UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A EFETIVIDADE DO MATERIAL MANIPULÁVEL PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA E PRODUTOS NOTÁVEIS

Diógenes Santana da Silva

Vitória da Conquista - Bahia

2023

DIÓGENES SANTANA DA SILVA

diogenessantana20@gmail.com

A EFETIVIDADE DO MATERIAL MANIPULÁVEL PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA E PRODUTOS NOTÁVEIS

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade.

Vitória da Conquista - Bahia

2023

Folha de aprovação

DIÓGENES SANTANA DA SILVA

A EFETIVIDADE DO MATERIAL MANIPULÁVEL PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA E PRODUTOS NOTÁVEIS

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina de Seminário de Pesquisa II.

Aprovada em 04 de Março de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Clênia Andrade Oliveira de Melo

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

Roque Mendes Prado Trindade

(Orientador)

Vitória da Conquista - Bahia

2023

Aos meus pais, Celciano e Marlene, Aos meus avós, Agripino, Dinalva e Diomesia, e a todos que torceram por mim durante esse período.

Agradecimentos

Agradeço ao Senhor, pois Ele sempre tem cuidado de mim desde o nascimento e, durante o curso, sempre esteve me capacitando, dando paz e vigor de forma que nunca precisei me ausentar por muito tempo, devido a problemas ou doenças. Tudo isso, sem contar os inúmeros livramentos nas viagens de ida e vinda da universidade e, certamente se eu conseguisse agradecer a Deus por todas as demonstrações de Seu amor, o número de páginas excederia em muito ao deste trabalho.

Agradeço aos meus pais Celciano e Marlene por tudo que fizeram desde meus primeiros dias de vida até aqui, pois sempre foram coluna e prumo para tudo que eu fizesse, além de sempre me orientarem pelo caminho do bem. Por isso agradeço todo o cuidado e cada vez que me disciplinaram, para que eu trilhasse o rumo certo e chegasse até aqui.

Agradeço a todos os bons amigos que fiz durante a graduação, em especial aos mais próximos: Bruno e Kleber, que foram da minha turma e, Laura, Lucas e Matheus, que foram da turma de 2018. Foram muitos os momentos bons com esses amigos, tantas risadas, ensinamentos e apoio nos momentos mais estressantes, elementos fundamentais para que a jornada da graduação se tornasse mais leve.

Agradeço a todos os professores com quem tive o privilégio de ter aula, por toda a base, teórica e prática, sólida que recebi, e ainda pelos ensinamentos e conselhos que são valiosos não apenas para a formação acadêmica, mas para a vida.

Finalmente, agradeço ao professor Roque, por ter aceitado me orientar neste trabalho, por sua paciência durante este período, que se prolongou um pouco a mais que o imaginado e, por todo suporte prestado na construção das ideias apresentadas aqui.

RESUMO

Com este trabalho, buscou-se entender as dificuldades de aprendizado apresentadas pelos alunos da educação básica, sobretudo na disciplina de Matemática, quando os discentes têm o primeiro contato com a linguagem algébrica. Dessa foma, investigou-se os desafios encontrados pelos educandos no desenvolvimento de expressões algébricas como os produtos notáveis e como utilizar materiais manipuláveis para facilitar a compreensão e tornar o estudante mais ativo na produção de seu conhecimento. Foi feito um estudo sobre o desenvolvimento de expressões algébricas, principalmente dos produtos notáveis, destacando suas principais propriedades e como a análise combinatória também pode ser aplicada em sua resolução. Em seguida, foi proposta uma atividade a alunos de uma turma de ensino médio, em que estes, deveriam responder em duas fases, a primeira apenas algebricamente e, na segunda fazendo uso dos materiais manipuláveis, com o intuito de fazer um comparativo do desempenho da turma e comprovar a eficiência do objeto concreto em facilitar a compreensão do conteúdo. Finalmente são feitos os destaques e considerações a respeito dos resultados da pesquisa, além da sugestão de novos trabalhos que venham complementar as ideias e resultados apresentados aqui.

Palavras-chave: material manipulável, produtos notáveis, número binomial.

ABSTRACT

With this work, we sought to understand the learning difficulties presented by basic education students, especially in the subject of Mathematics, when students have their first contact with algebraic language. In this way, we investigated the challenges encountered by students in the development of algebraic expressions such as notable products and how to use manipulative materials to facilitate understanding and make the student more active in the production of their knowledge. A study was carried out on the development of algebraic expressions, mainly notable products, highlighting their main properties and how combinatorial analysis can also be applied to their resolution. Next, an activity was proposed to students in a high school class, in which they had to respond in two phases, the first only algebraically and, in the second, using manipulative materials, with the aim of making a comparison of the performance of the class and prove the efficiency of the concrete object in facilitating the understanding of the content. Finally, highlights and considerations are made regarding the research results, in addition to suggestions for new works that will complement the ideas and results presented here.

Keywords: manipulable material, notable products, binomial number.

Lista de Figuras

Conteúdo

INTRODUÇÃO

No ensino de Matemática, é cada vez mais importante desenvolver atividades que sejam inovadoras, tornem o aprendizado da disciplina mais leve e próximo do cotidiano dos alunos, para que o ato de aprender seja mais significativo para os discentes. Essa necessidade é notória quando acontece a transição entre os níveis fundamental e médio, em que os conteúdos exigem uma capacidade maior de abstração, como também é apontado por Schuck et al. 2013, que diz ser nessa fase que o professor precisa pensar em metodologias inovadoras, contrárias à memorização, tornando o aluno mais ativo na construção do saber e, dessa forma, auxiliar a superar suas dificuldades.

Procurando novas soluções para as dificuldades de aprendizagem de Matemática, são desenvolvidos diversos trabalhos que trazem possibilidades de tornar o ato de aprender mais atrativo ao aluno. Tais pesquisas servem de suporte para projetos e programas em que futuros docentes pensam e desenvolvem metodologias que vão além do modelo tradicional de ensino, em que o professor reproduz o conteúdo no quadro e o aluno apenas transcreve em seu caderno, seguido da resolução de vários exercícios em que simplesmente aplica um algoritmo, muitas vezes sem entender o que está fazendo. Essas pesquisas sugerem metodologias que visam tornar o aprendizado de Matemática mais significativo ao discente e, dentre elas estão a utilização de jogos (eletrônicos ou não) e materiais manipuláveis, que como afirma Schuck et al. 2013, facilitam ao professor explicar conceitos matemáticos e ao aluno visualizar de maneira concreta os aspectos mais abstratos de determinado conteúdo, tendo assim, uma construção consciente do saber, como afirma Schuck et al. 2013.

Devido a grande dificuldade dos alunos quando chegam ao ensino médio, e têm o primeiro contato com as operações mais abstratas da Matemática, o presente trabalho apresenta uma proposta de metodologia para o ensino/aprendizado de Álgebra, mais precisamente do conteúdo de “Produtos Notáveis”, propondo uma abordagem geométrica para este conteúdo. Assim, foram feitas leituras a respeito do tema, que serviram de base para a elaboração de uma oficina didática com alunos do ensino médio, em que foi observado o desempenho da turma, antes e depois da utilização do material manipulável.

O presente trabalho é dividido em três capítulos, organizados em: *Referencial teórico*, que discorre sobre a utilização de material concreto nas aulas de Matemática, definições técnicas sobre produtos notáveis e sua representação geométrica, *Metodologia*, que trata de como se deu a aplicação da oficina didática na sala de aula e, por fim o capítulo *Conclusões* em que são mostrados os resultados e considerações a respeito do tema.

Capítulo 1

Referencial teórico

1.1 Contexto

1.1.1 Problemática do trabalho

A Matemática, considerada mãe de todas as ciências, é fundamental para a solução de vários problemas e desenvolvimento de ferramentas que são imprescindíveis para inúmeras atividades humanas, por isso se dividiu em diversas áreas que garantem uma organização de suas várias aplicações. Porém, segundo L. M. d. Silva 2021, a divisão da Matemática em campos como: Estatística, Geometria e Álgebra, principalmente a modernização desta, fez com que fosse tratada de forma independente e hoje a grande maioria das pessoas não veem, por exemplo, um produto como o cálculo da área de um retângulo.

Utilizar letras em expressões matemáticas, seja para substituir valores desconhecidos ou estabelecer novas generalizações, é um recurso amplamente utilizado nos dias atuais, porém como foi destacado anteriormente, por L. M. d. Silva 2021, a disjunção entre Geometria e Álgebra acentuou as dificuldades de aprendizado dos alunos. Esse problema se acentua quando o estudante chega ao Ensino Médio e tem um contado maior com expressões algébricas, principalmente produtos notáveis, em que a falta de representações geométricas aumenta a dificuldade de aprendizagem.

1.1.2 Dificuldades da iniciação em Álgebra

A medida em que se moderniza, a Matemática vai se tornando cada vez mais abstrata e, o que inicialmente era representado por objetos e situações particulares e concretas, adota um caráter cada vez mais generalista. Nesse sentido, podemos considerar as dificuldades de muitos alunos em Álgebra, pois segundo Ornelas 2021, não conseguem compreender os conteúdos quando começam a fazer a transição da Aritmética para a Álgebra, por não entenderem esta nova linguagem matemática.

A dificuldade de compreensão dos alunos em Matemática, principalmente em Álgebra, se reflete nos exames feitos periodicamente por órgãos avaliadores da educação, como também aponta Ornelas 2021, ao destacar os resultados da prova SAEB, em que os acertos relativos a problemas algébricos são abaixo de 40%. Ainda de acordo com o pesquisador, apesar da forte presença de situações abstratas no ensino, os alunos não conseguem entender o conteúdo, o que requer do professor repensar as maneiras de ensinar Álgebra.

Procurando mudar a visão dos alunos da educação básica em relação à Matemática e, diminuir as dificuldades de aprendizado, os professores buscam formações continuadas e se apoiam em pesquisas que apresentam formas de abordar conteúdos matemáticos de maneira mais significativa para os discentes. Esses estudos visam integrar Matemática e outras áreas do conhecimento e também aproximá-la da rotina da comunidade onde o discente está inserido, o que gera um maior significado, para o educando, do conteúdo ministrado, mesmo quando o nível de abstração é maior.

Utilizar jogos digitais e objetos de aprendizagem como suporte ao ensino de Matemática estimulam várias capacidades do aluno, que se sente desafiado a resolver os problemas propostos levantando hipóteses e traçando estratégias de resolução. Essa vantagem de se utilizar tais ferramentas é apontada por K. Silva e Costa 2017, que cita benefícios como: desenvolvimento da criatividade, da capacidade de reflexão e do senso crítico.

A utilização de materiais concretos faz com que o alunos estabeleçam uma relação entre a manipulação do material e a abstração dos conceitos matemáticos envolvidos Ventura e Laudares 2016. Dessa maneira, torna-se muito importante utilizar materiais manipuláveis para que os alunos possam ter uma melhor visualização de conceitos que requerem um nível maior de imaginação e, que por esse motivo, têm dificuldade em alcançar.

1.1.3 O que são os materiais concretos?

Segundo Facchi 2022, materiais concretos, também chamados de manipuláveis são objetos com características físicas, ou seja, podem ser observados, tocados, sentidos e movimentados, sendo assim, bastante úteis quando se trata do ensino/ aprendizagem de conceitos matemáticos. Estes materiais podem fazer parte do cotidiano ou serem produzidos para representar algo abstrato, provocando a curiosidade e tornado o aluno mais ativo na aquisição de conhecimento.

Facchi 2022 também faz um breve histórico acerca dos materiais manipuláveis, que segundo a autora, teve Pestalozzi como um de seus primeiros entusiastas no século XIX, pois este considerava que em Matemática é necessário iniciar com a percepção de objetos concretos. Essas ideias chegaram ao Brasil em 1920, mas em 1990 é que começaram a surgir, no país, os primeiros recursos didáticos, inclusive materiais manipuláveis para o ensino de Matemática.

Pestalozzi foi, no século XIX, um dos primeiros pesquisadores a defender a utilização dos materiais manipuláveis nas aulas de Matemática, pois defendia que seu uso propiciava uma melhor compreensão dos conteúdos. Embora essas ideias já estavam se consolidando na Europa, no Brasil, as discussões sobre a utilização de materiais manipuláveis tiveram início apenas em 1920, sendo que mais tarde, em 1990, é que esse recurso foi efetivamente utilizado para o ensino de Matemática.

Segundo Facchi 2022, os materiais manipuláveis podem ser divididos em dois grupos que são: *estático*, em que não é possível alterar sua estrutura física, cabendo ao aluno perceber suas propriedades e, o *dinâmico*, em que o educando consegue alterar sua estrutura física, permitindo a descoberta de novas propriedades, além do planejamento de novas estratégias por meio dos resultados encontrados nessa interação.

A utilização de materiais manipuláveis torna a situação de aprendizagem mais lúdica e, quando se trata de Matemática, mais próxima do mundo real, de forma que conceitos mais abstratos são melhor visualizados pelo educando. Além dessa característica, existem muitas outras vantagens no uso desse recurso. Porém, como aponta Beckenbach et al. 2021, ele por si só não garante a aprendizagem significativa do aluno, cabendo ao professor refletir sobre a melhor maneira de se utilizá-lo, estimulando sempre o trabalho mental do discente.

Portanto, utilizar materiais manipuláveis nas aulas de Matemática, desde que o docente o faça da maneira adequada, provocando a reflexão do educando sobre os conceitos envolvidos em determinadas situações, proporciona uma melhora significativa no desempenho do aluno em todos os níveis de ensino em que ele esteja em curso.

1.2 Produtos notáveis

1.2.1 Polinômios

Definição 1:

Polinômios: *Um polinômio de grau n é uma expressão do tipo:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Exemplos:

$x + 3$

$7x^2 + 5x - 1$

Note que o grau n do polinômio é dado pelo valor do maior expoente, ou seja o primeiro e segundo exemplo possuem, respectivamente, grau 1 e 2.

Operações entre polinômios

É possível realizar as quatro operações básicas entre polinômios, sendo que a soma e subtração são feitas de maneira relativamente simples apenas operando entre os termos semelhantes.

Adição

Vejamos o resultado da soma entre $ax^2 + bx$ e $yx + 1$

$$ax^2 + bx + yx + 1 = ax^2 + (b + y)x + 1$$

Note que os termos b e y, que possuem parte literal semelhante, foram somados, ou seja, ao somar ou subtrair polinômios basta operar entre os termos semelhantes.

Subtração

Vejamos o resultado da subtração entre $ax^5 + 3x$ e $ax^5 + bx^3$

$$ax^5 + 3x - (ax^5 + bx^3) = (a - a)x^5 + 3x - bx^3 = 3x - bx^3$$

Multiplicação

Para a compreensão do presente trabalho, a multiplicação de polinômios é fundamental, pois queremos representar geometricamente, algumas expressões por meio de retângulos. Dessa maneira, o polinômio resultante do produto será representado pela área de uma figura plana.

Veja o exemplo a seguir, do produto entre $2x + y$ e $-5y + 4x$.

$$(2x + y) \cdot (-5y + 4x) = -10xy + 8x^2 - 5y^2 + 4xy = 14xy + 8x^2 - 5y^2$$

Por meio da propriedade distributiva da multiplicação, os termos de cada polinômio são multiplicados entre si, resultando numa soma que é resolvida entre os termos semelhantes. Outro aspecto do produto entre essas expressões, é a possibilidade de ser interpretado como o cálculo da área de um retângulo ou da composição dos mesmos, recurso interessante para a visualização dos produtos notáveis, como pode ser visto nas seções seguintes.

Representação geométrica de polinômios

Atualmente, quando se estuda polinômios e suas operações, tudo é feito predominantemente de forma algébrica, recorrendo pouca ou nenhuma vez à representações geométricas. Essa exclusividade na utilização da Álgebra no conteúdo atrapalha a compreensão dos alunos, principalmente os que têm no desenho uma forma de enxergar melhor o contexto dos problemas.

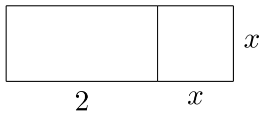
Quando tratamos do produto entre polinômios, podemos fazer a associação da operação ao cálculo da área de um retângulo em que os fatores representam a sua base e altura, respectivamente. Dessa forma podemos representar o monômio $2x$, por exemplo, como a seguinte figura.

Observando a figura 1.1 e pensando nas operações de soma entre polinômios, é fácil perceber a possibilidade de representar qualquer expressão polinomial através da composição entre áreas de retângulos. Dessa forma, para representar $2x + x^2$, temos:

Figura 1.1: **Representação geométrica de** $2x$

Fonte: Autoria própria, 2023

Figura 1.2: **Representação geométrica de** $2x + x^2$



Fonte: Autoria própria, 2023

Observando o retângulo da figura 1.2, percebe-se que sua área é representada pelo produto $(2+x)\cdot x$, que é a expressão fatorada de $2x + x^2$, mostrando que essa forma de representação pode ajudar na compreensão da fatoração de expressões algébricas.

1.2.2 Fatoração de polinômios

Por meio da propriedade distributiva da multiplicação, é possível escrever alguns polinômios como um produto entre dois ou mais fatores, num processo chamado de fatoração. Essa técnica é importante por facilitar a simplificação de diversas expressões algébricas e, também é fundamental na compreensão de suas representações geométricas.

Exemplos:

$3x + ax$ que pode ser escrito, na forma fatorada, como: $x(3 + a)$

$81x^2 + 36x + 4$ que pode ser simplificado como $(9x + 2)(9x + 2)$ ou $(9x + 2)^2$.

A fatoração facilita a resolução de vários problemas como, por exemplo $9x^2 + 36x + 4 = 0$, que pode ser reescrito como $(3x + 2)(3x + 2) = 0$. Dessa forma, basta encontrar o valor de x, tal que:

$$3x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

No problema acima, que se trata de uma equação de segundo grau, encontramos o valor de x sem a necessidade de utilizar a fórmula de Báskara e, dessa forma há uma agilidade considerável na resolução. Para tanto fez-se uso do produto notável **quadrado da soma**, um dos mais conhecidos e que será visto detalhadamente tópico a seguir.

1.2.3 Produtos Notáveis

Como visto acima, um produto notável é uma forma de simplificar algumas expressões algébricas reescrevendo-as em forma produto, de forma a facilitar a resolução de problemas e o termo notável se dá pela sua grande aplicação. Dessas simplificações, as principais são: **quadrado da soma** e da **diferença**, **Cubo da soma** e da **diferença** e o **produto da soma pela diferença**.

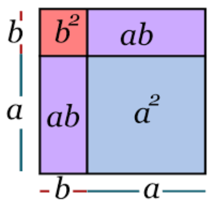
Quadrado da soma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Cubo da soma:$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Desenvolver produtos notáveis algebricamente requer que os alunos tenham assimilado bem as propriedades da multiplicação, como por exemplo, a distributividade, entretanto, muitas vezes os discentes fazem essas operações automaticamente por terem apenas decorado a "fórmula" e não por estarem entendendo o que está sendo feito. Dessa maneira, pode-se apresentar a eles a maneira geométrica de representar e operar com produtos notáveis, para que tenham uma visualização do processo.

Quando se pensa no quadrado da soma, é possível imaginá-lo como um retângulo, mias especificamente um quadrado cujo lado meça $a+b$. Assim ao calcular $(a+b)^2$ nada mais seria que construir um retângulo cuja área seria o resultado desse produto.

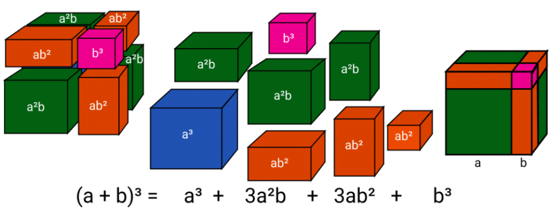
Figura 1.3: **Representação geométrica de** $(a+b)^2$



Fonte: site Todo Estudo, 2023

Para a representação geométrica de $(a+b)^3$, podemos proceder de maneira análoga, mas com atenção para o fato de que agora iremos trabalhar com a composição de volumes, uma vez que esses polinômios são o resultado do produto da área da base pela altura de prismas. Dessa maneira, o resultado do cubo da soma seria dada pela composição de sólidos menores.

Figura 1.4: **Representação geométrica de** $(a+b)^3$



Fonte: site Matemática Básica, 2023

1.2.4 Aplicações dos produtos notáveis

Em matemática, os produtos notáveis possuem grande aplicação, nas mais variadas situações como: fatoração de expressões algébricas, resolução de equações e, devido a essa ligação com vários outros conteúdos, vale a pena conhecer com mais detalhes algumas dessas aplicações. Uma delas é a relação entre este conteúdo e a Análise Combinatória, como é possível ver a seguir.

Análise combinatória

Segundo HAZZAN 2013, a Análise Combinatória é o ramo da Matemática que visa contar o número de elementos de determinado conjunto, sendo estes, agrupados segundo condições pré-estabelecidas, técnica que é fundamental quando se trabalha com coleções muito grandes. Esse conhecimento também abrange maneiras diferentes de contagem a depender da situação, tais opções são: **Princípio Fundamental da contagem**, **Permutações**, **Arranjos** e **Combinações**, sendo esta última, a que abordaremos a seguir para melhor entendimento do presente trabalho.

Tomemos um conjunto A com n elementos, ou seja, $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$. Chamaremos de combinações dos n elementos tomados p a p, a todos os subconjuntos de A contendo p elementos.

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quais são as combinações dos elementos de A tomados dois a dois?

$\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}$

$\{2, 3\}; \{2, 4\}$

$\{3, 4\}$

Logo é possível formar seis subconjuntos de A, cada um contendo dois elementos. Porém, note que quando falamos de combinações temos que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, pois estamos trabalhando com subconjuntos e por isso a ordem dos elementos não importa.

Como visto acima, quando queremos obter subconjuntos de um conjunto pequeno, é possível listar esses elementos um a um. Porém, se estivermos trabalhando com coleções muito grandes, essa tarefa fica muito difícil e, torna-se necessário uma notação para calcular a quantidade desses elementos, esta é representada por C_p^n (*Combinações de n elementos tomados p a p*) ou $\binom{n}{p}$ (*Binomial de n sobre p*), cujo cálculo é expresso a seguir.

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplos:

$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$

Quando temos um conjunto com muitos elementos e queremos saber quantas combinações são possíveis de serem formadas a partir de certa quantidade dos mesmos, o cálculo acima se torna uma ferramenta extremamente necessária. Contudo existem casos em que não é preciso gastar tempo efetuando as operações, estes são os chamados casos particulares, cujos resultados são comprovados a seguir.

$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$

$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

Observação: $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ são chamados complementares, pois $p+(n-p) = n$, quando isso acontece temos $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, como nos exemplos abaixo.

$\binom{4}{1} = \binom{4}{3}; \binom{9}{0} = \binom{9}{9}; \binom{10}{6} = \binom{10}{4}$

Os casos acima, a menos de $\binom{0}{0}$, serão úteis para os cálculos que serão feitos no tópico seguinte, em que serão necessários para o desenvolvimento dos chamados binômios de Newton.

Binômio de Newton

Para o desenvolvimento do produto $(a + b)^n; n \in \mathbb{N}$, dentre os quais se enquadram os principais produtos notáveis, é possível utilizar conceitos de análise combinatória para expressar o termo geral da expressão, tal técnica é chamada Binômio de Newton. Porém, antes, vejamos alguns exemplos mais simples, em que é se obtêm o resultado de maneira mais intuitiva.

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Agora, se fosse necessário desenvolver $(a + b)^n$ para $n \geq 4$, teríamos bastante trabalho. Por isso é necessário um recurso que nos permita descobrir os termos da expressão, mas antes vamos nos atentar para alguns detalhes no cálculo de $(a + b)^3$.

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Note que, do lado direito da igualdade, cada termo é formado pela escolha de um componente de cada um dos fatores que serão multiplicados entre si. Dessa maneira para obter a^2b, temos três possibilidades que são as seguintes: $a \cdot a \cdot b$, $a \cdot b \cdot a$ ou $b \cdot a \cdot a$

Ainda utilizando o exemplo acima, pode-se pensar de quantas maneiras é possível formar cada elemento do desenvolvimento de um binômio. Para exemplificar essa situação, segue abaixo as possibilidades existentes para cada termo de $(a+b)^3$.

1. a^3

   Note que a única maneira de se obter a^3 é fazendo: $a \cdot a \cdot a$, ou seja o produto dos "a" de cada fator de $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$;

2. a^2b

   Este termo é obtido de três maneiras, que são: $a \cdot a \cdot b$, $a \cdot b \cdot a$ e $b \cdot a \cdot a$;

3. ab^2

   Também pode ser obtido de três maneiras diferentes, são elas: $a \cdot b \cdot b$, $b \cdot a \cdot b$ e $b \cdot b \cdot a$;

4. b^3

   Por fim, a única maneira de se obter b^3 é: $b \cdot b \cdot b$.

Quando o binômio $(a+b)^n; n \in \mathbb{N}$ é desenvolvido, cada coeficiente da expressão resultante representa a quantidade de maneiras possíveis dos produtos que formam sua parte literal e, como em uma multiplicação não importa a ordem dos elementos, faz-se uso da contagem de combinações simples dos mesmos. Esse cálculo é representado por um elemento chamado número binomial, cuja definição é vista a seguir.

Definição 2:

Número binomial: *Denotado por $\binom{n}{p}$, lê-se: binomial de n sobre p, representa uma combinação de n elementos tomados p a p.*

Para calcular $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$, teríamos uma única forma de se obter a^2, duas para ab e uma para b^2. Dessa maneira os coeficientes podem ser representados por números binomiais e, a expressão escrita como segue.

$$\binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

Utilizando o mesmo raciocínio, podemos obter o desenvolvimento de outros binômios.

$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$

$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$

$\vdots$

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2} + a^{n-2}b^2 + \cdots \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \cdots \binom{n}{n}b^n$

Note que $\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$ é chamado termo geral do binômio. Dessa maneira concluímos que $(a+b)^n$ pode ser representado pelo somatório a seguir.

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}b^p$$

Exemplos:

$(a+b)^5 = \sum_{p=0}^{5} \binom{5}{p} a^{5-p} b^p = \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a b^4 + \binom{5}{5} b^5$

$(a+b)^{20} = \sum_{p=0}^{20} \binom{20}{p} a^{20-p} b^p = \binom{20}{0} a^{20} + \binom{20}{1} a^{19} + \binom{20}{2} a^{18} b^2 + \cdots + \binom{20}{18} a^2 b^{18} + \binom{20}{19} a b^{19} + \binom{20}{20} b^{20}$

Conhecer o termo geral do binômio de Newton é importante, pois facilita o desenvolvimento para qualquer expoente, com maior agilidade. Além disso, é possível descobrir um termo qualquer da expressão, o que agiliza a resolução de vários problemas, em que não é necessário desenvolver todo o somatório.

Relação entre o número binomial e o material manipulável

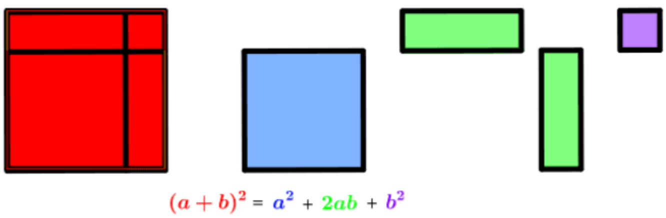
Vimos que o objetivo de utilizar o material manipulável, no ensino de produtos notáveis, é dar uma interpretação geométrica para as expressões e, por essa razão conseguimos trabalhar com os conceitos de área e volume. Portanto, tomemos como exemplo os binômios $(a+b)^2$ e $(a+b)^3$.

Desenvolvendo $(a+b)^2$, temos:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

Os binomiais $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ e $\binom{2}{2}$, representam a quantidade de termos a^2, ab e b^2 respectivamente e, quando é feita a representação por meio do material manipulável, esses valores indicam a quantidade de cada figura envolvida na composição da área resultante, como pode ser visto na figura

Figura 1.5: **Figuras que compõe o binômio** $(a+b)^2$



Fonte: site Geogebra.org, 2023

Como dito anteriormente, cada número binomial representa a quantidade de cada peça utilizada para compor a figura que representa o quadrado cujo lado mede $(a+b)$. Portanto para representar geometricamente o binômio $(a+b)^2$, precisa-se dos seguintes elementos.

- 1 quadrado de lado a;
- 2 retângulos de área ab;
- 1 quadrado de lado b.

Para o desenvolvimento geométrico de $(a + b)^3$, o raciocínio é análogo ao visto acima, para o quadrado da soma, com a diferença que ao invés da área de quadriláteros, será trabalhado o volume de prismas. Ainda assim, cada número binomial representará a quantidade de cada tipo de prisma a ser utilizado na composição do cubo resultante, como pode ser visto na figura 1.4, e dessa forma teremos o seguinte.

- 1 cubo de aresta a;
- 3 prismas de volume $3a^2b$;
- 3 prismas de volume $3ab^2$;
- 1 cubo de aresta b.

A interpretação geométrica permite que o aluno pense a quantidade de elementos a serem utilizados, não só no desenvolvimento de produtos notáveis, mas de qualquer expressão algébrica que envolva multiplicações, principalmente quando se faz uso da propriedade distributiva. Essa possibilidade de visualizar a operação de maneira física ajuda os discentes a compreender operações que na maioria das vezes não conseguem quando se valem apenas da abstração.

Capítulo 2

Aplicação em sala de aula

2.1 Metodologia da pesquisa

A metodologia escolhida para o presente trabalho foi o de pesquisa-ação, que segundo Engel 2000, desenvolve o conhecimento como parte da prática e, por isso, faz com que o pesquisador também seja um indivíduo da situação em estudo, buscando uma melhor compreensão do problema. Dessa maneira, o método consiste em entender o contexto, suas causas e, a partir daí, elaborar uma estratégia de solução para determinado problema.

Dentre as várias aplicações em sociologia e psicologia, a pesquisa ação vem sendo amplamente utilizada quando se pensa em problemáticas no contexto do ensino/aprendizagem, o que justifica a escolha deste método para o presente trabalho, uma vez que se busca investigar o desempenho de uma turma de ensino médio numa atividade sobre expressões algébricas utilizando material manipulável. Ao final das atividades, foi feita uma comparação do "antes e depois", para verificar a eficácia do material na apreensão do conhecimento, pelos discentes.

Seguindo as fases da pesquisa-ação, primeiramente foi definido o problema a ser estudado, que são as dificuldades dos alunos do ensino médio quando se trata de operações algébricas, pois não conseguem aplicar as principais propriedades e muitas vezes fazem as operações de forma equivocada. Então, partindo desse problema, fez-se uma pesquisa teórica sobre o conteúdo e a utilização de materiais manipuláveis como suporte ao aprendizado.

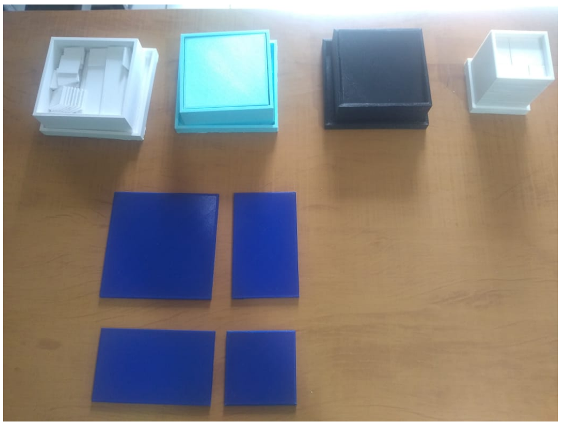
Depois de algumas leituras sobre a temática, foi elaborado um plano de uma atividade a ser aplicada com alunos de uma turma de terceiro ano do ensino médio, cujo objetivo foi comparar o desempenho dos discentes antes e depois de utilizar o material manipulável como auxílio na resolução dos problemas. Dessa maneira, terão uma abordagem geométrica dos desafios, que até então eram resolvidos apenas algebricamente e, para que se entenda melhor o desenvolver das atividades, segue o planejamento e o relato de como foram desenvolvidas as atividades, além do envolvimento da turma durante a resolução dos problemas.

2.2 O material utilizado

O material utilizado na realização da oficina é composto por uma lista[1] de exercícios com alguns problemas algébricos envolvendo soma, subtração e multiplicação. Essa atividade foi aplicada nas duas fases da oficina, em que primeiro os cálculos foram feitos de maneira puramente algébrica e, na segunda aplicação, utilizou-se os materiais manipuláveis.

O material manipulável utilizado como suporte na segunda fase da oficina, foi confeccionado por meio de impressão 3D e se constitui de Kits contendo quadrados de dois tamanhos diferentes e retângulos. Este material foi entregue aos alunos que estavam divididos em equipes, para que estes fizessem a representação algébrica das soluções da lista de exercícios. Veja na figura 2.1, a composição do material.

Figura 2.1: **Material desenvolvido para a aplicação da oficina**



Fonte: Autoria própria, 2023

Na segunda aplicação da lista de exercícios, em que estes foram resolvidos geometricamente, por meio do material manipulável, o objetivo foi primeiramente resolver de forma algébrica e, em seguida, representar a solução geométrica. Neste momento, ao expressar geometricamente as soluções, esperava-se que os discentes percebessem as relações entre as duas representações.

Tomemos como exemplo o desenvolvimento de $(a + 2b)^2$, temos o seguinte:

$$(a + 2b)^2 = (a + 2b) \cdot (a + 2b)$$

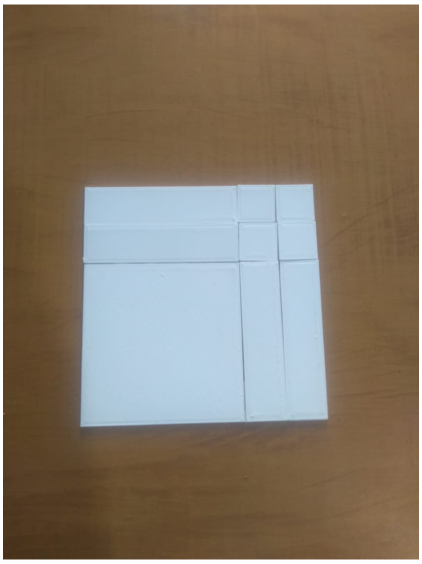
$$a^2 + 2ab + 2ab + 4b^2$$

$$a^2 + 4ab + 4b^2$$

[1] Veja a lista no apêndice.

Estabelecendo o valor a à medida maior e b, para a menor, a representação geométrica pode ser expressa como mostra a figura 2.2.

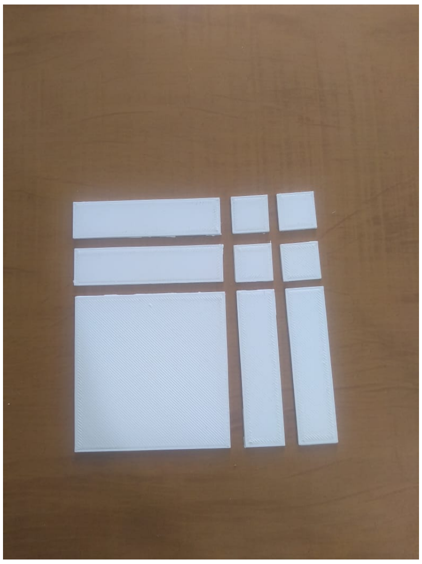
Figura 2.2: **Representação geométrica de** $(a + 2b)^2$



Fonte: Autoria própria, 2023

Esperava-se que os alunos entendessem a expressão $(a+2b)^2$, como o cálculo da área de um quadrado cujo lado mede $a + 2b$ e, em seguida, utilizasse as pecas necessárias para a compor essa figura, como aparece mais detalhadamente na figura 2.3.

Figura 2.3: **Elementos utilizados para representar** $(a + 2b)^2$



Fonte: Autoria própria, 2023

Portanto, o intuito foi que os alunos associassem o desenvolvimento das questões com o cálculo de áreas de figuras planas e, que também percebessem os coeficientes, do resultado como a quantidade de cada peça utilizada na composição da área resultante. Para maior detalhamento de como foram desenvolvidas as atividades, o leitor pode verificar o planejamento a seguir.

Oficina didática: EXPRESSÕES ALGÉBRICAS POR MEIO DO MATERIAL CONCRETO

A atividade foi planejada como instrumento de estudo para o presente trabalho, com o objetivo verificar o desempenho dos alunos de uma turma de ensino médio em relação ao conteúdo de expressões algébricas, principalmente no que se refere aos produtos notáveis.

A atividade ocorreu, basicamente, em duas etapas: uma em que os alunos resolveram alguns problemas algébricos[2], primeiramente pelos métodos tradicionais, utilizando apenas cálculos e propriedades operatórias, seguida de outra fase em que eles fizeram uso de material concreto para auxiliar nas operações, de modo que estas foram feitas geometricamente. Depois disso, foram tecidas algumas considerações a respeito das dificuldades e resultados alcançados, a fim de justificar a eficácia da utilização de tais recursos como suporte ao ensino/ aprendizagem.

Encontro I - 50 minutos

Objetivo geral

Verificar o nível de conhecimento da turma, no desenvolvimento e simplificação de expressões algébricas e suas representações geométricas.

Objetivos específicos

- Utilizar conhecimentos prévios em operações algébricas para fazer a simplificação de expressões;
- Representar geometricamente o desenvolvimento das expressões.

Metodologia

O professor aplicará uma lista com alguns exercícios sobre expressões algébricas e suas operações, e também com alguns exercícios de equações do segundo grau. A atividade servirá para levantar um panorama geral do conhecimento algébrico da turma e, ao final da aula será recolhida pelo professor.

Recursos utilizados

- Caderno;
- Lápis;
- Borracha.

Avaliação

Realização da atividade proposta.

Encontro II - 100 minutos

[2]Veja a lista de problemas no Apêndice

Objetivo geral

Desenvolver e fatorar expressões algébricas, fazendo

Objetivos específicos

- Efetuar a fatoração de expressões algébricas e mostrar sua representação algébrica por meio do material manipulável;
- Calcular área de quadriláteros e, utilizar composição dessas áreas na representação geométrica dos resultados.

Metodologia

1º momento - 10 minutos

Iniciará a atividade apresentando o material manipulável e como utilizá-lo, fazendo uso do cálculo da área de quadrados e retângulos, para representar diversas expressões algébricas, das quais serão apresentados alguns exemplos no quadro.

2º momento - 60 minutos

A turma será dividida em grupos de quatro a cinco pessoas e farão novamente a lista de exercícios do encontro anterior, contando, sempre que necessário, com a intervenção do professor e com o material manipulável.

3º momento - 30 minutos

Será aplicado um questionário, a fim de compreender como foi o desenvolvimento dos alunos durante as atividades, fazendo um comparativo do *antes e depois* da utilização do material manipulável, considerando fatores como: dificuldades enfrentadas e nível de visualização geométrica dos problemas.

Recursos utilizados

- Quadro branco;
- Material manipulável;
- Caderno;
- Lápis;
- Borracha.

Avaliação

Participação e realização da atividade.

2.3 Discussão dos Resultados

Depois de feitas as pesquisas, planejado o método de investigação e realizadas as atividades, chegou a hora da discussão dos resultados obtidos. Para tanto, as atividades foram desenvolvidas em duas etapas, para que ao final fosse feito um comparativo do desempenho dos alunos em cada uma. Dessa maneira, este capítulo apresenta os comentários sobre as respostas obtidas, seguidas das conclusões acerca da eficácia de se utilizar materiais manipuláveis para dar uma visão geométrica ao ensino de Álgebra e melhorar a compreensão dos discentes deste conteúdo.

2.3.1 Relato da aplicação da oficina

A oficina foi realizada em dois encontros com a turma, em que foi resolvida a mesma lista de exercícios, sendo que na primeira etapa os alunos responderam apenas algebricamente, dispondo de seus conhecimentos prévios. Nessa etapa, os discentes tiveram um desempenho ruim como erros na aplicação das propriedades operatórias, principalmente a distributiva, e a substituição das letras por valores numéricos o que demonstrou a dificuldade da turma em operar com valores genéricos.

Os resultados citados acima, já eram esperados devido a grande dificuldade que os alunos tinham em fazer operações básicas e utilizar suas propriedades, conteúdos que normalmente são vistos anos antes, problema que se potencializou ao trabalhar cálculos algébricos. Essas dificuldades, aliadas a falta de atenção se tornam um desafio a mais para o professor na produção de um aprendizado significativo.

Primeira fase de aplicação da oficina (14/11/2023)

Nesta terça-feira, o objetivo era que os alunos resolvessem uma lista com algumas expressões algébricas, dispondo de seus conhecimentos prévios em operações básicas e áreas de figuras planas, mais especificamente quadrados e retângulos. Neste dia foi dada uma breve explicação sobre como seriam desenvolvidas as atividades e, logo após os discentes começaram a resolver os problemas.

Durante a aplicação da atividade, os alunos tiveram muitas dificuldades, o que se refletiu na frequência com que pediam ajuda, praticamente a todo momento. Essa dificuldade, além do baixo nível de abstração geométrica, também é resultado da falta de interesse e atenção durante a ministração dos conteúdos, problema que segundo Andrada et al. 2018, tem origem, dentre outros fatores, na lenta adequação da escola ao crescente dinamismo das informações proporcionado pela era digital.

Segunda fase de aplicação da oficina (21/11/2023)

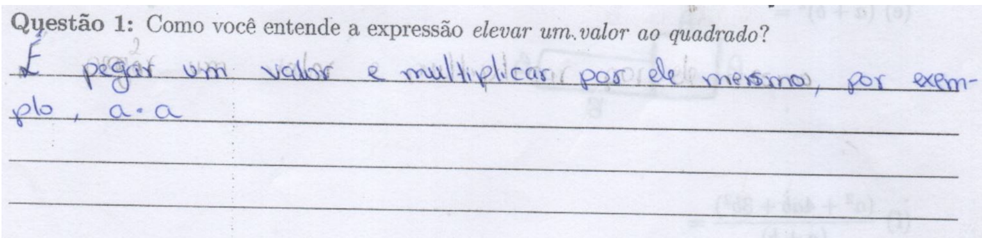
Para a segunda etapa das atividades, foram confeccionados três kits de materiais manipuláveis, constituídos de retângulos e quadrados, que foram feitos por meio de impressão 3D. Esse material foi utilizado na visualização geométrica das operações, com o objetivo de melhorar a compreensão da Álgebra.

As dificuldades ainda existiam, mas dessa vez havia uma motivação maior por causa dos materiais, que os alunos manipulavam e isso dava mais significado ao que foi proposto, o que propiciou uma melhora significativa no desempenho dos discentes. Para que o leitor tenha uma panorama das melhorias nos resultados, foram selecionadas algumas questões das atividades dos quatro discentes com melhor desempenho, para um breve comparativo do "antes e depois" da utilização do material manipulável.

Questão 1

A primeira questão perguntava ao aluno, como ele entende a expressão: *elevar um número ao quadrado* e, tanto na primeira quanto na segunda fase da oficina os alunos continuaram com a mesma ideia, como pode ser visto nas figuras abaixo, as respostas da aluna IS.

Figura 2.4: **Resposta da aluna IS na primeira aplicação**

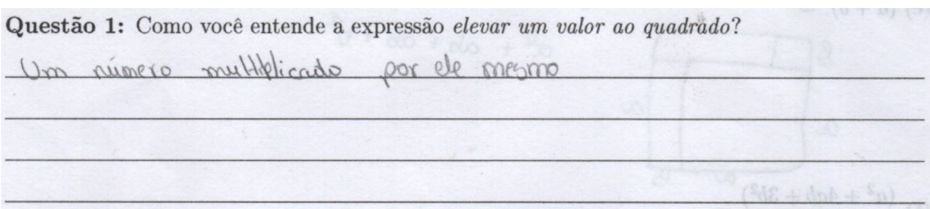

Questão 1: Como você entende a expressão *elevar um valor ao quadrado?*

É pegar um valor e multiplicar por ele mesmo, por exemplo, a·a

Fonte: Autoria própria, 2023

Nesta resposta, predomina a noção puramente algébrica da frase, pois mesmo com a expressão *elevar ao quadrado*, a aluna não fez nenhuma associação com a geometria. Portanto, como era esperado, os alunos veem a Álgebra como algo totalmente dissociado da Geometria, pois não conseguem perceber que a expressão vem do cálculo da área de um quadrado.

Figura 2.5: **Resposta da aluna IS na segunda aplicação**


Questão 1: Como você entende a expressão *elevar um valor ao quadrado?*

Um número multiplicado por ele mesmo

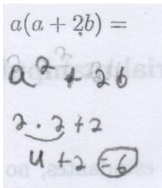
Fonte: Autoria própria, 2023

Em ambas as aplicações, respostas que trazem o significado puramente algébrico foram unânimes, o que demonstra ainda ser necessário algumas aulas em que expressões algébricas sejam abordadas de forma geométrica, para que os alunos passem a associar as duas áreas.

Questão 3(c) $a(a + 2b)$

Na questão três, os alunos deveriam desenvolver algebricamente e, também mostrar a representação geométrica de algumas expressões algébricas e, entre a primeira e segunda aplicação, foi possível perceber diferenças como a melhora na percepção geométrica dos resultados, porém ainda assim com alguns erros como não diferenciar quadrados e retângulos ao desenhar.

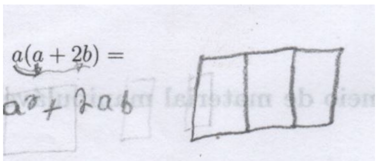
Figura 2.6: **Resposta da aluna AC na primeira aplicação**



Fonte: Autoria própria, 2023

Na primeira etapa, a aluna AC, tentou desenvolver a expressão, mas não fez a representação geométrica e, ainda atribuiu números às letras e resolveu a conta numericamente. Esse fato evidenciou um outro problema que os alunos possuem, que é a confusão e dificuldade de fazer cálculos genéricos.

Figura 2.7: **Resposta da aluna AC na segunda aplicação**



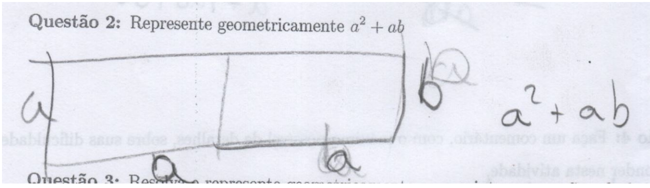
Fonte: Autoria própria, 2023

Na segunda etapa da oficina, a aluna AC teve um desempenho melhor, o que pode ser visto nesta questão em que, diferente da figura 2.6, ela conseguiu utilizar a propriedade distributiva da multiplicação e não atribuiu nenhum valor particular às letras, além disso fez, ainda que sem exatidão nas medidas, a representação geométrica da figura obtida com o auxílio do material manipulável.

Questão 2

A segunda questão da lista de atividades, pedia a representação geométrica de $a^2 + ab$, da qual serão mostradas aqui as respostas do aluno DJ, cuja resposta da primeira etapa mostra uma certa falta de atenção, como pode ser visto na figura a seguir.

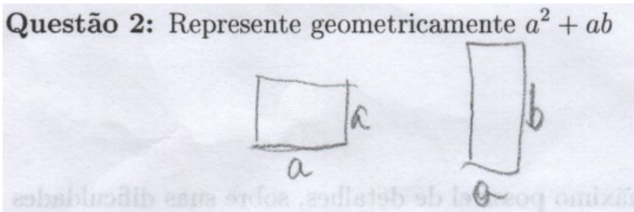
Figura 2.8: **Resposta do aluno DJ na primeira aplicação**



Fonte: Autoria própria, 2023

É possível perceber que o aluno DJ representa a^2 como um retângulo, o que demonstra que ele não se atentou para o fato de a figura ter os lados iguais. E essa desatenção se repete na segunda vez que a atividade foi aplicada, pois além da persistência do erro citado, ele representa as figuras separadamente, e não como a junção de duas áreas, que era o esperado.

Figura 2.9: **Resposta do aluno DJ na segunda aplicação**

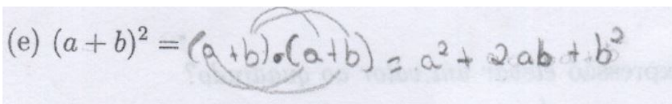


Fonte: Autoria própria, 2023

Questão 3(e) $(a + b)^2$

Esta foi uma das principais expressões da lista de exercícios, que deixou evidente o nível de conhecimento dos alunos sobre produtos notáveis, tanto no seu desenvolvimento algébrico quanto geométrico. Nesse exercício, o melhor desempenho foi o da aluna EL, que na primeira aplicação da atividade conseguiu desenvolver a expressão por meio da propriedade distributiva.

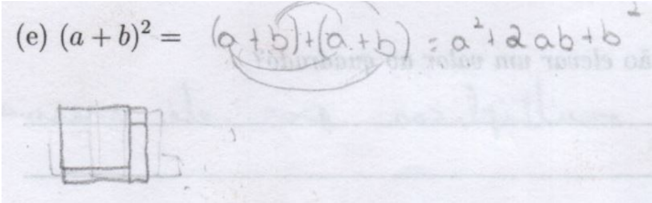
Figura 2.10: **Resposta da aluna EL na primeira aplicação**



Fonte: Autoria própria, 2023

Na segunda etapa da oficina, a aluna EL utilizou a propriedade distributiva mais uma vez e, além disso, conseguiu representar perfeitamente a forma geométrica da expressão, resposta que demonstrou a efetividade da utilização do material manipulável, uma vez que a discente entendeu $(a + b)^2$ como a área de um quadrado cujo lado mede $a + b$

Figura 2.11: **Resposta da aluna EL na segunda aplicação**

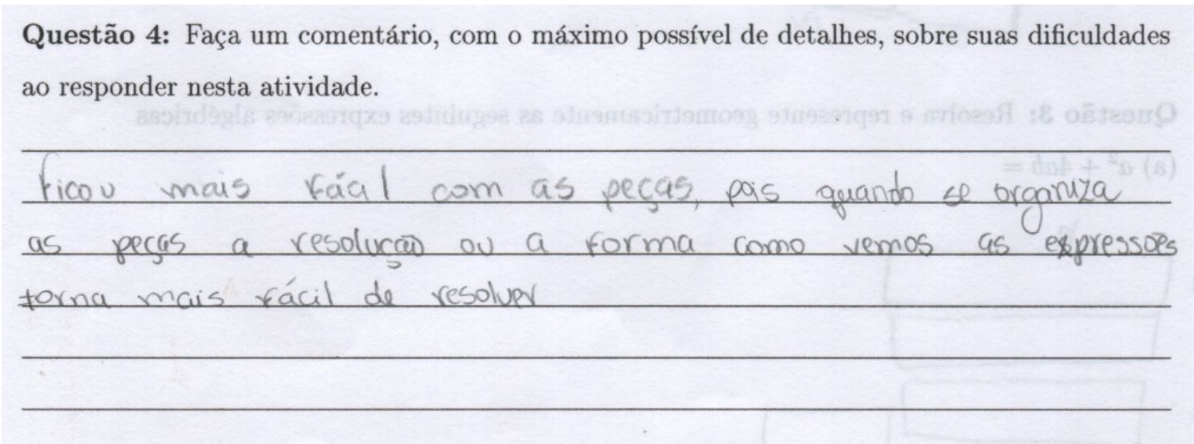


Fonte: Autoria própria, 2023

Questão 4

A última questão da atividade pedia para que os discentes fizessem um breve comentário sobre as dificuldades que tiveram durante a resolução dos exercícios e, se manipular o material e verificar os resultados geometricamente ajudou a entender melhor os procedimentos. Porém a turma também apresenta dificuldades de argumentação o que resultou em comentários muito pequenos e com poucos detalhes, por isso foi selecionada a resposta da aluna IS, que destacou a eficiência do material concreto na visualização e compreensão das expressões algébricas.

Figura 2.12: **Resposta da aluna IS na segunda aplicação**



Questão 4: Faça um comentário, com o máximo possível de detalhes, sobre suas dificuldades ao responder nesta atividade.

Ficou mais fácil com as peças, pois quando se organiza as peças a resolução ou a forma como vemos as expressões torna mais fácil de resolver

Fonte: Autoria própria, 2023

A turma apresentou resultados bem uniformes em relação a compreensão do conteúdo nas duas etapas da oficina, o que também se deve ao fato das atividades serem desenvolvidas em equipe. Nessa etapa, já se esperava tentativas de resolução predominantemente algébricas, como de fato aconteceu, porém a segunda etapa da oficina trouxe muitos efeitos positivos, pois foi perceptível que utilizar o material manipulável foi eficaz ao estimular a visualização geométrica da turma.

Capítulo 3

Discussões finais e Conclusão

3.1 Recapitulando o trabalho e chegando a uma conclusão

O intuito do presente trabalho foi de evidenciar o potencial do material manipulável para diminuir as dificuldades de aprendizado, enfrentadas pela grande maioria dos alunos da educação básica, principalmente em Matemática. Desafios que são ocasionados pela falta de associação de conteúdos abstratos a objetos concretos, que tornam o aprendizado mais próximo da realidade e gera mais significado aos discentes.

Dentre vários conteúdos que os alunos têm dificuldade de compreensão, o tema escolhido foi *expressões algébricas e produtos notáveis*, por ser a transição entre fazer contas com números e letras, o período que mais confunde os discentes e, aqui falo até por experiência própria. Pensando nessa temática, foi feita uma apresentação teórica sobre Álgebra e como suas expressões podem ser representadas geometricamente, seguida da proposta de se utilizar materiais manipuláveis para servir de suporte à visualização das manipulações e propriedades algébricas, seguida de uma atividade que teve o intuito de verificar a eficácia do material.

Utilizar o material manipulável como suporte ao ensino de expressões algébricas e produtos notáveis, sem dúvida, facilitou a compreensão do conteúdo e possibilitou aos alunos testar hipóteses e reconhecer padrões. Porém, como afirma Coelho e Scheid 2012, essa eficácia depende também da proposta pedagógica que norteia sua utilização e da maneira que o professor mediará todo o processo.

A partir do exposto no presente trabalho, chega-se a seguinte conclusão: utilizar ferramentas que convertam conceitos abstratos em algo mais tangível, como é o caso dos materiais manipuláveis, torna a aprendizagem mais significativa e atraente para o aluno. Esse despertar da curiosidade estimula a criatividade e a comunicação dos discentes entre si, uma vez que estes compartilham resultados e estratégias de resolução e percebem o forte elo entre Álgebra e Geometria, tirando a visão equivocada de que essas áreas não possuem ligação.

3.2 Sugestões para próximos trabalhos

Trabalhar a Álgebra por um viés geométrico foi, sem dúvida, de grande valia tanto para melhor compreensão por parte dos alunos, quanto por torná-los sujeitos ativos no desenvolvimento do conteúdo, ao invés de simplesmente ouvir a ministração da teoria e, em seguida resolver uma série de exercícios repetitivos que, para eles não possuem uma aplicação na sua realidade e, por isso não têm significado. Portanto constata-se que a utilização de materiais manipuláveis e outras metodologias que tornam o discente mais ativo na produção e socialização do conhecimento, torna o aprendizado mais significativo e melhora o desempenho do educando em vários aspectos.

Apesar de todas as vantagens em aplicar atividades que provoquem mais os alunos à ação e reflexão, em que o professor atua como mediador do conhecimento, ainda existem alguns problemas a serem enfrentados. Um deles, é a apatia dos alunos em relação aos trabalhos propostos pelo professor, pois na maioria das vezes, a turma não demonstra o mínimo de empolgação para participar da atividade.

No início da aplicação das atividades apresentadas aqui, percebeu-se que boa parte da turma não mostrava muito interesse, tendo uma maior participação só a partir da metade da aula. Acreditando que essa apatia é provocada por vários fatores tanto do sistema de ensino quanto por razões sociais e emocionais, sugiro que sejam feitas novas pesquisas que busquem compreender os sentimentos e expectativas dos discentes sobre a escola e também de suas vivências fora dela, para que os professores possam ter estratégias de como cativar a atenção e motivação dos estudantes.

Apêndice

Veja na página seguinte, a atividade elaborada para a oficina aplicada neste trabalho.

COLÉGIO ESTADUAL ABDIAS MENEZES

Disciplina: Matemática

Professor(a): Diógenes Santana da Silva **Data:** ____/____/______

Aluno(a): ________________________________ **Turma:** ________

Resolvendo problemas algébricos por meio de material manipulável

Esta atividade o objetivo de observar como está o desempenho de estudantes, no que se refere a Álgebra e suas operações, ou seja, levantar informações a respeito das habilidades ou dificuldades apresentadas pelos discentes do Ensino Médio. Para tanto, se fará a mesma atividade duas vezes, a primeira apenas com os conhecimentos algébricos e a segunda, com uma abordagem geométrica, fazendo uso de materiais manipulativo para que, ao final das atividades seja feito um comparativo dos resultados entes e depois da utilização do recurso geométrico.

Questão 1: Como você entende a expressão *elevar um valor ao quadrado*?

____

____

____

____

Questão 2: Represente geometricamente $a^2 + ab$

Questão 3: Resolva e represente geometricamente as seguintes expressões algébricas

(a) $a^2 + 4ab =$

(b) $ab + ab + ab =$

(c) $a(a + 2b) =$

(d) $(a + 5b)(a + 3b) =$

(e) $(a + b)^2 =$

(f) $\dfrac{(a^2 + 4ab + 3b^2)}{(a + b)} =$

Questão 4: Faça um comentário, com o máximo possível de detalhes, sobre suas dificuldades ao responder nesta atividade.

Bibliografia

Andrada, Paula Costa de et al. (2018). “O desinteresse dos alunos de ensino médio pela escola na atualidade”. Em: *Momentum* 1.16.

Beckenbach, Ana Cláudia Spengler et al. (2021). “OS BENEFÍCIOS DA UTILIZAÇÃO DE JOGOS E MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO PRESENCIAL E REMOTO5”. Em.

Coelho, Fredy e Eliane Scheid (2012). “Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão”. Em: *REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática* 7.2, pp. 187–196.

Engel, Guido Irineu (2000). “Pesquisa-ação”. Em: *Educar em Revista*, pp. 181–191.

Facchi, Maria Gabriela (2022). “A importância do uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática”. B.S. thesis. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

HAZZAN, Samuel (2013). *Fundamentos de Matemática Elementar 5: Combinatória, probabilidade*. Vol. 5. Atual.

Ornelas, Manoela Gonçalves (2021). “Explorando áreas e volumes de figuras geométricas como forma de estimular o aprendizado de produtos notáveis via Geogebra”. Em.

Schuck, Fernanda et al. (2013). “O uso do Algeplan como ferramenta para a construção de conceitos referentes a produtos notáveis”. Em: *Anais. XI Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Silva, Katia e Mylani Costa (2017). “Jogos digitais na escola: a utilização como objetos de aprendizagem no ensino da matemática”. Em: *Anais do XXIII Workshop de Informática na Escola*. SBC, pp. 21–30.

Silva, Lucylla Medeiros da (2021). “Uma abordagem geométrica para operações básicas dos polinômios de 1º, 2º e 3º graus”. Tese de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Ventura, Angélica Rodrigues e João Bosco Laudares (2016). “Ressignificação dos Produtos Notáveis Utilizando Material Concreto”. Em: *Abakós* 5.1, pp. 34–47.