

Aldo Brito de Jesus

Identificação das Cônicas

Vitória da Conquista

21 de fevereiro de 2018

Aldo Brito de Jesus

Identificação das Cônicas

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB / Campus de Vitória da Conquista - BA, para obtenção do título de Licenciada em Matemática sob orientação do Professor Me. Antônio Augusto Oliveira Lima

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – DCET
Curso de Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Me. Antônio Augusto Oliveira Lima

Vitória da Conquista
21 de fevereiro de 2018

Aldo Brito de Jesus

Identificação das Cônicas/ Aldo Brito de Jesus. – Vitória da Conquista, 21 de fevereiro de 2018-

39 p. : il.; 30 cm.

Orientador: Prof. Me. Antônio Augusto Oliveira Lima

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – DCET

Curso de Licenciatura em Matemática, 21 de fevereiro de 2018.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. 2. Palavra-chave3. I. Antônio Augusto Oliveira Lima. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. III. Faculdade de Matemática. IV. Identificação das Cônicas.

Aldo Brito de Jesus

Identificação das Cônicas

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB / Campus de Vitória da Conquista - BA, para obtenção do título de Licenciada em Matemática sob orientação do Professor Me. Antônio Augusto Oliveira Lima

Trabalho aprovado. Vitória da Conquista, 21 de fevereiro de 2018:

**Prof. Me. Antônio Augusto Oliveira
Lima**
Orientador

**Prof(a). Dra. Alexsandra Oliveira
Andrade**
Convidado

**Prof(a). Me. Clenia Andrade Oliveira
de Melo**
Convidado

Vitória da Conquista
21 de fevereiro de 2018

Agradecimentos

As palavras aqui escritas provavelmente serão apagadas em algum momento da história, no entanto, a gratidão é um sentimento que está presente dentro de cada ser humano, ou ao menos de alguns. Deste modo, venho por meio de algumas palavras demonstrar meus sinceros agradecimentos a todas aquelas pessoas que de alguma forma contribuiu para a elaboração deste trabalho.

Gostaria de agradecer a Deus por me manter vivo e por ter me dado força e sabedoria para chegar até aqui. Gostaria de agradecer a minha mãe por se fazer presente em todos momentos de decisões difíceis e me apoiar em cada uma delas, com certeza sem ela está caminhada seria muito mais difícil. Agradeço também ao meu pai, meus irmão e a todos os demais familiares, em especial ao meu tio Vivaldino pelo apoio em um momento difícil do curso.

Agradeço ao professor Antônio Augusto Oliveira Lima por ter aceitado ser meu orientador e por servir de motivação e exemplo de professor dedicado e comprometido com a Matemática e com formação de professores. Gostaria de agradecer também a todos os demais professores que fizeram parte da minha formação até o momento e que compartilharam seus conhecimentos comigo. Em especial agradeço a professora Ana Paula Perovano e ao professor Altemar Brito pelo apoio.

Por fim, agradeço a todos os meus colegas da graduação, por de alguma forma ter compartilhado suas experiências comigo. Em especial agradeço a Bianca Nogueira, Ícaro Borges, Jaysa Carvalho, Maritza Camilli e Palane Alves pelo apoio e companheirismo em todos os momentos em que precisei.

Resumo

O presente trabalho teve como objetivo utilizar alguns conceitos da Álgebra Linear para identificar que tipo de cônica é dada por uma equação quadrática com duas variáveis. Para isto, foi feito um levantamento bibliográfico sobre as seções cônicas e sobre alguns conceitos da Álgebra Linear e da Geometria Analítica. No primeiro capítulo deduzimos a equação geral das cônicas e as equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola. Nos dois capítulos subseqüente apresentamos uma pequena discussão sobre transformações lineares, matrizes semelhantes, polinômio característico, diagonalização de matrizes reais simétricas, dentre outros conceitos. O quarto e último capítulo foi destinado ao estudo da forma matricial de uma equação quadrática e redução da mesma a uma das equações reduzidas das cônicas.

Palavras-chave: Seções cônicas. Diagonalização de matrizes. Transformações lineares.

Abstract

The present work had as objective to use some concepts of Linear Algebra to identify which type of conic is given by a quadratic equation with two variables. For this, a bibliographical survey was made on the conic sections and on some concepts of Linear Algebra and Analytical Geometry. In the first chapter we deduce the general equation of the conics and the reduced equations of the ellipse, the hyperbola, and the parabola. In the next two chapters we present a small discussion about linear transformations, similar matrices, characteristic polynomials, diagonalization of symmetric real matrices, among other concepts. The fourth and last chapter was devoted to the study of the matrix form of a quadratic equation and reduction of it to one of the reduced equations of the conics.

Keywords: Conical sections. Diagonalization of matrices. Linear transformations.

Sumário

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| | Introdução | 8 |
| 1 | CÔNICAS | 9 |
| 1.1 | Definição e Propriedades | 9 |
| 1.2 | Equação geral das cônicas | 11 |
| 1.3 | Equação reduzida da parábola | 13 |
| 1.4 | Equação reduzida da elipse | 13 |
| 1.5 | Equação reduzida da hipérbole | 14 |
| 2 | TRANSFORMAÇÕES LINEARES E MATRIZES | 16 |
| 2.1 | Coordenadas | 16 |
| 2.2 | Tranformações Lineares | 16 |
| 2.3 | Matrizes como tranformações lineares | 17 |
| 2.4 | Representação matricial de um operador linear | 18 |
| 2.5 | Mudança de base | 20 |
| 3 | DIAGONALIZAÇÃO: AUTOVALORES E AUTOVETORES | 22 |
| 3.1 | O Polinômio Característico | 22 |
| 3.2 | Matrizes semelhantes | 24 |
| 3.3 | Diagonalização de matrizes reais simétricas | 25 |
| 4 | IDENTIFICAÇÃO DAS CÔNICAS | 28 |
| 4.1 | Forma matricial da equação quadrática | 28 |
| 4.2 | Mudança de coordenadas | 28 |
| 4.3 | Translação de eixos | 30 |
| 4.4 | Identificação | 31 |
| 5 | CONCLUSÃO | 38 |
| | REFERÊNCIAS | 39 |

Introdução

Assim como muitos outros tópicos em Matemática, o estudo das cônicas surgiu devido a necessidade de resolução de problemas. De acordo com [Roque e Carvalho \(2012\)](#), por volta do século III a.C muitos matemáticos gregos estavam à procura de novos métodos de construção para resolução de problemas na geometria. Nesta época o geômetra grego Pappus, dividiu os problemas geométrico em três grandes grupos, dentre os quais destacamos os ‘problemas sólidos’ que recebiam essa nomenclatura devido a necessidade da utilização de seções cônicas para resolver os mesmos.

Segundo [Boyer e Pérez \(1986\)](#) e [Mol \(2013\)](#), inspirado na busca por novos métodos de construções o matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga ($\pm 262 - 190$ a.C.), considerado por muitos como o Grande Geômetra, redigiu um livro conhecido como “Cônicas”. Nesta obra, Apolônio utilizando métodos parecido com aqueles encontrados nos Elementos de Euclides, definiu as cônicas de um modo geral, como a interseção de um plano com um cone, isto é, como seções cônicas.

De acordo com [Mol \(2013\)](#), um dos objetivos de Apolônio era apresentar soluções por meio de cônicas para os problemas, como a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. Antes de Apolônio outros matemáticos como Arquimedes e Euclides já haviam feito um estudo sobre as cônicas e conheciam algumas propriedades das mesmas, mas, foi Apolônio quem mostrou que era possível obter todas as cônicas a partir de um mesmo cone.

Um pouco mais tarde, nos primórdios da Geometria Analítica, como aponta [Sato \(2005\)](#), Pierre de Fermat (1601 – 1665) mostrou que as seções cônicas podem ser expressa por equações do segundo grau nas coordenadas (x, y) . Fermat obteve as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole, por meio de uma transformação semelhante a rotação de eixos como conhecemos atualmente. O leitor interessado em um pouco mais de história sobre as cônicas pode encontrar nas referências citadas acima.

No primeiro capítulo deste trabalho apresentamos a dedução da equação geral de uma seção cônica e as equações reduzidas da elipse, da parábola e da hipérbole. As deduções apresentadas no capítulo estão baseadas no trabalho do Matemático Belga, Germinal Pierre Dandelin (1794 – 1847), como apresentado pelo professor [Sato \(2005\)](#) no trabalho intitulado “As Cônicas e suas Aplicações”.

No segundo e terceiro capítulo estão expostos alguns resultados da Álgebra Linear relacionados as transformações lineares, autovalores e autovetores, diagonalização de matrizes reais simétricas, dentre outros. No quarto e último capítulo, fazemos uso dos resultados enunciados no trabalho para identificar que tipo de cônica é dada por uma determinada equação do segundo grau nas coordenadas (x, y) .

1 Cônicas

1.1 Definição e Propriedades

Atualmente existem várias maneiras de definir as cônicas, neste trabalho vamos adotar a definição apresentada por [Sato \(2005\)](#) baseada no trabalho do matemático belga Germinal Pierre Dandelin sobre as propriedades focais das cônicas e na descoberta de Pierre de Fermat de que as seções cônicas podem ser expressas por equações do segundo grau nas coordenadas (x, y) .

Para que a definição faça sentido vamos enunciar algumas proposições referentes as cônicas apresentadas no trabalho intitulado “As cônicas e suas Aplicações” de [Sato \(2005\)](#).

Dadas as retas $g, l \in \mathbb{R}^3$ de modo que g e l não sejam perpendiculares e $g \cap l = \{V\}$, rotacionando g ao redor do ponto $V \in \mathbb{R}^3$ obtemos um cone circular reto de vértice V e eixo l . Toda reta obtida pela rotação de g é chamada de geratriz do cone e o ângulo agudo α formado por g e l é denominado de semi-ângulo do vértice do cone.

Seja K o cone obtido na rotação da reta g ao redor do ponto V . Dado um plano $\pi \in \mathbb{R}^3$, temos duas possibilidades, ou $V \in \pi$ ou $V \notin \pi$. Em ambos os casos, a interseção do cone K com o plano π determina uma cônica. No caso em que $V \in \pi$ a cônica é degenerada e pode ser uma reta, um par de retas, ou um ponto. No caso em que $V \notin \pi$ a cônica é suave e pode ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.

Seja β o ângulo formado entre o plano π e o eixo do cone K . Comparando os ângulos α e β , temos três possibilidades:

- i) $\alpha < \beta$, nesse caso a cônica será um ponto ou uma elipse;
- ii) $\alpha = \beta$ e nesse caso a cônica será uma parábola ou uma reta;
- iii) $\alpha > \beta$ e nesse caso a cônica será uma hipérbole ou um par de retas.

A demonstração das proposições abaixo estão baseadas na existência de superfícies esféricas S_1 e S_2 que se inscrevem no cone K , ao longo de circunferências ζ_1 e ζ_2 , e são tangentes ao plano π nos pontos F_1 e F_2 .

Sejam τ_1 e τ_2 os planos que contem respectivamente as circunferências ζ_1 e ζ_2 . Por definição, os pontos F_1 e F_2 são denominados focos da cônica e as retas d_1 e d_2 , determinadas por $\tau_1 \cap \pi$ e $\tau_2 \cap \pi$ respectivamente, são as diretrizes da cônica.

A excentricidade e de uma cônica é por definição o quociente $e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

Com exceção da circunferência (elipse de excentricidade 0), toda cônica suave tem pelo menos uma reta diretriz e um foco. As propriedades apresentadas abaixo relacionam

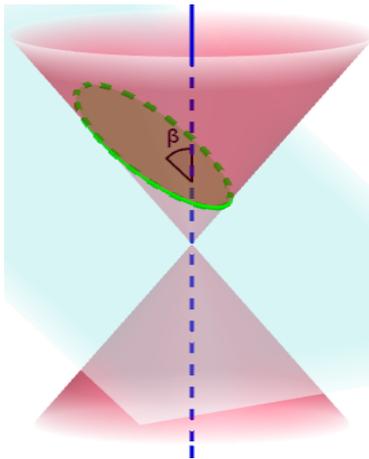


Figura 1 – Elipse

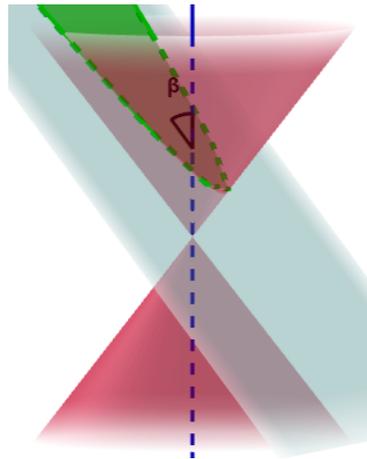


Figura 2 – Parábola

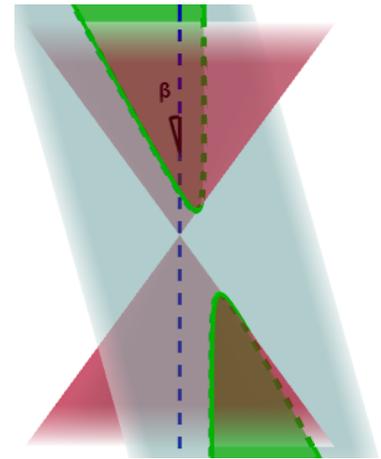


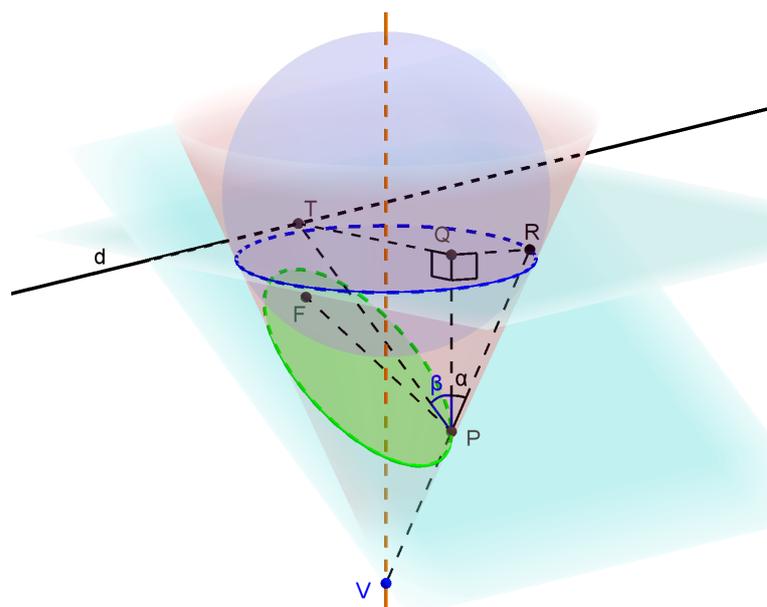
Figura 3 – Hipérbole

a excentricidade, a reta diretriz e o foco de uma cônica suave. Vamos apresentar uma demonstração da primeira proposição, o leitor interessado pode encontrar as demais demonstrações em [Sato \(2005\)](#).

Proposição 1.1.1 *Se μ é uma cônica suave distinta de uma circunferência com excentricidade e , diretriz d , e foco associado F , então*

$$\text{dist}(P, F) = e \cdot \text{dist}(P, d), \quad \text{para todo ponto } P \in \mu.$$

Demonstração 1.1.1 *Seja τ o plano contendo $\zeta = S \cap K$, onde S é a superfície esférica inscrita no cone K de vértice V , e seja P um ponto arbitrário em μ .*



Note que os pontos V e P determinam uma geratriz g do cone K que intercepta ζ no ponto R . Passando pelo ponto P trace uma reta s perpendicular ao plano τ e uma reta t

perpendicular a reta d , obtendo assim os pontos $Q = s \cap \tau$ e $T = t \cap d$.

Como os pontos T, Q e R pertencem ao plano τ , temos que os triângulos PQT e PQR são triângulos retângulos com \hat{Q} reto, além disto, temos que $Q\hat{P}T = \beta$ e $Q\hat{P}R = \alpha$, uma vez que a reta s é paralela ao eixo l do cone pois, s e l são perpendiculares ao plano τ .

Temos então que,

$$\overline{PQ} = \overline{PT} \cdot \cos\beta = \overline{PR} \cdot \cos\alpha.$$

Observe que $\overline{PR} = \overline{PF}$, pois as semirretas \overrightarrow{PR} e \overrightarrow{PF} são tangentes à superfície esférica S nos pontos R e F .

Segue então que

$$\overline{PT} \cdot \cos\beta = \overline{PF} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \overline{PF} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \overline{PT} \Leftrightarrow \overline{PF} = e \cdot \overline{PT}.$$

Concluimos então que

$$\text{dist}(P, F) = e \cdot \text{dist}(P, d), \quad \text{para todo ponto } P \in \mu.$$

Proposição 1.1.2 Se uma cônica μ é uma parábola com foco F e diretriz d , então

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d), \quad \text{para todo ponto } P \in \mu.$$

Proposição 1.1.3 Se uma cônica μ é uma elipse de focos F_1 e F_2 , então

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = k, \quad \text{para todo ponto } P \in \mu.$$

onde k é uma constante real.

Proposição 1.1.4 Se uma cônica μ é uma hipérbole de focos F_1 e F_2 , então

$$|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = k, \quad \text{para todo ponto } P \in \mu.$$

onde k é uma constante real.

1.2 Equação geral das cônicas

Definição 1.2.1 Denomina-se cônica o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja a razão entre as distâncias a um ponto fixo F e uma reta fixa d é igual a uma constante não negativa e . O ponto fixo é chamado de foco, a reta de diretriz e a razão constante de excentricidade da cônica. Quando $e = 1$ a cônica é chamada de parábola, quando $0 < e < 1$ de elipse e quando $e > 1$ de hipérbole.

Em um sistema de coordenadas cartesianas, temos que um ponto $P(x, y)$ pertence a uma cônica se, e somente se,

$$\frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, d)} = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = e. \quad (1.1)$$

Onde $F(x_0, y_0)$ é o foco, $d : ax + by + c = 0$ é a diretriz e e é uma constante não negativa. Fazendo $k^2 = \frac{e^2}{a^2 + b^2}$, temos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k^2[|ax + by + c|]^2 = (kax + kby + kc)^2.$$

Fazendo a substituição $l = ka, m = kb$ e $n = kc$ obtemos a *equação focal das cônicas*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (lx + my + n)^2 = 0,$$

onde x_0 e y_0 são as coordenadas do foco e $lx + my + n = 0$ é a equação da reta diretriz. Observe que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (lx + my + n)^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - l^2)x^2 + (-2lm)xy + (1 - m^2)y^2 + [-2(x_0 + ln)]x + [-2(y_0 + mn)]y + (x_0^2 + y_0^2 - n^2) = 0.$$

Fazendo $A = 1 - l^2, B = -lm, C = 1 - m^2, D = -2(x_0 + ln), E = -2(y_0 + mn)$ e $F = x_0^2 + y_0^2 - n^2 = 0$, obtemos a equação do segundo grau

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (1.2)$$

A equação 1.2 é denominada *equação cartesiana geral das cônicas*. Variando os valores das constantes A, B, C, D, E e F podemos obter pontos, retas, circunferências, parábolas, elipses e hipérbolas.

Proposição 1.2.1 *Seja μ uma cônica suave dada pela equação $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. A diretriz d da cônica μ é paralela a um dos eixos x ou y sempre que tivermos $B = 0$.*

Demonstração 1.2.1 *Note que $B = -lm$ e $d : lx + my + n = 0$. Como $m, l \in \mathbb{R}$, temos que $B = 0$ se, e somente se, $m = 0$ ou $l = 0$.*

Sendo assim, temos três possibilidades:

i) $m = 0$ e $l \neq 0 \Rightarrow d : lx + n = 0 \Leftrightarrow d : x = \frac{-n}{l}$.

ii) $m \neq 0$ e $l = 0 \Rightarrow d : my + n = 0 \Leftrightarrow d : y = \frac{-n}{m}$.

iii) $m = 0$ e $l = 0$, neste caso a cônica é uma circunferência.

Em qualquer um dos casos a diretriz d é paralela a um dos eixos.

No capítulo 4 veremos que usando alguns conceitos da Álgebra Linear, toda cônica pode ser reduzida a uma equação com $B = 0$.

Dada uma cônica μ no plano, podemos escolher um sistema de eixos x', y' ortogonais, de modo que o eixo x' passe pelo foco F e o eixo y' coincida com a diretriz d . Seja O' a origem desse sistema de coordenadas.

Fazendo $\overline{O'F} = 2p$, segue da definição 1.2.1 que um ponto P com coordenadas (x', y') pertence à cônica μ de diretriz d , foco F e excentricidade e se, e somente se,

$$\left[\frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, d)} \right]^2 = \left[\frac{\sqrt{(x' - 2p)^2 + (y' - 0)^2}}{|x'|} \right]^2 = e^2. \quad (1.3)$$

Simplificando a equação 1.3 obtemos a equação das cônicas em função dos parâmetros p e e :

$$(1 - e^2)x'^2 - 4px' + y'^2 = -4p^2. \quad (1.4)$$

Vamos usar a equação 1.4 para obter equações particulares para a elipse, a hipérbole e a parábola.

1.3 Equação reduzida da parábola

Por definição, uma cônica é uma parábola se, e somente se, $e = 1$. Sendo assim, a equação 1.4 reduz-se a:

$$-4px' + y'^2 = -4p^2 \Leftrightarrow y'^2 = 4p(x' - p). \quad (1.5)$$

Seja O o ponto de coordenadas $(p, 0)$, podemos realizar uma translação de eixos coordenados de modo que O seja a origem de um novo sistema de coordenadas xy , onde as coordenadas estão relacionados da seguinte maneira:

$$x' = x + p,$$

$$y' = y.$$

No novo sistema de coordenadas (x, y) obtemos a equação

$$y^2 = 4px, \quad (1.6)$$

denominada *equação reduzida da parábola*.

1.4 Equação reduzida da elipse

Segue da definição 1.2.1, que a excentricidade e da elipse satisfaz a condição $0 < e < 1$. Sendo assim, $(1 - e^2) > 0$, de modo que podemos dividir a equação 1.4 por

$(1 - e^2)$ e obter a equação:

$$x'^2 - \frac{4px'}{(1 - e^2)} + \frac{y'^2}{(1 - e^2)} = -\frac{4p^2}{(1 - e^2)}. \quad (1.7)$$

Completando quadrados e fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$$\left(x' - \frac{2p}{(1 - e^2)}\right)^2 + \frac{y'^2}{(1 - e^2)} = -\frac{4p^2}{(1 - e^2)} \left[\frac{1}{(1 - e^2)} - 1\right] = \frac{4p^2e^2}{(1 - e^2)^2}. \quad (1.8)$$

Note que $p \neq 0$, sendo assim $\left[\frac{2pe}{1 - e^2}\right]^2 \neq 0$. Dividindo a equação anterior por $\left[\frac{2pe}{1 - e^2}\right]^2$, temos a equação:

$$\frac{\left(x' - \frac{2p}{(1 - e^2)}\right)^2}{\left[\frac{2pe}{1 - e^2}\right]^2} + \frac{y'^2}{\left[\frac{2pe}{\sqrt{1 - e^2}}\right]^2} = 1. \quad (1.9)$$

Seja O o ponto de coordenadas $\left(\frac{2p}{1 - e^2}, 0\right)$, podemos realizar uma translação de eixos coordenados de modo que O seja a origem de um novo sistema de coordenadas xy , onde as coordenadas estão relacionados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{2p}{1 - e^2}, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Aplicando a translação e fazendo as substituições $a = \frac{2pe}{1 - e^2}$ e $b = \frac{2pe}{\sqrt{1 - e^2}}$, obtemos a equação reduzida da elipse com focos sobre o eixo x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.10)$$

Observe que $0 < 1 - e^2 < 1$, logo $1 - e^2 < \sqrt{1 - e^2}$ e, portanto $a = \frac{2pe}{1 - e^2} > \frac{2pe}{\sqrt{1 - e^2}} = b$.

1.5 Equação reduzida da hipérbole

Segue da definição 1.2.1, que a excentricidade e da hipérbole satisfaz a condição $1 < e$. Sendo assim, $(1 - e^2) < 0$, de modo que podemos dividir a equação 1.4 por $(1 - e^2)$ e obter a equação:

$$x'^2 - \frac{4px'}{(1 - e^2)} + \frac{y'^2}{(1 - e^2)} = -\frac{4p^2}{(1 - e^2)}. \quad (1.11)$$

Completando quadrados e fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$$\left(x' - \frac{2p}{(1 - e^2)}\right)^2 + \frac{y'^2}{(1 - e^2)} = -\frac{4p^2}{(1 - e^2)} \left[\frac{1}{(1 - e^2)} - 1\right] = \frac{4p^2e^2}{(1 - e^2)^2}. \quad (1.12)$$

Note que $p \neq 0$, sendo assim $\left[\frac{2pe}{1 - e^2}\right]^2 \neq 0$. Dividindo a equação anterior por $\left[\frac{2pe}{1 - e^2}\right]^2$, temos a equação:

$$\frac{\left(x' - \frac{2p}{(1 - e^2)}\right)^2}{\left[\frac{2pe}{1 - e^2}\right]^2} + \frac{y'^2}{\frac{(2pe)^2}{1 - e^2}} = 1. \quad (1.13)$$

Note que no caso da hipérbole, temos $1 - e^2 = -|1 - e^2| = -(\sqrt{1 - e^2})^2$. Sendo assim, a equação 1.13 pode ser escrita como

$$\frac{\left(x' - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2}{\left[\frac{2pe}{1-e^2}\right]^2} - \frac{y'^2}{\left[\frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}\right]^2} = 1. \quad (1.14)$$

Seja O o ponto de coordenadas $\left(\frac{2p}{1-e^2}, 0\right)$, podemos realizar uma translação de eixos coordenados de modo que O seja a origem de um novo sistema de coordenadas xy , onde as coordenadas estão relacionados da seguinte maneira:

$$x' = x + \frac{2p}{1-e^2},$$

$$y' = y.$$

Aplicando a translação e fazendo as substituições $a = \frac{2pe}{1-e^2}$ e $b = \frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}$, obtemos a equação reduzida da hipérbole com focos sobre o eixo x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.15)$$

Observe que $0 < 1 - e^2 < 1$, logo $1 - e^2 < \sqrt{1 - e^2}$ e, portanto $a = \frac{2pe}{1-e^2} > \frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}} = b$.

Observação 1.5.1 *Caso tivéssemos escolhido o eixo y' passando pelo foco F e o eixo x' coincidindo com a diretriz d , as equações reduzidas da parábola, da elipse e da hipérbole seriam respectivamente,*

$$x^2 = 4py, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (1.16)$$

2 Transformações Lineares e Matrizes

O objetivo deste capítulo é revisar alguns conceitos da Álgebra Linear que serão utilizados no capítulo 4 para realizar uma mudança de variável na equação 1.2, de modo que o coeficiente B seja nulo. O leitor que tiver domínio em relação ao conteúdo de Transformações Lineares pode descartar este capítulo e passar para o próximo.

2.1 Coordenadas

Seja V um espaço vetorial n -dimensional sobre um corpo K com base $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Então qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito, de modo único, como uma combinação linear dos vetores da base S , digamos,

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n.$$

Dizemos que os n escalares a_1, a_2, \dots, a_n são as coordenadas de v em relação à base S ; essas coordenadas formam um vetor $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ de K^n denominado vetor de coordenadas de v em relação a base S . Esse vetor é denotado por $[v]_S$ ou simplesmente, $[v]$.

Exemplo 2.1.1 *Considere o espaço real R^2 .*

Dadas as bases $S_1 = \{u_1, u_2\} = \{(-1, 0), (0, 1)\}$ e $S_2 = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e o vetor $v = (2, 2) \in R^2$.

$$\text{Temos,} \quad [v]_{S_1} = [2, 0] \text{ e } [v]_{S_2} = [2, 2].$$

Observação 2.1.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo K e $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base de v . Então a cada vetor $v \in V$ corresponde uma única ênupla $[v]_S$ de K . Por outro lado, a cada ênupla $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ de K^n corresponde um único vetor $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$ de V . Segue que a base S determina uma aplicação bijetora. Além disso, existe um isomorfismo entre V e K^n .*

2.2 Transformações Lineares

Definição 2.2.1 *Sejam V, U espaços vetoriais sobre um corpo K . Uma transformação linear $F : V \rightarrow U$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in V$ um único vetor $F(v) \in U$ de modo que valham, para quais quer $v, w \in V$ e $k \in K$, as relações:*

$$(1) F(v + u) = F(v) + F(u).$$

$$(2) F(kv) = kF(v).$$

Definição 2.2.2 Seja $F : V \longrightarrow U$ uma transformação linear.

O núcleo de F , denotado por $Nuc F$, é o conjunto de todos os elementos de V que são levados no vetor nulo 0 de U , ou seja

$$Nuc F = \{v \in V : F(v) = 0\}.$$

A imagem de F , denotada por $Im F$, é o conjunto dos pontos imagens de U , ou seja,

$$Im F = \{u \in U : \exists v \in V \text{ com } F(v) = u\}.$$

Exemplo 2.2.1 Seja $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação "projeção" sobre o plano xy , isto é, F é a aplicação definida por $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. F é uma transformação linear.

De fato, dados $v = (x_1, y_1, z_1)$ e $w = (x_2, y_2, z_2)$, temos

$$F(v+w) = F(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = F(v) + F(w),$$

e dado $k \in K$,

$$F(kv) = F(kx_1, ky_1, kz_1) = (kx_1, ky_1, 0) = k(x_1, y_1, 0) = kF(v).$$

Temos que,

$$Im F = \{(x, y, z) : z = 0\} \text{ e } Nuc F = \{(x, y, z) : x = 0, y = 0\}.$$

Observação 2.2.1 Uma transformação linear T de um espaço vetorial V nele mesmo, ou seja, uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$ é denominada um **operador linear**.

2.3 Matrizes como transformações lineares

Seja A uma matriz real $m \times n$ sobre um corpo K .

O subespaço de K^n gerado pelas linhas da matriz A é chamado *espaço linha de A* . Analogamente, o subespaço de K^m gerado pelas colunas da matriz A é chamado *espaço coluna de A* .

Afirmamos que conjunto W solução do sistema homogêneo $AX = 0$ é um subespaço vetorial de K^n .

De fato, dados $v, u \in W$ e $a, b \in K$ temos,

$$A(av + bu) = A(av) + A(bu) = a(Av) + b(Au) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

Segue então que $(av + bu) \in W$. Sendo assim, W é um subespaço de K^n .

Uma aplicação matricial $F_A : K^n \longrightarrow K^m$ dada por $F_A(u) = Au$ (em que os vetores de K^n e K^m são escritos como colunas) é uma transformação linear.

De fato, dados $v, w \in K^n$ e $k \in K$, temos

$$F_A(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = F_A(v) + F_A(w).$$

$$F_A(kv) = A(kv) = k(Av) = kF_A(v).$$

Observação 2.3.1 *Segue das definições de espaço solução de um sistema homogêneo e de espaço coluna de uma matriz que: $Im F_A = col(A)$ e $Nuc F_A = nul(A)$.*

Onde, $col(A)$ denota o espaço coluna de A e $nul(A)$ denota o espaço nulo de A .

Exemplo 2.3.1 *(Rotação de um ângulo θ em torno da origem em \mathbb{R}^2)*

Uma aplicação matricial importante é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Trata-se de um operador $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que leva cada vetor $v \in \mathbb{R}^2$ no vetor $R(v) \in \mathbb{R}^2$ resultado da rotação de v em torno da origem dada por um ângulo θ . No capítulo 4 veremos um pouco melhor sobre tal rotação. É claro que $Nuc R = \{(0, 0)\}$ e $Im R = \mathbb{R}^2$.

2.4 Representação matricial de um operador linear

Seja T um operador linear de um espaço vetorial V e suponha que $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ seja uma base de V . Os vetores $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$ de V podem ser escrito com uma combinação dos vetores da base S , digamos

$$T(u_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n$$

$$T(u_2) = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n$$

.....

$$T(u_n) = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n.$$

Definição 2.4.1 *A transposta da matriz de coeficientes $[a_{ij}]$, denotada por $[T]_S$, é denominada **representação matricial** de T em relação à base S ou, simplesmente, matriz de T na base S . As colunas de $[T]_S$ são, respectivamente, os vetores de coordenadas de $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$.*

$$[T]_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.4.1 *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $F(x, y) = (2x + 3y, 4x - 5y)$. Dada a base $S = \{u_1, u_2\} = \{(1, 2), (2, 5)\}$, temos que*

$$F(u_1) = (8, -6) = 52u_1 + (-22)u_2.$$

$$F(u_2) = (19, -17) = 129u_1 + (-55)u_2.$$

$$[F]_S = \begin{bmatrix} 52 & 129 \\ -22 & -55 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.4.1 *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e S uma base finita de V . Então, para qualquer vetor $v \in V$, temos $[T]_S[v]_S = [T(v)]_S$.*

Demonstração 2.4.1 *Seja $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base finita de V .*

Fazendo $i = 1, 2, \dots, n$, temos que

$$T(u_i) = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j.$$

Segue que $[T]_S$ é uma matriz quadrada de ordem n cuja j -ésima linha é

$$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}).$$

Supondo que

$$v = k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n = \sum_{i=1}^n k_iu_i, \text{ temos}$$

$$[v]_S = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T.$$

Pela linearidade do operador T , segue que

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^n k_iu_i\right) = \sum_{i=1}^n k_iT(u_i) = \sum_{i=1}^n k_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}k_i\right)u_j = \\ &= \sum_{j=1}^n (a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n)u_j. \end{aligned}$$

Assim, $[T(v)]_S$ é o vetor coluna cuja j -ésima entrada é

$$a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n.$$

Agora note que

$$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) \cdot (k_1, k_2, \dots, k_n) = a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n.$$

Logo a j -ésima entrada de $[T]_S[v]_S$ é igual a j -ésima entrada de $[T(v)]_S$.

Concluimos então que $[T]_S[v]_S = [T(v)]_S$.

Exemplo 2.4.2 *Considere o operador linear $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e a base S a seguir*

$$F(x, y) = (2x + 3y, 4x - 5y) \quad e \quad S = \{u_1, u_2\} = \{(1, 2), (2, 5)\}.$$

Dado $v = (5, -7)$, temos

$$F(v) = (-11, 55), \quad [v]_S = [11, -3] \quad e \quad [T(v)]_S = [55, -33].$$

Aplicando a matriz $[F]_S$ no vetor de coordenadas $[v]_S$, temos

$$[F]_S[v]_S = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ -33 \end{bmatrix} = [F(v)]_S. \quad (2.1)$$

2.5 Mudança de base

Definição 2.5.1 *Sejam $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base de um espaço vetorial V e $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma outra base. Como S é uma base de V , cada vetor da base S' pode ser escrito, de maneira única, como uma combinação linear dos vetores de S , digamos,*

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n$$

$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n$$

.....

$$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n.$$

A transposta da matriz de coeficientes $[a_{ij}]$, denotada por $[P]$, é denominada **matriz de mudança de base** ou **matriz transição** da "base antiga" S para a "base nova" S' .

Observação 2.5.1 *A matriz de mudança de base P pode ser vista como a matriz cujas colunas são, respectivamente, os vetores coluna de coordenadas dos "novos" vetores v_i da base em relação à base S .*

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observação 2.5.2 *Analogamente, existe uma matriz de mudança de base Q da base S' para a base S .*

$$Q = [[u_1]_{S'}, [u_2]_{S'}, \dots, [u_n]_{S'}].$$

Observação 2.5.3 *Como os vetores v_1, v_2, \dots, v_n da base S' são linearmente independentes, a matriz P é invertível. Analogamente, Q é invertível.*

Teorema 2.5.1 *Sejam P e Q as matrizes de mudança de base discutidas acima. Então $Q = P^{-1}$.*

Demonstração 2.5.1 *A demonstração pode ser encontrada em [Lipschutz e Lipson \(2009\)](#).*

Teorema 2.5.2 *Seja P a matriz de mudança de base de uma base S para uma base S' de um espaço vetorial V . Então dado um vetor $v \in V$ qualquer, temos*

$$P[v]_{S'} = [v]_S \quad e \quad P^{-1}[v]_S = [v]_{S'}.$$

Isto é, multiplicando as coordenadas de v na base original S por P^{-1} , obtemos as coordenadas de v na nova base S' .

Demonstração 2.5.2 *Sejam $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ bases de V . Fazendo $i = 1, 2, \dots, n$, temos que*

$$w_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j.$$

Segue que P é uma matriz quadrada de ordem n cuja j -ésima linha é

$$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}).$$

Supondo que

$$v = k_1w_1 + k_2w_2 + \dots + k_nw_n = \sum_{i=1}^n k_iw_i, \text{ temos}$$

$$[v]_{S'} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T.$$

Substituindo os w_i em $v = \sum_{i=1}^n k_iw_i$, segue que

$$v = \sum_{i=1}^n k_iw_i = \sum_{i=1}^n k_i(\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij}k_i)u_j = \sum_{j=1}^n (a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n)u_j.$$

Assim, $[v]_S$ é o vetor coluna cuja j -ésima entrada é

$$a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n.$$

Agora note que

$$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) \cdot (k_1, k_2, \dots, k_n) = a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n.$$

Logo a j -ésima entrada de $P[v]_{S'}$ é igual a j -ésima entrada de $[v]_S$.

Concluimos então que $P[v]_{S'} = [v]_S$.

Observe que,

$$P[v]_{S'} = [v]_S \Leftrightarrow P^{-1}(P[v]_{S'}) = P^{-1}[v]_S \Leftrightarrow (P^{-1}P)[v]_{S'} = P^{-1}[v]_S \Leftrightarrow [v]_{S'} = P^{-1}[v]_S.$$

Completando a demonstração do teorema.

3 Diagonalização: Autovalores e Autovetores

Neste capítulo vamos discutir alguns resultados relacionados a diagonalização de matrizes reais simétricas, no entanto, alguns dos teoremas estão enunciados apenas para matrizes de ordem 2, o leitor que tiver interesse em estudar os resultados para matrizes de ordem n , pode consultar [Lima \(1996\)](#), [Coelho e Lourenco \(2001\)](#), [Cintra \(1985\)](#) ou [Lipschutz e Lipson \(2009\)](#).

3.1 O Polinômio Característico

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear num espaço vetorial V sobre um corpo K , de dimensão finita n . Um número $t \in K$ será dito um autovalor de T se existir um vetor não nulo v em V tal que $T(v) = tv$. O vetor v é chamado de autovetor de T associado a t .

Exemplo 3.1.1 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (y, x)$. Queremos determinar $t \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, não nulos, tais que, $T(x, y) = t(x, y)$, ou seja, tais que $(y, x) = t(x, y)$. Devemos ter*

$$\begin{cases} y = tx \\ x = ty \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $t = \pm 1$. Sendo assim, dois dos autovetores de T associados a $t = 1$ e $t = -1$ são respectivamente, $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, -1)$.

Observe que se tivéssemos escolhido $T(x, y) = (-y, x)$, os autovalores não seriam reais.

Se $t \in K$ for um autovalor de T , então existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = tv$, o que é equivalente a dizer que $(tId_n - T)(v) = 0$, onde $Id_n : V \rightarrow V$ é a transformação identidade em V . Sendo assim, para que exista um autovalor para o operador linear T é necessário que $Nuc(tId_n - T) \neq 0$.

Seja S uma base qualquer de V e considere a matriz $[tId_n - T]_S$ do operador $(tId_n - T)$. Temos que

$$Nuc(tId_n - T) \neq 0 \Leftrightarrow [tId_n - T]_S \text{ não é invertível} \Leftrightarrow \det([tId_n - T]_S) = 0.$$

Observe que primeiro membro da equação $\det([tId_n - T]_S) = 0$ é um polinômio de grau n na variável t sobre o corpo K . De modo que a relação acima nos fornece um método prático para determinar os autovalores de um operador T . Para isto, considere a definição a seguir.

Definição 3.1.1 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo K e S uma base de V . O **polinômio característico** de um operador $T : V \rightarrow V$ é por definição o polinômio de grau n em t sobre o corpo K dado por $P_T(t) = \det([tId_n - T]_S)$.

Afirmamos que,

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \Leftrightarrow \lambda \text{ é uma raiz de } P_T(t) = \det([tId_n - T]_S).$$

Exemplo 3.1.2 Seja T o operador linear do exemplo 3.1.1 e S a base canônica, temos que

$$[T]_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De modo que

$$P_T(t) = \det \left(t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \right) = t^2 - 1.$$

Teorema 3.1.1 Existe um único autovalor λ , para um dado autovetor v .

Demonstração 3.1.1 Sejam λ_1 e λ_2 autovalores associados ao autovetor $v \neq 0$. Note que

$$\begin{aligned} T(v) = \lambda_1 v \Leftrightarrow T(v) + [-T(v)] &= \lambda_1 v + [-T(v)] \Leftrightarrow 0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v \Leftrightarrow 0 = (\lambda_1 - \lambda_2)v \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2) &= 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2. \end{aligned}$$

Fica assim demonstrado o teorema.

Teorema 3.1.2 Autovetores associados a autovalores distintos, são linearmente independentes.

Demonstração 3.1.2 Suponha que v_1, v_2, \dots, v_n sejam autovetores de um operador linear $T : V \rightarrow V$ associados a autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Vamos mostrar que o teorema é válido para $n = 2$.

Suponha que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0. \tag{3.1}$$

onde c_1 e c_2 pertencem a K . Multiplicando 3.1 por λ_1 , obtemos

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_1 v_2 = 0. \tag{3.2}$$

Aplicando T em ambos os membros da equação 3.1, obtemos

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0. \tag{3.3}$$

Subtraindo membro a membro as equações 3.3 e 3.2, obtemos

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 = 0. \quad (3.4)$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $v_2 \neq 0$, temos que $c_2 = 0$. Substituindo na equação 3.1, obtemos $c_1 = 0$. Concluimos então que v_1 e v_2 são linearmente independentes. Por indução é possível mostrar que o resultado é válido para todo natural n .

3.2 Matrizes semelhantes

Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Dizemos que B é semelhante a A , quando existir uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$.

Note que

$$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} \Leftrightarrow PBP^{-1} = A \Leftrightarrow (P^{-1})^{-1}BP^{-1} = A.$$

Sendo assim, se uma matriz B é semelhante a uma matriz A , então A também é semelhante a B . Dizemos simplesmente que A e B são semelhantes.

Teorema 3.2.1 *Matrizes semelhantes, têm o mesmo polinômio característico.*

Demonstração 3.2.1 *Sejam A e B matrizes semelhantes. Por definição,*

$$P_B(t) = \det(B - tI) = \det[P^{-1}AP - P^{-1}tIP] = \det[P^{-1}(A - tI)P] = \det(P^{-1}) \cdot \det(A - tI) \cdot \det(P) = \det(P^{-1}) \cdot \det(P) \cdot \det(A - tI) = 1 \cdot \det(A - tI) = \det(A - tI) = P_A(t).$$

Concluimos então que $P_B(t) = P_A(t)$.

Observação 3.2.1 *O teorema acima mostra que o polinômio característico de operador linear $T : V \rightarrow V$ está bem definido. Basta observar que dado V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo K e $S_1 \neq S_2$ duas bases de V . Temos que*

$$[T]_{S_1} = P^{-1}[T]_{S_2}P,$$

onde P é a matriz de mudança de bases de S_2 para S_1 .

Definição 3.2.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo K e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é diagonalizável se existir uma base $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ tal que $[T]_S$ é diagonal, o que é equivalente a dizer que existe uma base formada por autovetores de T , ou seja*

$$T(u_1) = k_1u_1.$$

$$\begin{aligned}
 T(u_2) &= k_2 u_2. \\
 &\dots\dots\dots \\
 T(u_n) &= k_n u_n.
 \end{aligned}$$

Teorema 3.2.2 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo K e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dada uma base S de V , temos que T é diagonalizável se, e somente se, $[T]_S$ é semelhante a uma matriz diagonal D . Isto é,*

$$T \text{ é diagonalizável} \Leftrightarrow \text{ existe um matriz } P \text{ tal que } P[T]_S P^{-1} = D.$$

A matriz P que torna $[T]_S$ semelhante a D , chama-se diagonalizante de $[T]_S$. Afirmamos que os vetores colunas da matriz P são os autovetores linearmente independentes de T e os elementos diagonais de D são os autovalores associados.

3.3 Diagonalização de matrizes reais simétricas

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados sobre matrizes reais simétricas, no entanto, iremos nos limitar as matrizes reais de ordem 2.

Definição 3.3.1 *Dizemos que uma matriz A é simétrica se $A^T = A$. Equivalentemente, $A = [a_{ij}]$ é simétrica se seus elementos simétricos em relação a diagonal principal forem iguais, isto é, se $a_{ij} = a_{ji}$, para cada ij .*

Teorema 3.3.1 *Se A é uma matriz real simétrica, então cada raiz t do polinômio característico de A é real.*

Demonstração 3.3.1 *Vamos mostrar o caso em que a matriz A é de ordem 2. Para isto, considere a seguinte matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Segue da definição que

$$P_A(t) = \det \left(t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} t - a & b \\ b & t - c \end{bmatrix} \right) = t^2 - (a + c)t + ac - b^2.$$

Agora note que o discriminante de $P_A(t)$ é dado por

$$\Delta = [-(a + c)]^2 - 4 \cdot (ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Portanto as raízes de $P_A(t) = 0$ são reais e dadas por

$$t_1 = \frac{(a+c)+k}{2} \quad e \quad t_2 = \frac{(a+c)-k}{2}, \quad \text{onde } k = \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}.$$

Teorema 3.3.2 *Sejam A uma matriz real simétrica de ordem 2 e u e v autovetores de A associados a autovalores distintos t_1 e t_2 . Então u e v são ortogonais, isto é, $\langle u, v \rangle = 0$.*

Demonstração 3.3.2 *Considere a seguinte matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Como os autovalores t_1 e t_2 são distintos, devemos ter $(a-c)^2 + 4b^2 > 0$. Sendo assim, temos três possibilidades:

$$i) a \neq c \text{ e } b \neq 0 \quad ii) a = c \text{ e } b \neq 0 \quad iii) a \neq c \text{ e } b = 0.$$

No caso i) para $t_1 = \frac{(a+c)+k}{2}$, temos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{(a+c)+k}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = \frac{(a+c)+k}{2}x \\ bx + cy = \frac{(a+c)+k}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-c-k)x + 2by = 0 \\ 2bx + (c-a-k)y = 0 \end{cases}.$$

Como

$$\det \left(\begin{bmatrix} (a-c-k) & 2b \\ 2b & (c-a-k) \end{bmatrix} \right) = ac - a^2 - ak - c^2 + ac + ck - kc + ka + k^2 - 4b^2 = -2ac \neq 0,$$

temos que o sistema tem solução não nula dada por

$$y = \frac{-(a-c-k)}{2b}x, \quad x \neq 0.$$

Sendo assim os autovetores u associados ao autovalor t_1 são dados por

$$u = \begin{bmatrix} x \\ \frac{-(a-c-k)}{2b}x \end{bmatrix}, \quad x \neq 0.$$

Para $t_2 = \frac{(a+c)-k}{2}$, temos que os autovetores v associados ao autovalor t_2 são dados por

$$v = \begin{bmatrix} x \\ \frac{-(a-c+k)}{2b}x \end{bmatrix}, \quad x \neq 0.$$

Fazendo $x = \lambda \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left[\lambda \quad \frac{-(a-c-k)}{2b}\lambda \right] \begin{bmatrix} \lambda \\ \frac{-(a-c+k)}{2b}\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{a^2 - 2ac + ak + c^2 - ck - ka + kc - k^2}{4b^2}\lambda^2 \\ &= \lambda^2 + \frac{a^2 - 2ac + c^2 - (a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2)}{4b^2}\lambda^2 = \lambda^2 + \frac{-4b^2}{4b^2}\lambda^2 = \lambda^2 - \lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

No caso ii), temos que $a = c$ e $b \neq 0$, segue então que os autovetores distintos são dados por

$$u = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{(a-c-k)}{2b}x \end{bmatrix}, \quad x \neq 0 \quad v = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{(a-c+k)}{2b}x \end{bmatrix}, \quad x \neq 0.$$

Que também são ortogonais.

No caso iii) temos que $t_1 = a$ e $t_2 = b$, e neste caso os autovetores associados a $t_1 = a$ e $t_2 = b$, respectivamente, são dados por

$$u = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \neq 0 \quad e \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \quad y \neq 0,$$

que claramente são ortogonais.

Concluimos então que em qualquer um dos casos os autovetores serão ortogonais.

Definição 3.3.2 Uma matriz real P é ortogonal se $P^T = P^{-1}$, ou seja, se $PP^T = P^T P = I$.

Definição 3.3.3 Dizemos que uma matriz real A é ortogonalmente diagonalizável, se existe uma matriz ortogonal P tal que $P^T A P$ é diagonal.

Teorema 3.3.3 Uma matriz quadrada de ordem 2 é ortogonal se, e somente se, seus vetores coluna formam uma base ortonormal.

Demonstração 3.3.3 Seja P uma matriz ortogonal cujos vetores coluna são $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$.

Por definição devemos ter $P^T P = I$, sendo assim.

$$P^T P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue da igualdade entre duas matrizes que

$$u \cdot u = v \cdot v = 1 \Leftrightarrow \|u\| = \|v\| = 1.$$

$$u \cdot v = v \cdot u = 0 \Leftrightarrow u \perp v.$$

Fica assim demonstrado o resultado.

O resultado a seguir é uma consequência direta dos teoremas 3.2.2, 3.3.3 e 3.3.2.

Corolário 3.3.1 Se A é uma matriz real simétrica de ordem 2, então existe um matriz ortogonal P , tal que $P^T A P$ é diagonal. Ou seja, toda matriz real simétrica de ordem 2 é ortogonalmente diagonalizável.

4 Identificação das Cônicas

4.1 Forma matricial da equação quadrática

Vimos na seção 1.2 que toda cônica pode ser expressa por uma equação cartesiana do tipo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (4.1)$$

E nas seções 1.3, 1.4 e 1.5, obtemos as equações reduzidas da parábola, da elipse e da hipérbole. O objetivo deste capítulo é usar os resultados da Álgebra Linear apresentados anteriormente, para realizar uma mudança de variável na equação 4.1 de modo que a mesma seja equivalente a uma das equações reduzidas 1.6, 1.10 ou 1.15.

Observação 4.1.1 *A equação 4.1 é idêntica a equação 1.2, apenas mudamos a notação dos coeficientes devido ao contexto.*

Considere a seguinte equação matricial:

$$X^T Q X + K X + [f] = 0. \quad (4.2)$$

Onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}, \quad [f] = f.$$

Observe que

$$\begin{aligned} X^T Q X + K X + [f] = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = 0 \Leftrightarrow \\ &\begin{bmatrix} ax + by & bx + cy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx + ey \end{bmatrix} + [f] = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax^2 + bxy + bxy + cy^2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} dx + ey \end{bmatrix} + [f] = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a equação 4.2 é equivalente a equação 4.1.

Definição 4.1.1 *A expressão $X^T Q X$ na equação 4.2 é chamada forma quadrática e Q é a matriz associada a essa forma quadrática.*

4.2 Mudança de coordenadas

Na seção 2.3 vimos que toda matriz determina uma transformação linear, em especial, as matrizes quadradas de ordem n com entradas em um corpo K , podem ser

vistas como um operador linear do espaço vetorial K^n . Desta forma, podemos considerar o operador linear dado pela matriz Q , definida anteriormente, como um operador linear do espaço vetorial \mathbb{R}^2 .

Segue do corolário 3.3.1 que existe uma matriz P que diagonaliza Q ortogonalmente. Pelo teorema 3.3.3 sabemos que os vetores colunas da matriz P são os autovetores normalizados de Q associados aos autovalores distintos t_1 e t_2 de Q . De acordo com o teorema 3.2.2 sabemos também que a diagonal da matriz P^TQP é formada pelos autovalores t_1 e t_2 , isto é,

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad P^TQP = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Onde (P_{11}, P_{21}) e (P_{12}, P_{22}) são os autovetores normalizados de Q .

Assim como no caso da matriz Q , podemos olhar para a matriz P como um operador linear no espaço vetorial \mathbb{R}^2 .

Considere a base canônica $E = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e a base ortogonal $S = \{(P_{11}, P_{21}), (P_{12}, P_{22})\}$ do espaço vetorial \mathbb{R}^2 . Neste caso, a matriz de mudança de base da base S para a base E é a própria matriz P .

Pelo teorema 2.5.2, temos que as coordenadas x e y , em relação a base E , estão relacionadas com as coordenadas x' e y' em relação a base S , da seguinte maneira:

$$X = PX' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Substituindo X por PX' na equação 4.2, obtemos

$$(PX')^TQ(PX') + K(PX') + [f] = 0 \Leftrightarrow X'^T(P^TQP)X' + (KP)X' + [f] = 0. \quad (4.5)$$

Usando a relação 4.3, temos que

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = 0.$$

Efetuando os produtos, obtemos

$$t_1x'^2 + t_2y'^2 + (dP_{11} + eP_{21})x' + (dP_{12} + eP_{22})y' + f = 0.$$

Fazendo $d' = (dP_{11} + eP_{21})$ e $e' = (dP_{12} + eP_{22})$, temos uma nova equação para a cônica dada pela equação 4.1.

$$t_1x'^2 + t_2y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0. \quad (4.6)$$

A equação 4.6 representa a cônica no sistema de eixos ortogonais determinados pelos vetores (P_{11}, P_{21}) e (P_{12}, P_{22}) . Observe que na equação 4.6 o coeficiente do termo $x'y'$ é igual a zero. Segue da proposição 1.2.1 que neste caso a diretriz da cônica é paralela ao eixo x' ou ao eixo y' .

4.3 Translação de eixos

Na seção anterior partimos da equação 4.1 e obtemos a equação 4.6, que representa a mesma cônica no sistema de eixos x' e y' . Vejamos agora como proceder para obter uma equação reduzida a partir da equação 4.6.

Vamos supor inicialmente que $t_1 \neq 0$ e $t_2 \neq 0$. Observe que neste caso

$$\begin{aligned} t_1x'^2 + t_2y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 &\Leftrightarrow t_1x'^2 + d'x' + \frac{d'^2}{4t_1} + t_2y'^2 + e'y' + \frac{e'^2}{4t_2} = \frac{d'^2}{4t_1} + \frac{e'^2}{4t_2} - f \\ &\Leftrightarrow t_1 \left(x'^2 + \frac{d'}{t_1}x' + \frac{d'^2}{4t_1^2} \right) + t_2 \left(y'^2 + \frac{e'}{t_2}y' + \frac{e'^2}{4t_2^2} \right) = \frac{d'^2}{4t_1} + \frac{e'^2}{4t_2} - f \Leftrightarrow t_1 \left(x' + \frac{d'}{2t_1} \right)^2 \\ &\quad + t_2 \left(y' + \frac{e'}{2t_2} \right)^2 = \frac{t_2d'^2 + t_1e'^2 - 4t_1t_2f}{4t_1t_2} \Leftrightarrow \frac{\left(x' + \frac{d'}{2t_1} \right)^2}{m} + \frac{\left(y' + \frac{e'}{2t_2} \right)^2}{n} = 1. \end{aligned}$$

Onde

$$m = \frac{t_2d'^2 + t_1e'^2 - 4t_1t_2f}{4t_1^2t_2}, \quad n = \frac{t_2d'^2 + t_1e'^2 - 4t_1t_2f}{4t_1t_2^2}.$$

Não estamos considerando o caso em que $m = n = 0$.

Considere a seguinte mudança de variável conhecida como translação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{d'}{2t_1} \\ y' = y'' - \frac{e'}{2t_2} \end{cases}.$$

Realizando a mudança de variável na equação anterior, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{x''^2}{m} + \frac{y''^2}{n} = 1 \Leftrightarrow \pm \frac{x''^2}{\sqrt{m^2}} \pm \frac{y''^2}{\sqrt{n^2}} = 1. \quad (4.7)$$

Neste caso a cônica será uma elipse ou uma hipérbole a depender do valor de m e n .

No caso em que $m = n = 0$, temos que

$$t_1 \left(x' + \frac{d'}{2t_1} \right)^2 + t_2 \left(y' + \frac{e'}{2t_2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow t_1x''^2 + t_2y''^2 = 0. \quad (4.8)$$

E neste caso a cônica será um ponto ou um par de retas.

Vamos agora analisar o caso em que um dos autovalores t_1, t_2 é nulo.

Suponha $t_1 \neq 0$ e $t_2 = 0$, sendo assim a equação 4.6 se reduz a equação

$$t_1x'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \Leftrightarrow t_1 \left(x' + \frac{d'}{2t_1} \right)^2 = \frac{d'^2}{4t_1} - e'y' - f.$$

Caso $e' \neq 0$, temos que

$$t_1x'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \Leftrightarrow \left(x' + \frac{d'}{2t_1} \right)^2 = -\frac{e'}{t_1} \left(y' - \frac{d'^2}{4e't_1} + \frac{f}{e'} \right).$$

Considere a seguinte mudança de variável conhecida com translação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{d'}{2t_1} \\ y' = y'' + \frac{d'^2}{4e't_1} - \frac{f}{e'} \end{cases} .$$

Realizando a mudança de variável na equação anterior e fazendo $4p = -\frac{e'}{t_1}$, obtemos a seguinte equação:

$$x''^2 = 4py'' . \quad (4.9)$$

Neste caso a cônica é uma parábola cuja a diretriz é paralela ao eixo x'' .

Caso $e' = 0$, temos que a equação 4.6 se reduz a equação

$$t_1x'^2 + d'x' + f = 0 \Leftrightarrow t_1\left(x' + \frac{d'}{2t_1}\right)^2 = \frac{d'^2}{4t_1} - f \Leftrightarrow x''^2 = \frac{d'^2 - 4t_1f}{4t_1^2} . \quad (4.10)$$

E neste caso a cônica é uma reta. No caso em que $t_1 = 0$ e $t_2 \neq 0$ temos que a equação 4.6 é equivalente a equação

$$y''^2 = 4px'' . \quad (4.11)$$

Onde

$$\begin{cases} y' = y'' - \frac{e'}{2t_2} \\ x' = x'' + \frac{e'^2}{4d't_2} - \frac{f}{d'} \end{cases} , \quad 4p = -\frac{d'}{t_2} .$$

Neste caso a cônica é uma parábola cuja a diretriz é paralela ao eixo y'' .

Caso $d = 0$ a cônica é uma reta dada por

$$y''^2 = \frac{e'^2 - 4t_2f}{4t_2^2} . \quad (4.12)$$

Concluimos então que em qualquer um dos casos é possível realizar uma translação de eixos de modo que a equação 4.6 seja equivalente a uma equação reduzida.

4.4 Identificação

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 4.4.1 Considere a seguinte equação quadrática

$$3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y = 25. \quad (4.13)$$

Neste caso a matriz associada a forma quadrática é

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} .$$

De acordo a seção 3.1 os autovalores t_1 e t_2 podem ser encontrados calculando as raízes do polinômio característico, que neste caso é dado por

$$(t - 3) \cdot (t + 1) - (-2\sqrt{3})^2 = t^2 - 2t - 15 \Rightarrow t_1 = -3, \quad t_2 = 5.$$

Para $t_1 = -3$, temos

$$\begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2\sqrt{3}y = -3x \\ -2\sqrt{3}x - y = -3y \end{cases} \Rightarrow x = x, \quad y = \sqrt{3}x.$$

Para $t_2 = 5$, temos

$$\begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2\sqrt{3}y = 5x \\ -2\sqrt{3}x - y = 5y \end{cases} \Rightarrow x = x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

Portanto os autovetores s e r associados respectivamente a t_1 e t_2 , são dados por

$$s = \begin{bmatrix} x \\ \sqrt{3}x \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x \end{bmatrix}.$$

Para $x = 1$, temos que os autovetores normalizados associados respectivamente a t_1 e t_2 são

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Segue do corolário 3.3.1, que a matriz P que diagonaliza Q ortogonalmente é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sendo assim a equação 4.13 é equivalente a equação

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ -3x'^2 + 5y'^2 + 10\sqrt{3}x' - 10y' - 25 = 0 \Leftrightarrow -3\left(x' - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 5(y' - 1)^2 = 5. \end{aligned}$$

Considere a seguinte mudança de variável:

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ y' = y'' + 1 \end{cases}.$$

Realizando a mudança de variável na equação anterior, obtemos a seguinte equação:

$$-3x''^2 + 5y''^2 = 5 \Leftrightarrow -\frac{x''^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} + \frac{y''^2}{1^2} = 1. \quad (4.14)$$

Neste caso a cônica μ é uma hipérbole cuja a diretriz é paralela ao eixo x'' . Como representado na figura 4.

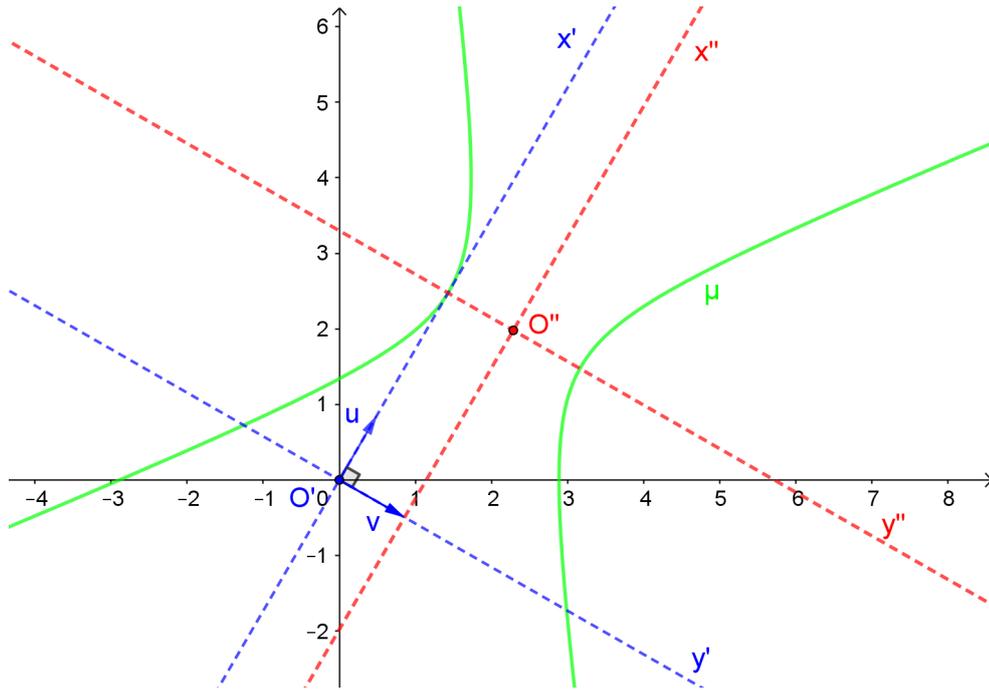


Figura 4 – Hipérbole $\mu : 3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y = 25$.

Exemplo 4.4.2 Considere a seguinte equação quadrática

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0. \tag{4.15}$$

Temos que a matriz associada a forma quadrática é

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}.$$

E neste caso polinômio característico é dado por

$$(t - 1) \cdot (t + 7) - (-3)^2 = t^2 + 6t - 17 \Rightarrow t_1 = -8, \quad t_2 = 2.$$

Para $t_1 = -8$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -8x \\ -3x - 7y = -8y \end{cases} \Rightarrow x = x, \quad y = 3x.$$

Para $t_2 = 2$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ -3x - 7y = 2y \end{cases} \Rightarrow x = x, \quad y = -\frac{1}{3}x.$$

Portanto os autovetores s e r associados respectivamente a t_1 e t_2 , são dados por

$$s = \begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{3}x \end{bmatrix}.$$

Para $x = 1$, temos que os autovetores normalizados associados respectivamente a t_1 e t_2 são

$$u = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}.$$

Segue então que a matriz P que diagonaliza Q ortogonalmente é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}.$$

Sendo assim a equação 4.15 é equivalente a equação

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ -8x'^2 + 2y'^2 + \frac{8\sqrt{10}}{5}x' + \frac{14\sqrt{10}}{5}y' + 9 = 0 \Leftrightarrow -8\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 + 2\left(y' + \frac{7\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Considere a seguinte mudança de variável:

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{10}}{10} \\ y' = y'' - \frac{7\sqrt{10}}{10} \end{cases}.$$

Realizando a mudança de variável na equação anterior, obtemos a seguinte equação:

$$-8x''^2 + 2y''^2 = 0 \Leftrightarrow 8x''^2 = 2y''^2 \Leftrightarrow y = \pm 4x. \quad (4.16)$$

Neste caso a cônica μ é um par de retas. Como representado na figura 5.

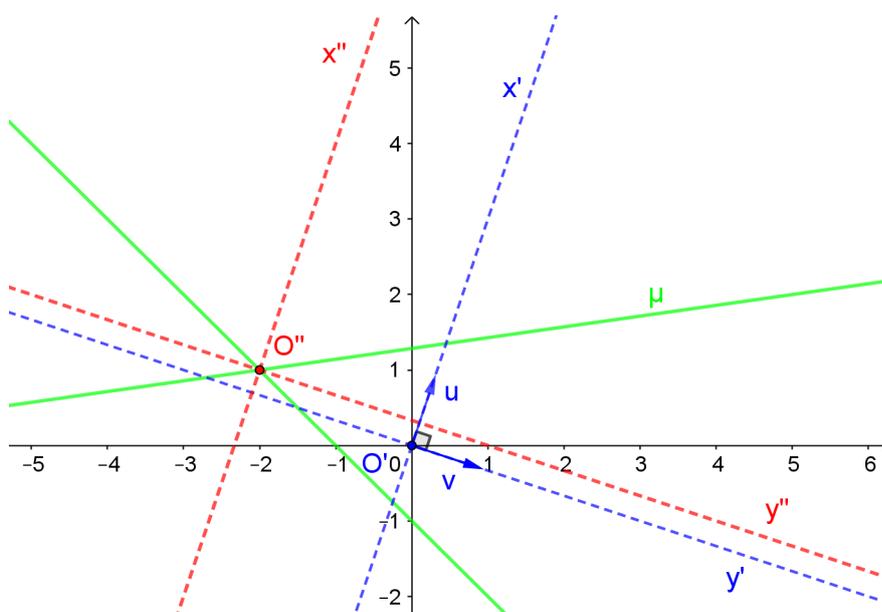


Figura 5 – Par de retas $\mu : x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$.

Exemplo 4.4.3 Considere a seguinte equação quadrática

$$x^2 + xy + y^2 = 3. \quad (4.17)$$

Temos que a matriz associada a forma quadrática é

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

E neste caso polinômio característico é dado por

$$(t-1) \cdot (t-1) - \frac{1}{2} = t^2 - 2t + \frac{3}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Para $t_1 = \frac{3}{2}$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}x \\ \frac{1}{2}x + 1y = \frac{3}{2}y \end{cases} \Rightarrow x = x, \quad y = x.$$

Para $t_2 = \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + 1y = \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow x = x, \quad y = -x.$$

Portanto os autovetores s e r associados respectivamente a t_1 e t_2 , são dados por

$$s = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}.$$

Para $x = 1$, temos que os autovetores normalizados associados respectivamente a t_1 e t_2 são

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Segue então que a matriz P que diagonaliza Q ortogonalmente é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Sendo assim a equação 4.17 é equivalente a equação

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{6})^2} = 1.$$

Neste caso a cônica μ é uma elipse cuja a diretriz é paralela ao eixo x' . Como representado na figura 6.

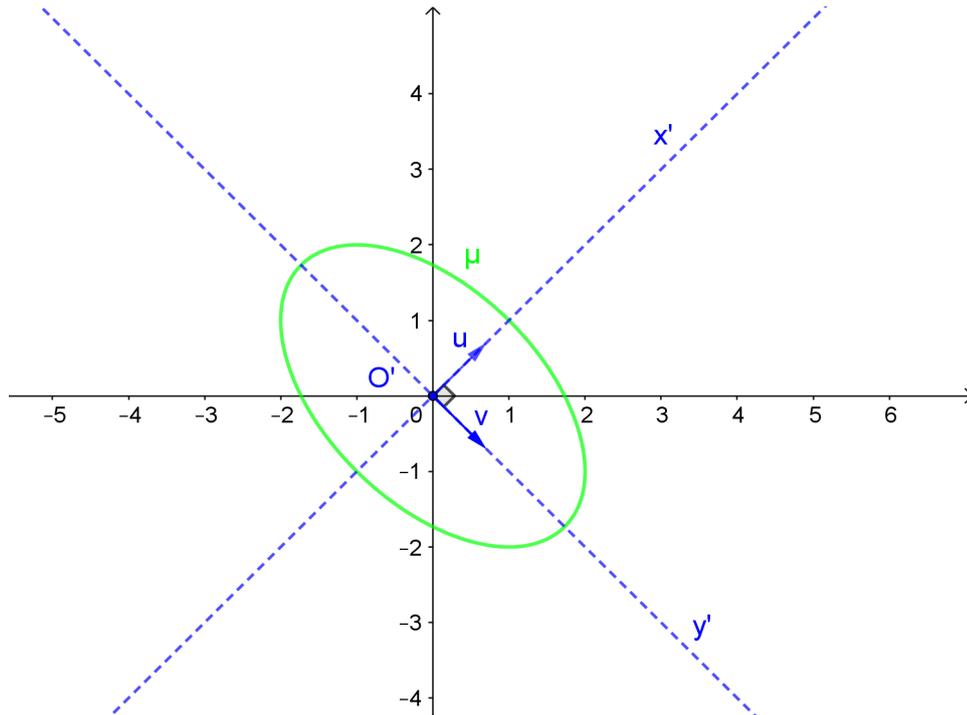


Figura 6 – Elipse $\mu : x^2 + xy + y^2 = 3$.

Exemplo 4.4.4 Considere a seguinte equação quadrática

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0. \quad (4.18)$$

Temos que a matriz associada a forma quadrática é

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

E neste caso polinômio característico é dado por

$$(t - 1) \cdot (t - 1) - 1^2 = t^2 - 2t \Rightarrow t_1 = 2, \quad t_2 = 0.$$

Para $t_1 = 2$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \Rightarrow x = x, \quad y = x.$$

Para $t_2 = 0$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = x, \quad y = -x.$$

Portanto os autovetores s e r associados respectivamente a t_1 e t_2 , são dados por

$$s = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}.$$

Para $x = 1$, temos que os autovetores normalizados associados respectivamente a t_1 e t_2 são

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Segue então que a matriz P que diagonaliza Q ortogonalmente é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Sendo assim a equação 4.18 é equivalente a equação

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x'^2 - 2\sqrt{2}y' = -3 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{\sqrt{2}} = y' - \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Considere a seguinte mudança de variável:

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

Realizando a mudança de variável na equação anterior, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{x''^2}{\sqrt{2}} = y'' \Leftrightarrow x''^2 = \sqrt{2}y''. \quad (4.19)$$

Neste caso a cônica μ é uma parábola cuja a diretriz é paralela ao eixo x' . Como representado na figura 6.

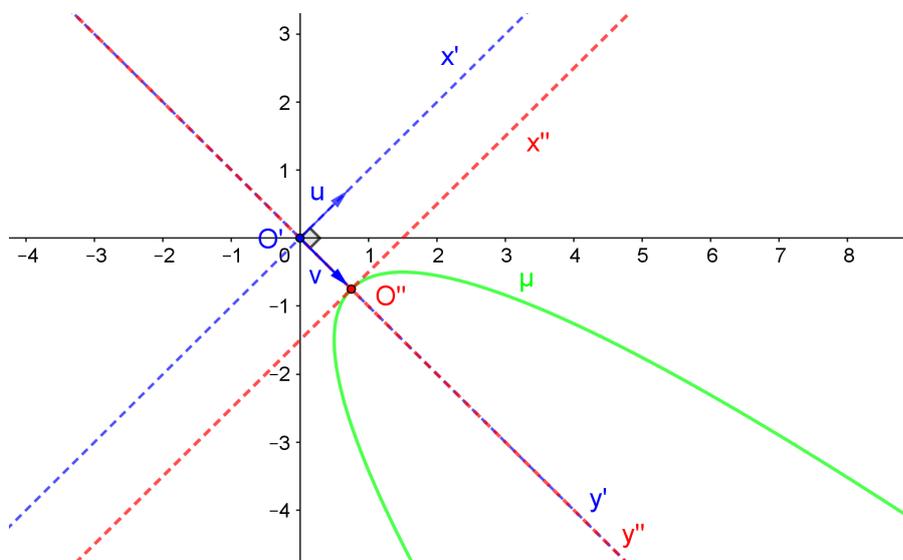


Figura 7 – Parábola $\mu : x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$.

5 Conclusão

O levantamento bibliográfico feito para a elaboração e escrita deste trabalho, permitiu observar que durante este período de mais de dois mil anos de estudos foram feitas várias descobertas sobre as seções cônicas e suas propriedades. Trabalhos importantes como o de Apolônio, Pierre de Fermat, Germinal Pierre Dandelin e outros têm destaque pelo rigor e aprofundamento teórico.

Um outro aspecto observado durante as leituras, foi a importância da aplicação de seções cônicas nos estudos de Kepler sobre movimentos celestes, óptica e na construção de espelhos parabólicos. Destaca-se também aplicações nos estudos de Galileu sobre movimento vertical e na lei da gravitação de Isaac Newton. Devido as propriedades da elipse, da hipérbole e da parábola atualmente existem várias aplicações para as mesmas. Como exemplos temos a construção de superfícies refletoras e o sistema LORAN de localização em navegação.

O presente trabalho não trata de algo desconhecido, boa parte dos livros de Álgebra Linear apresentam uma discussão sobre a identificação de cônicas. No entanto, procuramos detalhar alguns aspectos e fazer uma breve relação entre a definição geométrica e a definição em termos de coordenadas cartesianas das seções cônicas. Acreditamos que o trabalho é de fácil leitura e serve de apoio para um estudo introdutório sobre as cônicas.

Ao estudar os conceitos da Álgebra Linear e da Geometria Analítica foi possível perceber a potencialidade da aplicação dos mesmos no estudo de alguns tópicos da Matemática e de áreas afins. Esperamos que este trabalho sirva como um convite para o estudo da Álgebra Linear e das seções cônicas, e que ao fazer isto o leitor se depare com questões tão interessantes quanto aquelas que este trabalho proporcionou durante sua elaboração.

Referências

- BOYER, C. B.; PÉREZ, M. M. *Historia de la matemática*. [S.l.]: Alianza, 1986. Citado na página 8.
- CINTRA, C. d. O. *Classificação das Cônicas*. [S.l.]: Fundação Antônio dos Santos Abranches - FASA, 1985. Citado na página 22.
- COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. *Curso de Álgebra Linear, Um Vol. 34*. [S.l.]: Edusp, 2001. Citado na página 22.
- LIMA, E. L. *Algebra linear*, 2a. edição. IMPA, Rio de Janeiro, 1996. Citado na página 22.
- LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Algebra Linear: Coleção Schaum*. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 22.
- MOL, R. S. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Citado na página 8.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado na página 8.
- SATO, J. As cônicas e suas aplicações. *Retas tangentes à uma cônica. artigo Uberlândia: UFU*, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 8, 9 e 10.