



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ARYEL SILAS SANTOS FERRAZ

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APROXIMAÇÃO
DE INTEGRAIS COM APLICAÇÕES**

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA
2018

ARYEL SILAS SANTOS FERRAZ

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APROXIMAÇÃO
DE INTEGRAIS COM APLICAÇÕES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB / Campus de Vitória da Conquista - BA, para obtenção do título de Licenciada em Matemática sob orientação do Professor Dr. André Nagamine.

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA

2018

FOLHA DE APROVAÇÃO

ARYEL SILAS SANTOS FERRAZ

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APROXIMAÇÃO
DE INTEGRAIS COM APLICAÇÕES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB.

Aprovado em _____ de _____ de _____

Componentes da banca examinadora:

Prof. Dr. André Nagamine
Orientador

Prof. Júlio César dos Reis

Prof. Sérgio da Silva Aguiar

Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.

Albert Einstein.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me guiar e auxiliar em todas as fases de minha vida, me protegendo, dando saúde, sabedoria, disposição e paciência para completar mais essa jornada.

Aos meus pais Marcos e Dalvaci, e minha irmã Kezia, por sempre me apoiar e cuidar nos momentos difíceis.

Ao meu professor orientador Dr. André Nagamine, que sempre teve paciência e compressão em todas as reuniões, pelo apoio, por me inspirar e incentivar a escrever sobre o tema proposto e por estar sempre disponível para me ajudar e sanar minhas dúvidas.

Agradeço também a todos os meus amigos e colegas de graduação que direta ou indiretamente participaram da minha jornada, sempre me apoiando e me ajudando a prosseguir.

Agradeço também a todos os professores do curso de licenciatura em matemática, pois cada um me ajudou de certa forma para chegar neste momento, mostrando que a matemática é muito mais do que se pode imaginar, e que a relação entre aluno e professor pode ser muito mais que só profissional.

Por fim agradeço a todos meus familiares, amigos, e a todos que me ajudaram e sempre estiveram ao meu lado nesses quatro anos de curso, muito obrigado a todos vocês.

Resumo

Neste trabalho é apresentado primeiramente um contexto histórico sobre as integrais, como se deu a construção da resolução da integral definida inspirada na soma de Riemann, é abordado também um pouco sobre interpolação polinomial, um conteúdo base para o principal objetivo do trabalho, que é a utilização de métodos numéricos na resolução de integrais definidas de funções que não possuem primitiva, ou seja, que são difíceis de resolverem analiticamente. Muitas vezes essas integrais são obtidas em experimentos, dessa forma veremos algumas aplicações onde para resolve-las precisaremos dos métodos numéricos, como a Regra do Trapézio, Regra $1/3$ de Simpson e a Quadratura Gaussiana, todos os algoritmos feitos em FORTRAN. Também é feita uma simples comparação dos métodos em questão de eficiente e velocidade nas resolução de integrais.

Palavras chaves: Integrais Definidas. Métodos Numéricos. Regra do Trapézio. Regra de $1/3$ de Simpson. Quadratura Gaussiana.

Sumário

Introdução	7
Capítulo 1 - Aspectos Históricos	9
Capítulo 2 - Interpolação Numérica	16
2.1. Considerações Iniciais	16
2.2. Polinômios de Lagrange	16
2.3. Erro na Interpolação.....	22
Capítulo 3 - Integração Numérica	26
3.1. Fórmulas de Newton-Cotes	27
3.1.1. Regra do Trapézio.....	29
3.1.2. Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson.....	34
3.1.3. Quadratura De Gauss.....	41
Capítulo 4 - Aplicações de Integração Numérica.....	50
4.1. Área de Uma Superfície de Revolução	50
4.2. Momentos e Centros de Massa.....	55
Considerações Finais	63
Referências Bibliográficas.....	64
Anexos	65

Introdução

O cálculo integral sem dúvida é uma das ferramentas mais poderosas da matemática, e ele está intimamente ligado ao cálculo diferencial, com seu surgimento nos primórdios do desenvolvimento da matemática. Uma das primeiras aparições do conceito de integral foi através do método de exaustão criado na Grécia Antiga, desenvolvido por Arquimedes (287 – 212 a.C.) e outros matemáticos da época. Segundo Boyer sobre o Método de exaustão.

Desenvolveu também o método de exaustão, creditado a Eudoxo, pelo qual se aproxima a quantidade desejada pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência. Obteve aproximações da área de um círculo comparando-a com as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos. (Boyer, 1995).

A motivação pelo tema surgiu com o interesse de analisar os métodos de integração numérica, para integrais definidas de funções contínuas em que o resultado, ou não é possível ou extremamente difícil de se obter por meios analíticos, ao passo que com métodos numéricos é possível estimar esses resultados. A proposta do tema foi sugerida pelo orientador, cuja ideia é analisar estes métodos e suas aplicações em outras áreas.

Como objetivo principal, neste trabalho, está o desenvolvimento de algoritmos para a resolução de problemas de alguns campos de estudos, que podem ser resolvidos através dos métodos de integração numérica, mas antes disto, é necessário abordar alguns tópicos sobre esses métodos.

O trabalho foi organizado em quatro capítulos. O primeiro capítulo descreve a origem das integrais e o impasse na resolução de algumas integrais que não podem ser resolvidas analiticamente. O segundo capítulo descreve a interpolação numérica, pois é um conteúdo base para a integração numérica, onde utilizaremos os Polinômios de Lagrange. O terceiro capítulo traz a integração numérica, com as fórmulas de Newton-Cotes, Regra do trapézio, Regra 1/3 de

Simpson e a Quadratura Gaussiana, com seus respectivos algoritmos. O capítulo quatro contará com algumas aplicações que utilizam a integração numérica, mostrando sua grande importância. Por fim, as considerações finais com algumas ponderações.

Capítulo 1

Aspectos Históricos

Abordando um pouco sobre a historia do cálculo diferencial e integral, nos deparamos com muitos matemáticos, cada um deles com sua parcela de contribuição para essa ferramenta bastante utilizada atualmente. Provavelmente uma das melhores e mais completas técnicas desde a era de ouro da Geometria Grega, foi com o matemático grego Arquimedes, no século III a.C, onde ele conseguiu calcular a área sob curvas no plano e o volume de alguns sólidos pelo método da exaustão, também chamado de Princípio de Eudoxo Arquimedes, que consiste em utilizar áreas e volumes conhecidos, como, retângulos, discos, cubos, entre outros, inscrevendo dentro dela uma sequência dessas figuras ou sólidos, de forma que a soma dessas áreas convergem para o valor da área desejada.

Segundo Boyer:

Para achar áreas e volumes, o versátil Arquimedes usou sua própria versão primitiva do cálculo integral, que, de alguma maneira, é muito semelhante, quanto ao espírito, ao cálculo atual. Numa carta a Eratóstenes, Arquimedes expôs seu “método da alavanca” para descobrir fórmulas de áreas e volumes. Mas, quando publicava provas para essas fórmulas, ele utilizava o método de exaustão para se ajustar aos padrões de rigor da época. (Boyer, 1995).

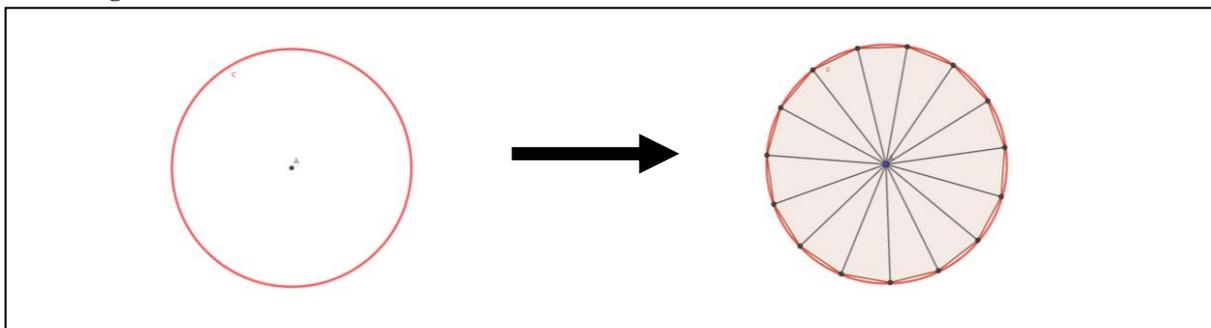
O método Princípio de Eudoxo é o alicerce de um dos procedimentos essenciais do cálculo infinitesimal, mas enquanto no cálculo atual se pode calcular a soma de um número infinito de parcelas, na época antiga, os matemáticos e sábios nunca avaliaram essa hipótese, dessa forma o método da exaustão não pode ser considerado como um conceito de limite, pois eles não possuíam a ideia de infinito, mas ele teve uma grande contribuição para que a ideia de infinito fosse concretizada futuramente.

Um dos exemplos mais conhecidos do método da exaustão é o cálculo da área

de um círculo de raio r .

A ideia de Arquimedes era aproximar a área de um círculo de raio r utilizando polígonos regulares inscritos no círculo. Dessa forma teremos que a soma das áreas dos polígonos tendem para o valor “ P ” da área do círculo.

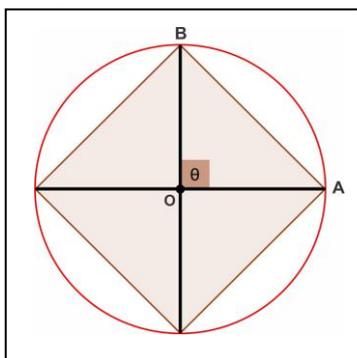
Figura 0.0



Fonte: Elaborado pelo Autor

Tome a primeira aproximação de P com um polígono regular de 4 lados inscrito no círculo.

Figura 0.1

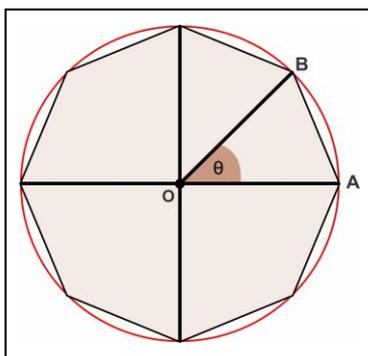


Fonte: Elaborado pelo Autor

Seja P_1 a área do quadrado inscrito no círculo, considere o triângulo isósceles de base \overline{AB} , teremos sua área como $\frac{P_1}{4} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{2} * \text{sen}(\theta)$, logo:

$$\frac{P_1}{4} = \frac{1}{2} * r^2 * \text{sen}(90^\circ) \rightarrow P_1 = 2 * r^2$$

Figura 0.2



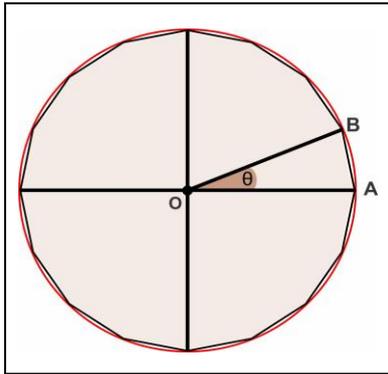
Fonte: Elaborado pelo Autor

Do mesmo modo seja P_2 a área do polígono regular com 8 lados inscrito no círculo, considere o triângulo isósceles de base \overline{AB} , teremos sua área como

$$\frac{P_2}{8} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{2} * \text{sen}(\theta), \text{ logo:}$$

$$\frac{P_2}{8} = \frac{1}{2} * r^2 * \text{sen}(45^\circ) \rightarrow P_2 = 2^2 * r^2 * \text{sen}(45^\circ)$$

Figura 0.3

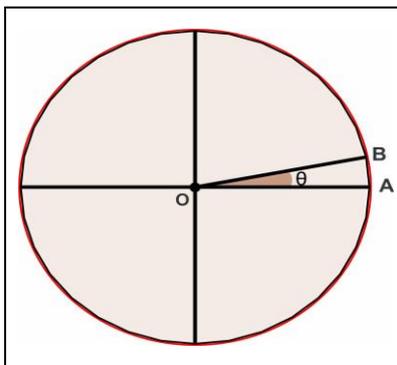


Fonte: Elaborado pelo Autor

Do mesmo modo seja P_3 a área de do polígono regular, com 16 lados, inscrito no círculo, considere o triângulo isósceles de base \overline{AB} , teremos sua área como: $\frac{P_3}{16} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{2} * \text{sen}(\theta)$, sabendo que $\text{sen}\left(\frac{180^\circ}{8}\right) = \text{sen}(22.5^\circ)$, teremos:

$$\frac{P_3}{16} = \frac{1}{2} * r^2 * \text{sen}(22.5^\circ) \rightarrow P_3 = 2^3 * r^2 * \text{sen}(22.5^\circ)$$

Figura 0.4



Fonte: Elaborado pelo Autor

Considerando agora um polígono regular com 32 lados de área P_4 podemos concluir sobre o triângulo isósceles de base \overline{AB} que sua área é dada por: $\frac{P_4}{32} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{2} * \text{sen}(\theta)$, sabendo que $\text{sen}\left(\frac{180^\circ}{16}\right) = \text{sen}(11.25^\circ)$, teremos:

$$\frac{P_4}{32} = \frac{1}{2} * r^2 * \text{sen}(11.25^\circ) \rightarrow P_4 = 2^4 * r^2 * \text{sen}(11.25^\circ)$$

Portanto se continuarmos com este mesmo processo de indução, teremos a seguinte sequência:

$$P_5 = 2^5 * \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^5}\right) * r^2$$

$$P_6 = 2^6 * \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^6}\right) * r^2$$

$$P_7 = 2^7 * \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^7}\right) * r^2$$

E assim sucessivamente, podemos concluir que a área do círculo P vai ser dada pela seguinte expressão $P = 2^n * \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right) * r^2$, com n tendendo ao infinito. Usando as nossas ferramentas modernas do cálculo vamos calcular o limite dessa

expressão.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n * \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{2^n} \right) * r^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n * \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{2^n} \right) * r^2) * \left(\frac{2^{-n}}{2^{-n}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{2^n} \right) * r^2}{2^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{2^n} \right)}{2^{-n}} \right) * \lim_{n \rightarrow \infty} r^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{2^n} \right)}{2^{-n}} \right) * r^2$$

Aplicando a adaptação da regra de L'Hospital para esse tipo de limite teremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{2^n} \right)}{2^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \left(\frac{180^\circ}{2^n} \right) * 180^\circ * (-2^{-n}) * \log(2)}{(-2^{-n}) * \log(2)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 180^\circ * \cos \left(\frac{180^\circ}{2^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 180^\circ * \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{180^\circ}{2^n} \right) = 180^\circ * 1 = 180^\circ$$

Portando $\lim_{n \rightarrow \infty} P = 180^\circ * r^2$, mas como $180^\circ = \pi$, concluímos que $P = \pi r^2$.

A partir do Século XVII vários matemáticos da época como, Pierre de Fermat, René Descartes, Jonh Wallis, entre outros já estavam aplicando os resultados com expressões que tendiam para o infinito, mas quando falamos de cálculo diferencial integral é quase impossível não associar a sua criação aos dois matemáticos Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Com interesses parecidos, Newton e Leibniz estavam estudando sobre os objetos que estão em movimento, mas cada um observou de uma forma diferente. Newton mais interessado na velocidade que um objeto apresentava ao cair e Leibniz em diferencial, que para ele significava a diferença entre dois valores a e b muito próximos de um valor x variável, mesmo avaliando coisas distintas, eles chegaram ao mesmo resultado, desse fato que surgiu às acusações em que um tinha plagiado as ideias do outro. Mas hoje sabemos que o cálculo foi criado com a combinação de suas ideias e resultados, um teorema que evidencia isso é o Teorema Fundamental do cálculo, que relaciona integração com derivação.

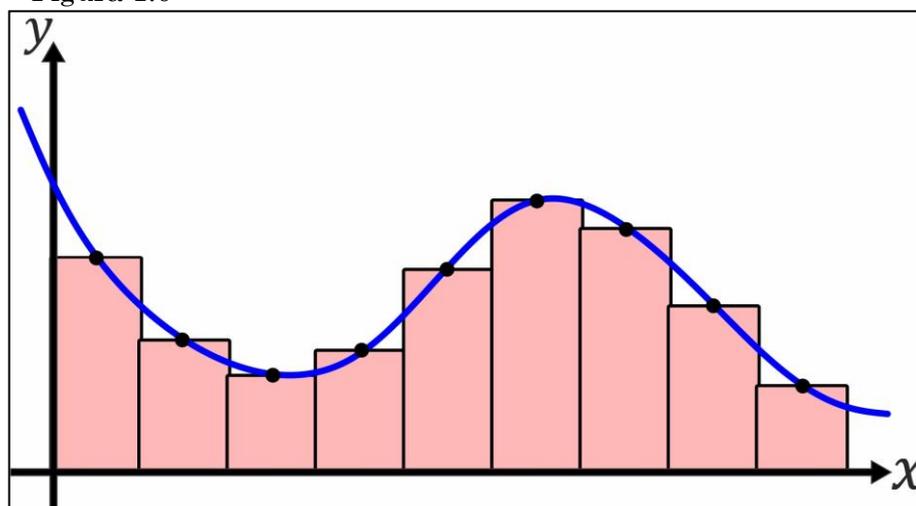
Agora sabemos que Newton e Leibniz criaram as bases do Cálculo, mas, apenas com Riemann e Cauchy foi que o conceito de cálculo integral foi bem formado, com teoremas e resoluções rígidas. Essa teoria foi denominada Integral de Riemann. Por volta de 1854, após Riemann realizar um estudo bem profundo sobre a ela, e este nome também serve para diferenciar a Integral de Riemann de

outros estudos de matemáticos da época, como a Integral de Lebesgue. A forma em que hoje é abordada a integral nos cursos de Cálculo deve se muito a Riemann e Cauchy.

“O método de Riemann consiste em produzir sucessões refinando a quantidade de retângulos de forma que, em alguns casos, pode-se descobrir uma expressão cujo limite é possível calcular” (GUIDORIZZI, 2008)

Para entender sobre a integral de Riemann precisamos falar um pouco sobre a soma de Riemann, um método muito utilizado para calcular áreas sob curvas, que consiste em repartir um intervalo qualquer $[a, b]$ em vários intervalos menores, que sejam suficientemente pequenos para que a função $f(x)$ possa ser considerada constante neste subintervalo, dessa forma teremos ótima aproximação da área sob o gráfico de $f(x)$ neste pequeno subintervalo, que poderemos calcular a área aproximada deles por um retângulo, pois consideramos $f(x)$ constante, finalmente ao somar todas as áreas desses subintervalos teremos a área total aproximada como o valor desta soma.

Figura 1.0

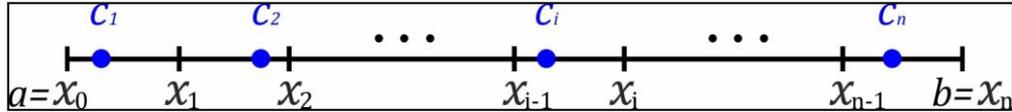


Fonte: Elaborado pelo Autor

Guidorizzi (2008) Defini a soma de Riemann da seguinte forma:

“Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e P uma partição tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Para cada índice i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente”

Figura 1.0.1



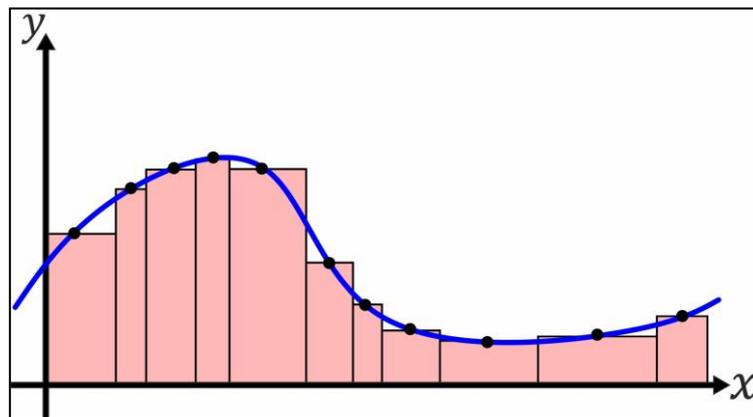
Fonte: Elaborado pelo Autor

Tome $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, pois bem, o número:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$$

Denomina-se soma de Riemann de f , relativa a partição P e aos números c_i .

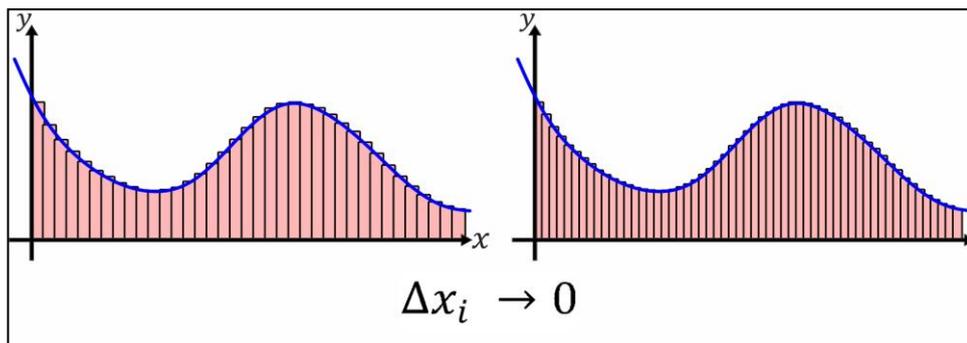
Figura 1.1



Fonte: Elaborado pelo Autor

Agora podemos definir a Integral de Riemann, que informalmente é o limite da soma de Riemann em que $\Delta x_i \rightarrow 0$.

Figura 1.2



Fonte: Elaborado pelo Autor

Guidorizzi (2008) define “Sejam f uma função em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ tende a L , quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, onde $\max \Delta x_i$ representa a amplitude da partição P , ou seja o maior dos números Δx_i , então escrevemos

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L$$

Se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ que só dependa de ε mas não particular escolha dos c_i , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

Para toda partição P de $[a, b]$, com $\text{máx } \Delta x_i < \delta$.

Tal número L , que quando existe é único, denomina-se integral de Riemann de f em $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x) dx$. Então por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Se $\int_a^b f(x) dx$ existe, então diremos que f é *integrável* (Segundo Riemann) em $[a, b]$. É comum referirmo-nos a $\int_a^b f(x) dx$ como *integral definida* de f em $[a, b]$.”

O cálculo diferencial e integral possui uma vasta gama de aplicações, da física moderna a economia neoclássica. Atualmente várias disciplinas utilizam o cálculo, e isso se deve aos muitos matemáticos que desenvolveram esse estudo ao longo dos tempos, e dessa forma hoje possuímos uma ferramenta poderosa na resolução de problemas.

Capítulo 2

Interpolação Numérica

2.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em muitos casos vamos nos deparar com funções que são muito complicadas para se obter a integral definida num intervalo fechado $[a, b]$, por conta da dificuldade de obter sua primitiva, que é uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f , ou ainda uma situação em que temos disponível, apenas uma tabela correspondente aos valores de uma função em determinados pontos (por exemplo, a temperatura ao longo do tempo), mas não temos a expressão analítica dessa função. Sabendo disso a interpolação fornece um simples e bom modo de estimar a expressão analítica, para esses dois casos.

“A necessidade de obter um valor mediador que não consta de uma tabela ocorre comumente. Dados experimentais, tabelas estatísticas e de funções complexas são exemplos desta situação.” (CAMPOS, 2010)

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades. A função $g(x)$ é usada em substituição à função $f(x)$. (RUGGIERO, 1996)

2.2. POLINÔMIOS DE LAGRANGE

Neste capítulo veremos como aproximar uma função $f(x)$ usando um método de interpolação polinomial. Considere a função $f(x)$ que está definida de x_0 até x_n , ou seja, em $(n + 1)$ pontos que são distintos em um certo intervalo $[a, b]$,

considere também $y_j = f(x_j)$, dessa forma a interpolação consiste em encontrar uma função polinomial $g(x)$ tal que:

$$g(x_0) = f(x_0) = y_0$$

$$g(x_1) = f(x_1) = y_1$$

$$g(x_2) = f(x_2) = y_2$$

$$g(x_3) = f(x_3) = y_3$$

⋮

$$g(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

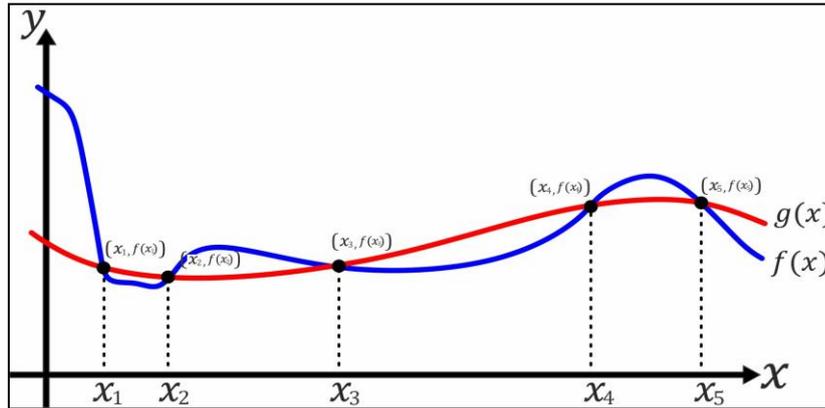
$$g(x_n) = f(x_n) = y_n$$

Esta função polinomial $g(x)$ construída para aproximar a função $f(x)$ é denominada polinômio interpolador, que é de extrema importância para a interpolação numérica, pois como diz Franco:

A aproximação de funções por polinômios é uma das ideias mais antigas da análise numérica, e ainda uma das mais usadas. É bastante fácil entender por que razão isso acontece. Os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade, etc.' (FRANCO 2006)

Joseph L. Lagrange, um dos primeiros matemáticos a conseguir demonstrar o Teorema do Valor Médio foi o criador do polinômio de Lagrange que é uma boa maneira de se resolver problemas de interpolação polinomial. A ideia dele foi desenvolver um polinômio de grau n cujo gráfico passa por $n + 1$ pontos dados.

Figura 2.0



Fonte: Elaborado pelo Autor

Vamos considerar, por exemplo, o caso com $n = 1$, para isso admita as seguintes funções:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ e } L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Dessa forma o Polinômio de Lagrange linear que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é dado por:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1)$$

Podemos notar que

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1$$

Dessa forma teremos que

$$P(x_0) = 1 * f(x_0) + 0 * f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0 * f(x_0) + 1 * f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

Portando $P(x)$ é o único polinômio linear que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) e que interpola f nesses pontos, ou seja, tal que:

$$g(x_0) = f(x_0) = y_0 \text{ e } g(x_1) = f(x_1) = y_1$$

Exemplo 2.0: Vamos determinar o polinômio interpolador de Lagrange que

passa pelos pontos (1,1) e (2,3).

Teremos então que:

$$L_0(x) = \frac{x - 2}{1 - 2} \text{ e } L_1(x) = \frac{x - 1}{2 - 1}$$

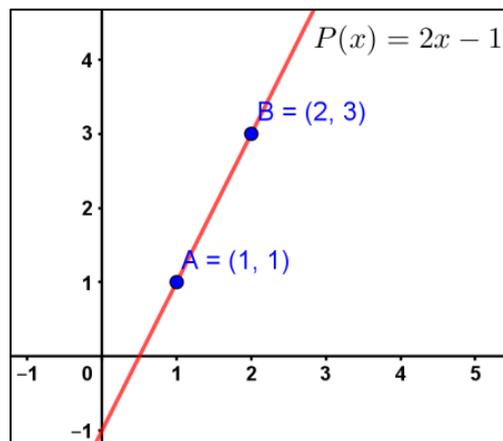
Portanto o polinômio $P(x)$ será:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - 2}{-1} * 1 + \frac{x - 1}{1} * 3$$

$$P(x) = -x + 2 + 3x - 3 = 2x - 1$$

O gráfico de $P(x)$ está plotado na Figura 2.1

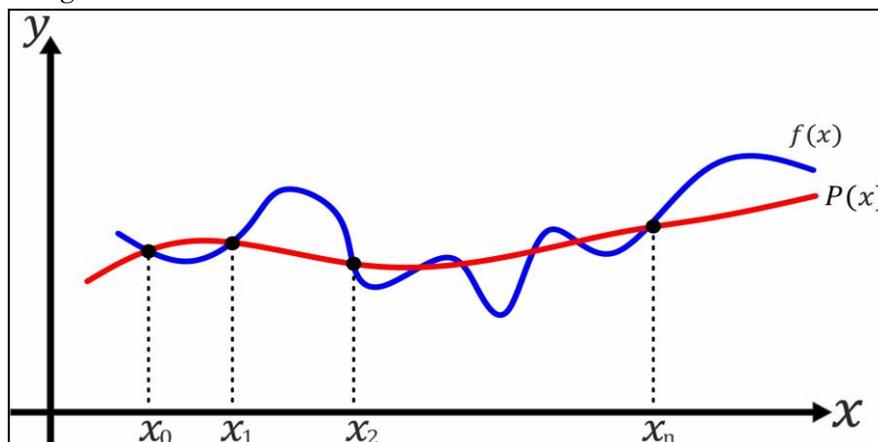
Figura 2.1



Fonte: Elaborado pelo Autor

Agora devemos generalizar o conceito de interpolação linear, pelo interpolador de Lagrange, vamos então considerar um polinômio $P(x)$ de grau n , que passe por $n + 1$ pontos como na figura 2.2.

Figura 2.2



Fonte: Elaborado pelo Autor

Teremos então a necessidade de construir uma função $L_{n,k}(x)$ para cada $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ com uma certa propriedade, em que $L_{n,k}(x_i) = 0$ quando $i \neq k$ e $L_{n,i}(x_k) = 1$ quando $i = k$, para satisfazer a condição $i \neq k \rightarrow L_{n,k}(x_i) = 0$ é necessário que o numerador de $L_{n,k}(x_k)$ contenha o termo:

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

E para satisfazer $i = k \rightarrow L_{n,k}(x_k) = 1$, o denominador do quociente $L_{n,k}(x)$ tem que ser igual ao termo calculado em $x = x_k$, dessa forma teremos que:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

Este polinômio é chamado de enésimo polinômio de Lagrange. No teorema a seguir iremos definir o polinômio $L_{n,k}(x)$.

Teorema 2.0: Se x_0, x_1, \dots, x_n são $n + 1$ números distintos, e f é uma função cujos valores são dados por esses números, então existe um único polinômio $P(x)$ de grau no máximo n

$$f(x_k) = P(x_k), \text{ para cada } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Esse polinômio é dado por:

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x)$$

Onde para cada $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$,

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

$$L_{n,k}(x) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Podemos escrever $L_{n,k}(x)$ por $L_k(x)$ quando não houver confusão quanto ao seu grau.

Exemplo 2.1 - a) considerando $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e os pontos $x_0 = 1, x_1 = 1.5$ e $x_2 = 2$, vamos encontrar o polinômio interpolador de Lagrange de segundo grau para esta função.

Num primeiro momento vamos determinar todos os coeficientes dos polinômios $L_0(x), L_1(x)$ e $L_2(x)$, obteremos então:

$$L_0(x) = \frac{(x - 1.5)(x - 2)}{(1 - 1.5)(1 - 2)} = 2x^2 - 7x + 6$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(1.5 - 1)(1.5 - 2)} = -4x^2 + 12x - 8$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 1)(x - 1.5)}{(2 - 1)(2 - 1.5)} = 2x^2 - 5x + 3$$

Temos também que $f(x_0) = f(1) = 1, f(x_1) = f(1.5) = \frac{4}{9}, f(x_2) = f(2) = \frac{1}{4}$

Desta forma teremos o polinômio interpolador $P(x)$

$$P(x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k)L_k(x)$$

$$P(x) = 1 * L_0(x) + \frac{4}{9} * L_1(x) + \frac{1}{4} * L_2(x)$$

$$P(x) = (2x^2 - 7x + 6) + \frac{4}{9}(-4x^2 + 12x - 8) + \frac{1}{4}(2x^2 - 5x + 3)$$

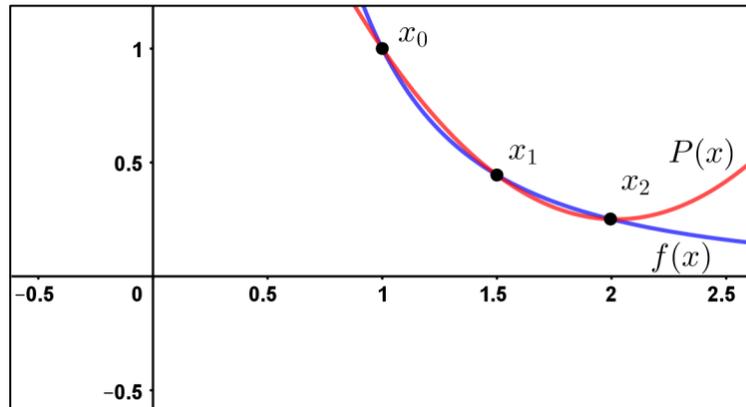
$$P(x) = 2x^2 - 7x + 6 - \frac{16x^2}{9} + \frac{16x}{3} - \frac{32}{9} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{4} + \frac{3}{4}$$

$$P(x) = \frac{13x^2}{18} - \frac{35x}{12} + \frac{115}{36}$$

b) Encontre uma aproximação para $f(1.2)$ com o polinômio interpolador de Lagrange.

$$f(1.2) \approx P(1.2) = \frac{13 * 1.2^2}{18} - \frac{35 * 1.2}{12} + \frac{115}{36} = \frac{661}{900} \approx 0.7344444$$

Figura 2.3



Fonte: Elaborado pelo Autor

2.3. ERRO NA INTERPOLAÇÃO

Ao observar a letra b do Exemplo 2.1 e a figura 2.3 percebemos que é preciso encontrar um limitante para o erro envolvido nesta aproximação de $f(x)$ por $P(x)$, polinômio interpolador, para isso temos o seguinte teorema.

Agora vamos enunciar o Teorema de Rolle generalizado que será utilizado na demonstração do teorema 2.1.

Teorema de Rolle generalizado: Suponha que $f \in C[a, b]$ seja n vezes diferenciável em (a, b) .

Se $f(x) = 0$ em $n + 1$ números distintos $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, então existe um número c em (x_0, x_n) e portanto em (a, b) com $f^n(c) = 0$.

A demonstração desse teorema está fora do intuito desse trabalho, mas ele pode ser encontrado no livro *Análise Numérica* (Burden, 2008).

Teorema 2.1: Suponha que x_0, x_1, \dots, x_n sejam números distintos no intervalo $[a, b]$ e que $f \in C^{n+1}[a, b]$. Então, para cada x em $[a, b]$, existe um número $\sigma(x)$ (geralmente desconhecido) entre $\min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, e o $\max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e conseqüentemente em (a, b) , com

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\sigma(x))}{(n+1)!} * (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Onde $P(x)$ é o polinômio interpolador $P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x)$

Demonstração: Se $x = x_k$, para qualquer $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, então teremos que $f(x_k) = P(x_k)$, e ao escolher $\sigma(x)$ pertencente a (a, b) vai fazer com que a equação $f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\sigma(x))}{(n+1)!} * (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, se torne verdadeira.

Se $x \neq x_k \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, defina a função $g(t)$ pertencente a $[a, b]$ como

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \frac{(t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}$$

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$$

Como $f \in C^{n+1}[a, b]$ e $P \in C^\infty[a, b]$, segue que $g \in C^{n+1}[a, b]$. Para $t = x_k$, teremos

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{(x_k - x_i)}{(x - x_k)} = 0 - [f(x) - P(x)] * 0$$

$$g(x_k) = 0$$

Além disso

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{(x - x_i)}{(x - x_i)} = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0$$

Portanto, como $g \in C^{n+1}[a, b]$ e $g(x) = 0$ nos $n + 2$ números distintos x, x_0, x_1, \dots, x_n .

Utilizando agora o Teorema de Rolle podemos garantir a existência de um número $\sigma \in (a, b)$ em que $g^{(n+1)}(\sigma) = 0$, então:

$$0 = g^{(n+1)}(\sigma) = f^{(n+1)}(\sigma) - P^{(n+1)}(\sigma) - [f(x) - P(x)] \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \right]_{t=\sigma} \quad (I)$$

Como sabemos que $P(x)$ é um polinômio de grau no máximo n , a $(n + 1)$ - ésima derivada, $P^{(n+1)}$, é identicamente nula. Além disso, $\left[\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \right]$ é um polinômio de grau $(n + 1)$, então temos que

$$\left[\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \right] = \left[\frac{t^{n+1}}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \right] + (\text{termos de menor grau em } t)$$

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \right]_{t=\sigma} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

Agora podemos substituir os resultados encontrados na equação (I), ficando da seguinte forma

$$0 = f^{(n+1)}(\sigma) - 0 - [f(x) - P(x)] \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

Finalmente isolando $f(x) - P(x)$ teremos a fórmula do erro

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\sigma)}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

Essa fórmula é de grande importância, pois como os polinômios de Lagrange são amplamente utilizados nos métodos numéricos de integração e diferenciação, ela tem grande serventia na obtenção dos limitantes dos erros desses métodos.

Exemplo 2.2: Utilizando a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ em $[1,2]$ e os resultados obtidos no exemplo 2.1, vamos determinar o erro máximo cometido nesta aproximação.

Como por hipótese $f(x) = \frac{1}{x^2}$, temos

$$f'(x) = -2x^{-3}, \quad f''(x) = 6x^{-4}, \quad f'''(x) = -24x^{-5}$$

Como o polinômio de Lagrange é de grau dois, ou seja $n = 2$, obteremos a seguinte fórmula para o erro

$$\left| \frac{f'''(\sigma(x))}{3!} \right| |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| = \left| -6(\sigma(x))^{-5} \right| |(x - 1)(x - 1.5)(x - 2)|$$

Para $\sigma(x) \in (1,2)$

Vamos encontrar valor máximo de $(\sigma(x))^{-5}$ no intervalo $[1,2]$

$$(\sigma(x))^{-5} = (1)^{-5} = 1$$

Agora vamos determinar o valor máximo neste intervalo do valor absoluto do polinômio.

$$g(x) = (x - 1) \left(x - \frac{3}{2} \right) (x - 2) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - 3$$

Vamos calcular a derivada de $g(x)$ para obter os pontos críticos

$$g'(x) = 3x^2 - 9x + \frac{13}{2}$$

Os pontos críticos acontecem em

$$x' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \rightarrow g(x') = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

$$x'' = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \rightarrow g(x'') = -\frac{\sqrt{3}}{36}$$

Assim teremos que o erro máximo é

$$\frac{f'''(\sigma(x))}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \leq 6(\sigma(x))^{-5} |(x - 1)(x - 1.5)(x - 2)|$$

$$\frac{f'''(\sigma(x))}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \leq 6 \left| \frac{\sqrt{3}}{36} \right| = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2886751$$

Capítulo 3

Integração Numérica

Sabemos que para se conseguir uma solução para uma integral definida $\int_a^b f(x)dx$ devemos encontrar uma fórmula $g(x)$ para uma de suas primitivas, e então calcular $g(b) - g(a)$, tudo isso com base no teorema fundamental do cálculo. Mas existe certas funções que são extremamente complicadas de se encontrar sua primitiva, ou até mesmo não existe uma primitiva em termos de funções elementares, ou então em casos de experimentos obtidos por análises, onde temos somente dados e não uma função que expresse esses números. Dessa forma precisaremos de métodos de aproximação desses valores, obtidos por métodos numéricos no cálculo de integrais definidas, chamados de Integração Numérica, que serão apresentados no decorrer deste capítulo.

Um bom exemplo de quando é preciso utilizar métodos numéricos na obtenção de resultados na integração se dá quando queremos calcular a área de uma superfície de revolução, Segundo Stewart (2013), “uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada em torno de uma reta. Essa superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução”.

Temos que a área S da superfície de revolução é dada por

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Podemos perceber que dependendo da função $f(x)$ essa área se torna difícil de encontrar, pela impossibilidade de se obter uma primitiva.

A integração numérica é uma técnica de aproximação de uma integral usando métodos numéricos. O cálculo numérico de uma integral é às vezes chamado de quadratura. Christoph W. Ueberhuber foi uns dos primeiros a usar o nome quadratura para significar a área da computação numérica que serve para a aproximação de uma solução de uma integral definida. Existe uma vasta gama de

métodos disponíveis para integração numérica, umas das técnicas mais utilizadas, também considerada mais completa são as fórmulas de Newton-Cotes, que também são conhecidas como fórmulas de quadratura numérica.

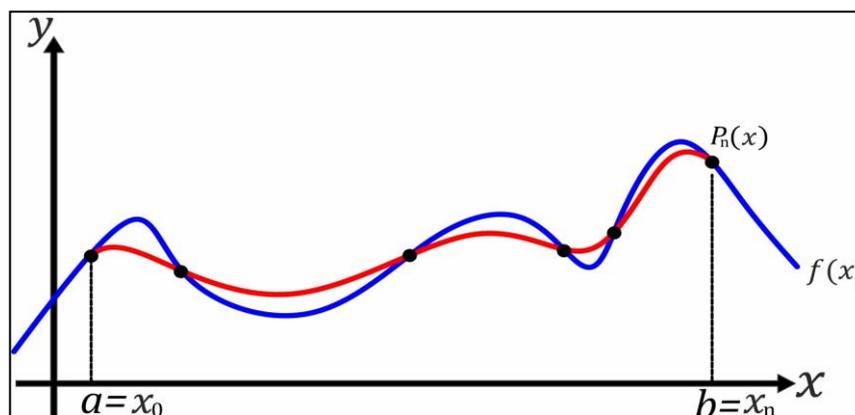
Os métodos de quadratura abordados neste capítulo serão baseados nos polinômios interpoladores de Lagrange visto anteriormente no capítulo 2.

3.1. FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

As fórmulas de Newton-Cotes são uma família bem útil e direta para os métodos de Integração Numérica, e são classificadas em abertas e fechadas.

Burden (2008) define **fórmulas fechadas de Newton-Cotes** da seguinte forma: “A fórmula fechada de Newton-Cotes de $(n + 1)$ pontos usa nós $x_i = x_0 + ih$, para $i = 0, 1, \dots, n$ em que $x_0 = a, x_n = b$ e $h = \frac{(b-a)}{n}$. É denominada fechada porque as extremidades do intervalo fechado $[a, b]$ são incluídas como nós”. Como na figura 3.0

Figura 3.0



Fonte: Elaborado pelo Autor

A fórmula assume a forma

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

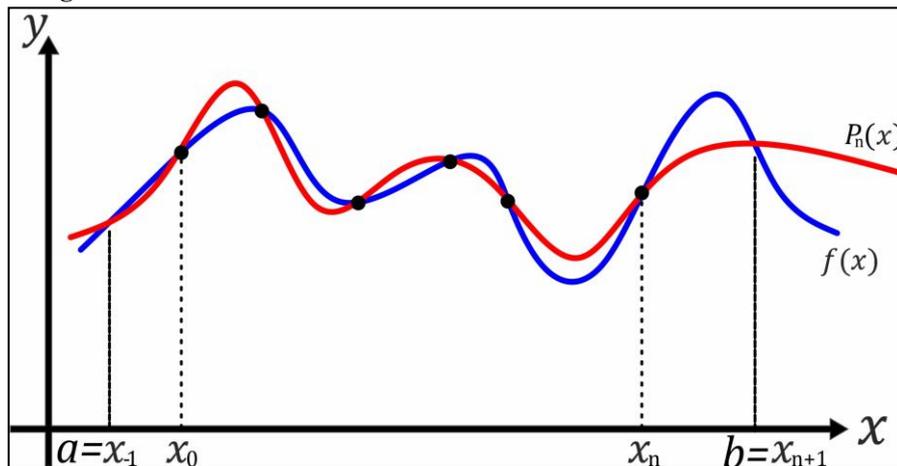
Em que

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx$$

Ainda segundo Burden (2008), temos a definição das **fórmulas abertas de Newton-Cotes**.

“As fórmulas abertas de Newton Cotes não incluem as extremidades de $[a, b]$ como nós. Elas usam os nós $x_i = x_0 + ih$, para cada $i = 0, 1, 2, \dots, n$, em que $h = \frac{(b-a)}{(n+2)}$ e $x_0 = a + h$. Isso implica que $x_n = b - h$ ”, então definiremos os extremos por $x_{-1} = a$ e $x_n = b - h$, como na figura 3.1

Figura 3.1



Fonte: Elaborado pelo Autor

Em uma fórmula aberta, todos os nós usados na aproximação estão contidos no intervalo aberto (a, b) . As fórmulas se tornam:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

Em que novamente

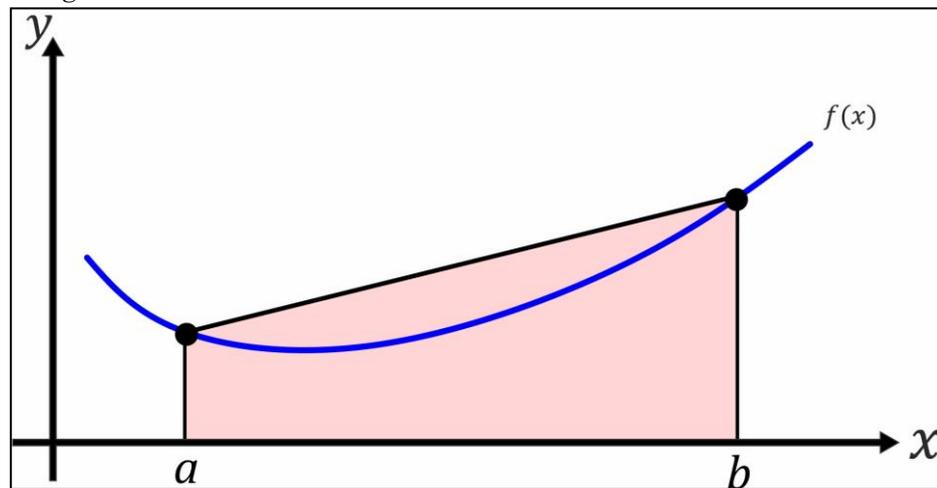
$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx$$

Neste trabalho será utilizada somente as fórmulas de Newton-Cotes fechadas, devido a melhor maneira de interpretação e aplicação de sua fórmula.

3.1.1 REGRA DO TRAPÉZIO

A regra do trapézio é um método muito utilizado para estimar a área abaixo de uma curva. Sabemos que esta área é calculada através da integração, desse modo a regra do trapézio fornece uma maneira de estimar integrais. Ela funciona dividindo a área sob uma curva em vários trapézios, pois sabemos como calcular a área de um trapézio. Devido à forma como os trapézios seguem a curva, eles dão uma estimativa do valor da área muito melhor que os retângulos vistos anteriormente, usados por Riemann.

Figura 3.2



Fonte: Elaborado pelo Autor

A figura acima mostra a aproximação pelo método dos trapézios da área sob a curva da função $f(x)$.

Vejamos como definir a regra do trapézio na aproximação de $\int_a^b f(x)dx$, vamos considerar o intervalo $[a, b]$, em que $x_0 = a$ e $x_1 = b$, tome $h = b - a$, utilizando o polinômio linear de Lagrange teremos:

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Assim pela a interpolação de $f(x)$,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right] dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\sigma(x))(x - x_0)(x - x_1) \quad (3.0)$$

Sabemos que no intervalo $[x_0, x_1]$ a função $(x - x_0)(x - x_1)$ não altera de sinal, pois x_0 e x_1 são raízes, então podemos utilizar o **Teorema do Valor Médio com peso para integrais**: Se $f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$ e a integral de Riemann de $g(x)$ existe em $[a, b]$ e não se altera neste intervalo, então existe um número $c \in (a, b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

A demonstração desse teorema é avançada e será omitida, ele está demonstrado no livro de Advanced Calculus (Fulks, 1978).

Assim poderemos aplicar o teorema citado na parcela do erro, para nos fornecer um número $\sigma \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\sigma(x))(x - x_0)(x - x_1) &= \frac{f''(\sigma)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) \\ &= \frac{f''(\sigma)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x^2 - x(x_0 + x_1) + x_0x_1) = \frac{f''(\sigma)}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2(x_0 + x_1)}{2} + x_0x_1x \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= \frac{f''(\sigma)}{2} \left[\frac{(x_1^3 - x_0^3)}{3} + \frac{(x_0 - x_1)(x_0 + x_1)^2}{2} + x_0x_1(x_1 - x_0) \right] \\ &= \frac{f''(\sigma)}{2} \left[\frac{1}{6} (x_0^3 - 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 - x_1^3) \right] \end{aligned}$$

Se tomarmos $x_1 = x_0$ veremos que x_0 e x_1 são raízes dessa equação e ela pode ser reescrita como cubo perfeito, logo teremos:

$$= \frac{f''(\sigma)}{2} \left[-\frac{1}{6} (x_1 - x_0)^3 \right], \text{ mas como } x_0 = a \text{ e } x_1 = b$$

$$= -\frac{f''(\sigma)}{12}(b-a)^3 = -\frac{f''(\sigma)}{12}(h)^3$$

Voltando para a equação 3.0, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \right] dx - \frac{h^3}{12} f''(\sigma)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_1) dx + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0) dx - \frac{h^3}{12} f''(\sigma)$$

Resolvendo essas integrais pelo método da substituição *udu*

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \left[\frac{(x-x_1)^2}{2} \right]_{x_0}^{x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0} \left[\frac{(x-x_0)^2}{2} \right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(\sigma)$$

$$= \frac{f(x_0)}{x_1-x_0} * \frac{(x_1-x_0)^2}{2} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0} * \frac{(x_1-x_0)^2}{2} - \frac{h^3}{12} f''(\sigma)$$

$$= \frac{x_1-x_0}{2} * [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\sigma)$$

Como $h = b - a$ e $x_0 = a$ e $x_1 = b$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} * [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\sigma)$$

Esta é a regra dos trapézios simples, pois, como dito anteriormente aproxima o valor de $\int_a^b f(x) dx$ pela a área de um trapézio.

Exemplo 3.0: Calcular $\int_1^2 \sqrt{(1+x^2)} dx$ pela regra do trapézio simples.

$$h = 5 - 1 = 4$$

$$f(a) = \sqrt{(1+1^2)} = \sqrt{2}$$

$$f(b) = \sqrt{(1+5^2)} = \sqrt{26}$$

$$\int_1^5 \sqrt{(1+x^2)} dx \approx \frac{4}{2} * [\sqrt{2} + \sqrt{26}] \approx 13.0264662$$

Vale salientar que, como podemos observar o erro da regra do trapézio contém uma derivada de segunda ordem f'' , assim ela acaba fornecendo um

resultado exato para funções cuja segunda derivada seja nula, assim concluímos que para qualquer polinômio de grau menor ou igual a um a regra do trapézio é exata.

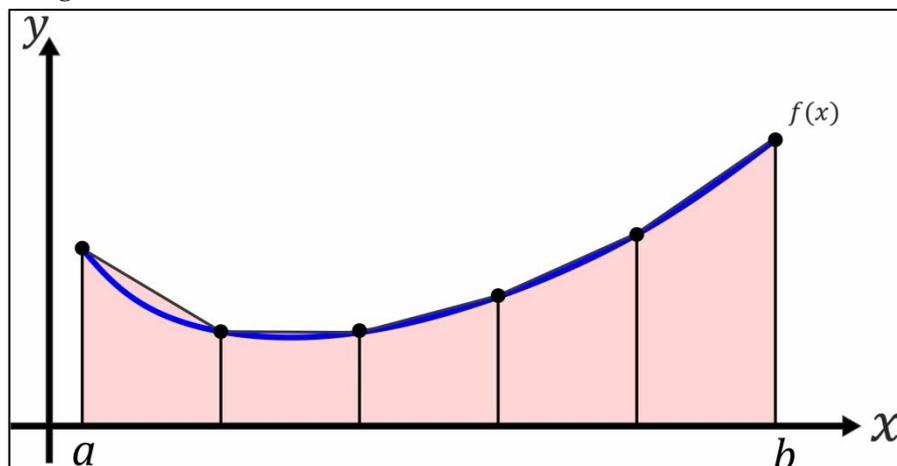
Ainda podemos generalizar a ideia da regra do trapézio, basta escolher um inteiro n para subdividir o intervalo $[a, b]$, ficando com n subdivisões, iremos aplicar a cada subintervalo a regra do trapézio.

Segundo Burden (2008) “a extensão da regra do trapézio é dada sem demonstração. Como a regra do trapézio requer somente um intervalo para cada aplicação, o inteiro n pode ser tanto ímpar quanto par”.

Teorema 3.1: Sejam $f \in C^2 [a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ e $x_j = a + jh$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Existe um $\mu \in (a, b)$ para qual a **regra do trapézio composta** para n subintervalos pode ser escrita com seu termo de erro como:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} * \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right] - \frac{(b-a)}{12} * h^2 * f''(\mu)$$

Figura 3.3



Fonte: Elaborado pelo Autor

O gráfico da figura 3.3 mostra que para cada subintervalo de $[a, b]$ ocorre uma aproximação da curva de $f(x)$ por uma função linear. Dessa forma consideramos a área sob o gráfico da função afim em cada partição, sendo a soma de todas as áreas desses trapézios calculada como aproximação da área sob o

gráfico de $f(x)$ em $[a, b]$.

O Algoritmo 3.0 – Regra do Trapézio Composta

Entrada: Intervalo $[a, b]$, Número de Subintervalos n

Passo 1: Faça $h = (b - a)/n$

Passo 2: Faça $x = a + h$

Passo 3: Faça $s = 0$

Passo 4: Para $i = 1, \dots, n - 1$, Execute os Passos 5 e 6

Passo 5: Faça $s = s + (2 * f(x))$

Passo 6: Faça $x = x + h$

Passo 7: $t = \frac{h}{2} * (f(a) + f(b) + s)$

Saída: t

Fonte: Elaborado pelo Autor

O resultado da Integral de $f(x)$ será o valor de t .

As variáveis a, b, s, x, t, h , são do tipo reais.

As variáveis i, n são do tipo inteiras.

Vale salientar que no Algoritmo 3.0, se $n = 1$ a regra do trapézio passa a ser simples.

Exemplo 3.1: Aplique o Algoritmo da regra do trapézio na integral

$\int_0^5 x^{\frac{5}{2}} dx$, com $n = 2, 4, 8, 16, \dots, 128$. Represente em uma tabela os valores obtidos e o respectivo erro.

Tabela 3.0

n	Valor da Integral	Erro
02	94,5824203	14,722849675
04	83,5147629	3,655192275
08	80,7708893	0,911318675
16	80,0871735	0,227602875
32	79,9164429	0,056872275
64	79,8737946	0,014223975
128	79,8631287	0,003558075

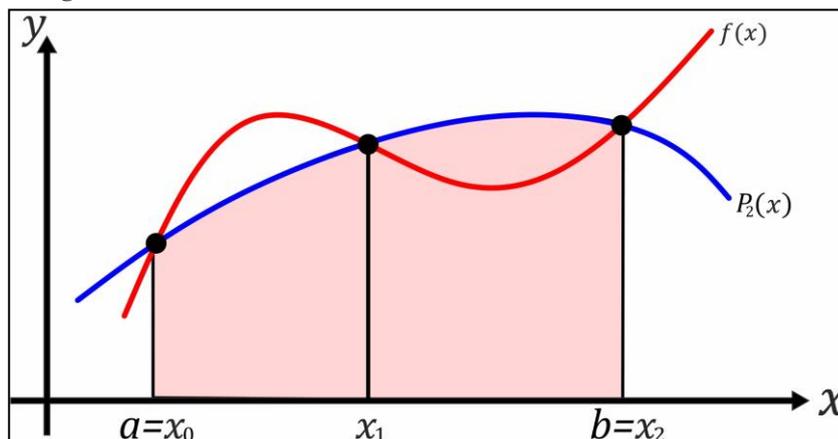
Fonte: Elaborado pelo Autor

3.1.2 REGRA $\frac{1}{3}$ DE SIMPSON

A Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson é um método numérico que também é usado para encontrar $\int_a^b f(x)dx$, aproximando o valor dessa integral definida de $f(x)$, mas diferentemente da regra do trapézio, Simpson usa polinômios quadráticos, ou seja, arcos parabólicos, que podem apresentar melhores aproximações em relação à regra do trapézio.

Segundo Burden (2008) “a regra de Simpson resulta da integração em $[a, b]$ do segundo polinômio de Lagrange com nós igualmente espaçados $x_0 = a$, $x_2 = b$ e $x_1 = a + h$ em que $h = \frac{b-a}{2}$ ”. Observe a figura 3.4.

Figura 3.4



Fonte: Elaborado pelo Autor

Sabendo disso precisamos somente dos três pontos x_0, x_1 e x_2 para deduzir a fórmula da regra de Simpson simples, assim poderemos calcular $\int_a^b f(x)dx$, pela aproximação de um polinômio interpolador de Lagrange $P_2(x)$ que interpola $f(x)$, assim teremos que $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx$, onde $P_2(x)$ é da seguinte forma

$$P_2(x) = y_0 * \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 * \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 * \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Onde $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

Sabemos que $a = x_0$ e $b = x_0 + 2h$, pois o intervalo $[a, b]$ é igualmente espaçado, dessa forma teremos $\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} P_2(x)dx$

$$\int_{x_1}^{x_0+2h} P_2(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} y_0 * \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 * \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 * \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx$$

Considere $z = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{(x-x_0)}{h}$ e vamos reescrever o polinômio $P_2(x)$ com essa nova variável.

$$P_2(z) = y_0 * \frac{(x-(x_0+h))(x-(x_0+2h))}{-h \cdot -2h} + y_1 * z \frac{(x-(x_0+2h))}{-h} + y_2 * \frac{(x-x_0)(x-(x_0+h))}{2h \cdot h}$$

$$P_2(z) = y_0 * \left(\frac{(x-x_0)}{-h} + 1 \right) \left(\frac{(x-x_0)}{-2h} + 1 \right) + y_1 * z \left(\frac{(x-x_0)}{-h} + 2 \right) + y_2 * \frac{z}{2} \left(\frac{(x-x_0)}{-h} - 1 \right)$$

$$P_2(z) = y_0 * (-z+1) \left(\frac{-z}{2} + 1 \right) + y_1 * z(-z+2) + y_2 * \frac{z}{2}(z-1)$$

Como foi feita a mudança de variável para calcular a integral teremos que alterar os limites da integração.

$$z = \frac{(x-x_0)}{h} \rightarrow dx = dz * h$$

$$x = x_0 \rightarrow z = 0 \quad e \quad x = x_0 + 2h \rightarrow z = 2$$

Então

$$\int_{x_1}^{x_0+2h} P_2(x)dx = \int_0^2 P_2(z)h dz$$

Dessa forma teremos

$$\int_0^2 P_2(z)h dz = \int_0^2 \left(y_0 * (-z + 1) \left(\frac{-z}{2} + 1 \right) + y_1 * z(-z + 2) + y_2 * \frac{z}{2}(z - 1) \right) h dz$$

Agora vamos encontrar a solução para esta integral

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(y_0 * \left(\frac{z}{2} - z - \frac{z}{2} + 1 \right) + y_1 * (-z^2 + 2z) + y_2 * \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z}{2} \right) \right) h dz = \\ h * \left[y_0 \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{4} + z \right) + y_1 \left(-\frac{z^3}{3} + z^2 \right) + y_2 \left(-\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4} \right) \right]_0^2 = \\ h * \left[y_0 \left(\frac{8}{6} - 2 - 1 + 2 \right) + y_1 \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) + y_2 \left(-\frac{8}{6} - 1 \right) \right] = \\ h * \left[y_0 \left(\frac{1}{3} \right) + y_1 \left(\frac{4}{3} \right) + y_2 \left(\frac{1}{3} \right) \right] = \\ \frac{h}{3} * [y_0 + 4y_1 + y_2] \end{aligned}$$

Então temos que

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_1}^{x_0+2h} P_2(x) dx = \int_0^2 P_2(z)h dz = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

Mas ainda precisamos encontrar o erro apresentado nessa aproximação que fizemos, vamos então considerar a que a integral $\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx$ possui solução analítica e que seja igual a $F(x_0 + 2h) - F(x_0)$ e então vamos subtrair a solução aproximada que encontramos $\frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$ da solução analítica.

Como $F(x_0 + 2h)$ é analítica podemos expandir em série de Taylor truncada

$$F(x_0 + 2h) = F(x_0) + F'(x_0)2h + \frac{F''(x_0) (2h)^2}{2!} + \frac{F'''(x_0) (2h)^3}{3!} + \frac{F^{IV}(x_0) (2h)^4}{4!} + \frac{F^V(x_0) (2h)^5}{5!}$$

Podemos também expandir em série de Taylor y_1 e y_2 truncada.

$$y_1 = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)h^3}{3!} + \frac{f^{IV}(x_0)h^4}{4!}$$

$$y_2 = f(x_0 + 2h) = f(x_0) + f'(x_0)2h + \frac{f''(x_0)4h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(2h)^3}{3!} + \frac{f^{IV}(x_0)(2h)^4}{4!}$$

Então temos o erro dado por $Er = F(x_0 + 2h) - F(x_0) - \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$

Logo:

$$Er = F(x_0) + F'(x_0)2h + \frac{F''(x_0)(2h)^2}{2!} + \frac{F'''(x_0)(2h)^3}{3!} + \frac{F^{IV}(x_0)(2h)^4}{4!} + \frac{F^V(x_0)(2h)^5}{5!} - F(x_0) - \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

$$Er = F'(x_0)2h + \frac{F''(x_0)(2h)^2}{2!} + \frac{F'''(x_0)(2h)^3}{3!} + \frac{F^{IV}(x_0)(2h)^4}{4!} + \frac{F^V(x_0)(2h)^5}{5!} - \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

Sabemos que a derivada da primitiva é a própria função pelo Teorema Fundamental do Cálculo, assim teremos $F'(x) = f(x)$.

$$Er = f(x_0)2h + \frac{f'(x_0)(2h)^2}{2!} + \frac{f''(x_0)(2h)^3}{3!} + \frac{f'''(x_0)(2h)^4}{4!} + \frac{f^{IV}(x_0)(2h)^5}{5!} - \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

Logo teremos

$$Er = f(x_0)2h + \frac{f'(x_0)(2h)^2}{2!} + \frac{f''(x_0)(2h)^3}{3!} + \frac{f'''(x_0)(2h)^4}{4!} + \frac{f^{IV}(x_0)(2h)^5}{5!} - \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \left(f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)h^3}{3!} + \frac{f^{IV}(x_0)h^4}{4!} \right) + f(x_0) + f'(x_0)2h + \frac{f''(x_0)(2h)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(2h)^3}{3!} + \frac{f^{IV}(x_0)(2h)^4}{4!} \right]$$

Agrupando termo a termo essa expressão do erro, obteremos a seguinte equação:

$$Er = \left[f(x_0)2h - \frac{h}{3} * 6f(x_0) \right] + \left[f'(x_0) \frac{4h^2}{2!} - \frac{h}{3} (4f'(x_0)h + f'(x_0)2h) \right] + \left[f''(x_0) \frac{8h^3}{3!} - \frac{h}{3} \left(4f''(x_0) \frac{h^2}{2!} + f''(x_0) \frac{4h^2}{2!} \right) \right] +$$

$$\left[f'''(x_0) \frac{(2h)^4}{4!} - \frac{h}{3} \left(4f'''(x_0) \frac{h^3}{3!} + f'''(x_0) \frac{(2h)^3}{3!} \right) \right] +$$

$$\left[f^{IV}(x_0) \frac{(2h)^5}{5!} - \frac{h}{3} \left(4f^{IV}(x_0) \frac{h^4}{4!} + f^{IV}(x_0) \frac{(2h)^4}{4!} \right) \right]$$

Podemos ver que o único termo que não se anula é o que possui $f^{IV}(x_0)$, que é o último termo, dessa forma podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$Er = \left[f^{IV}(x_0) \frac{(2h)^5}{5!} - \frac{h}{3} \left(4f^{IV}(x_0) \frac{h^4}{4!} + f^{IV}(x_0) \frac{(2h)^4}{4!} \right) \right]$$

$$Er = f^{IV}(x_0) \frac{32h^5}{120} - f^{IV}(x_0) \frac{20h^5}{72}$$

$$Er = \frac{-h^5}{90} f^{IV}(x_0)$$

O valor de x_0 pode ser substituído na fórmula por $\sigma \in (x_0, x_2)$. (Burden, 2008)

Então a regra de Simpson simples é dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{IV}(x_0)$$

Podemos observar que o termo do erro depende da quarta derivada de f , dessa forma concluímos que teremos resultados exatos para qualquer integral de polinômio de grau menor ou igual a 4.

Exemplo 3.2: Calcular $\int_2^3 \frac{dx}{1+x}$ pela regra de Simpson simples

$$h = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$f(x_1) = \frac{1}{1+5/2} = \frac{2}{7}$$

$$f(x_2) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

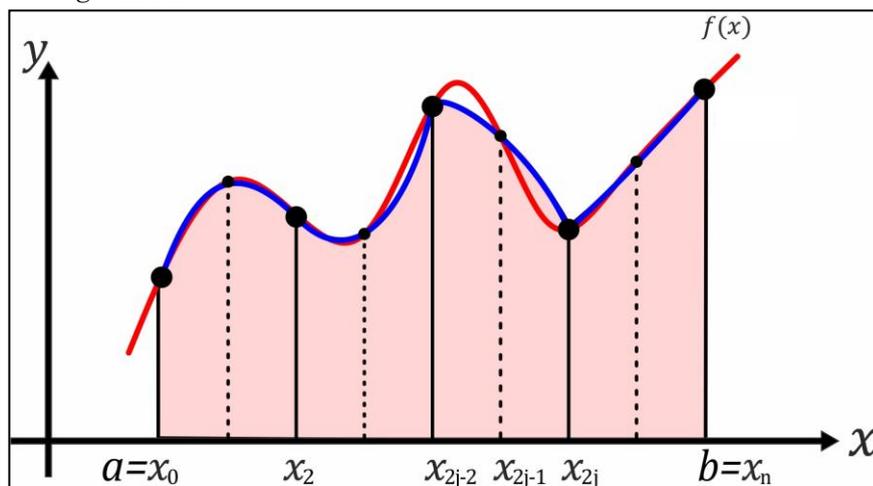
$$\int_2^3 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1/2}{3} * \left[\frac{1}{3} + 4 \frac{2}{7} + \frac{1}{4} \right] \approx 0.28769841$$

Ainda podemos generalizar a ideia da regra de Simpson, Segundo Burden (2008) “Para generalizar esse procedimento para uma integral arbitrária $\int_a^b f(x)dx$, escolha um inteiro n par. Subdivida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos e aplique a regra de Simpson em cada par consecutivo de subintervalos.”

Teorema 3.2: Sejam $f \in C^4 [a, b]$, n par, $h = \frac{b-a}{n}$ e $x_j = a + jh$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Existe um $\mu \in (a, b)$ para qual a **regra de Simpson composta** para n subintervalos pode ser escrita com seu termo de erro como:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(b) \right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{IV}(\mu)$$

Figura 3.5



Fonte: Elaborado pelo Autor

O gráfico da figura 3.5 mostra que para cada subintervalo de $[a, b]$ ocorre uma aproximação da curva de $f(x)$ por uma função quadrática. Dessa forma consideramos a área sob o gráfico em cada partição, sendo a soma de todas as áreas a aproximação da área sob o gráfico de $f(x)$ em $[a, b]$.

O Algoritmo 3.1 – Regra de Simpson Composta

Entrada: Intervalo $[a, b]$, Número de Subintervalos n par

Passo 1: Faça $h = (b - a)/n$

Passo 2: Faça $t_0 = f(a) + f(b)$

Passo 3: Faça $t_1 = 0$

Passo 4: Faça $t_2 = 0$

Passo 5: Para $i = 1, \dots, n - 1$, Execute os Passos 6 e 7

Passo 6: Faça $x = a + i * h$

Passo 7: Se i for par, faça $t_2 = t_2 + f(x)$

Se não, faça $t_1 = t_1 + f(x)$

Passo 8: $t = \frac{h}{3} * (t_0 + 2 * t_2 + 4 * t_1)$

Saída: t

Fonte: Elaborado pelo Autor

O resultado da Integral de $f(x)$ será o valor de t .

As variáveis $a, b, x, t, t_0, t_1, t_2, h$, são do tipo reais.

As variáveis i, n são do tipo inteiras.

Vale salientar que no Algoritmo 3.1, se $n = 2$ a regra de Simpson passa a ser simples.

Exemplo 3.2: Vamos aplicar o Algoritmo da regra de Simpson na integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, com $n = 2, 4, 8, 16, \dots, 128$ e representar em uma tabela os valores obtidos e o respectivo erro.

Tabela 3.1

n	Valor da Integral	Erro
02	0,74718046188354	$3,56435776 * 10^{-4}$
04	0,74685543775558	$3,14116478 * 10^{-5}$
08	0,74682611227036	$2,08616257 * 10^{-6}$
16	0,74682426452637	$2,38418579 * 10^{-7}$
32	0,74682408571243	$5,96046448 * 10^{-8}$
64	0,74682426452637	$2,38418579 * 10^{-7}$
128	0,74682420492172	$1,78813934 * 10^{-7}$

Fonte: Elaborado pelo Autor

3.1.3. QUADRATURA DE GAUSS

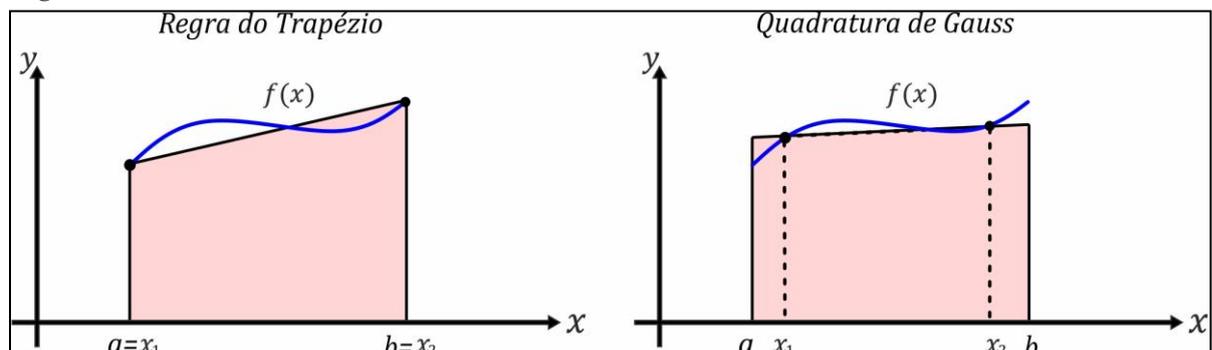
Nas seções anteriores vimos dois métodos de quadratura numérica, a regra do trapézio e a regra de Simpson, que consistem em encontrar um valor aproximado para uma integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Obtemos, através da fórmula de Newton-Cotes fechada, essa aproximação $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_n(x) dx + R_{n+1}$, onde P_n é um polinômio de grau n que interpola a função $f(x)$ nos pontos $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \dots, n$ em que $x_0 = a$, $x_n = b$ e $h = \frac{(b-a)}{n}$ e R_{n+1} é o resto desta integração, e pudemos notar também que essa aproximação é exata quando $f(x)$ for um polinômio de grau menor ou igual a n , ou seja $R_{n+1} = 0$.

Todas as fórmulas de Newton-Cotes usam valores da função em pontos igualmente espaçados. Essa restrição é conveniente quando as fórmulas são combinadas para formar as regras compostas [...], mas isso pode reduzir significativamente a precisão da aproximação. (Burden, 2008)

Na quadratura de Gauss vamos também aproximar $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n c_i f(x_i)$, mas os nós que utilizamos na integração não serão mais igualmente espaçados no intervalo $[a, b]$ como nas fórmulas de Newton-Cotes. Segundo Burden (2008), “A quadratura de Gauss escolhe os pontos para cálculo de uma forma ótima, em vez de igualmente espaçados. Os nós $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ no intervalo $[a, b]$ e coeficientes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, são escolhidos para minimizar o erro esperado na aproximação.”

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n c_i f(x_i)$$

Figura 3.6



Fonte: Elaborado pelo Autor

Teremos que os nós $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ serão escolhidos arbitrariamente dentro do intervalo $[a, b]$ e os coeficientes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ são todos arbitrários sem restrição. Então teremos que escolher $2n$ parâmetros, se os coeficientes do polinômio forem classificados também como parâmetros, segundo Burden (2008) “ a classe de polinômios de grau no máximo $2n - 1$ também contem $2n$ parâmetros. Essa, então, é a maior classe de polinômios para qual [...] a fórmula será exata ”

Para obtenção dos melhores parâmetros na quadratura Gaussiana vamos considerar o exemplo quando $n = 2$ e o intervalo $[a, b]$ seja $[-1, 1]$.

Suponha que queremos determinar c_1, c_2, x_1 e x_2 de maneira que a fórmula de integração

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Forneça o resultado exato sempre que $f(x)$ seja um polinômio de grau menor ou igual a $2n - 1 = 2(2) - 1 = 3$, ou seja, quando

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Assim teremos que

$$\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx = c_1 (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3) + c_2 (a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3)$$

$$a_0(1 - (-1)) + a_1 \frac{(1^2 - (-1)^2)}{2} + a_2 \frac{(1^3 - (-1)^3)}{3} + a_3 \frac{(1^4 - (-1)^4)}{4} =$$

$$a_0(c_1 + c_2) + a_1(c_1 x_1 + c_2 x_2) + a_2(c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2) + a_3(c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3)$$

Podemos assim igualar os coeficientes da equação.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \\ c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Ao resolver esse sistema veremos que

$$c_1 = 1, c_2 = 2, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então a fórmula de aproximação é

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 1 \cdot f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ela é exata para polinômios de grau menor ou igual a três.

Polinômios de Legendre

Uma maneira mais fácil de encontrar os parâmetros da quadratura de Gauss é a utilização dos polinômios de Legendre, Segundo Burden (2008) considere “conjuntos de polinômios ortogonais, funções que têm a propriedade de que uma integral definida particular do produto de quaisquer delas será 0. O conjunto relevante para o nosso problema é o conjunto dos polinômios de Legendre.”

Esse conjunto é uma coleção $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots\}$ com as seguintes propriedades:

1. Para cada n , $P_n(x)$ é um polinômio mônico (que possui coeficiente dominante igual a 1) de grau n

2. $\int_{-1}^1 P(x)P_n(x)dx = 0$ sempre que $P(x)$ for de grau menor que n

Primeiros polinômios de Legendre

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x, \quad P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

As raízes dos polinômios de Legendre então contidas no intervalo $(-1,1)$, e possuem simetria em relação a origem, e elas são a solução para o problema de determinar os parâmetros na quadratura gaussiana .

“Os nós $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ necessários para produzir uma fórmula de aproximação integral que forneça resultados exatos para todo polinômio de grau menor ou igual a $2n$ são as raízes do polinômio de Legendre de grau n .” (Burden, 2008)

Teorema 3.3: Suponha que $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sejam as raízes do n -ésimo polinômio de Legendre $P_n(x)$ e que para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$, os números c_i sejam definidos por

$$c_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Se $P(x)$ é qualquer polinômio de grau menor que $2n$, então

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i)$$

Demonstração: Considere primeiramente um polinômio $P(x)$ com grau menor que n e vamos reescrever $P(x)$ como um $(n-1)$ -ésimo coeficientes polinomiais de Lagrange com nós nas raízes do n -ésimo polinômio de Legendre $P_n(x)$. O termo de erro para essa representação inclui a n -ésima derivada de $P(x)$. Uma vez que $P(x)$ tem grau menor que $2n$, a n -ésima derivada de $P(x)$ é 0 e sua representação é exata. Então:

$$P(x) = \sum_{i=1}^n P(x_i) L_i(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P(x_i)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(x) dx &= \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P(x_i) \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \right] P(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i) \end{aligned}$$

Então

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i)$$

O que prova a hipótese para polinômios com grau menor que n

Se dividirmos $P(x)$, sendo um polinômio de grau de no mínimo n , mas menor que $2n$, por um n -ésimo polinômio de Legendre $P_n(x)$, vamos obter $Q(x)$ quociente

da divisão e $R(x)$ o resto desta operação, e todos eles com grau menor que n , então teremos

$$P(x) = Q(x)P_n(x) + R(x)$$

Observe que x_i é uma raiz de $P_n(x)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, temos que

$$Q(x_i)P_n(x_i) = 0$$

$$P(x_i) = Q(x_i)P_n(x_i) + R(x_i)$$

$$P(x_i) = R(x_i)$$

Sabendo das propriedades dos polinômios de Legendre, o grau de $Q(x)$ é menor que n , então pela segunda propriedade teremos que

$$\int_{-1}^1 Q(x)P_n(x)dx = 0$$

Agora como $R(x)$ é um polinômio de grau menor que n , pela primeira parte da demonstração onde usamos um polinômio com grau menor que n , podemos escrever

$$\int_{-1}^1 R(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i R(x_i)$$

Podemos então juntar todos esses resultados e verificar que a fórmula é exata para o polinômio $P(x)$:

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \int_{-1}^1 [Q(x)P_n(x) + R(x)]dx = \int_{-1}^1 R(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i R(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i)$$

As constantes c_i presentes na regra da quadratura gaussiana podem ser encontradas a partir do Teorema 3.3, mas para facilitar a obtenção das constantes as raízes dos polinômios de Legendre são tabuladas, na tabela 3.2 a seguir onde são apresentados alguns valores com $n = 2,3,4$ e 5

Tabela 3.2

n	Raízes $r_{n,i}$	Coefficientes $c_{n,i}$
02	0,5773502692	1,0000000000
	-0,5773502692	1,0000000000
03	0,7745966692	0,5555555556
	0,0000000000	0,8888888889
	-0,7745966692	0,5555555556
04	0,8611363116	0,3478548451
	0,3399810436	0,6521451549
	-0,3399810436	0,6521451549
	-0,8611363116	0,3478548451
05	0,9061798459	0,2369268850
	0,5384693101	0,4789286705
	0,0000000000	0,5688888889
	-0,5384693101	0,4789286705
	-0,9061798459	0,2369268850

Fonte: BURDEN (2008)

Sabemos aplicar a quadratura de Gauss no intervalo $[-1,1]$, para aplicarmos em qualquer intervalos, basta realizar uma mudança de variável na integral, Segundo Burden (2008) “Uma integral $\int_a^b f(x)dx$ sobre um $[a,b]$ arbitrário pode ser transformada em uma integral sobre $[-1,1]$ utilizando a mudança de variável.”

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \leftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b]$$

Isso permite que a quadratura gaussiana possa ser aplicada a todo intervalo arbitrário $[a,b]$, pois

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b - a)t + (b + a)}{2}\right) \frac{(b - a)}{2} dt$$

Exemplo 3.3: calcule pela quadratura de Gauss a integral $\int_0^1 e^x dx$, com $n = 2$

Primeiramente vamos realizar a mudança de variável, como

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (b+a)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt$$

Teremos

$$\int_0^1 e^x dx = \int_{-1}^1 e^{\frac{(t+1)}{2}} * \frac{1}{2} dt$$

Calculando esta integral com a quadratura gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 1 \cdot f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{\frac{(t+1)}{2}} dt \approx \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)}{2}} + e^{\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)}{2}} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{(3-\sqrt{3})}{6}} + e^{\frac{(3+\sqrt{3})}{6}} \right]$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{\frac{(t+1)}{2}} dt \approx 1.7178963780075040 \dots$$

Atualmente os coeficientes da quadratura Gaussiana, ou seja os nós e os pesos, já se encontram, na maioria das vezes, tabulados não sendo necessária a dedução de cada um deles pela fórmula do Teorema 3.3, além disso nos computadores mais atuais, o usuário não precisa nem ao menos conhecer nenhum deles, pois já estão inseridos no código base dos programas.

O Procedimento listado no algoritmo 3.2 a seguir faz a aproximação de uma integral definida no intervalo $[a, b]$ utilizando a Quadratura Gaussiana com 3 raízes e 3 coeficientes.

O Algoritmo 3.2 – Quadratura de Gauss - Legendre

Entrada: Intervalo $[a, b]$, Número de Subintervalos n

Passo 1: Faça $x_1 = a$

Passo 2: Faça $h = (b - a)/n$

Passo 3: Para $j = 2, \dots, n + 1$, Execute os Passos 4 e 5

Passo 4: Faça $k = j - 1$

Passo 5: Faça $x_j = x_k + h$

Passo 6: Faça $c_1 = \frac{5}{9}$ (Coeficientes por Legendre)

Faça $c_2 = \frac{8}{9}$

Faça $c_3 = \frac{5}{9}$

Passo 7: Faça $r_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ (Raízes por Legendre)

Faça $r_2 = 0$

Faça $r_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

Passo 8: Faça $s = 0$

Passo 9: Para $i = 1, \dots, n$, Execute os Passos 10, 11 e 12

Passo 10: Faça $q_1 = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$

Faça $q_2 = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$

Passo 11: Faça $z_1 = q_1 * r_1 + q_2$

Faça $z_2 = q_1 * r_2 + q_2$

Faça $z_3 = q_1 * r_3 + q_2$

Passo 12: Faça $pw = (r_1 * f(z_1) + r_2 * f(z_2) + r_3 * f(z_3)) * \frac{h}{2}$

Faça $s = s + pw$

Saída: s

Fonte: Elaborado pelo Autor

O resultado da Integral de $f(x)$ será o valor de s .

As variáveis $a, x_t, h, k, c_t, r_t, s, q_t, z_t, pw$ com $t = 1, 2, 3 \dots, n$ são do tipo reais.

As variáveis j, i, n são do tipo inteiras.

Exemplo 3.2: Aplique o Algoritmo da quadratura Gaussiana com 3 raízes e 3 coeficientes na integral $\int_{-4}^4 \frac{1}{1+x^2} dx$, com 2,4,8, ...,64 subintervalos. Represente na Tabela 3.3.

Tabela 3.3

Sub. Intervalos	Valor da Integral	Erro
02	2,72143459320	0,0397992662
04	2,65138173103	0,0302535960
08	2,65138339996	0,0302519270
16	2,65163493156	0,0300003954
32	2,65163564682	0,0299996802
64	2,65163588524	0,0299994418

Fonte: Elaborado pelo Autor

Capítulo 4

Aplicações das Integrais Numéricas

Nos capítulos anteriores conhecemos um pouco da história das integrais, os métodos de aproximação numérica e como implementá-los para resolver uma integral definida num intervalo $[a, b]$.

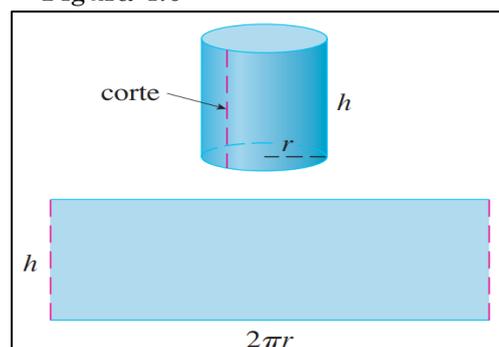
Nesse capítulo vamos apresentar duas aplicações da teoria de integração, que em muitos casos podem ocorrer integrais cujo resultado, ou não é possível ou extremamente difícil de obter por meios analíticos. Dessa forma iremos aproximar a solução com métodos numéricos vistos no capítulo 3. Os algoritmos usados nas resoluções das integrais deste capítulo se encontram como anexos, foi utilizada a linguagem de programação FORTRAN na construção de todos eles.

4.1. ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Uma área de superfície de revolução, segundo Stewart (2013) “é formada quando uma curva é girada em torno de uma reta. Essa superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução”.

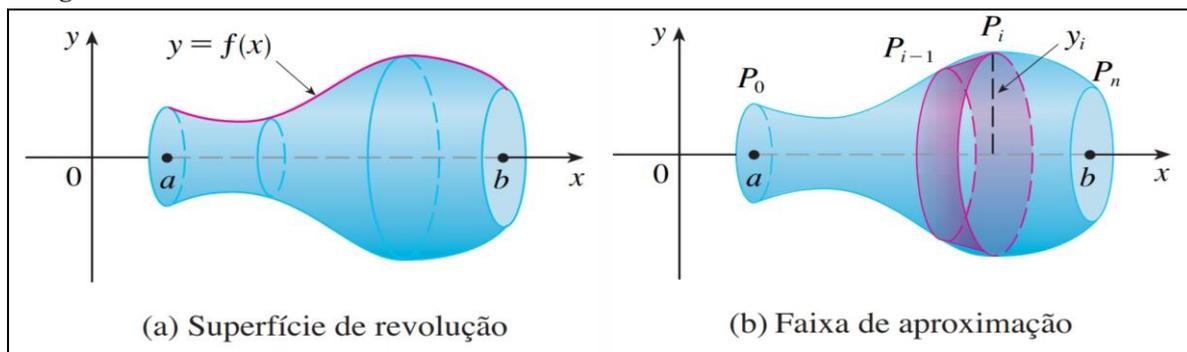
Para exemplificar melhor, veja a figura 4.0, onde temos um cilindro de altura h e raio r , a área de sua superfície é dado por $A = 2\pi rh$. Podemos obter essa área imaginando um corte vertical em relação à base do cilindro e o desenrolando. Teremos um lado igual a h e outro igual a $2\pi r$.

Figura 4.0



Fonte: STEWART (2013)

Figura 4.1



Fonte: STEWART (2013)

Considerando a superfície da Figura 4.1, obtida pela rotação da curva de $f(x)$, teremos a definição de área de superfície segundo Stewart:

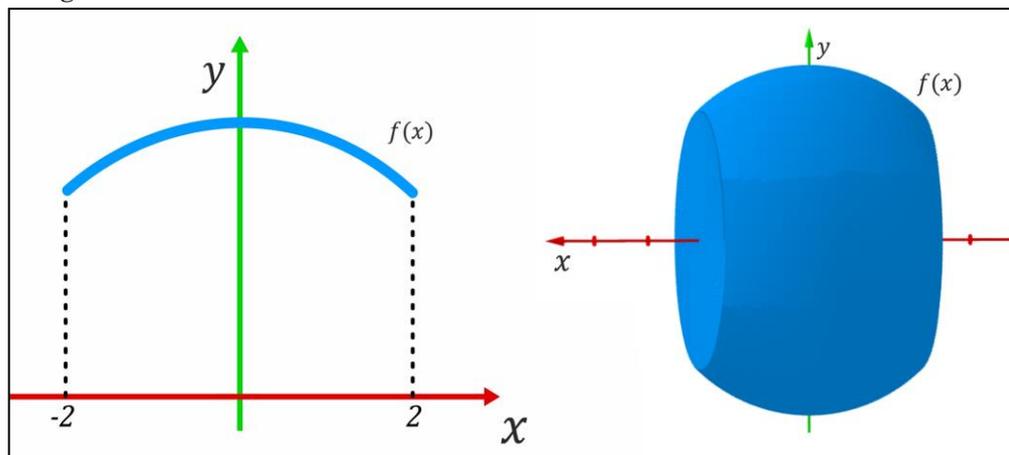
Se f é positiva e tem derivada contínua. Para definirmos sua área de superfície, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com as extremidades $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ e largura igual a Δx , [...]. Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre a curva. A parte da superfície entre x_{i-1} e x_i é aproximada ao tomar o segmento da reta $P_{i-1}P_i$ e girá-lo em torno do eixo x . O resultado é uma faixa com geratriz $l = |P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} * \Delta x$ e raio médio $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$; logo a área S de superfície é dado pela fórmula abaixo (Stewart 2013)

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Vajamos agora um exemplo da utilização dessa fórmula.

Exemplo 4.0: Considere a seguinte função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ e o intervalo $[-2, 2]$, tomando o sólido de revolução gerado pela rotação de $f(x)$ em torno do eixo x limitado pelo intervalo $[-2, 2]$, observe a figura 4.2, Calcule a área da superfície desse sólido.

Figura 4.2



Fonte: Elaborado pelo Autor

Resolução: Usaremos a fórmula para encontrar a área da superfície de revolução.

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Dessa forma teremos que $a = -2$ e $b = 2$ e por hipótese $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ vamos então derivar $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} * (-2x)$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Agora substituindo esses resultados na fórmula teremos:

$$S = \int_{-2}^2 2\pi \sqrt{9 - x^2} \sqrt{1 + \left[-\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right]^2} dx$$

$$S = \int_{-2}^2 2\pi \sqrt{9 - x^2} \sqrt{1 + \left[\frac{x^2}{9 - x^2}\right]^2} dx$$

$$S = \int_{-2}^2 2\pi \sqrt{9 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} dx$$

$$S = \int_{-2}^2 2\pi \sqrt{9 - x^2} \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}} dx$$

$$S = \int_{-2}^2 2\pi \sqrt{9 - x^2} * \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx$$

$$S = \int_{-2}^2 2\pi * 3 dx$$

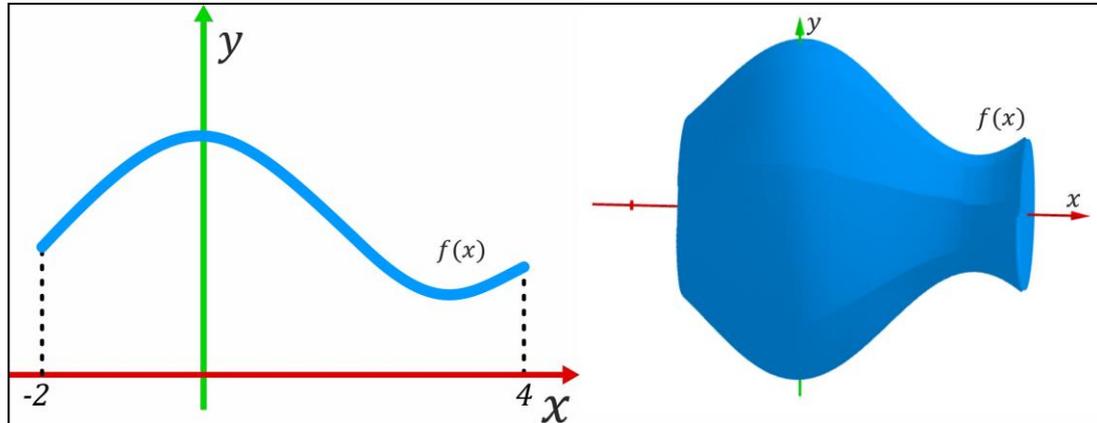
$$S = \int_{-2}^2 6\pi dx = 24\pi$$

Então a área da superfície de revolução é $24\pi u. a.$

Podemos verificar que com essa função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ foi relativamente simples de calcular a área, mas é bem comum encontrar problemas onde o integrando, devido a expressão de função $f(x)$ pode ser muito difícil, nesse caso devemos utilizar os métodos numéricos de integração. Veremos a seguir um problema onde vamos utilizar os métodos para obter a solução.

Problema 1: Dada função $f(x) = 2 + \cos(x)$, no intervalo $[-2,4]$, observe na figura 4.3 o sólido de revolução gerado pela rotação de $f(x)$ em torno do eixo x , que é semelhante ao um vaso, sendo assim calcule a área da superfície de revolução gerada por esta rotação.

Figura 4.3



Fonte: Elaborado pelo Autor

Resolução: Primeiramente vamos encontrar a primeira derivada de $f(x)$ teremos então

$$f(x) = 2 + \cos(x)$$

$$f'(x) = -\text{sen}(x)$$

Agora devemos utilizar a fórmula para encontrar a área da superfície de revolução.

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$S = \int_{-2}^4 2\pi(2 + \cos(x)) \sqrt{1 + [-\text{sen}(x)]^2} dx$$

$$S = \int_{-2}^4 [4\pi + 2\pi \cos(x)] \sqrt{1 + [-\text{sen}(x)]^2} dx$$

Podemos observar que essa integral não é tão simples quanto a do exemplo 4.0 para encontrar sua primitiva, dessa forma vamos utilizar os métodos numéricos para encontrar uma aproximação para o valor da integral que a área da superfície de revolução.

Tabela 4.0 – Regra do Trapézio

Sub. Intervalos	Valor da Integral	Erro
02	98,6698761	6,0563736
04	92,5791168	$3,43856812 * 10^{-2}$
08	92,5553131	$5,81893921 * 10^{-2}$
16	92,5991516	$1,43508911 * 10^{-2}$
32	92,6099777	$3,52478027 * 10^{-3}$
64	92,6126099	$8,92639160 * 10^{-4}$
128	92,6133118	$1,90734863 * 10^{-4}$
256	92,6134491	$5,34057617 * 10^{-5}$
512	92,6134644	$3,81469727 * 10^{-5}$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela 4.1 – Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson

Sub. Intervalos	Valor da Integral	Erro
02	107,50031	14,886810
04	90,548866	2,0646362
08	92,547386	$6,61163330 * 10^{-2}$
16	92,613777	$2,74658203 * 10^{-4}$
32	92,613548	$4,57763672 * 10^{-5}$
64	92,613525	$2,28881836 * 10^{-5}$
128	92,613495	$7,62939453 * 10^{-6}$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela 4.2 – Quadratura de Gauss

Sub. Intervalos	Valor da Integral	Erro
02	92,602951	$1,05514526 * 10^{-2}$
04	92,608955	$4,54711914 * 10^{-3}$
08	92,613480	$2,28881836 * 10^{-5}$
16	92,613495	$7,62939453 * 10^{-6}$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Podemos então tomar o valor a área de superfície como aproximadamente 92,613495 *u. a.*

Observando e comparando os valores obtidos através dos métodos numéricos podemos perceber que o melhor método para aplicar em integrais desse tipo é Quadratura Gaussiana, pois com apenas 16 subintervalos já nos

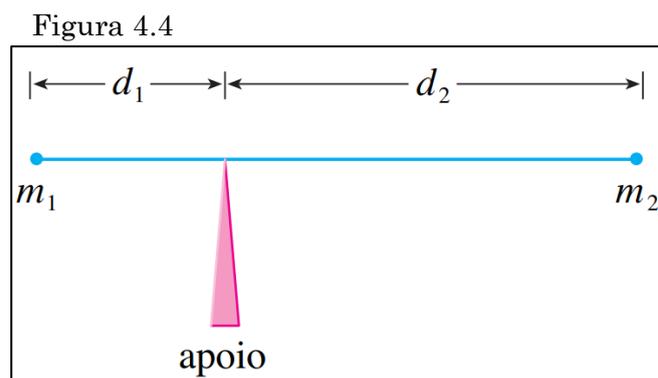
concedeu um resultado bem satisfatório, com um erro muito pequeno, ao passo que nos outros métodos foi necessário um número maior de subintervalos o método do trapézio mesmo com 512 subintervalos, não conseguiu uma precisão tão boa quanto a quadratura de Gauss, já a regra $1/3$ de Simpson conseguiu uma precisão parecida com a de Gauss somente com 128 subintervalos.

4.2. MOMENTOS E CENTROS DE MASSA

Nesta seção, vamos considerar o problema de encontrar o centro de massa de uma placa fina que apresenta densidade uniforme. O centro de massa, centroide ou centro de uma região é o ponto em que a região será perfeitamente equilibrada na posição horizontal se for suspensa exatamente neste ponto.

Segundo Stewart (2013) “Nosso principal objetivo aqui é encontrar o ponto P no qual uma fina placa de qualquer formato se equilibra horizontalmente, [...] Esse ponto é chamado centro de massa (ou centro de gravidade) da placa.”

Considere uma placa circular de densidade uniforme, e queremos então equilibrar esta placa na ponta do dedo, para isso teríamos o ponto de equilíbrio da placa, ou seja, o centro de massa. Podemos ter uma noção melhor do que foi dito observando a figura 4.4, onde temos um bastão de massa desprezível equilibrado num apoio.



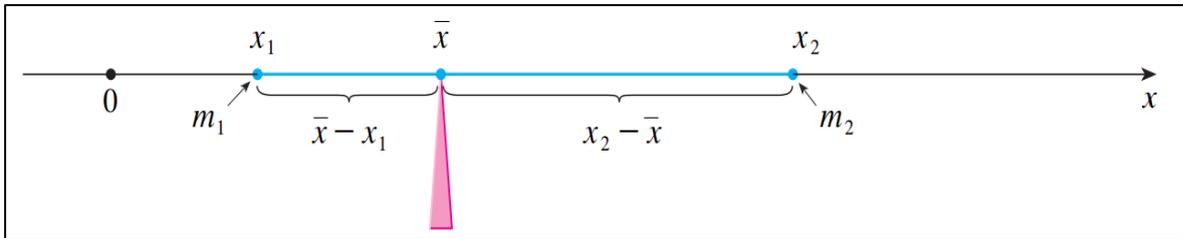
Fonte: STEWART (2013)

Temos que m_1 e m_2 são pesos presos nas extremidades opostas do bastão e d_1 e d_2 são as respectivas distancias entre os pesos e o ponto de apoio. Então este bastão só ficara equilibrado no apoio se

$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

Agora vamos supor que esse bastão esteja sobreposto no eixo x , como na figura 4.5

Figura 4.5



Fonte: STEWART (2013)

Assim poderemos reescrever a equação $m_1 d_1 = m_2 d_2$ como

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Onde m_1x_1 e m_2x_2 são chamados de **momentos** das massas m_1 e m_2 , \bar{x} é centro de massa obtido com a equação acima deduzida.

Podemos generalizar para um sistema com n partículas, com massas m_1, m_2, \dots, m_n localizadas nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n ao longo do eixo x , da mesma maneira, então:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$$

Onde

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad e \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

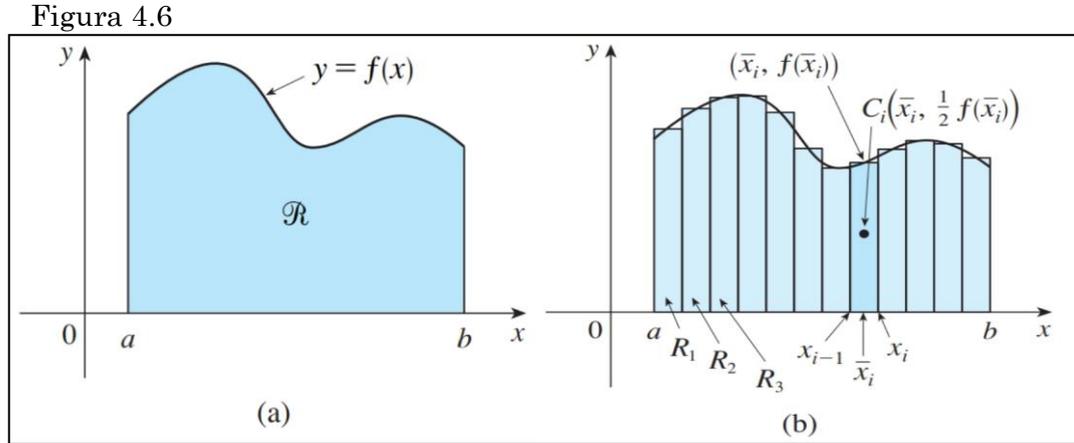
Analogamente podemos encontrar o centro de massa em relação ao eixo y , teremos então que:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

Onde

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad e \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

Considere uma placa plana, que tenha densidade uniforme p que ocupa a região \mathcal{R} do plano, vamos determinar o centro de massa ou centroide desta placa. Observe a figura 4.6.



Fonte: STEWART (2013)

Temos que a região \mathcal{R} esta entre as retas $x = a$ e $x = b$ e f é uma função contínua, como na figura 4.6 (b), vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n sub intervalos com extremidades $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ com uma largura Δx . Segundo Stewart (2013) “Escolhemos o ponto amostral x_i^* como o ponto médio \bar{x}_i do i – ésimo subintervalo, que é $\bar{x} = \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2}$ [...]. O centroide do i – ésimo retângulo aproximador R_i é seu centro $C_i(\bar{x}_i, \frac{1}{2} f(\bar{x}_i))$. Sua área é $f(\bar{x}_i)\Delta x$, assim, sua massa é”

$$pf(\bar{x}_i)\Delta x$$

Teremos também que o momento de R_i em relação ao eixo y será o produto de sua massa pela distância de C_i ao eixo y , que é \bar{x}_i , Logo,

$$M_y(R_i) = [pf(\bar{x}_i)\Delta x]\bar{x}_i = p\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x$$

Se somarmos todos esses momentos, podemos obter uma aproximação poligonal de \mathcal{R} , então se considerarmos o limite com $n \rightarrow \infty$, vamos obter o momento de \mathcal{R} em relação a eixo y .

$$M_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x = p \int_a^b xf(x)dx$$

De maneira análoga podemos obter o momento de \mathcal{R} em relação ao eixo x .

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p \frac{1}{2} [f(\bar{x}_i)]^2 \Delta x = p \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx$$

Como visto anteriormente o centro de massa é obtido por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ e } \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

Mas como também sabemos a massa é dada pelo produto da área pela densidade, logo:

$$m = p * A = p \int_a^b f(x)$$

Então teremos as fórmulas do centro de massa de uma placa dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{p \int_a^b x f(x) dx}{p \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{p \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{p \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

Resumindo teremos que o centroide é dado pelo par ordenado (\bar{x}, \bar{y}) , onde:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} * \int_a^b x f(x) dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} * \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx$$

Com $A = \int_a^b f(x) dx$

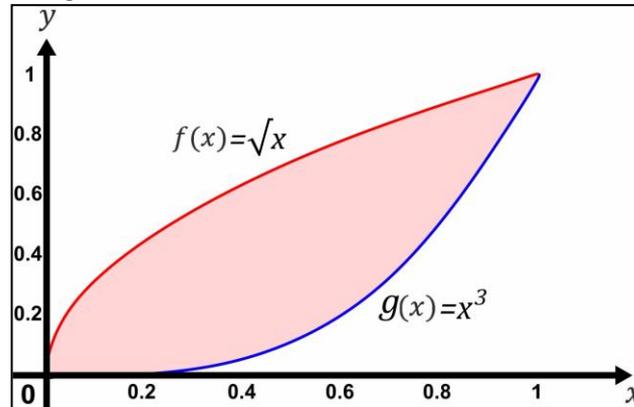
Segundo Stewart (2013) “Se a região \mathcal{R} está entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$, como mostrado na figura 4.7, então o mesmo tipo de argumento que nos levou à Fórmula anterior pode ser usado para mostrar que o centroide \mathcal{R} é (\bar{x}, \bar{y}) .” Com $A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$, teremos:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} * \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} * \int_a^b \frac{1}{2} \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

Exemplo 4.0: Determine o centro de massa para a região delimitada entre as curvas $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^3$, no intervalo $[0,1]$.

Figura 4.7



Fonte: Elaborado pelo Autor

Resolução: Primeiramente vamos obter a área A da região delimitada entre as curvas.

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^3 = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

Agora devemos calcular os valores das coordenadas \bar{x} e \bar{y} , para obter o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) .

$$\bar{x} = \frac{1}{A} * \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx = \frac{12}{5} * \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^3)$$

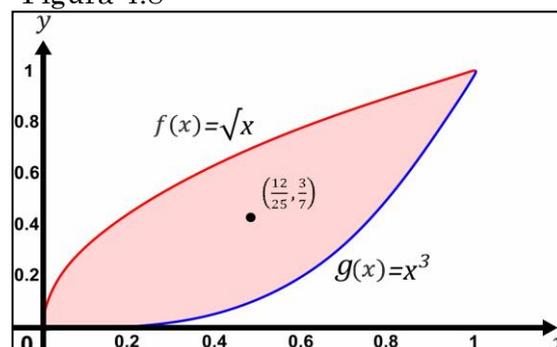
$$\bar{x} = \frac{12}{5} * \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} - x^4 = \frac{12}{5} * \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{12}{5} * \frac{1}{5} = \frac{12}{25}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} * \int_a^b \frac{1}{2} \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx = \frac{12}{5} * \int_0^1 \frac{1}{2} (x - x^6)$$

$$\bar{y} = \frac{12}{5} * \left\{ \frac{1}{2} * \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 \right\} = \frac{12}{5} * \frac{5}{28} = \frac{3}{7}$$

Logo as coordenadas do centro de massa são $\left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7} \right)$.

Figura 4.8

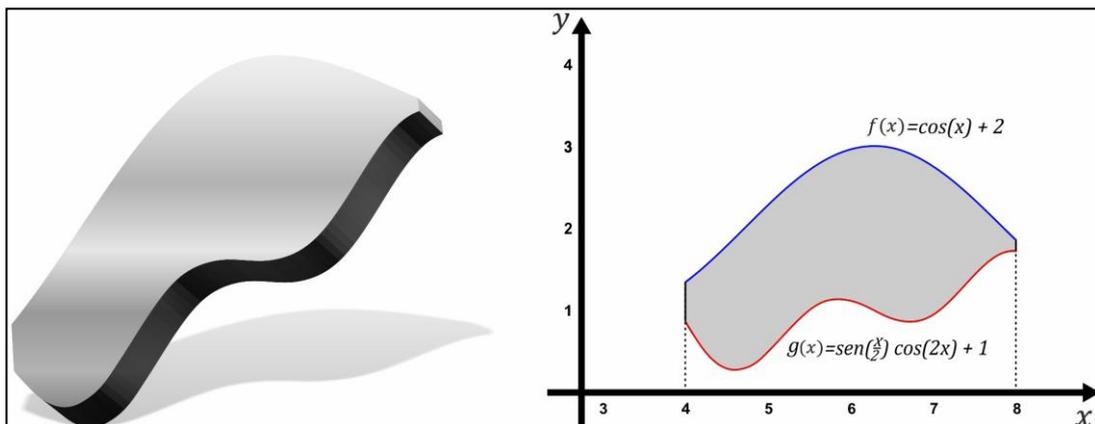


Fonte: Elaborado pelo Autor

Neste exemplo podemos verificar que com essas funções $f(x)$ e $g(x)$ foi relativamente simples de calcular o centro de massa, mas é bem comum encontrar problemas onde encontrar o centroide pode ser muito difícil, nesse caso devemos utilizar os métodos numéricos de integração. Veremos a seguir um problema onde vamos utilizar os métodos para obter a solução.

Problema 2: Uma chapa de metal com densidade constante é cortada de no formato da figura 4.9 mostrada abaixo, sabendo que o contorno da parte superior foi gerada pela função $f(x) = \cos(x) + 2$ e da parte inferior pela função $g(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\cos(2x) + 1$, sendo limitadas no intervalo $[4,8]$. Determine as coordenadas do seu centro de massa.

Figura 4.9



Fonte: Elaborado pelo Autor

Resolução: Primeiramente devemos encontrar o valor da área A desta figura, utilizando somente o método numérico de integração Quadratura gaussiana, pois é o melhor algoritmo dos três apresentados.

$$A = \int_4^8 (\cos(x) + 2) - \left(\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\cos(2x) + 1 \right)$$

$$A = \int_4^8 \cos(x) - \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\cos(2x) + 1$$

Tabela 4.3 – Quadratura de Gauss

Sub. Intervalos	Valor da Integral	Erro
02	6,0411053	$6,74533844 * 10^{-3}$
04	6,0344028	$4,29153442 * 10^{-5}$
08	6,0343642	$4,29153442 * 10^{-6}$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Então teremos o valor da área aproximada

$$A = \int_4^8 \cos(x) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\cos(2x) + 1 \approx 6,0343642$$

Agora devemos calcular os valores das coordenadas \bar{x} e \bar{y} , para obter o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) .

$$\bar{x} = \frac{1}{A} * m$$

$$m = \int_4^8 x \left[\cos(x) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\cos(2x) + 1 \right] dx$$

Tabela 4.4 – Quadratura de Gauss

Sub. Intervalos	Valor da Integral m	\bar{x}	Erro
02	35,693840	5,9150953	$1,04752239 * 10^{-2}$
04	35,630951	5,9046736	$5,33970197 * 10^{-5}$
08	35,630661	5,9046254	$5,35268873 * 10^{-6}$

Fonte: Elaborado pelo Autor

$$\bar{y} = \frac{1}{A} * n$$

$$n = \int_a^b \frac{1}{2} \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

Tabela 4.5 – Quadratura de Gauss

Sub. Intervalos	Valor da Integral n	\bar{y}	Erro
02	10,319778	1,7101684	$2,75832810 * 10^{-3}$
04	10,302993	1,7073866	$2,33437659 * 10^{-5}$
08	10,303122	1,7074080	$2,00829072 * 10^{-6}$

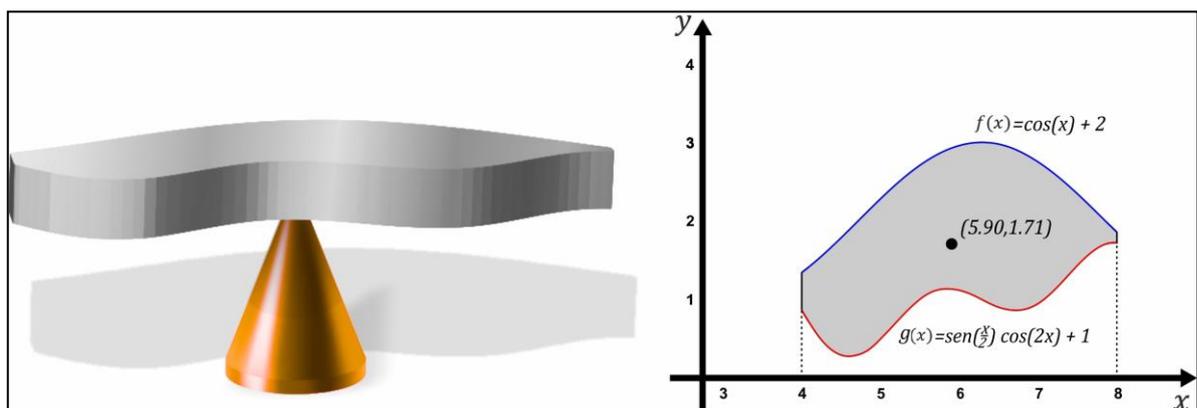
Fonte: Elaborado pelo Autor

Logo as coordenadas do centro de massa são aproximadamente.

$$(5.9046254, 1.7074080)$$

Com as coordenadas do centro de massa podemos equilibrar a placa horizontalmente com o apoio exatamente em seu centroide, veja a figura 5.0.

Figura 5.0



Fonte: Elaborado pelo Autor

Considerações Finais

O cálculo integral é um ramo da matemática que é aplicado em vários problemas da vida cotidiana, através dos métodos numéricos podemos encontrar soluções aproximadas para esses problemas. Este trabalho teve como objetivo evidenciar algumas dessas aplicações e mostrar a importância de se usar métodos numéricos na resolução das integrais que são de difícil solução.

Como o objetivo principal do trabalho é o desenvolver algoritmos para resolução de integrais, foi apresentados alguns dos métodos computacionais mais utilizados para encontrar estas soluções, onde os resultados foram obtidos com boas aproximações e apresentando um erro mínimo. Em vários exemplos podemos perceber que sem os métodos é praticamente impossível de se obter solução, pois em diversas áreas, como na engenharia civil, cálculo de áreas, probabilidade, vamos nos deparar com integrais difíceis de se resolver e o único modo de se aproximar soluções é com o uso dos métodos numéricos.

A partir daí fica clara a importância de se conhecer os métodos, como dito anteriormente os resultados obtidos com os métodos são aproximações, mas como apresentam um erro mínimo, podemos utiliza-los de forma coerente sem nenhum receio de estar cometendo erros graves.

Ao analisar os métodos e suas fórmulas podemos perceber diferenças em cada um deles, nos três métodos do Trapézio, Simpson e quadratura Gaussiana, quanto mais subintervalos tiver mais próxima será a aproximação da solução real, ou seja, podemos obter uma solução tão próxima da real quanto desejarmos. Podemos também notar que a Quadratura Gaussiana nos exemplos usados teve um melhor resultado, pois com poucos subintervalos conseguimos resultados com erro mínimo, ao passo que nos outros métodos teríamos que ultrapassar a quantidade de 200 subintervalos.

As aplicações aqui apresentadas são utilizadas em muitos ramos, um deles é a engenharia e podem aguçar no leitor o interesse pelo conteúdo.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl B. **Cálculo - tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. São Paulo: Atual Editora Ltda, 1995. v.6.
- [2] BURDEN, Richard L; FAIRES, Douglas. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage, 2008.
- [3] CAMPOS FILHO; FERREIRA, Frederico. **Algoritmos Numéricos**. 2.ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2010.
- [4] FRANCO, Neide Bertold. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Prentice Hall, 2006.
- [5] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.
- [6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2008.
- [7] STEWART, James. **Cálculo**. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [8] FULKS, Watson. **Advanced Calculus: An Introduction to Analysis**. University of Colorado. Jhon Wiley & Sons, 1978.

Anexos

Algoritmos utilizados na linguagem FORTRAN.

O Algoritmo 4.0 – Regra do Trapézio Composta

c Regra do trapézio - Aryel Silas

```
program Regra do Trapézio
Real,dimension(9)::t
real a,b,v,x,s,h,r
integer n,i,j
Print*, '-----'
Print*, 'Regra do Trapézio Composta - por Aryel Silas'
Print*, '-----'

a=4 !Limitantes do intervalo
b=8

if (a.gt.b) then
  v=a
  a=b
  b=v
end if

n=1 ! Número inicial de Subintervalos
Print*, '| N Resultado Erro |'
Print*, '| |'
j=0
t=0

do j=1,9,1
  n=2*n ! Aumenta os subintervalos a cada repetição
  h=(b-a)/n
  x=a+h
  s=0

  do i=1,(n-1),1
    s=s+(2*f(x))
    x=x+h
  end do
```



```

h2=mod(h,2.0)

if (h2.ne.0)then
  nj=h+1
else
  nj=h
end if

r=(b-a)/nj
x=a+r
sp=0
si=0

do i=1,(nj-1)
  ji=mod(i,2)
  if (ji.eq.0)then
    sp=sp+f(x)
  else
    si=si+f(x)
  end if
  x=x+r
end do

t=(r/3)*(f(a)+f(b)+4*si+2*sp)
t1=abs(6.03436-t)
write(*,110)h,t,t1
end do

Print*,'-----'
Print*,'O Resultado da Integral Aproximado e ',t
Print*,'-----'

110 format(' | ',f4.0,' ',f10.7,' ',f11.8,' | ')
end

real function f(x)
real x,y
y=cos(x)-sin(x/2)*cos(2*x)+1 ! Função para integrar
f=y
end function f

```

O Algoritmo 4.2 – Quadratura Gaussiana de Grau 3

c Quadratura de Gauss - Aryel Silas

```
program QuadGauss
implicit none
real,allocatable,dimension(:)::x,r,t
real a,b,pw,x1,x2,x3,q1,q2,h,S,S1,S2,f,f2,f3,err
integer n,i,j,k,m

Print*,'-----'
Print*,'Quadratura de Gaussiana de Grau 3 - Por Aryel Silas'
Print*,'-----'

Print*,'| N   Resultado   Erro   |'
Print*,'|                                     |'
n=1

do m=1,5
  a=4          !Limitantes do intervalo
  b=8
  n=2*n       ! Número de vezes que o intervalo será repartido
  allocate (x(n),t(n),r(n))
  x(1)=a
  h=(b-a)/n

  do j=2,n+1
    k=j-1
    x(j)=x(k)+h
  end do

  r(1)=5.0/9.0      ! Valores fornecidos por Legendre
  r(2)=8.0/9.0
  r(3)=5.0/9.0
  t(1)=-sqrt(3.0/5.0) ! Valores fornecidos por Legendre
  t(2)=0.0
  t(3)=sqrt(3.0/5.0)
  S=0

  do i=1,n
    q1=(x(i+1)-x(i))/2.0
    q2=(x(i+1)+x(i))/2.0
    x1=(q1*t(1))+q2
```

