UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FERNANDA SILVA ROCHA

O CONCEITO DE FUNÇÃO COMUNICADO EM LIVROS DIDÁTICOS

VITÓRIA DA CONQUISTA

2018

FERNANDA SILVA ROCHA

O CONCEITO DE FUNÇÃO COMUNICADO EM LIVROS DIDÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática, sob orientação da Professora Roberta D´Angela Menduni Bortoloti.

VITÓRIA DA CONQUISTA

2018

TERMO DE APROVAÇÃO

FERNANDA SILVA ROCHA

O CONCEITO DE FUNÇÃO COMUNICADO EM LIVROS DIDÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Roberta D'Angela Menduni Bortoloti
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Antônio Augusto Oliveira Lima
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Graça Luzia Dominguez Santos
Universidade Federal da Bahia – UFBA

Vitória da Conquista, Junho de 2018.

AGRADECIMENTOS

Não poderia deixar de agradecer primeiramente a Deus, pois nele confio, e por ele que busco forças para acreditar que no final tudo dará certo.

A minha família, mãe, irmã e padrasto, por sempre me incentivarem e me darem apoio em todos os momentos da minha vida. Gostaria de agradecer em especial minha irmã, garota forte e guerreira. Foi ela que segurou em minha mão em toda a minha trajetória escolar e em momentos difíceis dessas etapas de ensino, sempre garantiu que eu tivesse educação e principalmente bem estar. Minha mãe e irmã são realmente duas mulheres incríveis pra mim.

A minha grande amiga Lorena Leal, em que o próprio sobrenome diz, é realmente uma pessoa leal, uma amiga companheira que me conquistou desde a nossa adolescência por se mostrar presente nos momentos bonitos e difíceis de nossa amizade. Sempre me apoiando e aconselhando durante este percurso.

Aos meus amigos Ícaro, joão e Larissa, que chegaram cada um com seu jeitinho conquistando meu coração.

E o que falar dos amigos Amanda e Will? Não poderia deixar de agradecer em especial a eles, pois foram amigos que me ajudaram e contribuíram muito ao meu trabalho. Amanda por sua paciência para com a minha pessoa em ensinar o que parecia impossível de aprender e Will por ter sido muito atencioso e prestativo nas horas em que mais precisei.

Aos professores Augusto, Ana Paula Perovano e Graça Luzia Dominguez, por aceitarem participar da banca e pelas contribuições feitas a este trabalho. A professora Ana Paula gostaria de agradecer por ser essa pessoa tão maravilhosa e que teve um destaque especial na minha trajetória acadêmica, sempre com muita paciência, atenção e carinho para ensinar. Um exemplo de professora que realmente busca atender e compreender as necessidades que cada aluno apresenta.

A minha orientadora Roberta Menduni, por considerar uma mulher inteligente e integra, além de possuir uma voz marcante que muitas vezes me amedrontava, mas que servia muito para amadurecer minhas ideias e escrita.

Enfim, muito obrigada a todos que fizeram parte da minha formação.

RESUMO

O presente estudo objetiva identificar em livros didáticos da Educação Básica comunicações do conceito de função conforme o modelo de Matemática para o Ensino proposto por Santos e Barbosa (2017). O estudo de função pode ser comunicado por vários modos, que neste trabalho estão expostos em um modelo em que nos orienta a organizar e reconhecer essas diversas comunicações. Realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa e caráter documental, utilizando como documento para a análise, livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Destacamos questões em que os autores comunicaram de forma explícita ou implícita o conceito de função, e as categorizamos conforme o modelo, que traz as comunicações de função organizadas do seguinte modo: tabular, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal. Por meio da análise de dados constatamos o uso dos modos tabular, gráfico e algébrico como os mais comunicados em todos os anos. O modo generalização de padrões é evidenciado somente nos livros do Fundamental II. Não constatamos o uso do modo diagrama no livro do 9° dos anos finais do fundamental. Na análise, percebemos que além dos modos serem comunicados de forma individual, encontramos a junção de alguns modos como: tabular e algébrico, gráfico e algébrico, diagrama e algébrico, tabular e gráfico. Notamos a ênfase que o modo algébrico agrega a maioria dos outros modos. Esperamos com essa pesquisa que professores e autores de materiais didáticos constatem que o estudo de função é comunicado de vários modos, e que isso possa contribuir significativamente no processo de ensino e aprendizagem, tanto para a formação inicial como para a formação continuada.

Palavras-chave: Função, Conceito, Livro Didático, Formação de professor de matemática

ABSTRACT

This study aims to identify in texbooks from the Basic Education communications of the function's concept according to the model of Mathematics for Teaching proposed by Santos and Barbosa (2017). Function's study can be communicated by several concepts, in this work they are exposed in a model that guides us to organize and to recognize these diverse communications. We've made a qualitative and documentary research, using mathematics didactic books from Elementary School II and High School as a document for the analysis. We've highlighted points where the authors tells explicitly or implicitly the function's concept and categorize them according to the model that brings the function's communications organized as follows: tabular, diagram, algebraic, graphic, pattern's generalization and formal. Through the data analysis we've found tabular, graphical and algebraic use modes as the most reported in all years. The pattern's generalization mode only appeared in Elementary School II books. We didn't find the diagram's mode in Elementary School 9th final book. In the analysis we've noticed that besides the individually communication's modes, sometimes they're together as: tabular and algebraic, graphical and algebraic, diagram and algebraic, tabular and graphical. We've also noticed the algebraic mode emphasis, as it aggregates mostly other modes. We hope that with this research didactic material's teachers and authors note that function's study can be communicated in several ways, so it can helps significantly in the teaching-learning process, both for initial training and continuing education.

Keywords: Function, Concept, texbooks, Teacher's Training in Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A minha entrada na Universidade foi um pouco complicada, tive que escolher entre o emprego que trabalhava ou iniciar os estudos universitários, pois os horários eram os mesmos. A decisão de seguir com os estudos foi prioridade, pensava muito na carreira acadêmica e ao término do curso atuar como professora. Atualmente ainda penso em lecionar, apesar de toda dificuldade que enfrento no processo de formação. Considero o curso bastante difícil e em algumas situações desmotivador. Acredito que achar dificultoso o curso, se dá pela precariedade que tive em relação aos estudos no Ensino Básico.

Iniciei e conclui o Ensino Fundamental I em uma escola particular de Vitória da Conquista, na qual tive uma excelente base para os anos seguintes, digo isto, porque ao começar meus estudos no Ensino Fundamental II, tudo que era ensinado em sala de aula, eu já havia visto no Ensino Fundamental dos anos iniciais. Por essa razão, considero que meus conhecimentos foram se definhando e tornando-se limitados no decorrer do processo de ensino básico. A maioria dos alunos apresentava baixo nível de conhecimento e por consequência, os professores não conseguiam avançar com os conteúdos.

No Ensino Médio não foi diferente, alguns assuntos foram deixados para trás, e quando ingressei na Universidade muitos conteúdos dados como revisão do Ensino Médio no primeiro semestre do curso eram novos para mim, conteúdos estes que deveriam ter sido apresentados na minha educação básica.

Uma das dificuldades que encontrei logo que iniciei os estudos na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), foi na matéria Fundamentos Elementar da Matemática I, na qual se trabalha com o conteúdo de Função. Não foi nada fácil conseguir aprender o que o professor ensinara, pois tinha uma grande defasagem neste assunto. No Ensino Básico me recordo de apenas ter visto a professora abordar Plano Cartesiano no 1° ano do Ensino Médio. Então, muitas vezes nos meus estudos, para conseguir acompanhar a turma e o professor, estudava o dobro para aprender o que não foi dado no Ensino Básico e, desta forma, absorver os conteúdos que agora na Universidade eram postos de maneira mais avançados e completos, trabalhando com provas e demonstrações, o que nos ajudava a entender um pouco mais a matemática. Não consegui passar na matéria. Confesso que houve três coisas que me fizeram perder nesta disciplina, além da grande dificuldade gerada pelo Ensino Básico, não tinha uma visão sobre como estudar, ou seja, não criava hábitos para estudar, e não conseguia entender a explicação do professor.

No segundo semestre levei seriamente os estudos, então minhas práticas de estudo começaram a mudar. Percebia que havia ainda uma dificuldade em enfrentar matérias que exigiam o estudo de funções, como Cálculo I e Cálculo II, tive ajuda de uma grande amiga nestas disciplinas. Ela por sua vez, com uma paciência admirável, me ensinou grande parte do conteúdo de função que eu não havia visto no Ensino Básico, e desta forma, consegui avançar com estas matérias.

Apesar de ter passado em disciplinas que eram compostas por alguma noção de função ou definições formais do conteúdo, não me sentia segura em ensinar função, o que aconteceu no meu segundo Estágio Supervisionado. No Estágio Supervisionado II, lecionei em uma turma do 9° ano do Ensino Fundamental II, na qual teria que trabalhar com Noções Iniciais de Função, e por isso, considero até aqui o estágio mais desafiador, justamente pelo fato de ter certa insegurança no conteúdo e por ter poucas experiências ensinando. Volto a falar, então, um pouco mais da disciplina inicial a qual perdi no primeiro semestre, Fundamento Elementar da Matemática I, em que traz em sua ementa a abordagem do assunto de função.

Acredito que por haver uma dificuldade e por não ter repetido a matéria antes de iniciar este estágio, levei comigo pouca bagagem de conhecimento do assunto para sala de aula, por consequência, ao aplicar questões contextualizadas e atividades diferenciadas na turma, não consegui despertar de maneira proveitosa o raciocínio lógico-matemático, um pensamento crítico e intuitivo dos alunos. Posso dizer ainda, que havia uma insegurança de ordem conceitual e procedimental ao aplicar estas atividades.

Na regência do Estágio Supervisionado III, e novamente ensinando o conteúdo de Função, no qual este assunto é visto, não somente a parte inicial como também conceitos e definições, me sentia mais confiante ao abordar este assunto, pois dois fatores contribuíram para tal questão. O primeiro deles foi ter passado já por dois estágios, e o segundo por ter pego a disciplina novamente Fundamento Elementar da

Matemática I. Desta vez, ao repetir a matéria, me dediquei bastante aos estudos, tive ajuda do professor nos esclarecimentos de dúvidas, e pelo fato de já ter passado por várias disciplinas durante o curso, conseguia compor o conhecimento mais rapidamente e atribuir mais significados.

Em todos os estágios que passei, pude fazer uma reflexão da minha prática como docente. Em muitos momentos tive a sensação de dever cumprido, mas em tantos outros agi erroneamente, seja em um conteúdo ou atividade dada ou até mesmo nas conversas com o alunado. Percebi minhas falhas e acertos ao ler orientações de ensino e por ter grandes professores que ajudaram nesse processo de me tornar auto crítica e reflexiva. Como citei, inicialmente, pretendo seguir a carreira como professora, e, portanto, acredito que ter uma noção de como deve ser o papel do professor em sala de aula é fundamental. Acredito que no processo de ensino e aprendizagem o papel do professor deve ir além da simples transmissão de informação. Deve haver a passagem de seu conhecimento de forma a instigar, auxiliar, e incentivar o aluno no processo de ensino. Souza (2001) em sua dissertação traz que:

> As situações que envolvem funções, se apresentadas sem nenhuma explicação preliminar do ambiente e do contexto em que estão inseridas, podem ser a origem dos problemas que permeiam esse estudo. Os resultados numéricos nada dizem aos estudantes; são simplesmente números. (SOUZA, 2001, p. 21)

Nesse sentindo, é importante que se trabalhe também as questões contextualizadas de forma a despertar o interesse e a curiosidade do estudante, relacionando a matemática com seus diferentes campos e conceitos, e com diversas outras áreas, desenvolvendo um trabalho interdisciplinar.

Pude observar que o conteúdo de função sempre esteve bastante presente durante minha graduação, tive experiências boas e ruins com este assunto, e por essa razão, me despertou o interesse de pesquisar e conhecer melhor o processo de ensino e aprendizagem de função. Inicialmente, eu, juntamente com minha orientadora, tivemos a ideia de focar nosso objetivo de estudo na identificação das dificuldades que os professores de matemática do Ensino Básico enfrentam ao ensinar o conteúdo de função. Meu desejo em estudar tal objetivo, era justamente pelo fato de ter sido além de aluna, uma professora que enfrentou algumas dificuldades com este conteúdo. Contudo, ao mesmo tempo tinha muito interesse também em estudar o livro didático de matemática, pois considero uma importante ferramenta de ensino.

Ao ler alguns artigos para minha apresentação do projeto de pesquisa da monografia, li o trabalho de Graça Luzia Dominguez Santos e Jonei Cerqueira Barbosa (2017), no qual eles desenvolveram um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função. Este modelo foi estruturado em categorias, no qual função pode ser comunicada como tabular, algébrica, gráfica, generalização de padrões, formal e diagrama. Este trabalho me chamou a atenção pelo modelo gerado, no qual podemos utilizar para analisar e observar as várias formas de comunicar o conceito de função. Portanto, nosso objetivo no presente trabalho foi identificar formas de comunicar o conceito de função conforme o modelo de Matemática para o Ensino de Santos e Barbosa (2017).

Conhecendo o modelo de matemática para o ensino do conceito de funções, proposto por Santos e Barbosa (2017), almejamos confirmar ou não a existência das mesmas categorias levantadas por esses pesquisadores em coleções de livros didáticos.

Assim, esperamos[1] com essa pesquisa contribuir para que professores e autores de materiais didáticos constatem que o estudo de função é comunicado de vários modos e que isso possa contribuir significativamente no processo de ensino e aprendizagem, tanto para a formação inicial como para a formação continuada. As comunicações do conceito de função estão expostos na presente pesquisa em um modelo em que nos orienta a organizar e reconhecer essas diversas comunicações.

A seguir traremos o capítulo revisão de literatura, dividido em três subseções: Funções, O Ensino de Funções e o Livro didático. Na primeira, trouxemos um breve resumo das evoluções que o conceito de função sofreu ao longo dos séculos, segundo os autores Vazquez, Rey e Boubée (2008), Roque e Giraldo (2014), explicação do que é uma função. Na segunda subseção, falamos sobre o ensino de Função de acordo com as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), trazendo também experiências de trabalhos de alguns autores sobre materiais didáticos no apoio ao ensino de função. Para a terceira subseção, apresentamos alguns programas

---

[1] A partir deste ponto usaremos a 1ª pessoa do plural por ser este trabalho uma construção conjunta entre orientanda e orientadora.

que fizeram parte da trajetória do Livro Didático até chegar ao Programa que é recomendado atualmente para a escolha de livros da educação básica, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). E a importância do papel que o livro didático trás para a educação.

Abordamos o modelo de matemática para o ensino do conceito de função proposto por Santos e Barbosa (2017). No capítulo de Metodologia descrevemos o tipo de pesquisa, o critério para a escolha das coleções do Livro Didático e o tratamento realizado. O capítulo Análise e Discussão dos dados apresenta um panorama geral das questões analisadas nos livros didáticos, bem como as suas classificações de acordo com o modelo teórico de Santos e Barbosa (2017). Nas Considerações Finais expomos nossas conclusões obtidas pela análise dos dados coletados.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Apresentaremos aqui um sucinto resumo das evoluções do conceito de função, bem como algumas definições. Em seguida, os documentos oficiais que regem a educação brasileira para discorremos sobre o ensino de função, levando em consideração também, experiências de trabalhos de alguns autores que nos auxiliam no processo de ensino de função. Por fim, uma síntese dos documentos que compuseram a trajetória do Livro Didático e sua importância no ensino.

2.1 FUNÇÕES – UM BREVE RESUMO HISTÓRICO

Sabemos que o conceito de função é importante, pois molda matematicamente diversas situações encontradas no nosso cotidiano. A ideia de função que temos atualmente foi construída por vários matemáticos e sofreu, no decorrer de sua história, grande evolução. O conceito de função diretamente relacionado à teoria de conjuntos foi desenvolvido somente no fim do século XIX. (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO; ALMEIDA, 2016a).

Vazquez, Rey e Boubée (2008), apresentaram em seu trabalho as evoluções que o conceito de função sofreu ao longo dos séculos.

> A contagem implica uma correspondência entre um conjunto de objetos e uma sequência de números a contar. Já os homens das cavernas deixaram traços de atividade que parece estar contando. Por exemplo, certas marcas simples que poderiam ter sido usadas para manter uma conta foram encontradas em restos de esqueletos. Pode-se dizer então que a noção de função tem suas raízes no desenvolvimento do conceito de número. As quatro operações aritméticas elementares são funções de duas variáveis. (VASQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p.142, tradução nossa).

Nesta citação, os autores trazem o período da idade antiga, na qual começa a aparecer algumas manifestações que implicitamente continham a noção de função. Devido às necessidades de cada época, verificaram-se transformações dos significados do conceito de função. Sendo assim, na Idade Média, “as ideias começam a surgir a respeito de quantidades variáveis, independente e dependente, mas sem dar definições específicas” (VASQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p.144, tradução nossa).

> Assim, a evolução da noção de função foi associada ao estudo da mudança, em particular do movimento. Uma função foi definida por uma descrição

> verbal de suas propriedades específicas, ou por meio de um gráfico, mas as fórmulas ainda não foram utilizadas. (VASQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p.144, tradução nossa).

Neste período, o matemático “Nicolás Oresme considerava que tudo que variava podia ser visto como uma quantidade contínua, ou seja, era representado por um segmento retilíneo” (VASQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p.144, tradução nossa). Representando, por exemplo, a mudança de velocidade através do tempo, em que usa uma linha horizontal para representar o tempo e uma linha vertical representando a velocidade nos diferentes instantes. (VASQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

No período da Idade Moderna, o matemático René Descartes desenvolveu a ideia de função na forma analítica. Vazquez, Rey e Boubée (2008), mencionam que este matemático queria reduzir as soluções de todos os problemas algébricos e equações, no qual utilizasse um procedimento padrão que permitia encontrar raízes. Assim,

> Este matemático foi o primeiro a tornar claro que uma equação em x e y é uma forma para mostrar uma dependência entre quantidades variáveis, de modo que os valores de um deles possam ser calculados a partir dos valores correspondentes na outra variável. (VASQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p. 145 e 146, tradução nossa).

Através desta ideia, o matemático mostrou “em seus trabalhos de Geometria, que ele possuía uma ideia clara dos conceitos de variável e função, sobre os quais classificou as curvas algébricas segundo seu grau e reconheceu os pontos de intersecção de duas curvas” (VASQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p.146, tradução nossa). Newton e Leibniz, também utilizaram o conceito de variável no estudo de curvas. Leibniz por sua vez, reconhecendo a relação de interdependência entre as variáveis, as chamou de função (ROQUE; GIRALDO, 2014).

Apesar de Leibniz ter considerado que a relação entre variáveis era função, o matemático Euler ressaltou este conceito trabalhando juntamente com o cálculo diferencial e integral, nos quais destacou e classificou as funções elementares. (ROQUE; GIRALDO, 2014).

Por fim, os autores Vazquez, Rey e Boubée (2008), apresentam que durante muito tempo da Idade Moderna as funções eram concebidas como expressões analíticas ou curvas. Somente no final do século XIX, Dirichlet quem, pela primeira vez, considera uma função como uma correspondência arbitrária. Por fim, com o início da

Teoria dos Conjuntos, houve uma mudança na definição de função com o propósito de torná-la mais precisa, e assim, surgem definições deste conceito como uma correspondência entre conjuntos.

A seguir, trazemos os autores Iezzi e Murakami (2008), que apresentam definição de função baseada em conjuntos. Os autores abordam a definição como um conjunto de pares ordenados e uma definição acrescentando o uso de uma sentença aberta.

"Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação *f* de A em B recebe o nome de *aplicação* de A em B ou *função definida* em A com imagens em B, se, e somente se, para todo x ∈ A, existe um só y ∈B tal que (x, y) ∈ *f*" (IEZI; MURAKAMI, 2008, p. 81). Assim, nessa definição, função é trazida como um conjunto de pares ordenados (x, y), em que **x** é elemento de um conjunto **A**, **y** é elemento de **B**, e o par ordenado (x, y) ∈ f.

Os autores Iezzi e Murakami (2008), acrescentam ainda que toda função é uma relação binária de um conjunto A em um conjunto B, e que geralmente existe uma sentença aberta para expressar uma função: "Dado x ∈ A, determina-se y ∈ B tal que (x, y) ∈ *f*, então *f* = {(x, y) / x ∈ A, y ∈ B e y = f(x)}" (IEZI; MURAKAMI, 2008, p. 84). Isso significa, que dados os conjuntos A e B, a função f tem a lei de correspondência y = f(x).

Compreendendo a importância em destacar que função em matemática também pode ser reconhecida como uma relação entre duas variáveis, vamos supor que estas variáveis sejam representadas por $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, então a cada valor de x, determinamos um único valor em y, podendo assim dizer que $\boldsymbol{y}$ esta em função de $\boldsymbol{x}$. Como exposto na definição acima de Ieezi e Murakami (2008), uma função pode geralmente ser escrita na forma de uma sentença, que é chamada de lei de formação da função ou fórmula da função. Na lei de formação é necessário distinguir as variáveis, ou seja, em variável dependente e variável independente, nesse caso, $\mathbf{y}$ a nossa variável dependente que também pode ser substituída pela notação $\mathbf{f(x)}$, e **x** a variável independente. Observe o abaixo o **Quadro 1**.

Quadro 1: Relação entre variáveis

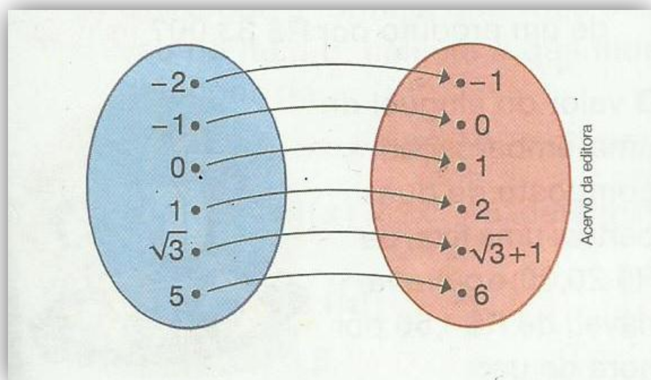
X	-2	-1	0	1	$\sqrt{3}$	5
f(x)	-1	0	1	2	$\sqrt{3}+1$	6

Fonte: Souza e Pataro (2009d, p.77)

Observe que os valores da segunda linha são obtidos ao acrescentar uma unidade aos valores correspondentes da primeira linha. Assim, podemos encontrar a lei de formação dessa função f(x) = x + 1.

Outra forma de representarmos a correspondência das variáveis dessa função é por meio de um diagrama de flechas ou diagrama de setas. Para este conceito de função há dois conjuntos, que nesse caso, são conjuntos numéricos. Veja a **Figura 1**.

Figura 1: Representação numérica em diagramas



Fonte: Souza e Pataro, (2009d, p.77)

Nota-se, também no diagrama, a correspondência dos valores atribuídos as variáveis. No estudo de função como uma relação entre conjuntos, é importante que se trabalhe os conceitos de domínio, contradomínio e imagem.

Iezzi e Murakami (2008), considerando função como uma relação binária, definem domínio e imagem. "Chamamos de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos na função: **domínio = conjunto de partida**, isto é, D = A". (IEEZI; MURAKAMI, 2008, p. 88).

“Chamamos de imagem o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto: **imagem é subconjunto do contradomínio**”. (IEEZI; MURAKAMI, 2008, p. 88). Como definido pelos autores dentro do contradomínio há um subconjunto chamado de imagem. Esse subconjunto é composto pelos valores das ordenadas (y), que é resultado da aplicação da função f(x), a sentença associada.

A definição de contradomínio é trazido por Bonjorno, Giovanni Júnior e Sousa (2016) como o conjunto constituído de todos os possíveis valores que a variável dependente pode assumir.

Os conceitos e definições no estudo de função nos possibilita interpretar e entender a relação de interdependência das situações ao nosso redor, desde situações simples do nosso cotidiano, como o valor de uma fatura de telefone calculado em função do consumo mensal, até em situações que a princípio não conseguimos associar função.

2.2 O ENSINO DE FUNÇÃO

A matemática, assim como diversas áreas de conhecimento, possuem ferramentas de grande aplicabilidade e desempenham papéis fundamentais no processo de ensino e aprendizagem. Diante disso, é importante que os conceitos trabalhados durante o ensino, tragam bons resultados na aprendizagem. Para isso, observamos em algumas recomendações didáticas como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998) que nos traz referências e propostas para o ensino de função. Nos conteúdos propostos para o ensino de matemática no terceiro ciclo do Ensino Fundamental, recomenda-se que função seja traga informalmente na exploração de padrões em sequências numéricas, que possibilite os alunos a "generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas" (BRASIL, 1998, p. 68). As generalizações permitem que os alunos possam explorar as primeiras noções de álgebra.

O documento ressalta que não é necessário no terceiro ciclo do Ensino Fundamental o aprofundamento de expressões ou equações algébricas. "É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas" (BRASIL, 1998, p. 68). Por isso, é recomendável que mesmo em circunstâncias em que o aluno encontre em situações problemas a variação de grandezas em uma equação que possibilite a interpretação da letra como incógnita, neste ciclo é importante estimulá-los a resolverem por procedimentos diversos que não seja meramente o estudo da expressão. As técnicas e regras da complexidade algébrica serão evidenciadas nos estudos do quarto ciclo do Ensino Fundamental.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2017) orienta que o trabalho com a álgebra, feita no Ensino Fundamental dos anos finais, deve garantir aos alunos atribuírem significado a um problema contextualizado, no qual o mesmo possa reconhecer nessas situações diferentes funções que a álgebra proporciona. Assim, a BNCC (2017) reforça a ideia mencionando que:

> É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2017, p. 269).

Assim, ao resolverem situações problemas em que a aplicação aritmética se torna inviável, se faz necessário à álgebra para estabelecer procedimentos e relações e expressá-los em uma forma geral.

Podemos utilizar a concepção da álgebra como um estudo de relações entre quantidades (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO; ALMEIDA, 2016). Nesse caso, as letras não são somente incógnitas, podem assumir papel de variáveis, e nesse sentindo, as noções de variável independente e variável dependente e a relação entre elas pode ser uma função.

É comum, no ensino de função o professor privilegiar o estudo do cálculo algébrico, ou seja, o trabalho da função como uma expressão de uma fórmula ou um termo geral. Apesar de ser um aspecto importante no estudo de função, não é suficiente, e pode limitar as formas de se perceber e expressar uma função.

Além do estudo algébrico que a função assume, é importante destacar o estudo de gráficos, tabelas e desenhos no desenvolvimento da noção de função, dessa forma, alguns autores sugerem trabalhos na perspectiva de promover um ensino de funções, no qual o aluno possa aprender e principalmente compreender o seu conceito, o professor pode utilizar diferentes meios didáticos para trabalhar este conteúdo. Assim, a BNCC (2017) confirma isso quando diz que:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. (BRASIL. 2017, p. 296)

A seguir traremos autores que mencionam a relevância que o uso desses recursos didáticos traz no ensino de função.

Convém mencionarmos a importância do desenvolvimento do conceito de função ao se trabalhar com os gráficos. Muitas informações a respeito do comportamento de uma função podem ser observadas e obtidas a partir de seu gráfico. Ideias de crescimento e decrescimento, seus valores máximos e mínimos, o conjunto domínio, imagem e muitas vezes a simetria. Por isso a inserção de recursos computacionais na abordagem deste conceito facilita o processo de ensino. Os softwares são recursos interessantes que permitem os alunos visualizarem e analisarem o comportamento de um gráfico com mais exatidão.

Dazzi e Dullius (2013), em seu trabalho realizado com alunos de turmas do terceiro ano do Ensino Médio, observaram que o uso do software Graphmatica, contribuiu como um meio significativo no estudo de gráficos de funções polinomiais de grau maior que dois. Eles ressaltaram que muitos alunos possuem dificuldades nestes tipos de gráficos, no seu desenho bem como na interpretação do mesmo, e, portanto, acreditam que este recurso economiza tempo no seu traçado, uma ferramenta fácil de instalar, gratuito e possui a vantagem de ampliação do tempo para a discussão das análises.

Outra ferramenta interessante no auxílio do trabalho do conceito de função são os jogos educativos.

> Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes – enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório – necessárias para aprendizagem da Matemática (BRASIL, 1998, p. 47).

No trabalho de Strapason e Bisognin (2013), as autoras utilizaram dos jogos educativos no ensino de funções com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, no interesse de levar para a sala de aula um processo de construção do conceito de função e suas propriedades, algo motivador e que gerasse um ambiente de interesse do assunto em questão. Dentre os jogos utilizados no processo, alguns eram classificados como de aprofundamento, pois serviam para fixar o conceito de função, outros despertavam o propósito do aluno reconhecer qual lei que relacionava as variáveis, relacionasse e interpretasse tabelas e gráficos, dentre outros.

Por fim, puderam constatar que os jogos ajudaram os alunos a desenvolver o raciocínio, a entender o assunto de uma forma lúdica e diversificada.

Como mencionado na citação da BNCC, outro auxiliador no processo de ensino é utilizar a história da matemática. Maciel e Cardoso (2014) apontam em sua pesquisa que este processo é uma tentativa de melhorar a aprendizagem dos alunos, uma vez que, utilizar a história da matemática permite ao aluno compreender a importância do conceito e atribuir significados importantes a ele. Nesse intuito, os autores, utilizaram a história da matemática como estratégia para ensinar função. No trabalho, eles apresentaram aos alunos um vídeo em formato de documentário sobre a história do conceito de função. No vídeo, além da história do conceito de função, seu ensino e os aspectos históricos relevantes a seu ensino e sua aprendizagem foram priorizados no documentário.

Constataram que a utilização da história do conceito de função permitiu ao aluno perceber como este conceito mudou ao longo dos anos e que sua transformação foi sendo moldada à medida que a sociedade se desenvolveu. Além disso, perceberam que a utilização deste recurso didático, promoveu um interesse e motivação dos alunos para aprender matemática (MACIEL; CARDOSO, 2014).

Dos diferentes recursos didáticos existentes e mencionados aqui, consideramos também o livro didático um meio importante para auxiliar no ensino e aprendizado do aluno. Na subseção 2.3, expomos brevemente os documentos que compuseram a trajetória do Livro Didático e sua importância no ensino e aprendizagem.

2.3 O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

No presente trabalho adotamos o livro didático de matemática como fonte de dados para o desenvolvimento da pesquisa. Consideramos o livro didático uma ferramenta eficaz para o ensino e aprendizagem de matemática, pois pode vim a contribui de maneira significativa para a construção de conceitos e procedimentos do aluno. Utilizado como um suporte teórico para os alunos no processo de aprendizagem e como auxílio ao trabalho do professor, o livro didático assume um papel importante no meio educacional, uma vez que, disponibiliza de maneira possível e ordenada os conteúdos a serem ensinados. Desta forma, o livro didático deve trazer consigo uma preocupação em abordar os conteúdos de maneira diversificada, contextualizada e interdisciplinar. Portaremo-nos a partir deste ponto do texto, o livro didático como LD.

Apesar, de o LD ser um instrumento de grande importância no ensino e aprendizagem, ele nem sempre foi visto como um suporte de conhecimento cultural em nossa sociedade, sendo até desconsiderado por muitos bibliográficos, educadores e intelectuais. Começou a ser analisado como um instrumento educacional somente na escola contemporânea, e assim, nas últimas décadas tem despertado o interesse de muitos pesquisadores (BITTENCOURT, 2004). Tais interesses podem ser encontrados na sua funcionalidade e estrutura, que acarretam inúmeras discussões e estudos do mesmo, assim se fez necessária a legitimação do livro didático, como forma de transmissão de conhecimento na educação escolar. (SILVA JUNIOR, 2007).

De acordo com Oliveira (2007), durante a trajetória do livro didático, o mesmo passou por várias fases e muitos órgãos foram responsáveis pelo seu andamento. Órgãos como o Instituto Nacional do Livro (INL) (marcado pelo início de sua execução), Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), instituído para tratar da produção e controle das obras, Comissão do Livro Técnico e Didático (COLTED), tendo como objetivo coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro, Fundação Nacional de Material Escolar (FENAME) que tinha por finalidade a produção e a distribuição de material didático às instituições escolares, Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF), o Programa do Livro Didático (Plid) abrangendo os diferentes níveis de ensino, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), visando um sistema de apoio financeiro das unidades federadas para o Fundo do Livro Didático, Fundação de Assistência ao estudante (FAE), criado como um grupo de trabalho para examinar os problemas dos livros didáticos, por fim o Programa Nacional de Livro Didático (PNLD).

O PNLD é o programa no qual disponibiliza de forma gratuita e sistematizada materiais de apoio a prática educativa. Ele orienta os professores na escolha do livro que será utilizado como auxiliador na sala de aula. Estes livros são analisados e avaliados para serem dispostos aos alunos de toda Educação Básica da rede pública de ensino. A indicação dos livros e suas resenhas ficam disponíveis no Guia do Livro Didático, no qual o professor pode acessar para escolher o livro que deseja utilizar em todo o ano letivo. Segundo, Pereira (2012), a escolha do livro didático, posto no guia, carece de um trabalho minucioso, pois implica saber o que se quer e como contribuirá para se alcançar o objetivo desejado.

Dessa forma, a escolha pelo LD de matemática deve trazer consigo aspectos matemáticos nos quais é possível identificar questões que tragam conexões com a realidade do aluno, com os quais possa despertar o interesse e estimular a curiosidade em buscar mais conhecimentos a despeito de um determinado assunto. Assim, o trabalho feito com problemas, exercícios e desafios com estas condições e para além delas, ajudarão na interação aluno e professor, uma vez que, propicia um ambiente de aprendizagem, no qual o aluno produz informações lógicas e essenciais para compreender a matemática encontrada nas situações cotidianas.

> Nas observações percebi que o livro didático estava sempre presente na cena da sala de aula. Na mesa das professoras, fechados ou abertos lá estavam eles por vezes abraçados contra o peito, por outras, silenciosos dentro das pastas. Guias de uma atividade inteira ou ponta para uma consulta, pesquisa ou "para casa". (PEREIRA, 2012, p. 75)

Nessa citação de Pereira, na observação feita por ela, os professores criaram uma relação afetiva com o LD, pois o mesmo é sempre levado para a sala de aula, seja ele utilizado para as orientações dos exercícios exposto, uma consulta para se esclarecer qualquer dúvida que assim surgir ou mesmo não utilizá-lo, pois, não foi necessário naquela aula, ou seja, para essas professoras o livro didático é realmente utilizado para fins didáticos, atribuindo a ele características válidas para o aprendizado do aluno.

Acreditamos assim, que o LD assume um dos papeis mais importantes na vida escolar do aluno, e por essa razão, ele deve ser o mais completo possível, contribuindo no ensino e aprendizagem dos estudantes.

Dentre os estudos relacionados ao livro didático há uma predominância na análise do próprio livro e de seus conteúdos. Ressaltamos que nossa intenção no presente trabalho é identificar no livro didático comunicações para o conceito de função, conforme o modelo de Santos e Barbosa (2017) e não fazer uma análise do LD.

3 O MODELO TEÓRICO MATEMÁTICA PARA O ENSINO (MpE) DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Para nossa pesquisa nos baseamos no modelo teórico Matemática para o Ensino (MpE) do Conceito de Função, de Santos e Barbosa (2017) que nos auxiliou na análise do ensino de função nos livros didáticos da Educação Básica.

O modelo teórico de MpE do conceito de função proposto por Santos e Barbosa (2017) estrutura e sistematiza formas de comunicar o conceito de função que circulam no contexto escolar.

Entendemos assim, que a Matemática para o ensino definida como um modelo teórico de um determinado conceito, nesse caso o de função, orienta na forma de comunicar sistematicamente o conceito de função.

O estudo de função nos permite uma variabilidade de comunicação do conceito, sejam por meio de interpretações do conceito, interpretações gráficas, bem como suas várias aplicações. A despeito disso, Santos e Barbosa (2017), trazem no modelo teórico de Matemática para o Ensino, formas de comunicar o conceito de função na Educação Básica. Dessa forma, nesse estudo traremos os modos em que estruturam as várias comunicações que o ensino do conceito de função nos oferece.

Para um melhor entendimento de como este modelo funciona, apresentaremos a seguir cada modo que comunica o conceito de função.

Modo Tabular

Apresenta na forma tabular, na qual a relação funcional associa a cada dado de entrada um único dado de saída. A relação funcional é disposta em linhas ou colunas da tabela.

Figura 2: Modo Tabular

Um *watt*-hora (W/h) é a medida de energia usualmente utilizada em eletrotécnica e é a quantidade de energia utilizada para alimentar uma carga de potência de um *watt* pelo período de uma hora. O valor de nossa conta de energia, depende do consumo de watts mensal. Com base nessas informações, complete a tabela abaixo:

.0,54	
Consumo (W)	Valor (R$)
40	21,60
70	37,80
120	64,80
170	91,80
220	118,80
254	137,16

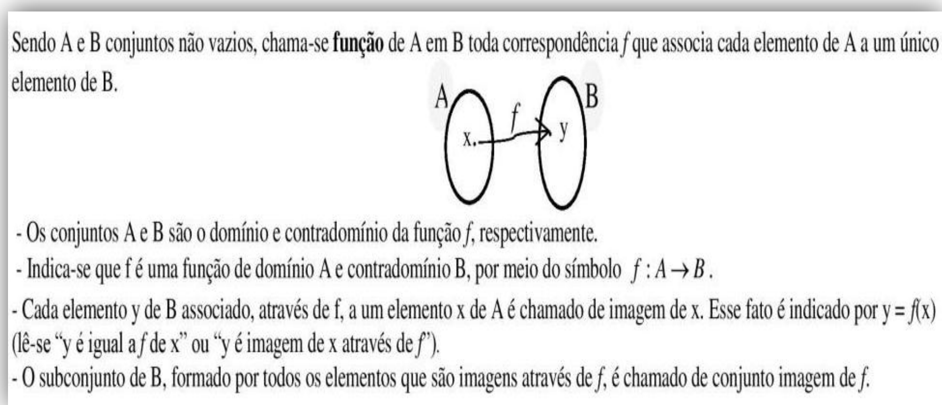
Fonte: Santos e Barbosa (2016, p.153)

Neste exemplo, observamos uma tabela, que apresenta uma relação funcional, em que a cada consumo mensal (W), associa-se a um único valor a ser pago na conta de energia elétrica. Ou seja, trata-se de uma noção de função, que possui o caráter univalente, pois a cada elemento do conjunto de entrada, corresponde um único elemento do conjunto de saída.

Modo Diagrama

Representa a relação entre conjuntos não vazios, que podem ser representados em um diagrama de setas, em que para cada seta partida do domínio da função, corresponde a um único elemento do conjunto de chegada (contradomínio).

Figura 3: Modo Diagrama


Sendo A e B conjuntos não vazios, chama-se **função** de A em B toda correspondência *f* que associa cada elemento de A a um único elemento de B.

- Os conjuntos A e B são o domínio e contradomínio da função *f*, respectivamente.
- Indica-se que f é uma função de domínio A e contradomínio B, por meio do símbolo $f : A \rightarrow B$.
- Cada elemento y de B associado, através de f, a um elemento x de A é chamado de imagem de x. Esse fato é indicado por y = *f*(x) (lê-se "y é igual a *f* de x" ou "y é imagem de x através de *f*").
- O subconjunto de B, formado por todos os elementos que são imagens através de *f*, é chamado de conjunto imagem de *f*.

Fonte: Santos e Barbosa (2017, p. 325)

No exemplo, a definição de função como uma relação entre conjuntos, é representada por meio do diagrama de setas, que apresenta conjuntos com elementos finitos, ou seja, nesta representação podemos observar o conjunto domínio, contradomínio e imagem da função.

Modo Algébrico

Constitui esse modo de comunicar função, o qual, podemos escrever uma sentença, fórmula ou equação que nos permite relacionar grandezas variáveis, cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais. As variáveis podem ser identificadas como variável dependente ou independente. Para representarmos as variáveis podemos utilizar qualquer letra, mas a letra **x** é a mais comum para designarmos a variável independente e a letra **y** para chamarmos de variável dependente. Assim, identificamos essa comunicação no reconhecimento da expressão algébrica y = f(x) (lê-se: **y** é igual a **f** de **x**).

Figura 4: Modo Algébrico

Veja a tabela de preços de um estacionamento:

Tempo	Preço em reais
1ª hora	6,00
Horas seguintes	3,00
Fração de hora é cobrada como hora inteira	

a) Quanto tempo deverá pagar o motorista que deixar seu carro estacionado por 3 h e 20 min? (R$ 15,00)

b) Deduza a fórmula que fornece a quantia a pagar Q para um carro que ficou estacionando por **n** horas, $n > 1$. $Q = 6 + (n-1).3 = 3 + 3n$

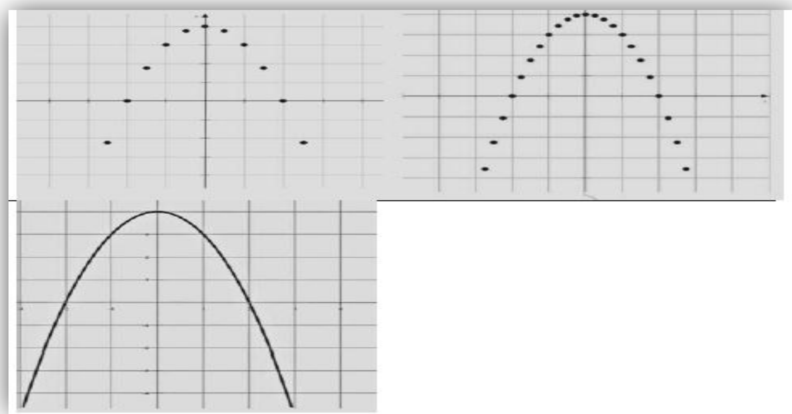
Fonte: Santos e Barbosa (2017, p. 327)

Neste exemplo, reconhecemos a relação de dependência entre variáveis, pois a quantia a pagar depende do número de horas que o carro permanece no estacionamento, ou seja, o preço em reais, representado por **Q** (variável dependente), varia conforme o tempo **n** (variável independente). Portanto, podemos representar esta situação por meio de uma fórmula ou expressão que comunica o conceito de função.

Modo Gráfico

A realização gráfica é constituída pela comunicação de funções dispostas em gráficos, os quais são descritos por um conjunto **f** de pares ordenados do tipo **(x, y)** em que **x** representa os elementos do conjunto domínio e **y** os elementos do conjunto imagem, apresentando o caráter univalente, em que, cada **x** pertencente ao domínio da função tem uma única imagem **y** pertencente ao contradomínio.

Figura 5: Modo Gráfico



Fonte: Santos e Barbosa (2017, p. 329)

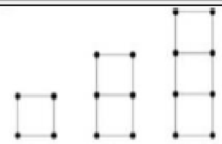
A expressão algébrica que representa o gráfico acima é $f(x) = -x^2 + 4$. Para o traçado do gráfico foi necessário a marcação de pontos no plano cartesiano, pontos que são chamados de pares ordenados. Os valores de **x** no gráfico têm seus respectivos correspondentes valores de **y**, e, assim ao unir estes pontos encontramos o gráfico da função quadrática.

Modo Generalização de Padrões

Constitui esse modo de generalização de padrões, aquelas em que descrevem uma regra funcional por meio de uma sequência, cujo comportamento revela seu padrão. Na sequência dada evidenciam-se propriedades, características em que se tornam generalizáveis, reforçando a ideia de encontrar um termo geral a partir dos termos particulares.

Figura 6: Modo Generalização de Padrão

Observe as seguintes figuras:
Como podem ver na imagem a figura com um quadrado, para ser construída necessita de 4 bolinhas e 4 palitos, a figura com dois quadros precisa de 6 bolinhas e 7 palitos e a com três quadrados de 8 bolinha e 10 palitos.



a) Quantos bolinhas e palitos serão necessários para construir uma figura com 4 quadrados? E com 6? E com 20?
b) Expresse uma regra geral que relacione o número de quadrados e o número de bolinhas.
c) Expresse uma regra geral que relacione o número de quadrados e o número de palitos.
Adaptado de Callejo e Zapatera (2014)

Fonte: Santos e Barbosa (2016, p. 156)

Como podemos observar, são generalizações de dependência funcional entre o número de palitos e o número de quadrados, e número de bolinhas e o número de quadrados. Nota-se que a partir das primeiras construções dos elementos da sequência, podemos analisar e determinar elementos posteriores da sequência. Na qual a mesma pode ser realizada como uma expressão algébrica, uma afirmação geral.

Modo Formal

Constitui esse modo de comunicar função, as definições formais, ressaltando as características de correspondência univalente e arbitrária entre variáveis quaisquer.

Figura 7: Modo Formal

Dados dois conjuntos não vazios (*A* e *B*). Uma relação que associa a cada $x \in A$ um único $y \in B$, recebe o nome de função.

Fonte: Santos e Barbosa (2016, p. 161)

No exemplo, a definição formal de função, foi dada como uma relação entre dois conjuntos não vazios, em que se percebe a correspondência univalente em “a cada $x \in A$ um único $y \in B$”.

O modelo teórico nos orienta nas várias comunicações que o conceito traz, seja ela , tabular, gráfica, expressa por meio de fórmulas, desenhos, diagrama ou assumindo padrões. Por meio de uma fonte específica podemos analisar e caracterizar a variabilidade que o conceito de função apresenta. Sendo assim, neste trabalho usaremos como fonte para reconhecer as diferentes formas de comunicar o conceito de função, o livro didático adotado na Educação Básica, conforme o modelo de Matemática para o Ensino proposto por Santos e Barbosa (2017).

4 METODOLOGIA

Tendo como objetivo identificar em livros didáticos de Educação Básica comunicações do conceito de função conforme o modelo MpE de Santos e Barbosa (2017), adotamos a pesquisa qualitativa, do tipo documental.

A abordagem de caráter qualitativa, segundo D' Ambrósio e D' Ambrósio (2006) é delimitada como sendo uma pesquisa que: "[...] tem como foco entender e interpretar dados e discursos [...] sua metodologia por excelência repousa sobre a interpretação [...]." (p. 11). Consideramos que interpretamos informações ou discursos nos livros didáticos da Educação Básica, para a obtenção de dados na confirmação ou não da existência das categorias levantadas para comunicar o conceito de função, conforme o modelo MpE de Santos e Barbosa (2017).

Nesse estudo empregamos uma pesquisa do tipo documental que é caracterizada por Godoy (1995) como "O exame de materiais de natureza diversa, que ainda não receberam um tratamento analítico, ou que podem ser reexaminados, buscando-se novas e/ ou interpretações complementares [...]". Em nosso caso, o documento utilizado como base para a pesquisa foram livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Optamos pelos livros selecionados nas três maiores escolas Estaduais de Vitória da Conquista, Ba. Fizemos este levantamento na maioria das escolas da cidade, nas quais procuramos funcionários das secretarias de cada escola, em que nos passaram as informações da quantidade de alunos entre os três turnos, matutino, vespertino e noturno. E com base nas informações coletadas, as escolas que apresentaram uma quantidade maior de alunos foram: Colégio Estadual Polivalente, com 1200 alunos, Centro Integrado Luiz Navarro de Brito, com 1900 alunos e Colégio da Polícia Militar, com 1020 alunos.

Dessas três escolas selecionadas, duas escolas apresentaram a mesma coleção do Ensino Fundamental dos anos finais, *Matemática, Ideias e Desafios* das autoras Iracema Mori e Dulce Satiko. Desta forma, usando como critério de escolha das obras selecionadas para o Ensino Fundamental II, optamos pela coleção *Matemática, Ideias e Desafios*, pois a mesma é utilizada em duas escolas.

Em relação às obras do Ensino Médio, todas as três escolas nos exibiu coleções diferentes, como a coleção *Matemática, ciência e aplicações* dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, a coleção *Matemática, contexto e Aplicaçõe*s de Luiz Roberto Dante e a coleção *Conexões com a Matemática* do autor Fabio Martins de Leonardo. O critério para a escolha da coleção do Ensino Médio, a obra *Matemática, ciência e aplicações,* foi feito seguindo o maior número de alunos, no caso, a escola Centro Integrado Luiz Navarro de Brito. As coleções estudadas aqui, são coleções do professor, em que foi lido também o manual do professor.

Buscamos identificar nos capítulos de cada livro das coleções, comunicações do conceito de função de acordo com o modelo teórico de Santos e Barbosa (2017). Todos os livros estudados foram lidos de maneira integral, à medida que fossem surgindo questões, exercícios, desafios e testes expostos nos livros, nos quais eram trazidas às formas de comunicar o conceito de função, categorizávamos nos modos tabular, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal.

Após organizar as questões que comunicaram o conceito de função, as mesmas foram apresentadas nos modos individualmente e depois às formas de comunicar o conceito quando dois modos se interligaram. A medida que analisávamos as questões percebíamos que muitos exercícios trabalham com um modo de comunicar função, entretanto, foi notório também questões em que se encontravam a junção de dois modos em uma mesma questão.

Organizamos em uma tabela os modos que foram mais enfatizados em todas as coleções, bem como os que não foram enfatizados. Esta tabela será apresentada e discutida na seção 5.1. Discussões gerais.

5 ANÁLISE E DISCUSSÕES

A seguir apresentaremos uma análise e discussões feitas das coleções selecionadas do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, sob as quais destacamos questões em que os autores comunicaram de forma explícita ou implícita o conceito de função. O modelo, como já foi dito anteriormente, traz os panoramas organizados do seguinte modo: tabular, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal.

5.1 Modo Tabular

Neste panorama, identificamos uma relação funcional, quando a mesma é disposta em forma de tabela, organizada em linhas ou colunas, na qual cada dado de entrada corresponde a um único dado de saída.

Ao analisarmos a coleção do 6° ano ao 9° ano do Ensino Fundamental II, observamos que o modo tabular como uma comunicação de função é feita de forma implícita nos 6°, 7°e 8° anos, e no 9° ano de forma explícita. Para ilustrar o que estamos afirmando, vamos considerar por partes as figuras 9 e 10. E depois a figura 11.

Figura 8: Relação funcional disposta em tabela

Quatro amigos se encontraram em uma reunião. Cada um cumprimentou o outro uma única vez, com um aperto de mão.

- Quantos apertos de mão foram dados?
- Se fossem 5 amigos, quantos apertos de mão seriam?
- Se fossem 6 amigos, qual seria a resposta?

Organize seus dados fazendo uma tabela como esta em seu caderno.

Número de amigos	Número de apertos de mão
4	
5	

- Em um encontro entre 10 amigos, quantos apertos de mão seriam dados entre eles?
- Como foi encontrada a resposta?

Fonte: Mori e Onaga (2015a, p. 72)

A situação exibida na figura 9 solicita que o aluno organize os dados por meio de uma tabela, na qual ele terá que relacionar um encontro entre quatro amigos com o número de apertos de mão, sendo que cada um cumprimentou o outro uma única vez. Esta questão está inserida no capítulo de Operações com Números Naturais, no qual subtende-se que um aluno de 6° ano, responderia, por exemplo, da seguinte forma: o primeiro iria dar três apertos de mão, o segundo dois apertos, o terceiro um e o quarto nenhum. No final o aluno somaria todos estes apertos de mão, encontrando no total, seis apertos de mãos para um número de quatro pessoas, e com isso, usando da mesma lógica preencheria o restante da tabela. Observe que a questão esta organizada por meio de uma tabela, em que a cada número de amigos, teremos somente um único número que totaliza os apertos de mão dados. Desta forma, nota-se uma noção de função implícita na questão, pois a mesma nos dá à ideia de que uma quantidade varia em relação à outra.

Nos livros do 7° e 8° anos encontramos questões parecidas como na figura 9, relações funcionais dispostas em tabelas, encontradas em capítulos que normalmente não é inserida a palavra função. Para ilustrar, citamos os capítulos de Números Reais, Grandezas Proporcionais, Polinômios e Operações e capítulos de Estatística e Probabilidade. Dentre estes capítulos, selecionamos um exemplo ilustrado na figura 10 do capítulo de Grandezas Proporcionais, no qual exibe uma tabela incompleta, em que, o aluno completará relacionando a quantidade de gasolina consumida com a distância percorrida por meio de uma razão. Neste tipo de ilustração percebemos quais são as grandezas representadas do fenômeno e como estão relacionadas entre si, além de perceber, que são grandezas diretamente proporcionais. Observe que, à distância (km) está determinada pelo produto da quantidade de litro de gasolina por cinco, porque segundo o que está apresentado na situação proposta, com um litro de gasolina percorremos 5 km.

Figura 9: Relação funcional disposta em tabela

Gasolina (L)	1	10		40,5		50
Distância (km)	5		75		157	

Fonte: Mori e Onaga (2015b, p. 228)

Na coleção do Ensino Fundamental II, foi notório que as autoras, trouxeram na abordagem de determinado assunto, seja ele, na parte introdutória, nos exercícios, desafios ou leituras, o reconhecimento implícito por meio de uma tabela, uma relação funcional, e o uso do mesmo explicitamente no capítulo de função do livro do 9° ano, como ilustrado na figura 11.

Figura 10: Relação funcional disposta em tabela

n (meses)	v (R$)	(n, v)
1	350	(1, 350)
2	500	(2, 500)
3	650	(3, 650)

Fonte: Mori e Onaga (2015d, p. 180)

As autoras representam alguns valores **n** de meses, correspondentes a valores **v** de reais, assim encontrado o par ordenado, que posteriormente será representado no plano cartesiano para encontrar seu gráfico. Ressaltam ainda, neste mesmo exemplo, que se trata de grandezas diretamente proporcionais, pois quando o número de meses aumenta uma unidade, o valor pago por um cliente aumenta R$ 150, 00 reais.

Situações semelhantes são encontradas na coleção do Ensino Médio, em capítulos como de Sistemas Lineares, Matemática Financeira e o próprio capítulo de

Funções. Selecionamos o exercício apresentado na figura 12, do modo tabular no capítulo de Matemática Financeira, no livro do 3° ano do Ensino Médio.

Figura 11: Relação funcional disposta em tabela

Juros simples

Os juros, por ano, são de 50% de 1000 = 0,5 · 1000 = 500,00.
Dívida: R$ 1000,00

Ano	1	2	3	4	5	6	...
Montante	1500	2000	2500	3000	3500	4000	...

A sequência de montantes (1500, 2000, 2500, 3000, 3500, ...) é uma progressão aritmética (P.A.) de razão 500 e cujo termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1500 + (n-1) \cdot 500 \Rightarrow \boxed{a_n = \underbrace{500}_{\text{acréscimo anual}} \cdot n + \underbrace{1000}_{\text{capital}}}$$

Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016c, p. 161)

Observe que os autores ao introduzirem o conteúdo de Juros Simples trazem uma tabela organizada de cada ano ao seu respectivo montante, ou seja, o cálculo ano a ano, dos montantes dessa dívida no regime de capitalização simples. Na tabela, nota-se uma sequência de montantes em que cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do termo anterior com uma constante, o que caracteriza uma Progressão Aritmética (P.A), na qual sabemos que é uma função, nesse caso, uma função f de domínio em N*. No exemplo ainda, os autores encontram o termo geral desta PA, podendo ser associado a função afim ou função polinomial do 1° grau, definida por $y = 500x + 1000$, em que a variável **x** assume somente valores naturais.

É importante destacar, que este exemplo é apresentado em um capítulo que normalmente não é abordado a função explicitamente. Os autores destacam neste tópico o título: Juros e Funções, ou seja, neste capítulo é retomado conceitos ligados a função. Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016), sugerem que os estudos de Matemática Financeira sejam relacionados ao estudo de funções afim e exponencial na apresentação dos conceitos de juros simples e compostos. Esta retomada dos conceitos de função é uma oportunidade para os alunos de rever, sob uma nova abordagem funções estudadas anteriormente.

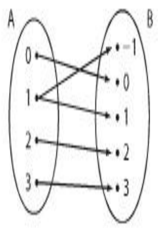
5.2 Modo Diagrama

Ao reconhecermos uma função como uma relação entre conjuntos não vazios, podemos representá-los em um diagrama de setas, em que para cada seta partida do domínio da função, corresponde a um único elemento do conjunto de chegada, o contradomínio, no qual a referida imagem da função se encontra.

Nas coleções analisadas, encontramos o modo diagrama, somente no livro do 1° ano do Ensino Médio. Os autores inicialmente ao estabelecerem uma noção de função como relações entre conjuntos utilizam da imagem de um diagrama de setas para associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$, como nos exemplos a seguir.

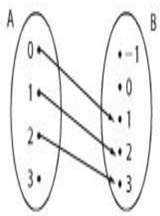
Quadro 2: Representações Diagrama

Parte A



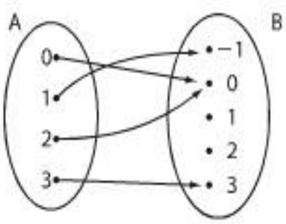
x	y
0	0
1	±1
2	2
3	3

Parte B



x	y
0	1
1	2
2	3

Parte C



x	y
0	0
1	−1
2	0
3	3

Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016a, p. 42)

Podemos notar, na parte A e parte B do quadro 2, apenas relações entre elementos dos conjuntos. Somente na parte C, os autores trazem o exemplo de uma relação funcional que se associa a cada $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que a função é definida pela lei $y = x^2 - 2x$. Neste exemplo, os autores esclarecem que sem exceção, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**, ressaltando que nesse ultimo caso a relação recebe o nome de função definida em **A** com valores em **B**.

5.3 Modo algébrico

Constitui essa comunicação de função, a qual, podemos escrever uma sentença, fórmula ou equação que nos permite relacionar grandezas variáveis, cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais. As variáveis podem ser identificadas como variável dependente ou independente. Para representarmos as variáveis podemos utilizar qualquer letra, mas a letra **x** é a mais comum para designarmos a variável independente e a letra **y** para chamarmos de variável dependente. Assim, identificamos esse modo no reconhecimento da expressão algébrica y = f(x) (lê-se: **y** é igual a **f** de **x**).

Na análise das coleções, foi perceptível o aparecimento do modo algébrico na maioria dos livros analisados, notamos que a expressão algébrica envolvendo variáveis em que uma depende da outra é bastante presente em muitos exercícios. Apenas no livro do 6° ano do Ensino Fundamental II, o modo algébrico não foi reconhecido. Acreditamos que devido ao fato do aluno do 6° ano inicialmente não ter o contato com a álgebra. O modo algébrico é notado em exemplos inicialmente encontrados no livro do 7° ano do Ensino Fundamental II, no qual os alunos começam a ter os primeiros contatos com a álgebra funcional. Veja o exemplo da figura 13.

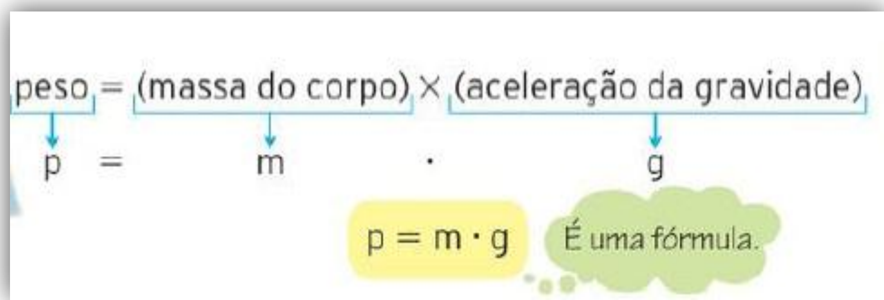
Figura 12: Relação funcional expressa em fórmula

Fonte: Mori e Onaga (2015b, p. 194)

A questão pede ao aluno que represente a situação descrita por meio de uma equação. Oberve que essa situação apresentada acima envolve duas variáveis: uma que representa a quantidade de votos recebidos por Lucas, e outra, a quantidade de votos recebidos por Joana. Desse modo, a equação com duas variáveis que pode ser escrita nessa situação é $3x + y = 480$, em que **x** e **y** são as variáveis.

As autoras Mori e Onaga (2015), ainda ressaltam no final do capítulo das equações com duas variáveis, um exemplo comum, com grandezas diferentes (peso e massa) encontradas em conteúdos ligados a física, figura 14. A massa de um corpo é sempre a mesma, não dependendo do local onde o corpo está, e o peso depende da aceleração que um corpo exerce sobre ele. Na fórmula descrita, **p** é a variável dependente dos valores das outras variáveis, **m** e **g.**

Figura 13: Relação funcional expressa em fórmula

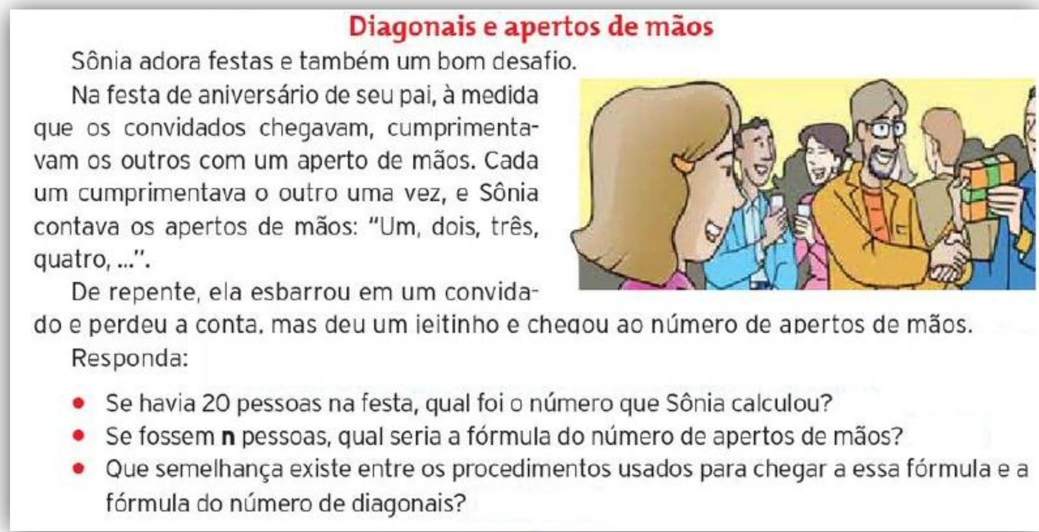


Fonte: Mori e Onaga (2015b, p. 209)

Observe que nas figuras 13 e 14, as expressões algébricas além de representarem incógnitas, passam também a assumirem outro papel, desta vez, um significado completo de variáveis, isto é, as variáveis "variam" (MORI; ONAGA, 2015). Pudemos notar que as autoras trouxeram um exemplo de uma relação funcional, em que se encontram duas ou mais variáveis, como foi o caso da figura 14. Um exemplo interdisciplinar representado por três variáveis, peso por **p**, massa por **m** e aceleração por **g**.

No livro do 8° ano, encontramos um exercício semelhante ao da figura 9, abordada no livro do 6° ano, mas, desta vez, encontramos o modo algébrico presente na atividade. As autoras, além de dar a importância do processo de observação dos padrões que segue de generalização, permite ao aluno observar estas regularidades que os levam a formulação de uma lei geral, observe na figura 15.

Figura 14: Relação funcional expressa em fórmula



Diagonais e apertos de mãos

Sônia adora festas e também um bom desafio.

Na festa de aniversário de seu pai, à medida que os convidados chegavam, cumprimentavam os outros com um aperto de mãos. Cada um cumprimentava o outro uma vez, e Sônia contava os apertos de mãos: "Um, dois, três, quatro, ...".

De repente, ela esbarrou em um convidado e perdeu a conta, mas deu um jeitinho e chegou ao número de apertos de mãos.

Responda:

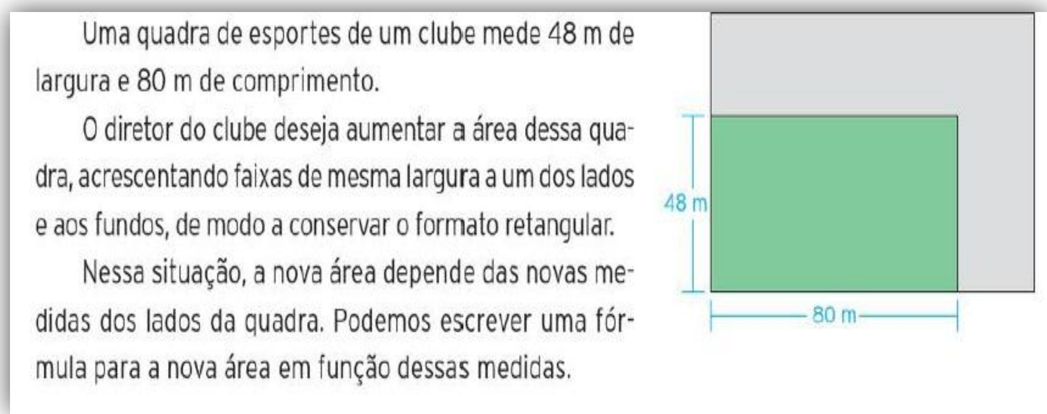
- Se havia 20 pessoas na festa, qual foi o número que Sônia calculou?
- Se fossem **n** pessoas, qual seria a fórmula do número de apertos de mãos?
- Que semelhança existe entre os procedimentos usados para chegar a essa fórmula e a fórmula do número de diagonais?

Fonte: Mori e Onaga (2015c, p. 178)

Neste caso, a expressão encontrada $\frac{n*(n-1)}{2}$ é semelhante á formula que calcula as diagonais de um polígono, a diferença é que no lugar de vértices são pessoas e cada uma cumprimenta todos menos ela mesma, por isso são $(n-1)$ cumprimentos para cada um.

As autoras Mori e Onaga (2015), abordam novamente a fórmula do número de diagonais de um polígono convexo, **d** = $\frac{n*(n-3)}{2}$ no livro do 9° ano. A esta fórmula das diagonais de um polígono convexo, encontramos **d** = $\frac{n^2}{2}$ - $\frac{3n}{2}$, semelhante a ela. Esta segunda escrita da fórmula permite o aluno visualizar que se for atribuído um valor qualquer a **d**, será encontrada a fórmula de uma equação do segundo grau, restrita nesse caso, ao conjunto dos números naturais. Nos primeiros momentos da sua abordagem é trabalhado somente o reconhecimento da equação com uma incógnita e seus coeficientes. Nos capítulos posteriores, a apresentação da equação do segundo grau é feita como uma função quadrática, ou seja, ele deixa agora de trabalhar com apenas os valores das incógnitas desconhecidas passando a reconhecer variáveis que estarão uma em função da outra. Veja o exemplo, na figura 16.

Figura 15: Relação funcional expressa em fórmula



Uma quadra de esportes de um clube mede 48 m de largura e 80 m de comprimento.

O diretor do clube deseja aumentar a área dessa quadra, acrescentando faixas de mesma largura a um dos lados e aos fundos, de modo a conservar o formato retangular.

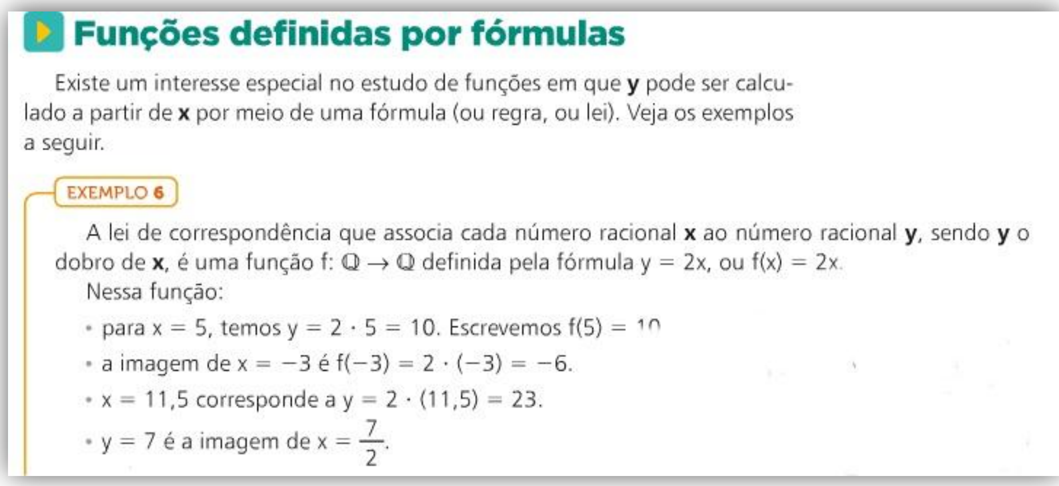
Nessa situação, a nova área depende das novas medidas dos lados da quadra. Podemos escrever uma fórmula para a nova área em função dessas medidas.

Fonte: Mori e Onaga (2015d, p. 192)

Este exemplo é trazido pelas autoras como introdução da fórmula da função quadrática. A identificação, feita pelo aluno, da nova área que será encontrada com a ampliação da quadra será inicialmente feita com a descoberta da fórmula da função polinomial do 2° grau. As variáveis encontradas **x** e **y**, em que **x** é a medida da largura das faixas e **y** a medida da nova área, nos permite achar a equação $y = x^2 + 128x + 3840$. O aluno passa a trabalhar com variáveis, ou seja, na fórmula encontrada, para cada valor real positivo de **x**, temos um único valor para **y**, assim **y** está em função de **x**.

As expressões algébricas são enfatizadas no livro do 9° do Ensino Fundamental II e 1° ano do Ensino Médio. No livro do 1° ano, o destaque é descrito nos capítulos de Funções, que recebem tópicos nos quais são apresentadas as funções por meio de fórmulas definidas, como ilustrado na figura 17.

Figura 16: Relação funcional expressa em fórmula



Funções definidas por fórmulas

Existe um interesse especial no estudo de funções em que **y** pode ser calculado a partir de **x** por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei). Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 6

A lei de correspondência que associa cada número racional **x** ao número racional **y**, sendo **y** o dobro de **x**, é uma função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida pela fórmula $y = 2x$, ou $f(x) = 2x$.

Nessa função:

- para $x = 5$, temos $y = 2 \cdot 5 = 10$. Escrevemos $f(5) = 10$
- a imagem de $x = -3$ é $f(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$.
- $x = 11{,}5$ corresponde a $y = 2 \cdot (11{,}5) = 23$.
- $y = 7$ é a imagem de $x = \frac{7}{2}$.

Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn,Périgo e Almeida (2016a, p. 44)

Os autores destacam como já mencionado no exemplo, que existe um interesse especial no estudo da realização algébrica, pois y passa a ser calculado em função de x por meio de uma expressão, regra ou lei.

5.4 Modo Gráfico

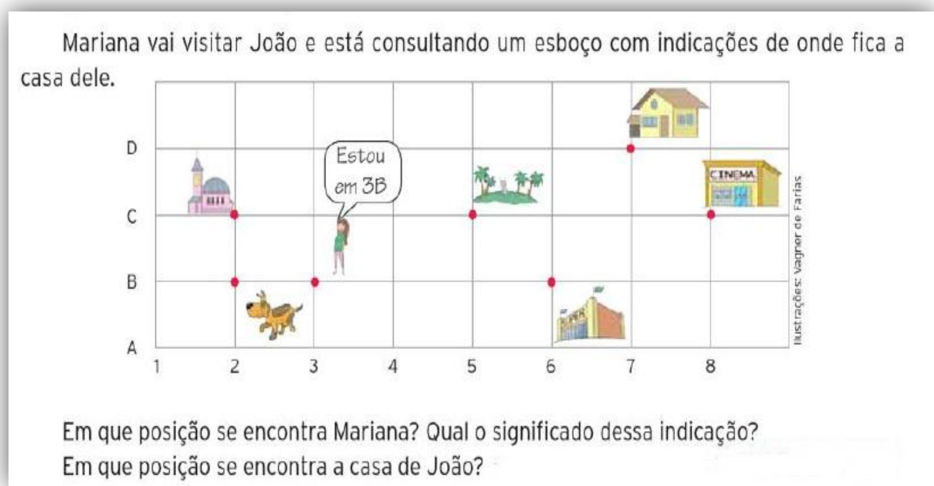
O modo gráfico é constituído pela comunicação de função disposto em gráficos, os quais são descritos por um conjunto **f** de pares ordenados do tipo **(x, y)** em que **x** representa os elementos do conjunto domínio e **y** os elementos do conjunto imagem, apresentando o caráter univalente, em que, cada **x** pertencente ao domínio da função tem uma única imagem **y** pertencente ao contradomínio.

Ao estudarmos um assunto novo é comum lembrarmos os prerrequisitos, já estudados, para avançarmos na complexidade do novo conhecimento. O professor quando inicia a apresentação gráfica de uma função, espera que o aluno, já possua o conhecimento sobre localização e o plano cartesiano. Na localização o estudante fornece coordenadas de um determinado objeto, pessoas ou ruas, e reconhece as noções de direção e sentido, além de poder ser trabalhada como um sistema baseado em dois eixos perpendiculares. No quadro 3 a seguir, é apresentado duas questões do capítulo de

Ângulos do livro do 6° ano dos anos finais do Ensino Fundamental, que possui uma proposta de localização de pontos.

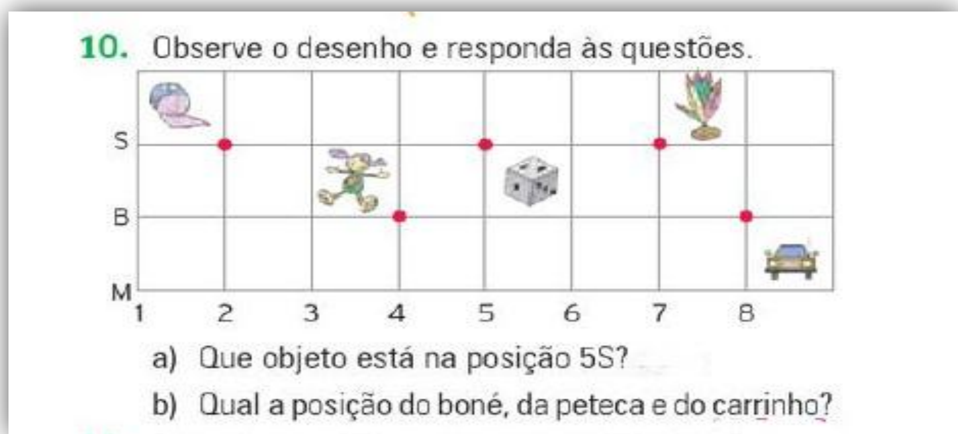
Quadro 3: Representações Gráficas

Parte A



Fonte: Mori e Onaga (2015a, p. 103)

Parte B

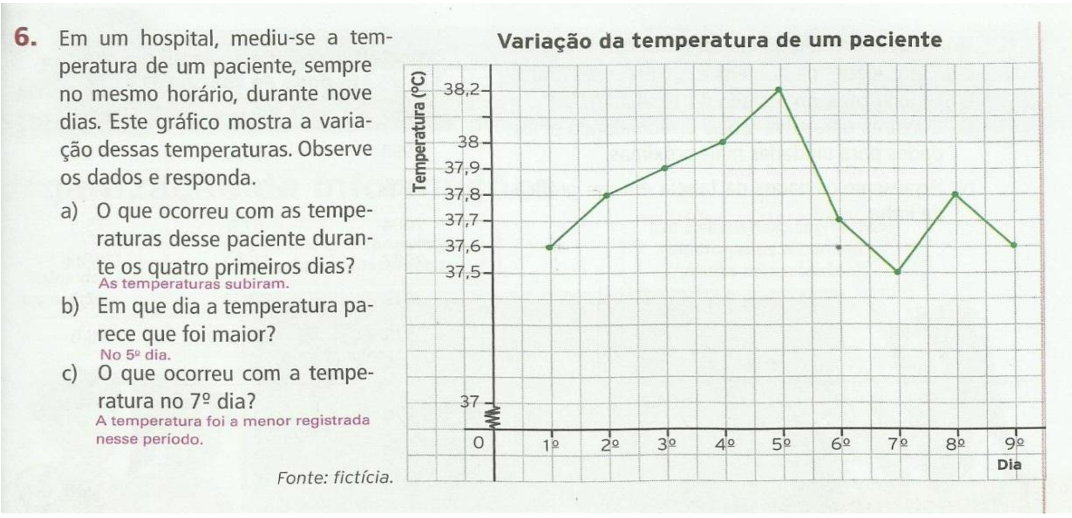


Fonte: Mori e Onaga (2015a, p.104)

Nessas questões os alunos devem indicar a posição dos objetos representados por números e letras na malha orientada. Na parte A do quadro 3, podemos notar claramente que os pares encontrados tratam-se de uma relação em que o número 2 associa-se com a letra B e a letra C. Em contrapartida, na parte B do quadro 3, a cada número disposto horizontalmente relaciona-se uma única vez com as letras encontradas na vertical, o que nota-se uma noção de função exposta implicitamente no exercício. Acreditamos que tal abordagem favorece a construção do pensamento necessário para o estudo de localização no plano cartesiano e relação entre dois conjuntos distintos.

O gráfico de linha, da figura 18, foi encontrado no livro do 8° ano. Em geral, este gráfico é utilizado para representar a variação de grandezas em relação à outra em certo período de tempo.

Figura 17: Relação funcional gráfica



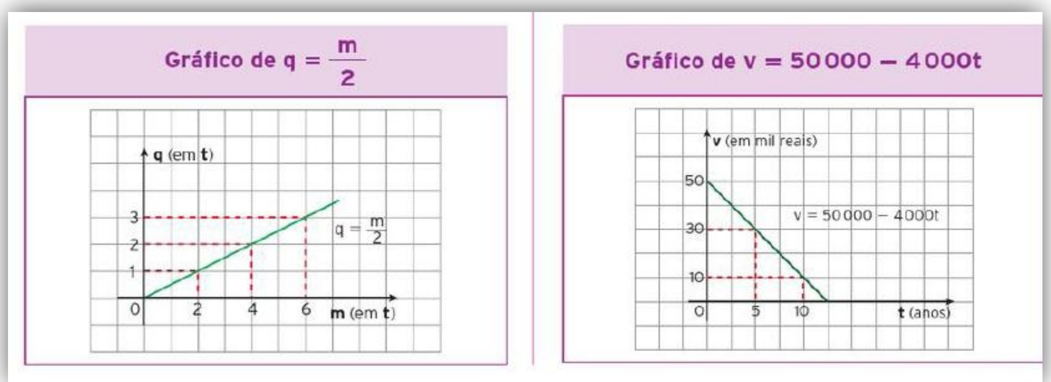
Fonte: Mori e Onaga (2015c, p. 51)

Observando o gráfico, notamos que a cada dia, corresponde uma única temperatura do paciente, ou seja, o paciente permanece com a mesma temperatura o dia todo. Interpretando o gráfico desta forma, percebemos a noção de função implícita na questão.

Uma maneira prática de reconhecermos um gráfico que apresenta uma relação funcional é traçar retas paralelas ao eixo y e observar se cada reta traçada intercepta o gráfico em um único ponto. Assim, se isso acontecer, ele representará uma função. Contudo, se pelo menos uma reta interceptar o gráfico em dois ou mais pontos, não representará uma função. Este reconhecimento é uma maneira informal de verificarmos uma relação funcional nos gráficos.

No livro do 9° ano, começa a introdução de gráficos específicos que são apresentados de acordo com o modo algébrico, ou seja, gráficos que representam, por exemplo, uma reta, que possui uma característica algébrica específica chamada de função afim ou função polinomial do 1° grau do tipo $f(x) = ax + b$, conforme figura 19.

Figura 18: Relação funcional gráfica

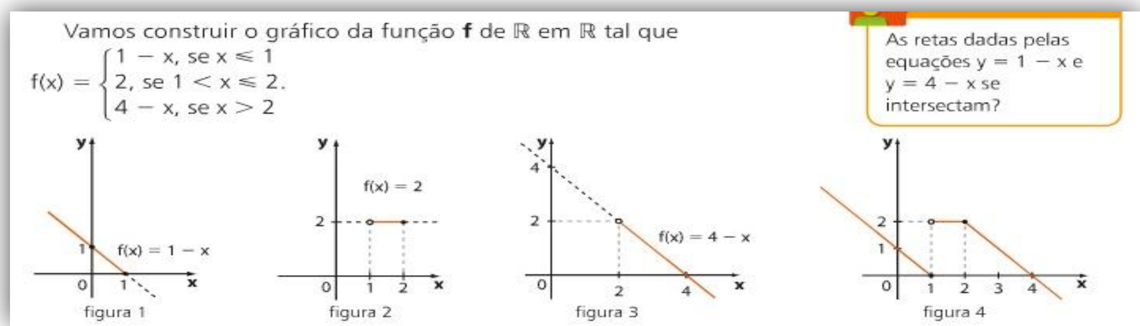


Fonte: Mori e Onaga (2015d, p. 181)

Basicamente o gráfico da função afim é uma reta, que pode ser suficientemente definida com apenas dois pontos. A demonstração de que todo gráfico da função do 1° grau é uma reta, é feita na coleção analisada do Ensino Médio no livro do 1° ano, em que os autores abordam também casos particulares de uma função afim, como a função

linear, identidade e a função constante. Observamos ainda na coleção do Ensino Médio, em especial no livro do 1° ano, uma abordagem da função definida por várias sentenças. “Uma função f pode ser definida por várias sentenças abertas, cada uma das quais está ligada a um domínio D contido no domínio da f”. (IEZZI e MURAKINI, 2008, p. 185). Funções deste tipo possibilita ao aluno trabalhar não apenas com funções contínuas, mas se deparar também com a descontinuidade de algumas funções. Veja o exemplo da figura 20.

Figura 19: Relação funcional gráfica



Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016a, p. 118)

Na figura 20, os autores trazem um exemplo de uma função definida por várias sentenças e o processo de construção do gráfico da mesma. Observe que no exercício a função é definida por partes, e cada parte do gráfico no final é reunida formando um só gráfico. Nota-se que o quarto gráfico apresenta "quebra" ou "saltos" no seu traçado, no ponto $x = 1$, portanto a função apresenta uma descontinuidade neste ponto. Neste caso, intuitivamente falando, dizemos que uma função é contínua na reta quando o seu gráfico é desenhado sem levantar o lápis do papel, ou seja, não há um fracionamento, quebra ou partição na curva representada, caso haja essa partição, dizemos que a função é descontinua em um ponto.

5.5 Modo Generalização de padrões

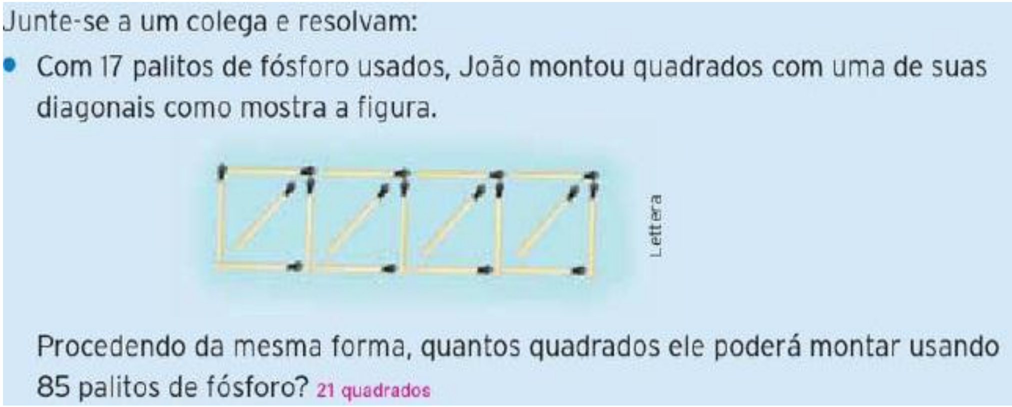
Constitui o modo generalização de padrões, aquela em que descreve uma regra funcional por meio de uma sequência, cujo comportamento revela seu padrão. Na sequência dada evidenciam-se propriedades, características em que se tornam generalizáveis, reforçando a ideia de encontrar um termo geral a partir dos termos particulares.

Nas coleções analisadas a predominância da generalização de padrões nos livros do Ensino Fundamental II é notada em diferentes capítulos, dos diferentes anos. Foi comum acharmos questões ou explicações no qual houvesse essa realização presente.

As atividades trazem as várias representações de regularidade de padrões como as descritas nas ilustrações da parte A e B do quadro 4, exemplos dos livros do 6° e 8° anos respectivamente.

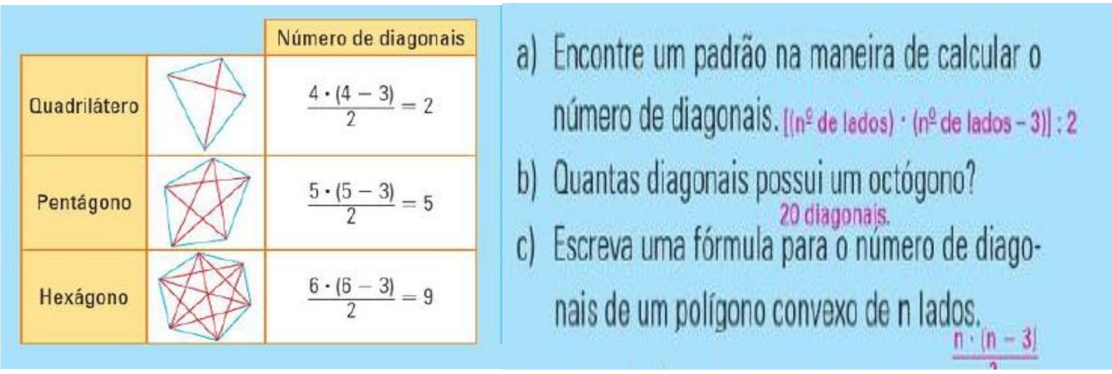
Quadro 4: Representações Generalização de Padrões

Parte A



Fonte: Mori e Onaga (2015a, p. 19)

Parte B



Fonte: Mori e Onaga (2015c, p. 85)

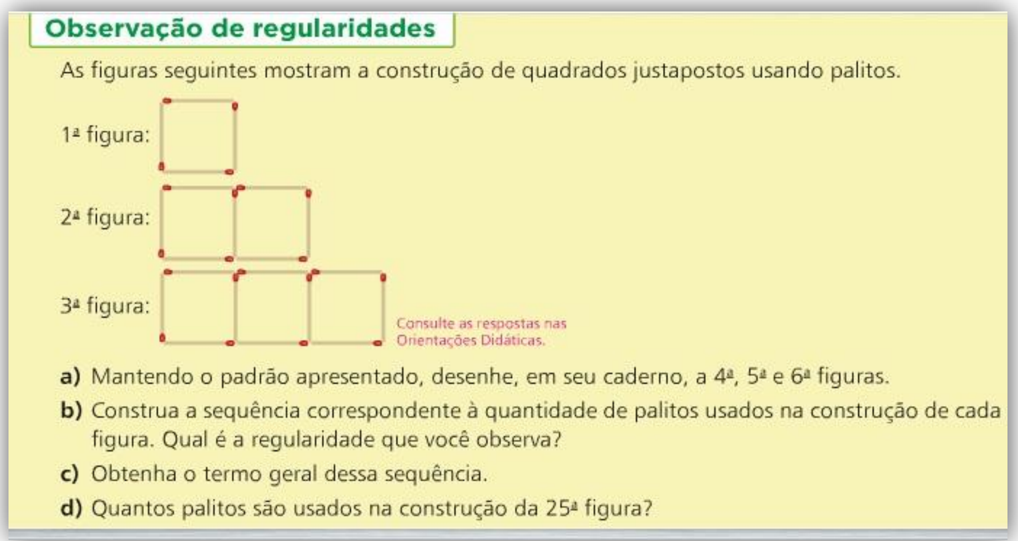
Nas imagens acima, observamos que as duas trazem uma forma padrão, ou seja, na parte A do quadro 4, o exemplo pede para o aluno encontrar a quantidade de quadrados usando 85 palitos de fósforo. Observe que na ilustração obteve-se 4 quadrados feitos com 17 palitos de fósforo, procedendo da mesma maneira, para 5 quadrados encontraremos 21 palitos de fósforo. Portanto, para cada quadrado que se obtém a partir do segundo, é necessário mais 4 palitos de fósforo para o compor. Uma regularidade também se nota na parte B do quadro 4, em que na questão é pedida um fórmula geral para calcular o número de diagonais dos polígonos convexos. A questão ainda pediu o número de diagonais que possui um octógono. Neste caso, a contagem uma a uma das diagonais do octógono pode ser trabalhosa e ainda podem ocorrer erros e riscos. Portanto, observando o primeiro polígono, o quadrilátero, temos 4 lados, em que cada vértice possui 4 segmentos, dos quais 3 deles não são considerados diagonais, ou seja, teremos $4 - 3$ diagonais. A mesma lógica acontece no pentágono e hexágono do exemplo. Nesse sentido, para um polígono de n lados, teremos, saindo de cada vértice, $n - 3$ diagonais, e como temos **n** vértices, a quantidade de diagonais será $n * (n - 3)$. Desta maneira, estamos contando cada diagonal duas vezes, por exemplo, ao jogarmos na fórmula $n * (n - 3)$, os 4 lados do quadrilátero obtêm-se: $4 * (4 - 3) = 4$, ou seja, 4 diagonais. E assim, do total de diagonais que calculamos, teremos ainda que dividir por 2, obtendo as 2 diagonais do polígono. O aluno ao estudar o comportamento desta sequência, descobre o termo geral $\frac{n * (n - 3)}{2}$ das diagonais de um polígono sem precisar decorar. Neste caso, a fórmula se torna facilitadora no auxílio dos cálculos para encontrar o resultado.

As questões trazidas pelas autoras como as descritas na parte A e B do quadro 4 que comunicaram o conceito de função como uma generalização de padrões foram apresentadas em tópicos de Investigue e Explique. Mori e Onaga (2015) sugerem ao professor a exploração de situações de cunho investigativo, pois as mesmas ajudarão o aluno a reconhecer a situação, formular conjecturas, realizar testes e demonstrar o trabalho que foi realizado. Para formular as conjecturas o aluno, inicialmente reconhece nesta realização, as noções de variação, com isso, as variáveis independente e dependente, que foram descobertas pelas tentativas de acertos e erros. Por consequência, o aluno estuda o padrão na regularidade do exercício, que por fim, generaliza por meio de uma fórmula recorrente.

As regularidades de padrões que os alunos estudam nas séries finais do Ensino Fundamental, os auxiliam como uma base para os estudos formais que se iniciam no Ensino Médio. No livro do 1° ano do Ensino Médio, os estudantes, retornam o estudo dessa realização no conteúdo das Progressões Aritméticas e Geométricas. Espera-se que o aluno identifique e caracterize propriedades destas sequências, levando a determinar o termo geral, ou seja, formalizar o informal.

Os autores Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016), trazem a parte introdutória do conteúdo de Progressões, de forma semelhante a das autoras Mori e Onaga (2015) na coleção do Ensino Fundamental II, um processo investigativo, levando o aluno a identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades. Em seguida, a definição e os termos gerais das sequências são apresentados formalmente. Veja a figura 21.

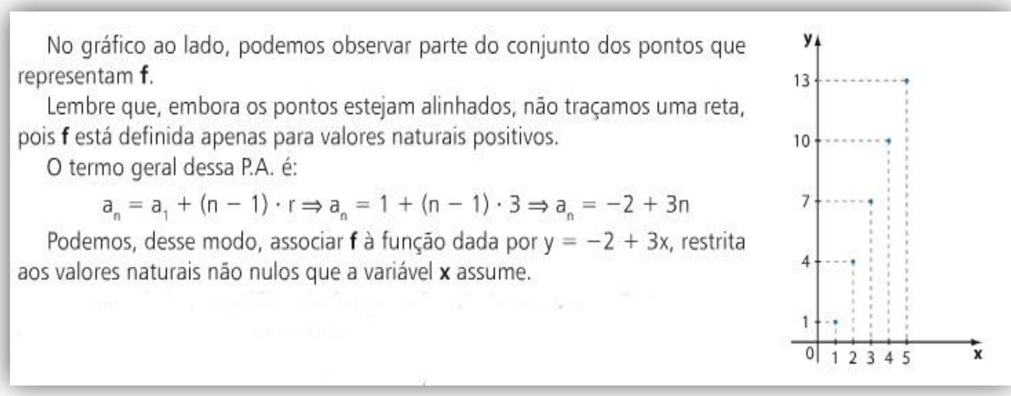
Figura 20: Relação funcional generalização de padrões



Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016a, p. 174)

Na figura 21, o exemplo trazido pelos autores se assemelha com exemplo da parte A do quadro 3. O aluno ao manter o padrão dos quadrados justapostos utilizando os palitos, observa certa regularidade. Esta regularidade leva-o a encontrar a fórmula geral da sequência, que mais tarde será reconhecida por ele como uma Progressão Aritmética. Os autores estabelecem que as sequências numéricas são exemplos de funções com domínio em N*, e portanto suas representações gráficas são formadas por um conjunto discreto de pontos. Veja a figura 22, relação que os autores fazem entre a função afim e a progressão aritmética, na qual a reta não é traçada nos pontos alinhados do gráfico, pois a função apenas está definida para valores naturais positivos.

Figura 21: Relação funcional generalização de padrões exposta graficamente



No gráfico ao lado, podemos observar parte do conjunto dos pontos que representam **f**.

Lembre que, embora os pontos estejam alinhados, não traçamos uma reta, pois **f** está definida apenas para valores naturais positivos.

O termo geral dessa P.A. é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = -2 + 3n$$

Podemos, desse modo, associar **f** à função dada por $y = -2 + 3x$, restrita aos valores naturais não nulos que a variável **x** assume.

Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016a, p. 181)

O mesmo ocorre ao estabelecer a conexão entre uma progressão geométrica e a função exponencial, o domínio da função está em N*, e, portanto, a curva não passa nos pontos plotados no plano cartesiano.

5.6 Modo Formal

Constituem esse modo as definições formais, ressaltando as características de correspondência univalente e arbitrária entre variáveis quaisquer.

Na coleção analisada do Ensino Médio, os autores trazem no livro do 1° ano, a definição formal de função como uma relação entre conjuntos. “Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento x ∈ A um único elemento y ∈ B recebe o nome de função de A em B.” (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO; ALMEIDA, 2016).

Uma característica importante no estudo de função é definir a noção de função de maneira mais precisa, isto é, comunicar o conceito de função formalmente. Neste caso, os autores expõem a definição formal de função com uma relação entre dois conjuntos, em que, a univalência se encontra na parte em que associa a cada elemento $x \in A$ um único $y \in B$.

5.7 Modo Tabular e Algébrico

Na análise das coleções, identificamos também a comunicação feita sobre o conceito de função, exposta em questões em que podemos observar a junção de modos. Veja o exemplo na Figura 23.

Figura 22: Relação funcional da junção tabular e algébrica

(Encceja) Em uma fábrica de parafusos, Carlos ficou encarregado de observar o funcionamento da máquina na produção. Ele organizou a seguinte tabela, em que **t** representa o tempo em minutos e **p** representa a quantidade de parafusos produzida nesse tempo:

t (min)	1	2	3	4	...
p	3	6	9	12	...

A produção **p** em um determinado tempo t pode ser expressa por: b

a) $p = 5 \cdot t$ c) $p = 5 + t$

b) $p = 3 \cdot t$ d) $p = 3 + t$

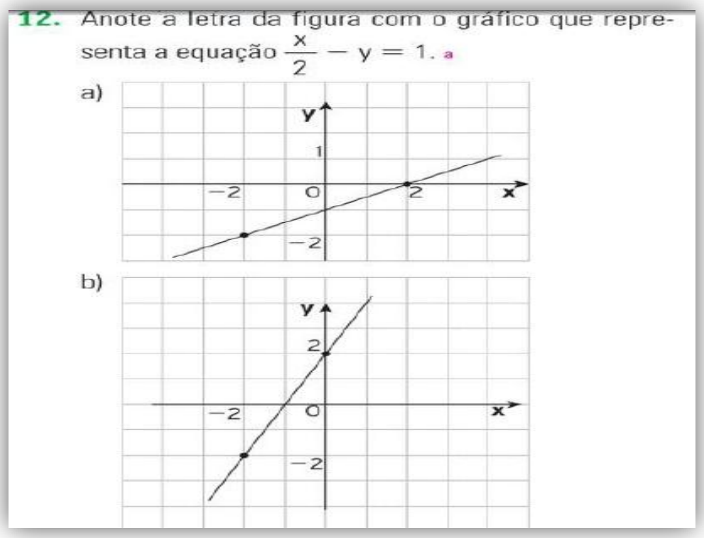
Fonte: Mori e Onaga (2015b, p. 167)

Na questão do Encceja (Exame Nacional para a certificação de competências de jovens e adultos), as autoras pedem para identificar qual expressão determina a produção **p** em um determinado tempo **t**. As autoras comunicam, de forma implícita, o conceito de função, pois este tipo de exercício foi encontrado no final do capítulo de Equações como uma revisão cumulativa dos capítulos anteriores. Até ali, o aluno possuía apenas o conhecimento da primeira abordagem de equações, na qual se estuda apenas equações polinomiais de 1° grau com uma incógnita, as letras até o momento representam apenas um número desconhecido. Observe que o modo tabular organiza os dados numéricos em forma de tabela, em que cada minuto está associado a uma única quantidade de parafusos. Logo em seguida, a situação é descrita por meio de uma expressão algébrica. O modo tabular e o modo algébrico estão mencionados em uma mesma questão.

5.8 Modo Gráfico e Algébrico

No estudo das equações com duas variáveis, a noção implícita de função é enfatizada, com a representação geométrica de uma determinada equação, ou seja, nota-se o gráfico da realização algébrica dada. Veja a figura 24, que ilustra esta situação.

Figura 23: Relação funcional da junção gráfica e algébrica



Fonte: Mori e Onaga (2015b, p. 198)

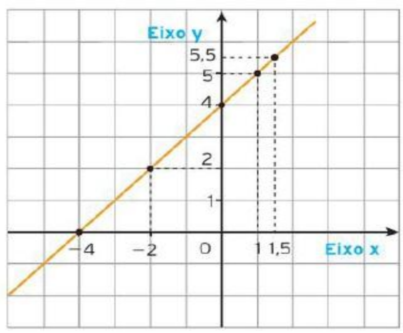
A questão exige uma habilidade de realicionar pontos a uma equação dada. O que consideramos a questão coerente abordada pelas as autoras, mesmo sendo trago em um livro do 7° ano, pois neste exercicio o aluno possui uma noção de par ordenado como possíveis soluções da equação. Além da abordagem de par ordenado, as autoras Mori e Onaga (2015) trazem ainda, que todos os possíveis pares ordenados que são soluções de uma equação polinomial do 1° grau com duas variáveis, representados em um sistema de coordenadas cartesianas, estão alinhados sobre uma reta. A letra b não pode ser resposta, pois ao interpretar o par (0,2) por meio do gráfico e substituir na equação o valor de x e y a igualdade não é verdadeira. Por meio da comunicação gráfica, a comunicação algébrica é solucionada.

5.9 Modo Tabular e Gráfico

No livro do 7° ano do Ensino Fundamental II, o aluno tem seu primeiro contato com uma relação funcional da realização gráfica nos assuntos de resolução geométrica de equações. No estudo de uma equação do 1° grau com duas variáveis, têm-se infinitas soluções. O aluno pode representar essas soluções por meio de pontos em plano, como no exemplo da figura 25.

Figura 24: Relação funcional da junção gráfica e tabular

x	$x - y = -4$	y	Soluções
0	$0 - y = -4$	4	(0, 4)
−4	$-4 - y = -4$	0	(−4, 0)
−2	$-2 - y = -4$	2	(−2, 2)
1	$1 - y = -4$	5	(1, 5)
1,5	$1,5 - y = -4$	5,5	(1,5; 5,5)



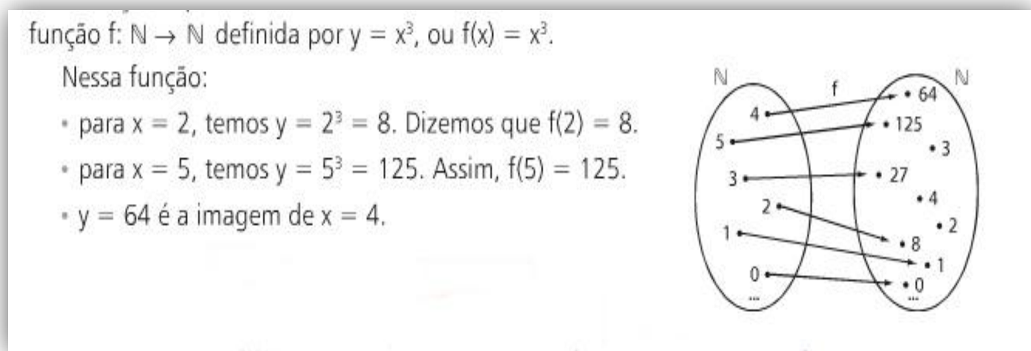
Fonte: Mori e Onaga (2015b, p. 198)

Nesse exemplo, observamos na tabela que as soluções da equação dada, estão organizadas conforme uma relação funcional, ou seja, a cada x disposto na coluna da tabela corresponde a um único y, assim obtendo os pares ordenados (x,y). Estes pares encontrados estão plotados no plano cartesiano, como possíveis soluções da equação. O aluno reconhece a relação funcional pelos valores das colunas da tabela e identifica a reta que passa por esses pontos no gráfico. Assim, identificamos os modos tabular e gráfico em uma mesma questão,

5.10 Modo Algébrico e Diagrama

Na apresentação das funções definidas por fórmulas, os autores retornam com a representação do diagrama. Figura 26.

Figura 25: Relação funcional da junção algébrica e diagrama


função f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $y = x^3$, ou $f(x) = x^3$.

Nessa função:

- para $x = 2$, temos $y = 2^3 = 8$. Dizemos que $f(2) = 8$.
- para $x = 5$, temos $y = 5^3 = 125$. Assim, $f(5) = 125$.
- $y = 64$ é a imagem de $x = 4$.

Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016a, p.44)

Neste exemplo a função é definida por meio de uma fórmula que associa a cada número natural **x** o número natural **y**, sendo **y** o cubo de **x**. Os autores representam esta sentença $y = x^3$ por meio de um diagrama de setas, que auxilia o aluno a enxergar que nem todo número natural **y** é imagem de algum **x** natural, apenas os cubos perfeitos, isto é: 1, 8, 27, 64, 125... Os autores utilizaram os modos algébrico e diagrama para esta questão.

5.11 Discussão Geral

No quadro, trazemos uma visão geral das situações encontradas que comunicaram o conceito de função em cada livro estudado. Representaremos pelo símbolo ✖ as questões encontradas e pelo símbolo ▬ as questões não encontradas.

Quadro 5: Diferentes modos de comunicar o conceito de função.

	Modos					
Livros	Tabular	Diagrama	Algébrico	Gráfico	Generalização de Padrões	Formal
6°	✖	▬	▬	✖	✖	▬
7°	✖	▬	✖	✖	✖	▬
8°	✖	▬	✖	✖	✖	▬
9°	✖	▬	✖	✖	✖	▬
1°	✖	✖	✖	✖	✖	✖
2°	✖	▬	✖	✖	▬	▬
3°	✖	✖	✖	✖	▬	▬

Fonte: elaboração própria

Observe que o modo tabular e gráfico é apresentado em todos os livros das duas coleções analisadas. No livro do 6° ano não é estudado o par ordenado, que posteriormente será representado geometricamente num sistema cartesiano, mas encontramos uma questão em que se trabalha com localização. A localização auxilia na escrita de coordenadas e ajuda nas noções de direção e sentido. Desta maneira, acreditamos que para os alunos de 6° ano, nos quais a ideia de função pode ser trabalhada de várias formas de maneira implícita, consideramos que a localização oferece a noção de função comunicado no modo gráfico. Expomos a questão de localização na seção anterior do modo gráfico.

Podemos notar também a predominância do modo algébrico, deixando apenas de aparecer no livro do 6° ano do Ensino Fundamental II. O BNCC (2017) traz que:

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. (BRASIL, 2017, p. 269)

Acreditamos que o modo algébrico não é encontrado no livro do 6° ano do Ensino Fundamental II, porque o aluno reconhece as letras apenas como representação da aritmética. Observamos que, mesmo em questões encontradas no livro do 6°, nas quais é reconhecido o modo generalização de padrões, segundo Graça (2017) é um modo que pode ser utilizado para justificar e legitimar fórmulas no contexto da educação básica, não é pedido uma fórmula pra expressar uma situação de padrões de sequências. O modo generalização de padrão é encontrado em todos os livros da coleção do Ensino Fundamental II, mas aparece somente na coleção do Ensino Médio no livro do 1° ano, assim como o modo formal.

Podemos observar que o uso do modo diagrama não foi encontrado no livro do 9° ano do Ensino Fundamental II, apresentando-se somente nos livros do 1° e 3° ano do Ensino Médio. Consideramos um meio de comunicar função importante para alunos do 9° ano, pois ao estudar esta comunicação observa-se que função pode ser comunicada como uma correspondência entre conjuntos.

No **Quadro 6**, apresentaremos as situações que observamos da junção de dois modos. Representaremos por ✖ as questões encontradas e por ▬ não encontradas.

Quadro 6: Junção dos modos que comunicam o conceito de função

	Junção dos modos			
Livros	Modo Tabular e Algébrico	Modo Gráfico e Algébrico	Modo Diagrama e Algébrico	Modo Tabular e gráfico
6° ano	−	−	−	−
7° ano	✖	−	−	✖
8° ano	✖	−	−	−
9° ano	−	✖	−	✖
1° ano	✖	✖	✖	✖
2° ano	✖	✖	−	−
3° ano	✖	✖	✖	−

Fonte: elaboração própria

Observando o quadro 6, percebemos a predominância do modo algébrico juntamente com a maioria dos outros modos. Devido sua ênfase, este modo nos chamou a atenção, pois além de aparecer individualmente na maioria das coleções analisadas, é apresentando frequentemente na união de três modos. É notório que na maioria das situações que comunicaram o conceito de função, a expressão algébrica é bastante pedida para representar uma situação dada. A maioria das questões encontradas das coleções analisadas que comunicaram o conceito de função nos modos tabular e gráfico ressalta o uso da fórmula para expressar a correspondência desses modos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante minha trajetória acadêmica considerava função um assunto de difícil compreensão, o que me levou a passar por diversas dificuldades em matérias que exigiam o estudo da mesma. Ao que diz respeito da minha experiência enquanto aluna, tive dificuldades em alguns estágios, pois iria lecionar o estudo de função e não havia, da minha parte, segurança deste assunto. Desta forma, o processo de ensino deste conteúdo se tornou limitado o que acarretou em obstáculos de ensino. Portanto, considero importante o estudo das disciplinas fundamentais antes de realizar os estágios.

Após a leitura do trabalho de Graça Luzia Dominguez Santos e Jonei Cerqueira Barbosa (2017), no qual desenvolveram um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função, surgiu o desejo de analisar e observar no livro didático de matemática, várias formas de comunicar o conceito de função de acordo com este modelo. Portanto, nosso objetivo foi identificar formas de comunicar o conceito de função, conforme o modelo de Matemática para o Ensino de Santos e Barbosa (2017).

A noção de função foi se construindo, modificando e aperfeiçoando ao longo de vários séculos. As funções fazem parte do nosso cotidiano e as encontramos em diversas situações de nossa vida. De acordo com o PCN + (BRASIL, 2006) o estudo das diferentes funções, está ligado ao seu conceito, suas propriedades relacionadas às operações, estudo e análise de gráficos, bem como, a sua vasta aplicabilidade. Este conteúdo é trabalhado desde os anos iniciais de forma implícita, passando pelo Fundamental II até defini-lo formalmente no Ensino Médio, portanto é importante compreende-lo, pois pode ser amplamente explorado obtendo bons resultados no processo de ensino e aprendizagem.

Em nossa pesquisa realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa de caráter documental, na qual foram utilizados livros didáticos de matemática das coleções do Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Analisamos os livros de maneira integral, buscando identificar comunicações do conceito de função de acordo com o modelo teórico de Santos e Barbosa (2017).

O modelo é categorizado nos modos tabular, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal. Deparamo-nos com questões que comunicaram o conceito de função de forma implícita e explícita nos livros analisados, e podemos constatar que o modo tabular, gráfico e algébrico são os mais encontrados em todos os anos.

O modo diagrama só foi comunicado na edição do Ensino Médio. Levantamos como hipótese a linguagem usada, pois os diagramas são vistos como conjuntos e conforme Santos e Barbosa (2017), há vínculos com o conjunto domínio e imagem. Talvez por isso, esses livros, do 6° ao 9° ano, não utilizem esse modo de comunicar função. Contudo, o uso do diagrama auxilia o aluno comunicar função como representação de conjuntos, ou seja, nele observa-se pelo o uso das setas que a cada elemento do conjunto de partida estão associados a um único elemento do conjunto de chegada, o que consideramos uma comunicação importante aos alunos do 9° ano, pois, definem formalmente a ideia de função como uma relação entre conjuntos no Ensino Médio. Portanto, acreditamos que a apresentação desse modo aos alunos do 9°ano dos anos finais do fundamental, pode facilitar a compreensão do mesmo no estudo formal que será apresentado posteriormente.

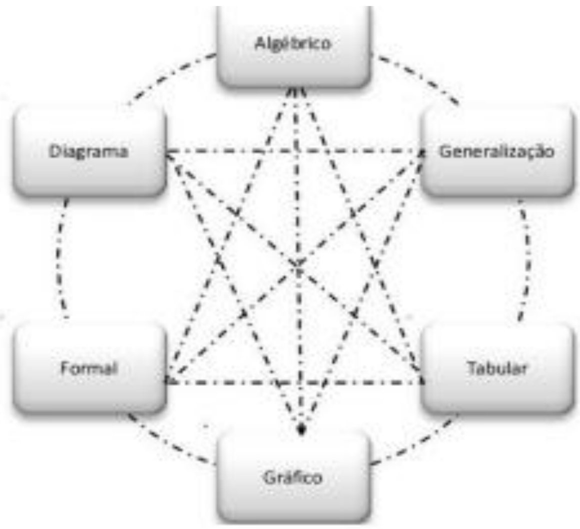
No modo generalização de padrão é também evidente o seu uso nos livros do Fundamental II, mas este modo foi apresentado no Ensino Médio somente no livro do 1° ano. A ideia de sequência é essencial em todos os níveis de ensino, pois permite explorar regularidades, este estudo não foi encontrado nos livros do 2° e 3° ano do Ensino Médio.

Confirmamos todos os modos de comunicar função conforme apresentado no modelo de Santos e Barbosa (2017), tendo como fonte livros didáticos da Educação Básica.

Na análise, percebemos que além dos modos serem trabalhados de forma individual, encontramos a junção de alguns modos como: tabular e algébrico, gráfico e algébrico, diagrama e algébrico, tabular e gráfico. Nota-se que o modo algébrico se une com a maioria dos outros modos, assim podemos observar que o uso de função como uma expressão, fórmula ou regra é bastante presente na maioria das questões. O PCN + (BRASIL, 2006) menciona a potencialidade que essas expressões apresentam na vivência cotidiana “[...] se apresenta com enorme importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente em noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral”. (BRASIL, 2006, p) Apesar de ser uma importante forma de comunicar função importante, a exibição excessiva desse modo, pode limitar o aluno no reconhecimento das outras formas de comunicar função.

Embora apresentemos e exemplifiquemos junções entre alguns modos de comunicar função, o modelo de Santos e Barbosa (2017) os prevê, conforme pode ser considerado na Figura 26.

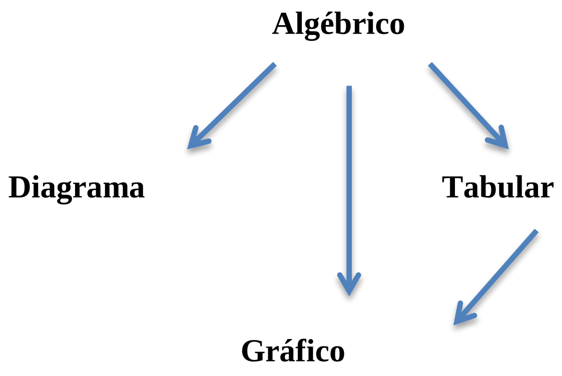
Figura 26: Modelo teórico de MpE do conceito de função



Fonte: Santos e Barbosa (2017, p.334)

Em nossa análise identificamos possíveis "pontes" interligando dois modos de comunicar função:

Figura 27: Ponte da junção dos modos.



Fonte: elaboração própria.

As pontes, termo utilizado por Santos e Barbosa (2017) podem se referir a natureza das situações exploradas nos livros didáticos, ou seja, há uma articulação entre dois modos de comunicar função, para que a situação seja desenvolvida.

Essa análise comprovou a identificação de modos encontrados nas coleções estudadas, além de ligações entre alguns modos, ou seja, o encontro de situações em que se trabalha função comunicada de várias formas. Assim, esperamos que este trabalho possa contribuir para que professores e autores de materiais didáticos constatem que o estudo de função possui vários significados todos associados a uma mesma noção. Além disso, corroborando com Santos e Barbosa (2017), essa sistematização dos modos de comunicar o conceito, ou seja, o modelo de matemática para o ensino do conceito de função ainda não está incorporada aos cursos de formação inicial ou continuada.

Assim, trazemos como proposta para o ensino de função, o estudo no qual o aluno possa relacionar, produzir e interpretar situações deste conceito. São válidos os trabalhos com situações problemas, instrumentos tecnológicos, jogos pedagógicos e o uso da sua história. A história possibilita ao aluno compreender de maneira mais significativa o assunto, percebendo que o mesmo passou por um longo processo de ideias. Novos meios tecnológicos surgiram, acrescentando uma nova ferramenta de ensino que facilita a interpretação de muitos conteúdos, um exemplo em função são os gráficos, que podem ser estudados em softwares que ajudam a observar características importantes com mais precisão e até mesmo observa-los na forma tridimensional. As situações problemas permite o aluno a desenvolver sua capacidade de argumentação e interpretação, além de ser uma importante ferramenta para se trabalhar com questões interdisciplinares. Por fim, os jogos, que são recursos interessantes no trabalho de função, pois podem proporcionar um estudo divertido e descontraído. Esses recursos podem ajudar o professor a mostrar as várias formas que função é comunicada.

Como futura professora, este trabalho me despertou um olhar de função como não tinha percebido antes, ou seja, função é comunicada de vários modos, os quais consigo reconhecê-los e trabalha-los na sala de aula.

No decorrer do desenvolvimento do trabalho observamos que o modo algébrico é comunicado com uma maior ênfase nos livros estudados e além de ser comunicado com os demais modos. Assim, como possiblidades de pesquisas futuras, acreditamos ser interessante e válido estudar outras coleções para observação deste modo e o destaque pelo qual recebe.

REFERÊNCIAS

BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. História, produção e memória do livro didático. **In**: Educação e Pesquisa: Revista da Faculdade de Educação da USP, São Paulo, v. 30, n.3, 2004. Disponível em: < http://www.revistas.usp.br/ep/article/view/27952/29724 > Acesso em: 24 de Fev. 2018.

BONJORNO, J. R., GIOVANNI JÚNIOR, J. R., SOUSA, P. R. C. DE. **Matemática Completa 1º ano** – 4. ed. – São Paulo: FTD, 2016. – (Coleção Matemática Completa)

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnológicas**. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Quarta versão revista. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pdf/4.2_BNCC-Final_MA.pdf >. Acesso em: 28 Abr. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DAZZI, Clóvis José; DULLIUS, Maria Madalena. Ensino De Funções Polinomiais de Grau Maior que Dois Através da Análise de seus Gráficos, com Auxílio do Software Graphmatica. **Bolema.** Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 381-398, ago.2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. **Matemática Ciência e Aplicações**: Ensino Médio. Vol. 1. 9° ed. São Paulo: Saraiva, 2016a.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. **Matemática Ciência e Aplicações**: Ensino Médio. Vol. 2. 9°ed. São Paulo: Saraiva, 2016b.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. **Matemática Ciência e Aplicações:** Ensino Médio. Vol. 3. 9°ed. São Paulo: Saraiva, 2016c.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 1. 8° ed. São Paulo: Saraiva, 2008.

MACIEL, Paulo Roberto Castor; CARDOSO, Tereza Fachada Levy. A Históriia do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348-1367, dez. 2014.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática Ideias e Desafios:** 6°ano. 18°ed. São Paulo: Saraiva, 2015a.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática Ideias e Desafios**: 7°ano. 18°ed. São Paulo: Saraiva, 2015b.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática Ideias e Desafios**: 8°ano. 18°ed. São Paulo: Saraiva, 2015c.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática Ideias e Desafios**: 9°ano. 18°ed. São Paulo: Saraiva, 2015d.

OLIVEIRA, Esmeralda Maria Queiroz. **O uso do Livro Didático de Matemática por professores do Ensino Fundamental**. Dissertação (Programa de Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo; VIANA, Marger da Conceição Ventura; ROSA, Milton. Um pouco de História das Funções: algumas sugestões de atividade práticas para a sala de aula. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 17, n. 46, p. 513-529, ago. 2013.

PEREIRA, Vanderléa Andrade. **O Livro Didático no cotidiano da prática pedagógica de professoras:** usos que se revelam no Seminário Brasileiro. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Educação). Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2012.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função. -1 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015 – (coleção Tendências em educação Matemática).

ROQUE, Tatiana; GIRALDO, Victor. O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a dicotomia entre didática e conteúdo. Rio de Janeiro, ed. Ciência Moderna Ltda, 2014.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez. **Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do conceito de Função**. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2017.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Um modelo teórico para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo, v.19, n.2, pp. 315-338, 2017.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Um modelo teórico de matemática para o ensino do Conceito de Função a partir de um estudo com professores. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**. n. 48, pp. 143-167,diciembre 2016.

SILVA JUNIOR, Clovis Gomes. O Livro Didático de Matemática e o Tempo. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, V. 7, n. 1, p. 13-21, 2007.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patricia Moreno. **Vontade de saber Matemática:** 9° ano. Ed: São Paulo: FTD, 2009.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira. **Uma análise de discursos no ensino e aprendizagem de Função**. Dissertação (Pós-Graduação em Educação do Centro Pedagógico). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2001.

STRAPASON, Lísie Pippi Reis; BISOGNIN, Eleni. Jogos Pedagógicos para o Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio. **Bolema.** Rio Claro (SP), v. 27,n.46,p. 579-595, ago.2013.

VÁZQUEZ, S.; REY G.; BOUBÉE, C.; “El concepto de función a través de la Historia”, Revista Iberoamericana de Educación Matemática; v.4, n.16, p. 141-151, dez. 2008. Disponível em: < http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf>. Acesso em : 5 de maio de 2018.