima.

Vitória da Conquista

Fevereiro de 2018

WELMA OLIVEIRA HEISIG

SER OU NÃO SER: EIS O ZERO.
É DAÍ QUE TEMOS QUE PARTIR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do professor Ms. Antônio Augusto Oliveira Lima.

Vitória da Conquista, 20 de fevereiro de 2018.

Componentes da Banca Examinadora:

___

Prof.º Ms. Antônio Augusto Oliveira Lima
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

___

Prof.ª Ms. Ana Paula Perovano dos Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

___

Prof.º Dr. Júlio César dos Reis
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

"Se olharmos para o zero vemos o nada, mas se olharmos através dele descobrimos o mundo."

(Robert Kaplan)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por vosso amor incondicional, por ter me sustentado e ajudado a prosseguir, me dando força nos momentos mais difíceis.

Agradeço a “Vida” o meu marido, pelo carinho e dedicação, você sempre foi o meu maior apoio, confiando em mim quando nem mesmo eu confiava. É muito difícil transmitir com palavras o que sinto por ti. Amo-te.

Agradeço ao meu Noah, filho tão amado que ainda trago no ventre, por ser uma grande fonte de inspiração para lutar e vencer as batalhas diárias, sonhando em poder lhe proporcionar dias melhores.

Obrigada aos meus familiares, irmãos, cunhados, primos e sobrinhos por todo o carinho que sempre mim dispensaram. Pai e Zui quando vocês partiram, deixaram muita dor, mas, com o passar do tempo consigo sentir vocês sempre presentes, obrigada. Agradeço a minha sogra Nélia, pela mãe maravilhosa que és para mim. Porém não poderia deixar de agradecer especialmente a minha mãe pelas lições de vida, eu aprendi caminhar na estrada da vida seguindo os seus passos.

Aos meus amigos da Universidade, pelo companheirismo e por tornarem o fardo mais leve, durante esta caminhada sempre nos apoiámos. Não posso deixar de citar em especial meu amigo Velton pela ajuda em encontrar o material necessário para desenvolver este trabalho.

Agradeço ao meu orientador Antônio Augusto, pela compreensão, ajuda e paciência na realização deste trabalho. Um exemplo de professor no qual quero me espelhar durante a minha vida profissional.

Agradeço meus professores por todos os ensinamentos e incentivo durante a minha formação. Em especial a professora Ana Paula por está sempre disponível em me ajudar, pela contribuição para a realização deste trabalho e principalmente por despertar em mim a vontade de ser uma professora melhor e de fazer sempre o melhor que posso. A professora Maria Aparecida por me incentivar na escolha do tema e por intermediar por mim na orientação deste trabalho. A professora Eridan por me fornecer material que muito contribuiu para esta dissertação, além da atenção que sempre me concedeu. Ao professor Júlio pela colaboração não só neste trabalho como na minha formação, com suas aulas esclarecedoras e sua preocupação em nos fazer compreender cada conteúdo estudado. Ao professor Sérgio pelas horas a mais de estudado dedicadas a mim durante suas manhãs na biblioteca. A professora Eliana por seu carinho e cuidado com a formação de cada um de nós seus alunos. A professora Taise pela preocupação e carinho com as nossas práticas de ensino. A professora Roberta por despertar em mim grandes inquietações a respeito de uma educação mais inclusiva.

Obrigada a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho e para a minha formação.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo o estudo do número zero e sua relevância para o desenvolvimento da Matemática e seus ramos da Álgebra, da Aritmética e da Geometria. Inicialmente este trabalho abordará a trajetória deste número na história da civilização, a fim de enfatizar a importância do mesmo para a Matemática, bem como sua contribuição para o avanço desta disciplina. Serão abordadas também algumas definições que buscam elucidar, possíveis dúvidas que o leitor possa ter a respeito de celebres contradições que este número carrega consigo. Este trabalho foi desenvolvido com base principalmente na literatura internacional devido à grande dificuldade em encontrar material de pesquisa na literatura nacional. Espera-se que esta pesquisa possa contribuir com estudantes da área e quem sabe aguçar nos mesmos o desejo de se aprofundarem ainda mais no assunto.

Palavras-chave: Números. Zero. História. Álgebra. Aritmética.

ABSTRACT

The present work aims to study the number zero and your relevance to the development of Mathematics and their branches of Algebra, Arithmetic end Geometry. Initially this work will aproach the trajectory of this number in the history of civilization, in order to emphasize the importance of the same to Mathematics, as well as its contribution to the advancement of this discipline. It will also approached some of those who seek the consumer, who is what is the market leader, with respect to celebrities contradictions that this number carries with them. This work was developed based mainly on the international literature due to the great difficulty in finding research material in the national literature. It is hoped that this research can contribute to students of the area and perhaps sharpen their desire to go deeper into the subject.

Key words: Numbers. Zero. History. Algebra. Arithmetic.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde sempre a trajetória da humanidade sempre me encantou, principalmente a sua evolução na área da Matemática. Quando surgiu a necessidade de contar? E os cálculos quando se tornaram imprescindíveis? Sabemos que tudo surgiu devido às necessidades humanas, este momento de percepção sobre a falta de algo e a necessidade de evolução sempre me despertou grande interesse.

Aliada a este gosto pela história da Matemática e pela curiosidade que sempre tive a respeito dos números e sua trajetória, em especial pelo surgimento e importância do número zero, me dispus há aventura de escrever sobre este tema. Quando digo que foi uma aventura não quero com isso dramatizar o assunto em questão, espero apenas nobilitar as dificuldades nas quais me deparei em encontrar fontes de estudo e embasamento para a construção deste trabalho.

Outro fator que me motivou a escolha deste tema foi devido a sua importância para mim quanto profissional. Como já tive a oportunidade de atuar como professora, antes mesmo do estágio realizado durante a minha graduação, em certos momentos me deparei com questionamentos dos meus alunos sobre o número zero, que também me deixaram intrigada. Uma destas questões que mais se repetia era se o zero seria par ou um número sem paridade e em algumas atividades propostas pelo material didático da escola, certos desafios matemáticos só tinham solução se não considerássemos o zero par e isso me causava certo desconforto.

Quando optei por este tema, não sabia que encontrar material para realizar minha pesquisa seria o meu maior obstáculo. Na literatura nacional pouco consegui encontrar e geralmente as abordagens encontradas mais pareciam notas de rodapé, nada substancial que pudesse render uma monografia. Para muitos talvez essa dificuldade poderia fazê-los mudar de direção, entretanto, para mim tornou a busca ainda mais satisfatória, aumentando o meu desejo em escrever sobre.

Comecei a pesquisar bibliografias em outros países, foi quando finalmente conseguir encontrar materiais que tornaram viáveis o meu trabalho, embora não estivessem escritos em minha língua materna. Trabalhando na berma da estrada com estes materiais, com recortes dos conceitos matemáticos que surgiam aqui e ali nos livros utilizados por nós durante o curso de Licenciatura em Matemática, mais o pouco que encontrei na literatura nacional, fundamentaram teoricamente este trabalho.

Vários momentos durante a realização do meu curso eu me questionei sobre como seria a Matemática e seus ramos sem a presença do número zero. Será que a falta deste número nos causaria algum transtorno ou será que sem ele algumas tarefas se tornariam mais fáceis? E com estes questionamentos muitos outros emergiram, tais como: zero é par? É um número natural? Quais os resultados de certas operações realizadas com este número e por que o resultado é o apresentado? Por que não podemos dividir por zero?

O número zero acabou por se tornar uma impiedosa esfinge em meio aos meus pensamentos e a necessidade de responder seus enigmas se tornou vital. Eu já sentia receio de ser devorada por tão implacável criatura.

Gostaria de compartilhar nestas próximas linhas, uma curiosidade que me foi proporcionada em minhas leituras, que acabou por me impulsionar ainda mais na direção deste tema neste trabalho.

Chales Seife no primeiro capítulo do seu livro **Zero: The biografhy of a dangerous idea**[1], evidência uma fatalidade de engenharia vivenciada em setembro de 1997, pelo navio de guerra da Marinha dos Estados Unidos *USS Yorktown*. O navio equipado com mísseis, lançadores de torpedo e outros armamentos, durante manobras realizadas na costa da Virgínia, testava o protótipo do projeto *Smart Ship*[2], quando teve seus sistemas de propulsões inutilizados. Devido a esse problema o *USS Yorktown* ficou à deriva por duas horas e depois de rebocado para a base naval levou mais dois dias para que as condições operacionais fossem reestabelecidas.

Digamos que um torpedo chamado zero atingiu em cheio o navio de guerra de 80.000 cavalos de potência. Devido uma falha humana o numeral 0 foi inserido no código do programa remoto e em um dado momento o computador tentou dividir por 0, o que causou um colapso no banco de dados imobilizando assim o *USS Yorktown*. O zero este número de aparência tão inocente acabou por mostrar seu lado mais obscuro e poderoso.

[1] Zero: A biografia de uma ideia perigosa
[2] Navio inteligente

O número zero é diferente dos outros números, consiste em uma história de paradoxos que deixou mentes brilhantes polvorosas diante de sua magnitude. “O ponto principal é o fato de o zero ser e não ser. Ao mesmo tempo indicar o nada e trazer embutido em si algum conteúdo”, diz o astrônomo Walter Maciel, professor da Universidade de São Paulo, em uma entrevista para a revista Super Interessante que abordou a importância do número zero como um de seus temas em 2001.

Um nada que existe efetivamente é o grande paradigma carregado pelo zero, talvez por esta razão assuste tanto. De antemão não é exagero nenhum Ifrah (1998) afirmar que a invenção do número zero foi um acontecimento tão revolucionário para a humanidade quanto a invenção da roda ou até mesmo o domínio do fogo.

No desdobramento deste trabalho poderemos compreender que os números e principalmente o zero abriu caminho para o desenvolvimento da Matemática e suas técnicas e de todas as outras ciências. Para Kaplan (1933),

> O zero coloca evidência a grandiosa e elementar extensão da matemática, por sua vez, evidencia a natureza complexa das coisas. Da contabilidade ao cálculo, da probabilidade à certeza de quando as marés de nosso interesse vão subir, as brilhantes ferramentas da matemática nos permitem seguir o caprichoso curso que todas as coisas tomam por todo o resto – e todas as suas partes giram em torno do menor dos eixos, o zero. (KAPLAN, 1933, p. 15)

Afinal temos um número que pode ser muito e que também pode não ser nada, algo vazio que dá sentido ao infinito, o princípio capaz de refletir o fim, um verdadeiro dilema de ser ou não ser. Zero, realmente é daí que temos que partir?

A metodologia utilizada para a produção deste trabalho se deu inicialmente através da realização de uma pesquisa, para obter material suficiente e necessário à fundamentação teórica. Após esta pesquisa um roteiro foi montado a fim de facilitar a fase final que foi de seleção e análise dos conceitos e conteúdos pertinentes para a realização do mesmo.

A fundamentação teórica foi baseada em livros da história da Matemática que davam ênfase a importância dos números e especificamente a importância do número zero autores como Boyer, Ifrah e Reid. É importante ressaltar que o resultado histórico apresentado neste trabalho é um recorte do que se tem no momento e que poderá sofrer alterações devido novas descobertas. Para as definições matemáticas foram utilizados Artigos e livros de Matemática do Ensino Básico e Superior no qual nos pautamos em autores como Lima, Reis, Iezzi e Hefez. E por fim as literaturas dos autores Aczel, Kaplan, Seife, Sen e Agarwal que serviram de grande fundamentação para o estudo da importância do número zero.

Este trabalho foi estruturado em quatro capítulos, sendo abordado no primeiro o contexto histórico dos números e em especial o número zero. No capítulo seguinte a importância do número zero para o desenvolvimento da Matemática foi enfatizada, seguido pelo capítulo três que busca descortinar os principais paradigmas que envolvem este número no ramo da Álgebra, da Aritmética e da Geometria. E finalmente no último capítulo são realizadas as considerações finais e não uma conclusão acerca do tema, pois sabemos que o mesmo não foi esgotado nestas páginas.

1 – PEGADAS NA AREIA

Este capítulo tem como principal objetivo no primeiro tópico, abordar o contexto histórico do surgimento dos números de maneira sucinta. Enquanto no segundo tópico a historia do surgimento do número zero é enfatizada.

As realizações dos nossos antepassados nos fornecem elementos importantes da nossa existência. Estes estudos através do tempo nos propiciam importantes “pegadas na areia”, embora algumas tenham sido apagadas, deixando uma lacuna em nossa construção da linha temporal, aquelas marcas que ficaram nos revelam muito sobre o quanto evoluímos.

Com a Matemática não poderia ser diferente, um passeio pela história muito nos faz refletir sobre em que momento, quando e até mesmo onde um certo conceito passou a ser necessário. É formidável compreender como estão interligadas as conquistas da humanidade com suas conveniências.

1.1 – História dos números

Atualmente quando pensamos nos números eles nos parecem tão natural como o simples ato corriqueiro, porém esta foi uma aptidão desenvolvida e aprimorada por vários milênios. A necessidade e a preocupação do homem em contar (seus bens, suas perdas, datar momento importantes e outros) embalaram esta grande invenção, sem o nome de um grande inventor para reivindicar tamanho sucesso, como afirma Ifrah (2010),

> [...] próprios inventores estão certamente perdidos para sempre. Talvez porque as invenções remontem a uma Antiguidade muito remota. Talvez, ainda, porque essas invenções geniais foram feitas por homens relativamente humildes, que não tinham direito a registro. Talvez, enfim, porque elas são o produto de práticas coletivas, e não poderiam ser atribuídas de modo preciso a ninguém. (IFRAH, 2010, p. 11)

Tudo começou devido essas preocupações humanas e a correspondência foi o primeiro subterfúgio utilizado como recurso, “[...] equiparar termo a termo os elementos de uma primeira coleção com os de uma segunda, origina-se uma noção abstrata, inteiramente independente da natureza dos seres [...]”. (IFRAH, 2010, p. 30)

Em algum momento muito remoto o homem pré-histórico fez marcas em um osso de algum animal morto, a fim de se recordar da quantidade de noites longe da caverna. Ou um pastor de ovelhas guardou em seu alforje pedras com a quantidade de ovelhas que haviam saído para pastar naquela manhã.

A partir do momento que o homem aprendeu a contar ele conseguiu também encontrar o caminho para as medições de diversas grandezas, desenvolveu o calendário, aprendeu avaliar e também estimar, concebendo os primeiros passos para a aritmética encaminhando-se para a álgebra.

Segundo Ifrah (2010), por volta do século V, no norte da Índia que surgiu o modelo numérico que mais se assemelha com o que conhecemos hoje. Porém desde o século III a.c. eles já usavam os algarismos da unidade 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 com características semelhantes as atuais, embora não fossem operacionais. Eles exprimiam os números grandes por extenso (exemplo: 3709 – *nava sapta sata ca trisahasra* [3]) e que mais tarde acarretaria na descoberta do princípio de posição e do número zero. A partir do final do século VIII os árabes passaram a usar o sistema numérico hindu e se tornaram os grandes responsáveis por esta descoberta alcançar o Ocidente.

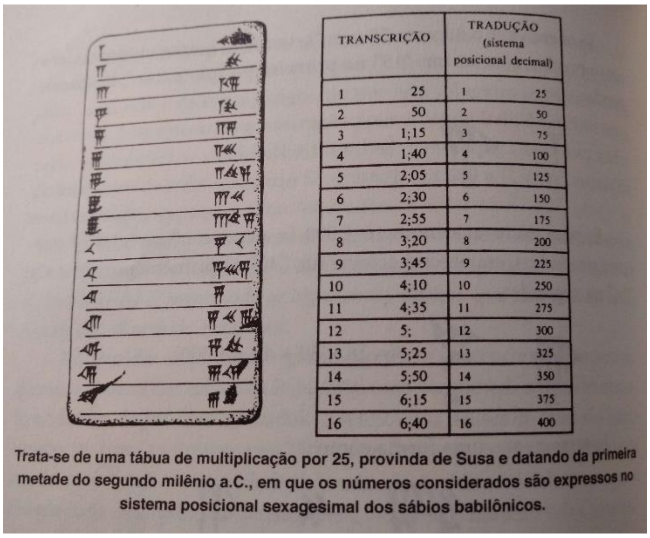
1.2 – História do zero

O princípio de posição dos números (valor relativo e valor absoluto) foi a pedra angular para a invenção do zero. Para Ifrah (2010), por volta de 1792 – 1750 a.C. os matemáticos e astrônomos babilônicos desenvolveram o sistema posicional, porém fundado na base sexagesimal. As cinquenta e nove unidades eram representadas por signos distintos, conforme a figura 1, mas por meio de repetições dos dois algarismos da base (1 e 10).

---

[3] Nove, sete centos e três mil – note que eles escreviam ao contrário.

Figura 1 – Tábua de multiplicação por 25.



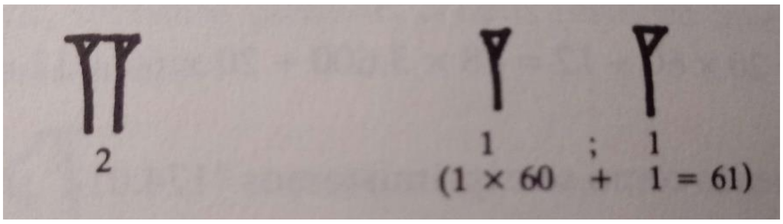
TRANSCRIÇÃO		TRADUÇÃO (sistema posicional decimal)	
1	25	1	25
2	50	2	50
3	1;15	3	75
4	1;40	4	100
5	2;05	5	125
6	2;30	6	150
7	2;55	7	175
8	3;20	8	200
9	3;45	9	225
10	4;10	10	250
11	4;35	11	275
12	5;	12	300
13	5;25	13	325
14	5;50	14	350
15	6;15	15	375
16	6;40	16	400

Trata-se de uma tábua de multiplicação por 25, provinda de Susa e datando da primeira metade do segundo milênio a.C., em que os números considerados são expressos no sistema posicional sexagesimal dos sábios babilônicos.

Fonte: Ifran, 2010, p. 240.

No entanto está representação apresentava alguns problemas, o sinal para o número 2 poderia ser entendido equivocadamente como o número 61, observe a figura 2:

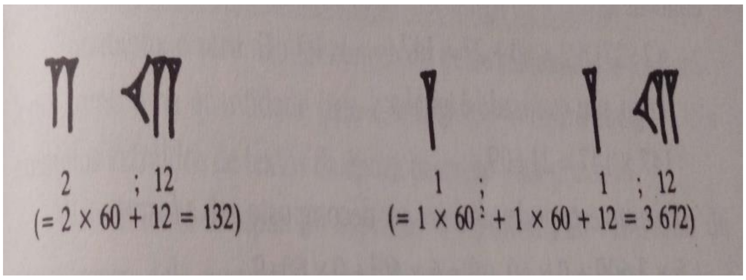
Figura 2 – Representação dos números 2 e 61.



Fonte: Ifran, 2010, p. 240.

A fim de suprimir este obstáculo e reduzir as ambiguidades na compreensão dos números representados, um espaço vazio foi introduzido para representar a mudança de ordem sexagesimal.

Figura 3 – representação de números com espaços vazios.



Fonte: Ifran, 2010, p. 241.

Todavia este espaço vazio acabou por gerar um novo contratempo: como representar a falta de várias ordens de unidades consecutivas? Segundo o autor no século III a.C. o zero babilônico, o mais antigo da história, surgiu através do signo  que foi criado para representar a ausência destas unidades sexagesimais. No entanto este zero foi entendido com o sentido de vazio e não como um número. Os povos chineses, os maias, e os hindus em épocas e sistemas posicionais diferentes e sem influências uns dos outros acabaram por chegar as mesmas conclusões.

Os hindus utilizavam um princípio posicional na base dez e no corpo nos números escritos utilizavam indicadores como *dasa*, dez; *sata*, cem; *sahasra,* mil etc. para expressar as bases de suas potências, todavia para diminuir o enunciado de um número eles passaram a omitir tais nomenclaturas. Desta maneira o número 2.679 por exemplo passou a ser expresso como: nove.sete.seis.dois $(= 9 + 7 \times 10 + 6 \times 100 + 2 \times 1.000)$ estabelecendo assim valores absolutos e relativos aos números.

Neste viés um novo contratempo acabou por surgir; como exprimir o número 607? Dizer sete.seis não bastava, pois esta expressão representava o número 67. Os hindus lançaram mão da palavra *śūnya*[4], para representar este número, o enunciando da seguinte forma: *sapta śūnya sat* (sete.vazio.seis). Ifran (2010) reitera que esta representação não possibilitava nenhum tipo de ambiguidades e o zero hindu foi finalmente concebido.

[4] Vazio

No século V os hindus descobriram a regra de posição e o zero, conforme afirma Ifrah (2010),

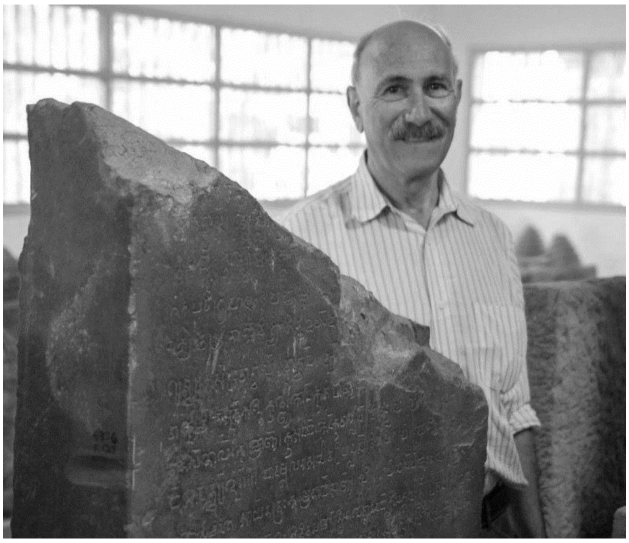
> Seus primeiros exemplos se encontram em um tratado de cosmologia com o título de *Lokavibhāga*, publicado por membros do movimento religioso hindu jainista em 25 de agosto do ano 458 do calendário juliano. (Esta data é segura, pois está claramente indicada no texto por sua equivalente data hindu então em uso; além disso, ela é confirmada por indicações relativas a determinados dados astronômicos hoje conhecidos e datados.) Neste texto, o número 14.236.713 está expresso do seguinte modo: *trīny ekam sapta sat trīni dve catvāry ekakam.* Ou seja, literalmente: ("TRÊS. UM. SETE. SEIS. TRÊS. DOIS. QUATRO.UM"). Quanto aos números que, como 13.107.200.000, comportam falta de unidades, eles são expressos sem possibilidade de erros graças à palavra *śūnya*: *śūnya śūnya śūnya śūnya śūnya dvi sapta śūnya eka tri eka* ("VAZIO. VAZIO. VAZIO. VAZIO. VAZIO. DOIS. SETE. VAZIO. UM. TRÊS. UM"). E, fato admirável, cada um desses enunciados é precisado no texto pela expressão em sânscrito: *sthānakramād* (literalmente: "por ordem de posição). (IFRAH, 2010, p. 270 – 271)

Ainda segundo Ifrah (2010) a partir do século VI, este sistema hindu, influenciou outras civilizações como o Camboja, o sudoeste do Vietnã, o Japão, etc., que empregaram em suas gravações de inscrições em pedra o mesmo recurso.

Embora muitos autores afirmem que o zero foi uma invenção hindu, Aczel (2015) relata em seu livro *Finding Zero* [5] a sua busca de quatro anos pelo artefato perdido o K – 127, encontrado pelo arqueólogo francês Geoges Coedès, em 1931, nas ruínas de um templo no Camboja datado do século VII. Neste artefato está escrito o número 605 e o zero é representado por um único e discreto ponto, sendo o mais antigo zero conhecido já descoberto escrito desta forma. O autor considera que o zero foi uma invenção cambojana embora admita que os mesmos sofreram fortes influências dos indianos. Na figura de número 4 podemos ver a pedra que Aczel encontrou nas ruínas do Conservatório de Angkor, no centro da selva do Camboja em janeiro de 2013, que no início de 2015 foi finalmente levada para o Museu Nacional do Camboja, na capital, Phnom Penh.

[5] Procurando o Zero

Figura 4 – Amir Aczel ao lado do artefato K-127.



Fonte: Página do jornal *The Cambodia Daily* [6]

A Índia foi uma sociedade que explorou ativamente o vazio e por consequência também o infinito, as duas faces de uma mesma moeda, eles aceitaram o zero: "Matemáticos indianos fizeram mais do que simplesmente aceitar o zero. Eles transformaram-no, mudaram o seu papel de mero espaço reservado para o número. Esta reencarnação foi o que deu ao zero seu poder." [7](SEIFE, 2000, p. 64, tradução nossa).

Seife (2000) destaca ainda a importância de Brahmagupta um matemático indiano do século VII, que popularizou o conceito do zero como um número, dando a ele um lugar fixo na reta numérica. Antes dele o zero era posicionado à direita do nove, porém Brahmagupta foi o primeiro a determinar regras para operar com o número zero (adição, subtração, multiplicação, divisão e outras fundamentais) e acabou assim por concluir que os números negativos faziam todo sentido,

[6] Disponível em: https://www.cambodiadaily.com/news/national-museum-to-show-first-zero-inscription-122866/ Acesso em: 16 de dezembro de 2017.
[7] Indian mathematicians did more than simply accept zero. They transformed it, changing its role from mere placeholder to number. This reincarnation was what gave zero its power.

estabelecendo assim que o zero deveria ser a fronteira entre os números positivos e os negativos.

Brahmagupta, segundo Seife (2000) estipulou normas para as operações com o zero como: um número multiplicado por zero resulta em zero; a soma e a diferença de um número com zero resulta nesse número, um número subtraído de seu simétrico resulta em zero, regras que conhecemos hoje. Cometendo equívocos apenas na operação de divisão, "[...] Brahmagupta estragou um pouco as coisas afirmando que $0 \div 0 = 0$, e na delicada questão de $a \div 0$ para $a \neq 0$ ele não se comprometeu." (BOYER, 1996, p. 150)

Para os hindus o zero já era considerado um número, entretanto o mesmo chegou ao Ocidente trazido por Fillius Bonacci – Fibonacci, que em sua obra *Liber Abaci*[8], se refere ao zero não como um algarismo e sim como um sinal. Foram precisos muitos anos para que o zero fosse aceito, conforme afirma Kaplan (2001),

> [...] em 1484 um físico de Lyon, Nicolas Chuquet, encontrou o valor de x na equação do segundo grau $3x^2 + 12 = 12x$ por seu método que $x = 2 \pm \sqrt{4-4}$, e observou que "uma vez que $4 - 4 = 0, \sqrt{0}$ adicionada ou subtraída de 2 resulta em 2, que é portanto, o numero que procurávamos". Mas como sua obra, *Le triparty em la Science des nombres*, só foi publicada após sua morte, passou-se ainda mais tempo até que o visto de permanência do zero fosse substituído por um certificado de naturalização. (KAPLAN, 2001, p. 109)

Como vimos o algarismo zero não foi batizado com este nome deste o seu princípio, ele sofreu a influência de vários povos até ser reconhecido por esta palavra hoje quase que universal,

> A maneira pela qual o "*śūnya*" indiano se transformou no zero atual constitui um dos capítulos mais interessantes na história da cultura. Quando os árabes do século X adotaram a numeração indiana, traduziram o "*śūnya*" indiano por sua própria palavra, *sifr*, que significa vazio, em árabe. Quando a numeração indo-arábica foi primeiramente introduzida na Itália, *sifr* foi latinizado para *zephhirum*. Isso aconteceu no início do século XIII, e durante os cem anos seguintes a palavra sofreu uma série de mudanças que culminaram no italiano zero. (DANTZING, 1970, p. 40).

Seife (2000) afirma ainda que a história do número zero é uma história de paradoxos, pois ele é um número diferente dos outros. Ele peregrinou do Oriente até o Ocidente ora adorado e amado e ora temido e odiado sendo muitas vezes proibido.

[8] Livro do ábaco – livro que não tratava do ábaco e sim dos algarismos arábicos.

Na Europa, zero era rejeitado, pois como Deus era onipotente a representação de tudo, algo que era a representação do nada era a ausência de Deus, ou seja, literalmente o diabo. Rejeitado na Europa o zero acabou por florescer na Índia e depois nas terras árabes.

O número zero acabou por se mostrar muito importante para o desenvolvimento da contabilidade, estando intimamente ligado à origem dos números negativos. Já nos é possível vislumbrar um pouco da importância deste número, no próximo capítulo a importância deste número para o desenvolvimento da Matemática será abordada.

2 – A IMPORTÂNCIA DO ZERO

A Matemática foi impactada pela descoberta do zero, pois muitos avanços foram permitidos depois dele. O sistema posicional nos números ganhou novo sentido porque ele “permite que nossos números sejam cíclicos e que os mesmos símbolos sejam usados repetidamente sem provocar ambiguidade.” (ROSSIN, 2015, p. 07)

A sua aceitação pelos hindus, como um número, mais precisamente por Brahmagupta, o levou a criar as regras para operar com o zero e ainda o permitiu vislumbrar a existência e a necessidade dos números negativos, como afirma Ifrah (2010),

> Graças a isto, o matemático e astrônomo Brahmagupta pôde ensinar, numa obra do ano de 628, o modo de efetuar simplesmente as seis operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, elevação a potências e extração de raízes), em relação ao que foi denominado “os bens”, “as dívidas” e “o nada”, isto é, em termos modernos, os números positivos, negativos ou nulos. A álgebra moderna acabara de nascer, e o sábio descobrira uma de suas regras fundamentais: uma dívida subtraída do nada torna-se um bem, e um bem subtraído do nada torna-se uma dívida (o oposto de um número positivo é negativo, e inversamente). (IFRAH, 2010, p. 293)

Como podemos observar, a contabilidade da época acabou por influenciar nas operações que foram de encontro com o número zero. As situações em que as dívidas eram saldadas, fazia-se necessário de algo que pudesse representar esta quitação e a própria dívida deveria também ser representa de alguma forma para que ao fim de algum tempo não fossem confundidas com créditos. Estes registros necessários para qualquer comerciante acabaram por influenciar no surgimento dos números negativos e do zero.

Sen e Agarwal (2015) afirmam que a álgebra desenvolvida por Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (cerca de 780 – 850 d.C.) no século IX, se deu quando ele começou a trabalhar em equações que ele igualou a zero e foi ele quem passou a chamar o zero de *sifr*. Suas obras foram difundidas para toda Europa quando se tornou conhecida por Fibonacci.

Os matemáticos indianos ao estudarem o zero entenderam que, quando qualquer número é dividido por zero o resultado é infinito: $\frac{a}{0} = \infty$. A compreensão do infinito permitiu o avanço no estudo do limite, da diferenciação, da integração, etc., que possibilitou o progresso do cálculo se tornando importante para qualquer matemático. A ascensão do cálculo proporcionou não só o desenvolvimento da Matemática como também da Física, Seife (2000) afirmou que:

> Cálculo permitiu que Newton combinasse todas essas equações em um grande conjunto de leis - leis que aplicavam em todos os casos, em todas as condições. Pela primeira vez, a ciência podia ver as leis universais subjacentes a todas essas pequenas e médias leis. Mesmo que os matemáticos soubessem que o cálculo era profundamente falho - graças à matemática de zero e infinito - rapidamente abraçaram as novas ferramentas matemáticas. Pois a verdade é que a natureza não fala em equações comuns. Ele fala em equações diferenciais, e o cálculo é a ferramenta que você precisa para colocar e resolver essas equações diferenciais. (SEIFE, 2000, p. 110, tradução nossa)[9]

O zero influenciou também na compreensão do conjunto vazio o que acabou também por impactar a Matemática, o matemático Gauss Cordeiro, da Universidade Federal Rural de Pernambuco explica isto em entrevista para Caldas (2008):

> “O conjunto vazio desempenha, na teoria dos conjuntos, um papel dual do zero na teoria dos números. Uma de suas maiores importâncias reside neste fato, pois várias propriedades na álgebra dos conjuntos são definidas analogamente àquelas da teoria dos números”. (CALDAS, 2008, p. 3)

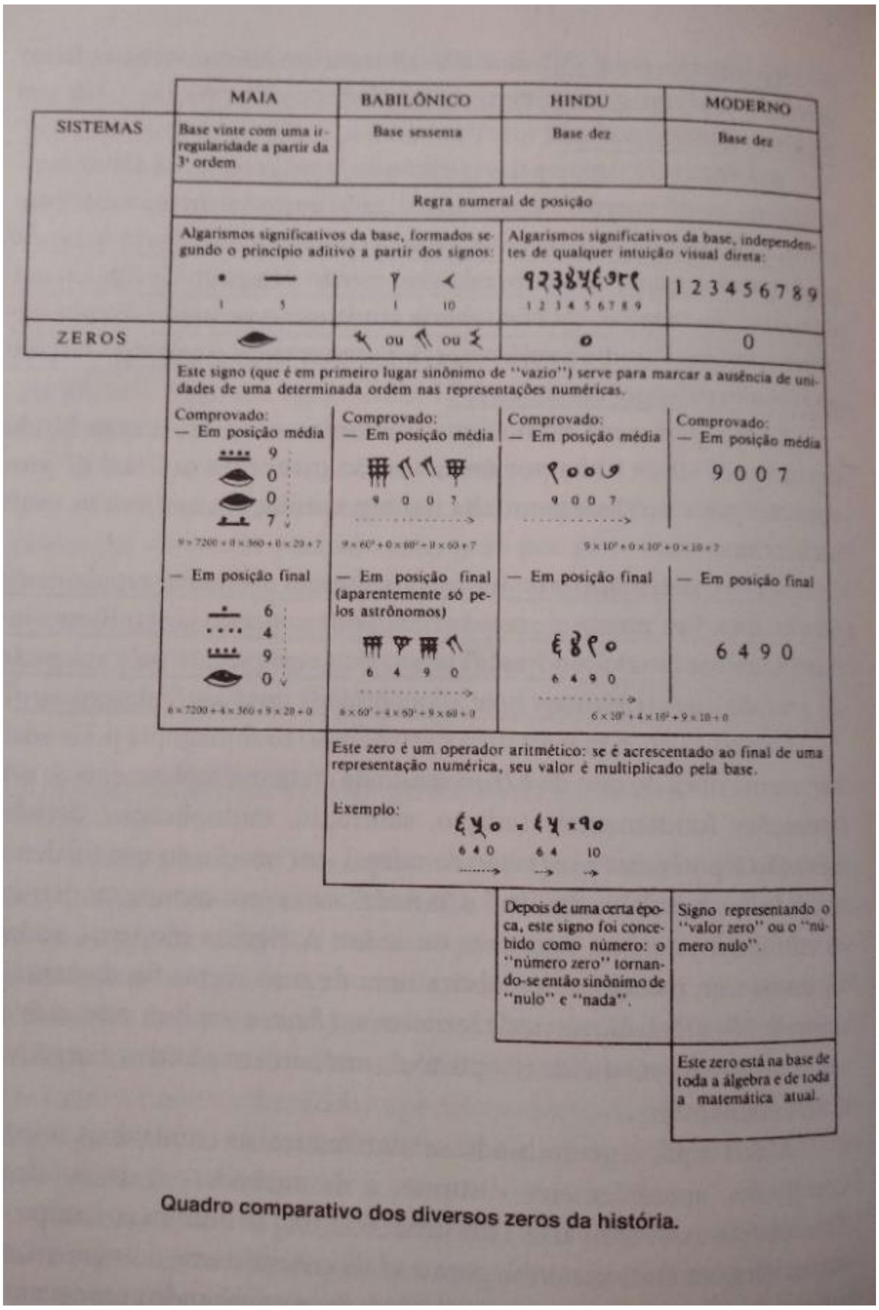
As operações algébricas realizadas na teoria dos números foram refletidas na teoria dos conjuntos como ressalta o matemático, portanto o zero é a representação do conjunto vazio.

Observe na figura 5, que se trata de um quadro comparativo dos diversos zeros da história, apresentado por Ifrah (2010), em que o autor na última célula assume que o “zero está na base de toda a álgebra e de toda a matemática atual.”

---

[9] Calculus allowed Newton to combine all these equations into one grand set of laws—laws that applied in all cases, under all conditions. For the first time, science could see the universal laws that underlie all of these little half laws. Even though mathematicians knew that calculus was deeply flawed—thanks to the mathematics of zero and infinity—they quickly embraced the new mathematical tools. For the truth is, nature doesn’t speak in ordinary equations. It speaks in differential equations, and calculus is the tool that you need to pose and solve hese differential equations.

Figura 5 – Quadro comparativo dos diversos zeros da história.



Fonte: Ifran, 2010, p. 294.

Em sua tese, Darice Padrão conclui que "hoje sabemos que a invenção do zero revolucionou a humanidade e contribuiu para avanços tecnológicos". (PADRÃO, 2008) Muito devemos ao zero, não apenas o desenvolvimento das ciências exatas como também as tecnológicas, Sen e Agarwal (2015) entendem que:

> Compreender e trabalhar com o zero é a base do nosso mundo de hoje; sem o zero, não teríamos o cálculo, a contabilidade financeira, a capacidade de fazer cálculos aritméticos rapidamente, e, especialmente no mundo conectado de hoje, computadores. A história do zero é a história de uma ideia

> que tem despertado a imaginação de super mentes em todo o mundo. (SEN, AGARWAL, 2015, p. 48, tradução nossa) [10]

Outro autor que também enfatiza essa importância para a exploração da ciência, da Matemática e das técnicas é Ifrah (2010) quando afirma que:

> [...] sem a numeração de posição e o zero, Wilhelm Schickard e Blaise Pascal não teriam tido a possibilidade de imaginar dispositivos de suas máquinas de calcular. O segundo nunca teria tido a ideia de conceber nem um *transportador* (lingueta de contrapeso que faz avançar bruscamente de uma chavelha o contador superior da ordem das unidades, quando esta à qual ele corresponde passa da chavelha “9” a “0”, após uma volta completa), nem um totalizador (dispositivo composto, para cada ordem de unidades, por um cilindro com duas numerações inversas de 0 a 9, uma para as adições e outra para as subtrações). Sem o zero e o princípio de posição, o problema da mecanização e da automatização do cálculo nunca teria tido uma solução: esta que levou inicialmente às calculadoras eletrônicas e às máquinas programadas para tratar a informação e foi dar na invenção do computador. (IFRAH, 2010, p. 324)

O zero se tornou um grande protagonista, partiu do nada para o tudo, neste importante enredo da humanidade e suas conquistas. Não é simplesmente muito ruído por coisa nenhuma é um assentimento para o desenvolvimento,

> O desenvolvimento do zero, em todos os continentes, séculos, e mentes tornou uma das maiores realizações da sociedade humana. Porque a matemática é uma linguagem global, e o cálculo seu coroamento, o zero existe e é usado em todos os lugares. Mas, como sua função como um símbolo e um conceito destinado a denotar ausência, o zero pode ainda parecer nada. No entanto, lembre-se dos temores sobre Y2K[11] e o zero já não parece mais como um conto contado por um idiota. (SEN, AGARWAL, 2015, p. 73, tradução nossa)[12]

Diante de tantos fatos não há argumentos, podemos observar que vários autores concordam no quão importante o zero se tornou para o desenvolvimento da Matemática e não somente para ela, como também para o desenvolvimento da

---

[10] Understanding and working with zero is the basis of our world today; without zero we would lack calculus, financial accounting, the ability to make arithmetic computations quickly, and, especially in today’s connected world, computers. The story of zero is the story of an idea that has aroused the imagination of super-minds across the globe.

[11] Problema do ano 2000, bug do milênio.

[12] The development of zero across continents, centuries, and minds has made it one of the greatest accomplishments of human society. Because mathematics is a global language, and calculus its crowning achievement, zero exists and is used everywhere. But, like its function as a symbol and a concept meant to denote absence, zero may still seem like nothing at all. Yet, recall the fears over Y2K and zero no longer seems like a tale told by an idiot.

humanidade. Em meio a tantos reconhecimentos, um questionamento inevitável paira no ar: afinal como seria a Matemática hoje sem o zero? A humanidade teria alcançado tantos avanços? Questionamentos estes que cabem uma reflexão mais profunda.

No próximo capítulo as relações do zero com a Aritmética, a Álgebra e a Geometria serão abordadas de modo a esclarecer as dúvidas mais frequente acerca das operações realizadas com este número.

3 – O ZERO, A ARITMÉTICA, A ÁLGEBRA E A GEOMETRIA

Afinal como se comporta o zero? Sabemos que zero mais zero é zero, mas ao se adicionar algo a si mesmo ele excederá qualquer outro número (2 + 2 = 4), mas o zero se recusa a fazer o mesmo. Quando se trata de uma divisão por zero, a situação se torna inconveniente e ainda mais delicada. A esquerda de um numero ele é insignificante, mas a direita pode atribuir um valor incalculável. Realmente o zero é um personagem cheio de personalidade. Trataremos das propriedades a seguir, ressaltando que operações serão realizadas no conjunto dos números Reais ($\mathbb{R}$).

3.1 – Propriedades

Entende-se por propriedades de um número as suas caraterísticas inerentes, fórmulas, postulados ou teorema. Entretanto neste tópico abordaremos apenas as quatro operações principais e o inverso aditivo.

3.1.1 – Adição

O zero é o elemento neutro da adição, ou seja, qualquer número operado com ele não sofrerá alteração, também pode ser chamado de elemento identidade.

$$x + 0 = 0 + x = x$$

3.1.2 – Subtração

A subtração é a operação inversa da adição, porém esta operação não é comutativa assim:

$$x - 0 \neq 0 - x$$

Se subtrairmos zero de um número este não se altera:

$$x - 0 = x$$

Se subtrairmos um número de zero teremos o inverso deste número:

$$0 - x = -x$$

3.1.3 – Inverso aditivo

Todo $x \in \mathbb{R}$ possui um inverso aditivo $-x \in \mathbb{R}$ tal que o elemento resultante da soma de x com seu inverso aditivo é precisamente o número zero:

$$x + (-x) = 0$$

3.1.4 – Multiplicação

O zero é o elemento absorvente da multiplicação, qualquer número multiplicado por zero é igual a zero:

$$x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Seja $x \in \mathbb{R}$, temos $x = x.1$, pela existência do elemento neutro da multiplicação. Pelo elemento neutro da adição podemos afirmar que $x \cdot 1 = x(1 + 0)$. Portanto pela propriedade distributiva:

$$x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0$$

$$x = x + x \cdot 0$$

Somando $(-x)$ em ambos os membros, temos:

$$x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

$$0 = x \cdot 0$$

Logo, $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, podemos concluir que se $x \cdot y = 0$, então ou $x = 0$ ou $y = 0$. (No conjunto dos números Reais)

Suponha $y \neq 0$. Assim $\exists\ y^{-1} \in \mathbb{R}$[13] tal que $y\, y^{-1} = 1$. Logo,

$$xy = 0$$

$$(xy) \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1}$$

$$x(yy^{-1}) = 0$$

$$x \cdot 1 = 0$$

$$x = 0$$

O caso é análogo para $x \neq 0$.

3.1.5 – Divisão

A divisão é a operação inversa da multiplicação, porém esta operação não é comutativa, então:

$$0 \div x \neq x \div 0$$

Nas operações de divisão que envolvem o zero temos três situações distintas:

- Zero dividido por um número não nulo;
- Um número não nulo dividido por zero;
- Zero dividido por zero.

Por ora falaremos apenas do primeiro tópico, os dois outros abordaremos no fim devido sua maior complexidade e para sua melhor compreensão necessitaremos de conceitos que serão abordados posteriormente neste trabalho. Observe que $0 \div x = 0, \forall x \neq 0$. Podemos assim afirmar que zero dividido por qualquer número não nulo é zero, porque qualquer número não nulo multiplicado por zero é o próprio zero.

3.2 – Zero é um número natural?

[13] $y^{-1} \in \mathbb{R}$ é o inverso multiplicativo de y, tal que $y \cdot y^{-1} = 1$.

Esta é uma questão interessante e aqui o zero mais uma vez coloca suas garras de fora, alguns autores afirmam que ele é um número natural, outros afirma que não e outros dizem que depende.

Elon Lajes Lima, em um artigo chamado “Conceitos e controvérsias” da Revista do Professor de Matemática – RPM (2011), declara que incorporar ou não o zero no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é mais uma questão de conveniência. Para o estudo da Álgebra por exemplo é interessante que $0 \in \mathbb{N}$ no entanto, para a Análise é mais adequado $0 \notin \mathbb{N}$. O autor justifica esta conveniência reconhecendo para a Álgebra:

> É natural que um autor de um livro de Álgebra, cujo principal interesse é o estudo das operações, considere o zero como um número natural pois isto lhe dará um elemento neutro para a adição de números naturais e permitirá que a diferença $x - y$ seja uma operação com valores em $\mathbb{N}$ não somente quando $x > y$ mas também se $x = y$. Assim, quando o algebrista considera zero como um número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções. (LIMA, 2011, p. 8)

No entanto no ponto de vista da Análise:

> [...] os números naturais ocorrem muito frequentemente como índices de termos numa sequência. Uma sequência (digamos, de números reais) é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O valor que a função x assume no número natural n é indicado com a notação X_n (em vez de $X(n)$) e é chamado o “n-ésimo termo” da sequência. A notação $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ é usada para representar a sequência. Aqui, o primeiro termo da sequência é X_1, o segundo é X_2 e assim por diante. Se fôssemos considerar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ então a sequência seria $(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$, na qual o primeiro termo é X_0, o segundo é X_1, etc. Em geral, X_n não seria o n-ésimo e sim o $(n + 1)$-ésimo termo. Para evitar essa discrepância, é mais conveniente tomar o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. (LIMA, 2011, págs. 8 e 9)

Com uma concepção semelhante à de Elon os autores Sen e Agarwal inicialmente afirmam que o “Zero é um número natural (pela maioria das definições), e o único número natural que não é positivo[14].” (SEN e AGARWAL, p. 13, tradução nossa), ressaltando que o zero não possui sinal, entretanto depois de algumas considerações eles alegam que:

> “O número 0 é o menor número inteiro não negativo. O número natural que sucede o 0 é o número 1 e nenhum número natural antecede o 0. Zero (0) pode e não pode ser considerado um número natural, mas é um número

[14] Zero is a natural number (by most definitions), and then the only natural number not to be positive.

> inteiro, um número racional, um número real, um número complexo e um número algébrico.” (SEN e AGARWAL, p. 79, tradução nossa)[15]

Para os autores o zero pode ser considerado natural sempre que for conveniente e aproveitam o ensejo para afirmarem, no entanto que certamente ele pertence a todos os outros conjuntos numéricos.

Em seu artigo sobre “Perguntas sobre o número zero” o professor da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Júlio César Reis (2016) nos alerta para essa polêmica declarando que “mesmo entre os matemáticos não existe um consenso sobre a inclusão ou não do zero como elemento do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.” (p. 60) O autor afirma ainda que esta definição é constantemente utilizada por livros didáticos por ser considerado mais instrutivo, mas chama atenção para o fato que o zero é o elemento neutro da adição para qualquer $n \in \mathbb{N}$, no entanto, em outras operações o elemento neutro deixará de ser o zero, como por exemplo, na multiplicação em que o elemento neutro é o número 1. E sobre a indagação se o zero é um número natural o professor responde:

> [...] depende. Se for conveniente, podemos incluir o zero no conjunto dos números naturais; se não for, podemos excluí-lo. É uma questão pessoal. Como existem opções, cada um fica com a sua. Eu não considero o zero como número natural. Eu acho que os números naturais são usados para a contagem e não é comum iniciar uma contagem com o zero. Além disso, o fato do número zero causar tanta polêmica também faz com que, na minha opinião, ele perca a chance de pertencer ao conjunto dos números naturais. (REIS, 2016, p. 60)

Já a professora Alda Dayana Mattos Mortari autora do artigo “Quem é maior, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$?” lança mão de um argumento diferente para justificar porque considera o zero um número natural. A professora comparou o conjunto dos números naturais com o zero com o conjunto dos números naturais sem o zero com a intenção de responder qual dos dois conjuntos possuía mais elementos. Ela ressaltou que embora todos tenham a tendência de responder que o conjunto dos números naturais com o zero possui mais elementos a verdade é que ambos são conjuntos infinitos, como infinito não é um número não se pode fazer contas com ele.

[15] The number 0 is the smallest nonnegative integer. The natural number following the number 0 is 1 and no natural number precedes 0. Zero (0) may/may not be considered a natural number, but it is a whole number, a rational number, a real number, a complex number, and an algebraic number.

A autora usando o conceito de função propõe que, para verificar se dois conjuntos quaisquer (finito ou infinito) possuem a mesma quantidade de elementos deve ser mostrando que há uma bijeção entre eles, então ela tomou uma função injetora e também sobrejetora entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$, apontando, portanto, uma bijeção entre os conjuntos afirmando assim que eles possuem a mesma quantidade de elementos.

3.3 – Como se escreve zero em algarismo romano?

A verdade é que os romanos não precisavam da representação do número zero. A necessidade do número zero deve-se ao sistema de numeração posicional, na qual os números assumem valores relativos devido à sua posição segundo Artur Louback Lopes no artigo “Como se escreve zero em números romanos?” da Revista Mundo Estranho (2016).

Observe que para escrever o 2017 precisamos do zero para indicar que a ordem da centena está vazia. Se invertermos este número teremos 7102, números totalmente diferentes, embora os algarismos usados tenham sido os mesmos, e o zero neste caso indica que a ordem da dezena agora se encontra vazia.

No entanto 2017 em algarismos romanos é escrito da seguinte maneira MMXVII, em que: M representa um milhar, X representa uma dezena, V representa cinco unidades e I representa uma unidade. Logo para este tipo de notação não precisamos representar a centena, pois a mesma não é necessária. É importante salientar que embora o sistema de numeração romano pareça posicional na verdade não é, basta observar por exemplo os números D (500) e CD (400). No caso do número 400 é utilizado a representação do número 500 precedido da representação do número 100 (C) o que indica uma subtração de valores.

3.4 – Zero é cardinal e ordinal?

Primeiro é interessante relembrarmos os conceitos de números cardinais e ordinais. Consultando o Dicionário Aurélio encontramos os seguintes significados: cardinal – diz-se do determinativo numeral que indica a quantidade (opõe-se a ordinal); ordinal – que indica ou é relativo a série ou ordem. Ou seja, os números cardinais expressam uma quantidade de elementos, enquanto os números ordinais apontam a ordem.

Observe o que anunciam Sen e Agarwal (2015):

> Teoria do conjunto o número / símbolo 0 é a cardinalidade do conjunto vazio: se um conjunto não tem vacas, então tem 0 vacas. Na verdade, em certos desenvolvimentos axiomáticos da teoria do conjunto de Matemática, 0 é definido como o conjunto vazio. Quando isso for feito, o conjunto vazio é a atribuição do cardeal para um conjunto sem elementos, conforme a teoria de von Neumann. A função cardinalidade, aplicada no conjunto vazio, retorna o conjunto vazio como um valor, atribuindo-o 0 elementos. Também 0 é o número ordinal mais baixo, correspondente ao conjunto vazio visto como um conjunto bem ordenado. (SEN, AGARWAL, 2015, p. 80, tradução nossa)[16]

Neste viés nos é possível constatar que o número zero é um cardinal que descreve um conjunto que não possui elementos, no entanto nas gramáticas, primeiro material didático no qual estudamos a cardinalidade, o zero não apareça no rol desta classificação. Um erro que é observado devido à falta de revisão do conteúdo matemático presente no material didático por um profissional especializado na área de Matemática.

Quanto a questão de ser ou não ordinal temos que refletir um pouco. Considerando às 00 h, sabemos que o dia começa neste horário, então é correto afirmarmos que esta é a primeira hora do dia, logo às 01 h será a segunda hora do dia. Note que mesmo se tratando da hora zero (que pertence a quantidade absoluta de horas de um dia) quando ordenada indicará a primeira hora do dia.

Dessa forma podemos deduzir que zero é um número cardinal, porém não é um número ordinal.

3.5 – Zero é par?

[16] *Set theory* The number/symbol 0 is the cardinality of the empty set: if one does not have any cows, then one has 0 cows. In fact, in certain axiomatic developments of mathematics from set theory, 0 is *defined* to be the empty set. When this is done, the empty set is the von Neumann cardinal assignment for a set with no elements. The cardinality function, applied to the empty set, returns the empty set as a value, thereby assigning it 0 elements.
Also 0 is the lowest ordinal number, corresponding to the empty set viewed as a wellordered set.

No ano de 2012 mais precisamente na noite do dia 29 de outubro o furacão Sandy atingiu os Estados Unidos da América causando muitos estragos. Michael Bloomberg prefeito da cidade de Nova York ao oitavo dia do mês de novembro recorreu ao racionamento de combustível devido a falta do mesmo, como relatou a *British Broadcasting Corporation – BBC News*. Solicitou que os proprietários de veículos cujas placas terminem em um número par, ou no número zero, poderiam comprar combustível apenas em dias pares.

Quando nos atentamos para a solicitação do prefeito percebemos que ele não está certo de que zero é um número par embora tenha colocado os veículos com placas terminadas em zero no conjunto dos carros que foram abastecidos nos dias pares. Afinal como classificamos o zero? Par, ímpar ou nem uma coisa nem outra?

Para entendermos melhor esta questão vamos definir o que é a paridade de um número, pautando-nos em Domingues e Iezzi (2003):

> Na divisão de um inteiro n por 2 há duas possibilidades: o resto ser 0 ou 1. No primeiro caso, o número é divisível por 2 e é chamado par. Consequentemente, os números pares se apresentam sob a forma $2t$, em que t é um inteiro. Se o resto for 1, o número pode ser expresso por $n = 2t + 1$, para algum t, e é chamado número ímpar. (DOMINGUES, IEZZI, 2003, p. 35)

Para demonstrarmos esta definição basta levarmos em consideração o resto r da divisão de um número inteiro n por 2. Temos $n = 2t + r$ (ou $n = 2t - r$) $\forall t \in \mathbb{Z}$, verifica-se $0 \leq r < 2$. Daí temos que ou $r = 0$ ou $r = 1$, se $r = 0$ então teremos um número par $n = 2t$ e se $r = 1$ teremos um número ímpar $n = 2t + 1$.

Note que um número inteiro não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo, pois teríamos $2t = n = 2t' + 1 \Leftrightarrow 2(t - t') = 1$, um absurdo. Logo, o conjunto dos números inteiros está dividido nestes dois subconjuntos. Daí podemos afirmar que se zero for par não será impar e vice-versa.

Vamos verificar então se zero é ímpar, se for este o caso ele pode ser escrito na forma de $n = 2t + 1$ ou $n = 2t - 1$, no entanto se analisarmos um pouco vamos notar que $\nexists\ t \in \mathbb{Z}$ que satisfaça essa condição, portanto zero não é ímpar.

Será então o zero um número par? Se for possível escrever o número zero da forma $n = 2t$, então a resposta será sim. Não são necessários muitos estudos para identificarmos que $\exists\ t \in \mathbb{Z}$ que satisfaz a condição $n = 0$, basta tomarmos $t = 0$. Assim podemos afirmar que zero é um número par.

Mas então porque não só o prefeito de Nova York como outras pessoas não tem certeza disto? Provavelmente deve-se ao fato do zero ser considerado por muitos como um elemento neutro, este fato não está de todo errado, no entanto como já vimos anteriormente, ele só é neutro nas operações de adição e subtração (quando $x - 0$).

3.6 – Zero é um número primo ou composto?

Zero não é um número nem primo nem composto, conforme esclarecem Sen e Agarwal (2015):

> Não é nem um número composto nem um número primo. O número 0 não pode ser primo uma vez que possui um número infinito de fatores. Ele não pode ser composto, porque não pode ser expresso como o produto de números primos (0 deve ser sempre um dos fatores). (SEN, AGARWAL, 2015, p. 79, tradução nossa)[17]

Para entender melhor a explicação dos autores ponderamos com o que diz Hefez (2005):

> Um número natural maior do que 1 e que só é divisível por 1 e por si próprio é chamado de número primo.
>
> Dados dois números primos p e q e um número natural a qualquer, decorrem da definição acima os seguintes fatos:
>
> I) Se $p|q$, então $p = q$.
>
> De fato, como $p|q$ e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, o que acarreta $p = q$.
>
> II) Se $p \nmid a$, então $(p, a) = 1$.
>
> De fato, se $(p, a) = d$, temos que $d|p$ e $d|a$. Portanto, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid a$ e, consequentemente, $d = 1$.
>
> Um número maior do que 1 e que não é primo será chamado composto. Portanto, se um número n é composto, existirá um divisor n_1 de n tal que $n_1 \neq 1$ e $n_1 \neq n$. Portanto, existirá um número natural n_2 tal que:

---

[17] It is neither a composite number nor a prime number. The number 0 cannot be prime since it has an infinite number of factors. It cannot be composite because it cannot be expressed as the product of prime numbers (0 must always be one of the factors).

$$n = n_1 n_2, com\ 1 < n_1 < n\ e, 1 < n_2 < n.$$

> Por exemplo, 2, 3, 5, 7, 11 e 13 são números primos, enquanto que 4, 6, 8, 9, 10 e 12 são compostos. (HEFEZ, 2005, p. 82)

É pertinente então afirmar, consoante as definições acima, que o zero não satisfaz as condições nem para números primos e nem para números compostos.

3.7 - Zero é positivo ou negativo?

Considerando a reta numérica podemos corresponder a ela uma infinidade de pontos, cada ponto marcado do lado direito possui um simétrico do lado esquerdo e vice-versa. Entretanto para podermos definir um lado direito ou esquerdo necessitamos de uma origem e neste caso a origem é o número zero.

Partindo da origem convencionou-se que da esquerda para a direita a reta conteria os pontos positivos o lado crescente da reta e da direita para esquerda conteria pontos negativos sendo este o lado decrescente. O zero é a fronteira para estes dois lados da reta, ele quem determina quando ela passa a ser crescente ou decrescente, negativa ou positiva.

Sabemos que o zero representa a falta de valor, portanto ele “[...] não é nem positivo nem negativo, mas sim a terra de ninguém mais estreita entre esses dois reinos.” (KAPLAN, 2001, p. 179)

3.8 – Zero e o plano cartesiano

Um par ordenado (a, b) pode ser representado geometricamente em um plano cartesiano, um legado importante deixado pelo filósofo, físico e matemático René Descartes.

Descartes percebeu que poderia usar duas linhas de referências e um par ordenado pala localizar e representar um ponto graficamente. No entanto, conforme expõe Seife (2000), Descartes percebeu que não poderia começar seus dois eixos no número 1, pois isso lhe causaria erros. Vale ressaltar que ele não pensou em um sistema de coordenadas negativas se ateve apenas no 1º quadrante. Por morar na Europa e já conhecer o sistema numérico hindu-arábico ele estabeleceu que o local onde os eixos se cruzavam seria a origem do sistema cartesiano e suas coordenadas definidas pelo par (0, 0).

Ainda segundo o autor, Descartes logo se deu conta da eficiência de seu sistema, pois ele poderia transformar figuras geométricas e também representá-las por meio de equações, elaborando relações matemáticas para as mesmas. Como por exemplo, a representação do conjunto de pontos da equação $x^2 + y^2 - 25 = 0$, que caracteriza uma circunferência de raio 5, centrada na origem (0, 0). Com isto Descartes acabou por unir a geometria ocidental com a álgebra oriental e o zero estava no centro desta união.

Notamos mais uma vez a importância do número zero para o desenvolvimento da Matemática.

3.9 – Exponencial

Precisamos compreender teoricamente as definições de exponencial, fundamentados em Iezzi (2004), temos:

> Dado um número real a e um número natural n, com $n \geq 2$, chama-se potência de base $\boldsymbol{a}$ e expoente $\boldsymbol{n}$ o número a^n que é o produto de n fatores iguais a a.
>
> $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ fatores}$$
>
> Dessa definição decorre que:
>
> $a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a \cdot a,\ a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, etc.$ (IEZZI, 2004, p.168)

3.9.1 – Zero elevado a um número real $\boldsymbol{n}$

Zero elevado a qualquer número $n \neq 0$, será sempre zero.

$$0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{n\ fatores} = 0$$

3.9.2 – Um número real a elevado a zero

Ainda nos apoiando em Iezzi (2004) podemos afirmar que quando temos um número real a, estipulou-se que $a^1 = a$ e que $a^0 = 1$ (sendo $a \neq 0$).

Logo, teremos que todo número real elevado a zero é igual a 1.

Observe:

$$\forall\, a \neq 0$$

Pelas propriedades de potência temos que:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

No caso da divisão se tomarmos $m = n$ teremos:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} \Longrightarrow \frac{a^n}{a^n} = 1 \Rightarrow a^{n-n} = 1 \Rightarrow a^0 = 1$$

Logo:

$$a^0 = 1, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}\, e\, a \neq 0$$

3.9.3 – Zero elevado a zero

Aqui nos deparamos com mais um “mistério” no qual o número zero está envolvido. Vamos observar os dois casos já vistos 3.9.1 e 3.9.2.

Observe os argumentos utilizados por Lima (2011): em 3.9.1 vimos que $0^n = 0, \forall n \neq 0$ não seria voluntário colocar $0^0 = 0$? Então por outro lado, como $x^0 = 1, \forall x \neq 0$, conforme vimos em 3.9.2, também não seria voluntário colocar $0^0 = 1$? “Logo o símbolo 0^0 não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considerá-lo como uma expressão indeterminada.” (LIMA, 2011, p. 10)

Além destas operações aritméticas, um outro argumento mais complexo, proveniente da teoria dos limites, nos revela esta indeterminação. De acordo com Lima (2006):

> “[...] dado qualquer número real $c > 0$ podemos achar funções $f, g: X \to \mathbb{R}$, com $a \in X'$ e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0, f(x) > 0$ para todo $x \in X$, enquanto $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = c$. Basta, por exemplo, definir $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = x, g(x) = logc/logx$. Neste caso, vale $f(x)^{g(x)} = c$ para todo $x \neq 0$. (Tome logaritmos de ambos os membros.) Portanto $\lim_{x \to 0} f(x)^{g(x)} = c$. Ainda neste caso, podemos escolher f e g de modo que o limite de $f(x)^{g(x)}$ não exista. Basta tomar, digamos, $f(x) = x$ e $g(x) = \log(1 + |sen 1/x|) \cdot (logx)^{-1}$. Então $f(x)^{g(x)} = 1 + |sex 1/x|$, portanto não existe $\lim_{x \to 0} f(x)^{g(x)}$. (LIMA, 2006, p. 71)

Diante dos argumentos vistos, podemos então afirmar, que 0^0 é uma expressão indeterminada.

3.10 – Raiz enésima de zero

Para definirmos uma raiz enésima aritmética tomamos como base Iezzi (2004) que afirma:

> Dados um número real não negativo a e um número natural $n, n \geq 1$, chama-se raiz enésima aritmética de a o número real e não negativo b tal que $b^n = a$. O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado radical, indica a raiz enésima aritmética de a. Nele, a é chamado radicando, e n, índice. $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0 \; e \; b^n = a$ (IEZZI, 2004, p.172)

Vimos ainda em 3.9.1 que:

$$0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot ... \cdot 0}_{n \, fatores} = 0, \forall \, n \neq 0$$

Portanto podemos concluir que a raiz de um radicando nulo também é nula, pois:

$$\sqrt[n]{0} = 0 \Leftrightarrow 0^n = 0$$

3.11 – Zero fatorial

Fatorial de um número natural, por definição consoante Iezzi (2004):

> Dado um número natural n, definimos o fatorial n (indicado por $n!$) através das relações:
>
> I. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \; para \; n \geq 2.$
>
> II. Se $n = 1, 1! = 1.$
>
> III. Se $n = 0, 0! = 1.$
>
> Notemos que, em I, o fatorial de n representa o produto dos n primeiros naturais positivos, escritos desde n até 1. (IEZZI, 2004, p. 314)

De acordo com o autor podemos concluir a seguinte relação de recorrência:

$$n! = n \cdot (n-1)!, n \in \mathbb{N}^* e \; n \geq 2$$

Vamos agora nos voltar para o caso de $0!$. Olhando para a definição acima é estranho definirmos $0! = 1$, pois se tomarmos $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ não seria mais intuitivo termos algo do tipo: $0! = 0$? Mais uma vez o zero mostra sua adversidade diante dos conceitos matemáticos.

Vamos tentar entender então o que acontece. Observe os exemplos:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ é } o \; mesmo \; que \; 3! = \frac{4!}{4}$$

$$2! = 2 \cdot 1 \text{ é } o \; mesmo \; que \; 2! = \frac{3!}{3}$$

$$1! = 1 \text{ é } o \; mesmo \; que \; 1! = \frac{2!}{2}$$

Então podemos concluir que:

$$n! = n \cdot (n-1)! \text{ é } o \; mesmo \; que \; (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Agora vamos substituir $n = 1$ em $(n-1)! = \frac{n!}{n}$

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$

Temos que $1! = 1$, então:

$$0! = \frac{1}{1} \Leftrightarrow 0! = 1$$

Com algumas poucas manipulações algébricas podemos compreender que afinal não se trata de algo tão absurdo quando definimos que $0! = 1$.

3.12 – Divisão por zero

Vimos anteriormente que existem três possíveis situações envolvendo o número zero e a divisão. Neste tópico temos interesse em pautarmos um pouco mais sobre a problemática divisão por zero.

3.12.1 – Um número não nulo dividido por zero

É quase um dogma a expressão "não se pode dividir por zero", pois muito raramente questionamos o porquê. Aceitamos e pronto!

Para Reid (2006):

> Uma divisão, no entanto, indica que algum número (o quociente) quando multiplicado por outro (o divisor) produzirá o número que está sendo dividido. Se houver uma resposta para o problema $1/0$, ou um valor para a expressão $1/0$, teria que ser um número que multiplicado por zero resultasse em um. Mas já afirmamos que qualquer número multiplicado por zero pode produzir apenas zero. Seguem, portanto, que não podemos dividir um (ou qualquer outro número) por zero. (REID, 2006, p. 8, tradução nossa)[18]

[18] A division, however, indicates that some number (the quotient) when multiplied by another (the divisor) will produce the number being divided. If there is an answer to the problem 1/0, or a value for the expression. 1/0, it would have to be such a number that multiplied by zero would produce one. But we have already stated that any number multiplied by zero can produce only zero. It follows, therefore, that we cannot divide one (or any other number) by zero.

Na verdade, a resposta está no fato do zero não possuir inverso multiplicativo, ou seja, dado um $x/0$ não há nenhum número real ou complexo que multiplicado por zero resulte em x. A divisão $x/0$ é, portanto, considerada indefinida.

3.12.2 – Zero dividido por zero

Este foi um enigma estudado por muito tempo e que contribuiu massivamente no desenvolvimento do cálculo. Como vimos quando Brahmagupta desenvolveu as regras para as operações com o número zero, seu único pecado foi exatamente na divisão de zero por zero quando definiu que $0 \div 0 = 0$.

Porém a divisão $0/0$ não está definida e de acordo com Lima (2006) não possui significado aritmético,

> Afirmar que $0/0$ é indeterminada tem o seguinte significado preciso:
>
> Sejam $X \subset \mathbb{R}, f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}, a \in X'$. Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ e que, pondo $Y = \{x \in X; g(x) \neq 0\}$, ainda se tenha $a \in Y'$. Então $f(x)/g(x)$ está definida quando $x \in Y$ e faz sentido indagar se existe $\lim_{x\to a} f(x)\,/g(x)$. Mas nada se pode dizer em geral sobre este limite. Dependendo das funções f, g, ele pode assumir qualquer valor real ou não existir. Por exemplo, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, tomando $f(x) = cx \; e \; g(x) = x$, temos $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$, enquanto $\lim_{x\to 0} f(x)\,/g(x) = c$. Por outro lado, se tomarmos $f(x) = x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right), (x \neq 0)$ e $g(x) = x$, teremos $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$, mas não existe $\lim_{x\to 0} f(x)\,/g(x)$. (LIMA, 2006, p. 70)

Como vimos Brahmagupta não poderia afirmar que $0 \div 0 = 0$, pois esta operação é indeterminada. No entanto, o significado apresentado por Lima levou algum tempo para ser formulado e compreendido.

Segundo Seife (2000) os primeiros passos para definir que a divisão de zero por zero é indeterminada iniciou-se nos problemas encontrados na equação de fluxão de Newton, por volta de 1660. Newton ao se deparar com os infinitesimais em suas equações, achou o conceito um tanto quanto ridículo para a época. Os infinitesimais eram muito pequenos e ainda assim eram maiores que zero envergonhado Newton preferiu esconde-los de suas equações.

Por outro lado, segundo o autor, Leibniz acabou por revelar estes infinitesimais recorrendo ao desenvolvimento do cálculo da derivada de y em relação a x, uma proporção infinitesimal dy/dx que proporcionou a manipulação dos mesmos. Entretanto os diferenciais de Leibniz ainda tinham os mesmos problemas dos fluxões de Newton a divisão de zero por zero. E o desenvolvimento do cálculo seguia baseado na fé e não na lógica.

Os incompreendidos zero e infinito começam a sair da escuridão através da regra de L'Hôpital publicada no livro didático Analyze des infini petits de L'Hôpital em 1696. Regra esta que foi reivindicada por Johann Bernoulli que foi professor de L'Hôpital em 1692 e teria lhe enviado por carta suas novas descobertas. Seife (2000) ressalta que:

> A regra de L'Hôpital tomou-se a primeira a solucionar as expressões preocupantes de $0/0$ que surgiram ao longo do cálculo. A regra forneceu uma maneira de descobrir o verdadeiro valor de uma função matemática que vai para $0/0$ em um ponto. A regra de L'Hôpital afirma que o valor da fração era igual à derivada da expressão superior dividida pela derivada da expressão inferior. Por exemplo, considere a expressão $x/(sen\ x)$ quando $x = 0$; $x = 0$, assim como $sen\ x$, então a expressão é igual a $0/0$. Usando a regra de L'Hopital, vemos que a expressão passa para $1/(cos\ x)$, como 1 é a derivada de x e $cos\ x$ é a derivada de $sen\ x$. Temos que o $cos\ x = 1$ quando $x = 0$, então toda a expressão é igual a $1/1 = 1$. [...] É por isso que o $0/0$ é denominado indeterminado. Não era mais um mistério completo; matemáticos poderiam extrair algumas informações sobre $0/0$ se o abordarem com muito cuidado. Zero não era mais um inimigo a ser evitado; Era um enigma a ser estudado. (SEIFE, 2000, p. 127, tradução nossa)[19]

Para o autor o zero foi finalmente domado por D'Alembert quando ele criou a ideia de limite e resolveu os problemas de cálculo com zero. Seife (2000) afirma que:

> O que D'Alembert fez informalmente – o que o francês Augustin Cauchy, o checo Bernhard Bolzano, e o alemão Karl Weierstrass viriam a formalizar – reescrevendo a soma infinita $1 + 1/2\ + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2n + \cdots$ como a expressão limite (n tende para?) de $1 + 1/2\ + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2n$.

---

[19] L'Hôpital's rule took the first crack at the troubling $0/0$ expressions that were popping up throughout calculus. The rule provided a way to figure out the true value of a mathematical function that goes to $0/0$ at a point. L'Hôpital's rule states that the value of the fraction was equal to the derivative of the top expression divided by the derivative of the bottom expression. For instance, consider the expression $x/(sin\ x)$ when $x = 0$; $x = 0$, as does $sin\ x$, so the expression is equal to $0/0$. Using L'Hopital's rule, we see that the expression goes to $1/(cos\ x)$, as 1 is the derivative of x and $cos\ x$ is the derivative of sin x. $Cos\ x = 1$ when $x = 0$, so the whole expression equals $1/1 = 1$. [...] This is why $0/0$ is dubbed indeterminate. It was no longer a complete mystery; mathematicians could extract some information about 0/0 if they approached it very carefully. Zero was no longer an enemy to be avoided; it was an enigma to be studied.

> É uma mudança muito sutil na notação, mas faz toda a diferença no mundo. (SEIFE, 2000, p. 129, tradução nossa)[20]

Então, finalmente após o desenvolvimento do limite a divisão por zero já não era crucial. “O misticismo desapareceu do domínio da matemática e a lógica governou mais uma vez. A paz durou até o Reino do Terror.” (SEIFE, 2000, p.130, tradução nossa)[21]

3.13 – O zero e a Geometria

Seife (2000) destaca que a Matemática inicialmente estava ligada à necessidade de contar e medir. Para ele, os números sem o zero eram suficientes para dar significado a Geometria e as civilizações funcionavam bem sem ele.

Quando tratamos de questões geométricas um espaço vazio ou negativo não nos leva a nenhum resultado interessante ou então um pouco confuso. Um exemplo interessante abordado pela revista Cálculo – Matemática para todos, em uma entrevista ao professor Reis (2013), foi sobre a existência do ângulo zero. Quando questionado o professor afirmou que sim “[...] quando duas retas têm dois pontos distintos em comum.” (REIS, 2013, p. 24)

Mas a verdade é que para a maioria das pessoas isso não é tão evidente. Observe a definição de ângulo, na Geometria Euclidiana Plana, segundo Barbosa (1995): “Chamamos de ângulo a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem.” (BARBOSA, 1995, p. 22) Diante desta definição muitos acham que a mesma não abarca um suposto ângulo 0º, pois não são necessárias duas semirretas?

Entretanto precisamos recorrer ao Axioma III de medição de ângulo, nos baseando também em Barbosa (1995) para compreendermos a conclusão do professor Reis, “Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de

---

[20] What d’Alembert did informally—and what the Frenchman Augustin Cauchy, the Czech Bernhard Bolzano, and the German Karl Weierstrass would later formalize—was to rewrite the infinite sum $1 + 1/2\ + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2n + \cdots$ as the expression. limit (as n goes to?) of $1 + 1/2\ + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2n.$
It’s a very subtle change in notation, but it makes all the difference in the world.
[21] No longer was it necessary to divide by zeros. Mysticism vanished from the realm of mathematics and logic ruled once more. The peace lasted until the Reign of Terror.

ângulo é zero se e somente se ele é construído por duas semi-retas coincidentes." (BARBOSA, 1995, p. 24) "Coincidentes" ora pois, é exatamente nesta palavra que reside o problema do ângulo zero, afinal numa representação geométrica o que vemos é apenas uma semirreta o que pode representar uma certa ambiguidade, induzindo ao erro de existir apenas uma só semirreta.

Uma situação um tanto análoga a este contexto é notar o que Euclides (325 – 265 a.C.) chamou de objeto de dimensão zero, conforme ressaltam Sen e Agarwal (2015),

> [...] era a representação de um ponto (isto é, "bindu" em Sânscrito e em muitas outras línguas indianas) ou a definição do ponto (um zero objeto dimensional). Há uma necessidade de representar um ponto em um papel, mas para isso, ele seria difícil transmitir sua geometria para outros. O ponto é definido como algo que não tem largura, sem comprimento e sem altura (no espaço tridimensional), ainda assim existe. Essa definição contraditória é o único meio para transmitir ao mundo o que um ponto é.
>
> Neste contexto, vale a pena notar que Euclides (325-265 a.C.) chamou de um objeto geométrico de "signo" (semeion) de dimensão zero, uma prática que a maioria dos sucessores seguiu, substituindo a palavra anterior "ponto" (estigma). (SEN, AGARWAL, 2015, p. 33, tradução nossa)[22]

Realmente este é um ponto que nos deixa intrigado, como é possível existir uma esfera de diâmetro zero? Ou pior compreender a existência da reta se a mesma é um subconjunto de infinitos pontos?

---

[22] ... was the representation of a point (i.e., "bindu" in Sanskrit and in many other Indian languages) or the definition of the point (a zero dimensional object). There is a need to represent a point on a paper. But for this, it would be difficult to convey its geometry to others. The point is defined as something that has no width, no length, and no height (in three-dimensional space), yet it exists. Such a contradictory definition is the only means to convey to the world what a point is.
In this context, it is worth noting that Euclid (325–265 BC) called a geometrical object of zero dimension "sign" (semeion), a practice which most successors followed, replacing the former word "point" (stigme).

4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou a compreensão e visualização da importância de um simples número para a evolução da Matemática. Embora tenha sido o último algarismo, a ser desenvolvido pela humanidade, foi pelo que nos parece o mais importante, pois proporcionou a grandes matemáticos inquietações que os fizeram evoluir.

Com uma história um tanto quanto conturbada, o zero precisou vencer muitos obstáculos para chegar à luz dos nossos dias. Marginalizado por ser considerado a representação do mal pelos tementes a Deus, ele foi ignorado por muitos anos, até que as civilizações se deram conta de que ele era indispensável. Seife (2000) defende que o zero mantém guardado consigo o segredo da nossa existência e possivelmente será o responsável pelo fim do mundo, mas essa já é outra história.

Mas como nem tudo são flores, temos que concordar que o zero é mesmo um pouco controverso. Na Alemanha por exemplo o número zero presente nas placas dos carros é representado com uma abertura superior para evitar confusões. As extintas maquinas de escrever não possuíam uma tecla para o zero, seus usuários tinham que utilizar a letra “o” em maiúsculo. E isso para não falarmos do computador em que o zero era representado inicialmente cortado em sua tecla (∅) e ainda hoje se encontra depois do nove e não antes do um. A virada do milênio foi comemorada na data errada porque o ano zero não foi contado entre 1 a.C. e 1 d.C. por falta do zero. E assim sucessivamente.

A importância deste número para a Matemática certamente não foi esgotada nas páginas deste trabalho, provavelmente muito mais esteja pairando no ar e uma pesquisa mais profunda poderia nos proporcionar descobertas ainda mais interessantes. Alguns autores nos quais este trabalho foi pautado revelaram ainda, o quão importante o zero se tornou para outras áreas como para Tecnologia, para a Física e também para a Arte. Segundo Seife (2000), Brunelleschi em 1425 conseguiu realizar o primeiro desenho tridimensional do Edifício do Batistério, indistinguível do real, ao tomar o zero como centro do seu desenho.

O estudo do número zero demonstrou também a importância da história para a Matemática, pois revelou que esta foi desenvolvida ao longo de muitos anos através de muitos estudos, erros e acertos. E o mais importante, revela que a mesma ainda se encontra em construção, não está concretizada, nem muito menos ficou pronta em piscar de olhos como muitos imaginam. O conhecimento histórico da Matemática contribui massivamente para o nosso senso crítico nos auxiliando a pensar e compreender os temores dos matemáticos que tanto contribuíram para o seu desenvolvimento.

Vimos aqui que muitos obstáculos tiveram que ser ultrapassados na Álgebra, na Aritmética, na Geometria, na Lógica, etc. para que conceitos importantes envolvendo o zero fossem compreendidos e aceitos, deixando de ser inconvenientes para a realização de cálculos bem fundamentados realizados sem inconsistências. Embora muitas definições sejam aceitas por muitos sem serem questionadas, mesmo possuindo explicações plausíveis, isto por vezes, trazem algumas ambiguidades em seu entendimento.

A maior limitação encontrada para a realização desta monografia foi encontrar material para a fundamentação teórica, pois quase nada se encontra em português sobre o assunto. Para além disso quando abordado são por autores que não são matemáticos e não estudaram, portanto, a fundamentação matemática fornecendo por vezes definições incorretas.

Este trabalho tem como intuito contribuir com a falta de material que justifique a natureza da importância do número zero principalmente para a Matemática, visto que a contribuição deste é de suma importância para muitas outras áreas de conhecimento. A saber podemos ressaltar a sua importância para o desenvolvimento da informática, no qual ele é um dos elementos do sistema de numeração binário posicional fundamental à eletrônica digital e certamente essas informações poderiam servir de motivação para a produção de uma outra monografia, fica aqui uma sugestão.

Visa-se ainda contribuir com o futuro professor que certamente em algum momento irá se deparar com as dúvidas de seus alunos acerca das operações e definições sobre o número zero ou mesmo para esclarecer as dúvidas de pessoas curiosas sobre o conteúdo que buscam uma fonte mais confiável.

Possivelmente muito ainda teremos que beber nesta fonte de conhecimento no qual o zero se tornou, mas certamente terá que ser de pouco a pouco, afinal de uma só vez o afogamento se tornaria inevitável.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACZEL, A.D.; Finding Zero: A Mathematician's Odyssey to Uncover the Origins of Numbers Hardcover. New York: St. Martin's Press, 2015.

BARBOSA, J.L.M.; G**eometria Euclidiana Plana.** 4ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 1995.

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide- 2ª ed. – São Paulo: Editora: Edgard Blücher, 1996.

CALDAS, Cristina. “Vazios” que revolucionaram a matemática. **Revista Eletrônica de Jornalismo Científico**, SBPC, São Paulo, ComCiência n. 101, 09/2008. Disponível em: < http://comciencia.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1519-76542008000400003&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 07 de abril de 2016.

DANTZING, T. NÚMERO: A Linguagem da Ciência. Tradução de Sergio G. de Paula. Rio de Janeiro. Zahar Editores, 1970.

DOMINGUES, H.H.; IEZZI, G.; **Álgebra Moderna**: volume único. 4º ed. – São Paulo: Atual, 2003.

Dicionário do Aurélio, 24 set. 2016. Disponível em: ‹https://dicionariodoaurelio.com/ordinal›. Acesso em: 23 jan. 2018. (cardinal)

Dicionário do Aurélio, 24 set. 2016. Disponível em: ‹https://dicionariodoaurelio.com/ordinal›. Acesso em: 23 jan. 2018. (ordinal)

GRAY, Laura. Is zero an even number? **BBC News**, 2012. Disponível em:< http://www.bbc.com/news/magazine-20559052> Acesso em: 23 de junho de 2016.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética.** Coleção Textos Universitários.2ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2005.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**, 1ª serie: Ensino Médio. 2ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**, 2ª serie: Ensino Médio. 2ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

IFRAH, Georges. Os Números: a história de uma grande invenção. Tradução Senso, Stella M. de Freitas. 90ª Ed. Editora Globo, 2010.

KAPLAN, R. **O nada que existe – Uma história natural do zero.** Tradução de Laura Neves. Rio de Janeiro: Rocco, 2001.

LIMA, E. L. **Análise real**. Funções de uma vaiável. Coleção Matemática Universitária. v. 1. 8ª ed. – Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LIMA, E. L. Conceitos e controvérsias. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.76, p. 8-11, 2011.

LOPES, A. L. Como se escreve zero em números romanos? **Revista Mundo Estranho**, 2016. Disponível em:< https://mundoestranho.abril.com.br/historia/como-se-escreve-zero-em-numeros-romanos/>. Acesso em: 12 de dezembro de 2016.

MORTARI, A.D.M. Quem é maior, N ou N∗? **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina**, Florianópolis, n.11, p. 41-47, 2014.

PADRÃO, D. L. **A origem do Zero.** Tese (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 69. 2008.

REID, C. **From Zero to Infinity** – What Makes Numbers Interesting. 5th ed. Massachusetts: A K Peters, 2006.

REIS,J.C. Perguntas sobre o número zero. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina,** v. 13, p. 55-61, 2016.

REIS,J.C. SIMOES, M. . Existe ângulo zero?. **Revista Cálculo – Matemática para todos**, n. 29, p. 24 – 27, junho de 2013. (Entrevista).

ROSSIN, Giovanna. Conheça o Indiana Jones da Matemática, **Revista Galileu,** p. 01-11, 2015. Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Revista/noticia/2015/05/conheca-o-indiana-jones-da-matematica.html>. Acesso em: 16 de dezembro de 2017.

SEIFE, Charles. **Zero: The Biografhy of a Dangerous Idea**. New York: Penguin Books, 2000.

SEN, S.K.;AGARWAL, R.P. **Zero: A Landmark Discovery, the Dreadful Void, and the Ultimate Mind**. London: Elsevier, 2015.

VOMERO, M.F. A importância do número zero. **Revista Super Interessante,** São Paulo, n. 163, p. 55 - 58, abril de 2001.