Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas
Curso de Licenciatura em Matemática

Daniel da Silva Campos

Utilização do GeoGebra para resolução de problemas de Programação Linear, voltados para o Ensino Médio

Vitória da Conquista - BA

2018

Daniel da Silva Campos

Utilização do GeoGebra para resolução de problemas de Programação Linear, voltados para o Ensino Médio

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista - BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira.

Vitória da Conquista - BA

2018

Campos, Daniel da Silva

Utilização do GeoGebra para resolução de problemas de Programação Linear, voltados para o Ensino Médio/ Daniel da Silva Campos. – Vitória da Conquista - BA, 2018

104 p. ; 30 cm.

Orientador: Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira.

Monografia (Graduação) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, Licenciatura Plena em Matemática, 2017

1. Pesquisa Operacional. 2. Programação Linear. 3. Simplex. 4. Representação Gráfica. I. Cerqueira, Dr. Gonçalo Renildo Lima. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Campus Vitória da Conquista. III. Curso de Licenciatura Plena em Matemática. IV. Título

Daniel da Silva Campos

Utilização do GeoGebra para resolução de problemas de Programação Linear, voltados para o Ensino Médio

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista - BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira.

Trabalho aprovado. Vitória da Conquista - BA, 12 de abril de 2018:

Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira
Orientador

Prof. Dr. Sérgio da Silva Aguiar

Prof. Dr. Marlos André M. S. de Oliveira

Vitória da Conquista - BA
2018

Dedico este trabalho à minha querida e amada mãe, Regina Lúcia (in memoriam).

Agradecimentos

À Deus, infinitamente agradeço, por ter renovado minhas forças por todo o trajeto, concedendo-me saúde, resiliência, coragem e sabedoria para superar os obstáculos que, porventura, se opuseram a mim.

Agradeço à minha amada esposa, Aline Sampaio dos Santos Campos, por todo o amor, carinho e pelo incondicional apoio durante todo o período do curso. Te Amo!

Aos meus filhos, Felippe Campos, Leonardo Campos e Bernardo Campos, por serem os anjos que me inspiram a crescer e buscar ser melhor a cada dia. Amo vocês!

Agradeço aos meus familiares, em especial minha avó materna Maria de Lourdes, minhas tias Célia Santos e Selma Santos, meus tios Carlos Alberto e Vivaldo Dias, e por último, mas não menos importante, meu tio e pai Carlos César Silva Santos, por serem exemplo em minha vida, ensinando-me a ser uma pessoa melhor.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira, pela paciência, dedicação e atenção, orientando-me e despertando o interesse pela pesquisa. Sou imensamente grato pela sua contribuição para a realização desse trabalho.

À UESB e aos demais professores que constituem o corpo docente da citada instituição, em especial, aos professores Antônio Augusto, Ana Paula Perovano, Júlio Reis, Altemar Brito, Eridan Maia, Taíse Santana, Sérgio Aguiar e Wallace Cunha, que contribuíram, diretamente, para a formação do meu caráter e profissionalismo. Quando deveriam ser, simplesmente, professores, foram Mestres, e quando deveriam ser Mestres, foram amigos, compreendendo e me incentivando a seguir o caminho.

À todos os colegas, com os quais vivemos tantos momentos juntos, compartilhando experiências, estudo, aprendizados e conhecimento; em especial, Hélenn Tamise, Velton Pires, Welma Heisig e Maritza Brito.

Muito obrigado a todos!

“Porque a loucura de Deus
é mais sábia que a sabedoria humana,
e a fraqueza de Deus
é mais forte que a força do homem”.
(Bíblia Sagrada, I Coríntios 1:25)

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma proposta de resolução de problemas que envolva Programação Linear voltada para o Ensino Médio, utilizando-se o *software* GeoGebra (2017). Para tanto, destacamos os conteúdos necessários para o desenvolvimento do tema, desde o domínio do *software* utilizado, até os conceitos matemáticos de ponto, reta, plano, polígonos, matrizes, sistemas lineares, equações e inequações lineares. Durante o desenvolvimento das atividades propostas, os professores são convidados a permitir que os alunos encontrem sozinhos métodos de resolução de problemas, socializando as respostas encontradas, possibilitando que os discentes desenvolvam maneiras próprias de resolução, proporcionando independência de métodos repetitivos e aproximando-os da vivência. É apresentada ainda, a análise de um livro didático utilizado em escolas públicas, visando compreender como a Programação Linear é abordada no Ensino Médio e quais as contribuições que os *softwares* gráficos podem proporcionar ao aprendizado dos alunos. Ressaltamos o contexto histórico da Pesquisa Operacional, conceitos básicos de Álgebra Linear, Programação Linear, o Método Simplex e a Programação Linear Geométrica, utilizada em diversos setores de atividade como a indústria, a Economia, a gestão de recursos humanos, entre outros, que procuram a solução ótima entre várias soluções possíveis para um dado problema.

Palavras-chave: Resolução de problemas, GeoGebra, Ensino Médio, Pesquisa Operacional, Simplex, Programação Linear.

Abstract

In this work we present a proposal of problem solving that involves Linear Programming aimed at High School, using the software GeoGebra. In order to do so, we highlight the contents necessary for the development of the theme, from the domain of the software used to the mathematical concepts of point, line, plane, polygons, matrices, linear systems, equations and linear inequalities. During the development of the proposed activities, teachers are invited to allow students to find solving problem solving methods alone, socializing the answers found, allowing students to develop their own ways of solving, providing independence of repetitive methods and bringing them closer to the experience . It is also presented the analysis of a didactic book used in public schools, aiming to understand how Linear Programming is approached in High School and what the contributions that graphics can provide to the students' learning. We highlight the historical context of Operational Research, basic concepts of Linear Algebra, Linear Programming, Simplex Method and Linear Geometric Programming, used in several sectors of activity such as industry, economics, human resources management, among others, seeking the optimal solution among several possible solutions for a given problem.

Keywords: Troubleshooting, GeoGebra, High School, Operational Research, Simplex, Linear Programming.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

PO	Pesquisa Operacional
PL	Programação Linear
PPL	Problema de Programação Linear
SCOOP	Scientific Computation of Optimum Program
VNB	Variáveis não básicas
VB	Variáveis Básicas
SB	Solução Básica
SBF	Solução Básica Factível
NLP	Nova Linha Pivô
RV	Região Viável
UnB	Universidade de Brasília
UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PC	Personal Computer

Lista de símbolos

λ	Lambda
$\in$	Pertence
$\forall$	Para Todo
$\sum$	Somatório
$\Re$	Conjunto dos Números Reais

Sumário

Introdução

A Programação Linear surgiu na década de 1940 graças aos estudos de L. V. Kantorovitch (Nobel de Economia), abrindo um leque de possibilidades de aplicações em problemas relacionados à otimização da gestão industrial e à planificação econômica. Trabalhos posteriores, em especial os de George Dantizg, desenvolveram métodos distintos de resolução desses problemas, entre eles o Método Simplex.

O processo de ensino e aprendizagem em matemática é composto por inúmeras variáveis, exigindo do docente intensa busca por metodologias e práticas diversificadas de ensino-aprendizagem. Os professores apresentam imensa dificuldade em envolver seus alunos com a Matemática, pois sobram dificuldades em lidar com os conteúdos, falta motivação e, sobretudo, falta aplicação dos saberes da Matemática escolar em situações do cotidiano.

O presente trabalho foi elaborado com o objetivo de apresentar uma proposta de ensino de Programação Linear, com a utilização do *software* GeoGebra, numa linguagem acessível aos alunos e que possa ser utilizado por professores que atuam no Ensino Médio.

Segundo Melo (2012), o processo de ensino e aprendizagem da matemática é muito complexo e composto de muitas variáveis, o que pode servir para fomentar o desejo pela busca de alternativas que possam reduzir de forma gradativa, tais dificuldades. Melo (2012) destaca ainda uma "imensa necessidade de buscarmos uma maior motivação para nossos discentes, através de uma matemática mais interessante e relacionada aos aspectos socioculturais dos alunos".

Importante destacar que:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus meios, experimenta o sentimento da autoconfiança e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar

> o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no carácter. (POLYA, 1994, p.05)

Martins (2013) aponta "que é necessário conectar alguns conteúdos ensinados na educação básica entre si e aproximá-los mais da vivência de nossos alunos", e os conceitos da Programação Linear podem propiciar tal aproximação. Ele cita ainda que as atividades propostas em sua dissertação "oportunizaram que os alunos criassem seu próprio algoritmo para a resolução de Problemas de Programação Linear", favorecendo o aprendizado, ao passo que, distancia-se da mecanização e memorização de procedimentos e algoritmos.

Conforme podemos observar, a Programação Linear pode ser aplicada facilmente, respondendo aos anseios de contextualização da matemática no dia a dia dos discentes, possibilitando o contato com a modelagem. Ainda assim, trata-se de um conteúdo pouco explorado no Ensino Médio, com pouca abordagem nos livros didáticos.

O trabalho está dividido em cinco capítulos, onde no Capítulo 1 é apresentado os aspectos históricos da Pesquisa Operacional, bem como da Programação Matemática e da Programação Linear, além da teoria básica de Álgebra Linear com enfoque robusto às matrizes e aos sistemas lineares, bem como ao Método de Gauss-Jordan e os Conjunto Convexos.

No Capítulo 2 são apresentadas definições, teoremas importantes e conceitos para a elaboração de um modelo de Programação Linear, além do Algoritmo e do Método Simplex.

O Capítulo 3 aborda a Programação Linear Geométrica, analisando como se dá a resolução gráfica de um Problema de Programação Linear, destacando alguns softwares gráficos utilizados para resolução de Problemas de Programação Linear.

No Capítulo 4 apresentamos o estado da arte, revisando linhas de pesquisa que se assemelham ao tema abordado, bem como a análise de um livro didático do autor Dante (2016), utilizado no Ensino Médio.

Finalmente, no Capítulo 5 destacamos a resolução de problemas, com o uso do *software* GeoGebra (2017), voltada para o Ensino Médio. Apresentamos três situações-problema para auxiliar o docente na contextualização da Programação Linear em sala de aula.

Para a construção dos gráficos foi utilizado o *software* livre GeoGebra (2017), possibilitando que outros possam experimentar conhecer mais sobre o tema e o *software* em questão.

O editor de texto matemático LaTeX foi utilizado para a elaboração e edição deste trabalho, recorrendo quando preciso, ao manual desenvolvido por Oetiker et al. (1995).

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

1.1 Aspectos Históricos da Pesquisa Operacional

Segundo Cardoso (2011), a ***Pesquisa Operacional*** (PO) indica uma área do conhecimento que se aplica no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos, que tem por finalidade prever e comparar estratégias ou decisões alternativas com o objetivo de possibilitar suporte à definição de políticas e determinadas ações.

O termo Pesquisa Operacional, do inglês *Operations Research*, designa um conjunto de disciplinas isoladas tais como Programação Linear, Teoria das Filas, Simulação, Programação Dinâmica, Teoria dos Jogos, dentre outras. Mas, atualmente, as contribuições da PO estende-se por praticamente todos os domínios da atividade humana, da Engenharia à Medicina, passando pela Economia e à Gestão Empresarial.

Problemas envolvendo a Programação Matemática nos remete a antiguidade, como percebemos na versão latina elaborada por Commandino (1944), do livro III, de Euclides (século III a.C.), intitulado *Os Elementos de Euclides*, onde o matemático da escola platônica tentava encontrar a maior e a menor distância de um ponto a uma circunferência.

Vejamos a Proposição VII, do Livro III, de Euclides:

> *Se fora de um círculo se toma, um ponto qualquer, e deste se tirarem para a circunferência algumas linhas retas, como se quiser, das quais, porém, uma passe pelo centro, entre aquelas, que caírem na parte côncava da circunferência, a máxima será a que passar pelo centro e, entre as outras, a que estiver mais perto da máxima, será sempre maior que outra qualquer mais afastada dela. Mas entre as retas, que caírem na parte convexa da circunferência, a mínima será aquela que, produzida, passar pelo centro; e entre as outras, a que estiver mais perto da mínima será sempre menor que outra qualquer mais afastada dela. Finalmente, do mesmo ponto não se poderão tirar*

> *para a circunferência mais de duas retas iguais, e destas uma cairá para uma parte, e a outra para a parte oposta a respeito da reta, que entre tôdas fôr a mínima.* (Século III a.C.)

Hermes e Pereira (2013, p. 01), destacam que em seu Livro VI, Euclides descreveu uma forma de obter um paralelogramo de área máxima com um dado perímetro.

A Proposição XXVII, do Livro VI, diz que:

> *Entre todos os paralelogramos aplicados à mesma linha reta, e com os defeitos de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sôbre a metade da dita reta, e senelhantemente postas, o máximo é aquêle que é aplicado à metade da mesma reta, e que é semelhante à figura paralelograma que falta.* (Século III a.C.)

Já nos séculos XVII e XVIII, graças ao avanço dos métodos de cálculo, foi possível resolver problemas de otimização, como dos extremos condicionados com restrições de igualdade, destacando-se a notável contribuição de Fermat, que desenvolveu o primeiro método geral para a determinação de máximos e mínimos; Newton e Leibniz, generalizando a resolução deste tipo de problema no desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo; além de Lagrange e Bernoulli. (FERREIRA, 2012)

Passos (2009) destaca Cournot como um dos precursores da Programação Matemática, por seu estudo sobre a igualdade entre receita marginal e custo marginal, determinando, implicitamente, o ponto de equilíbrio que origina o lucro máximo.

Quesnay, em 1759, publica o *Tableau Economique* considerado a primeira grande tentativa de modelar a economia, sendo o primeiro marco no caminho dos modelos de programação macroeconômico.

Em 1874 foi publicado o "Sistema de Equilíbrio Geral" por Walras, representando um avanço considerável na procura da melhor forma de interpretar a Economia como um todo. Em 1936, sob proteção do governo dos Estados Unidos da América, Leontief apresenta para a economia americana, o modelo *"input-output"*, em seu artigo *"Quantitative input and output Relations in the Economic Systems of the United States"*, onde apresentou um modelo matricial, utilizado posteriormente, sob a forma de um problema de Programação Linear (PL). Eis o segundo marco. (PASSOS, 2009)

O matemático húngaro John von Neumann publicou em 1928, o teorema central da Teoria dos Jogos, demonstrando que através de técnicas matemáticas é possível determinar soluções para jogos de soma zero, que mais tarde, foi formulada pela PL. Em 1944, publicou *"Theory of Games and Economic Behaviour"*, e essa interação entre os jogos e a economia despertou um interesse maior na PL. (FIANI, 2006, p. 35)

Em 1937, é publicado, *"A Model of General Economic Equilibrium"*, onde von

Neumann formula o modelo de PL dinâmica, admitindo métodos alternativos de produção simples, ou seja, de produção conjunta. (PASSOS, 2009)

O trabalho de Kantorovich (1939), intitulado "Métodos Matemáticos na Organização e no Planejamento de Produção", é considerado um dos precursores da PO, entretanto não recebeu o merecido reconhecimento, por não apresentar um algoritmo de resolução.

A Pesquisa Operacional, como a conhecemos, surgiu na década de 40, com a logística militar, durante a Segunda Guerra Mundial, quando a força aérea americana cria um grupo de pesquisadores denominado SCOOP (*"Scientific Computation of Optimum Program"*), dirigido por Marshall K. Wood. Um dos integrantes desse grupo era George Dantzig, que era frequentemente chamado para resolver problemas de planejamento que envolviam a distribuição de pessoal, aviões, dinheiro, entre outros recursos de custo efetivo. (PASSOS, 2009, p. 07)

Somente em 1947, George Bernard Dantzig formulou o problema de PL geral e propôs o **Método Simplex**, tornando possível a solução dos mais variados tipos de problemas de otimização, no setor de transportes, produção, escalonamento e locação de recursos.

Segundo Passos (2009, p. 08), em 1951, H. W. Khun e A. W. Tucker ampliam os resultados de Lagrange aos sistemas de inequações, apresentando o trabalho *"Non Linear Programming"* no *Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, sendo um marco fundamental na Programação Matemática.

Evidencia-se que a Programação Linear se beneficiou das importantes contribuições de diversos matemáticos, sob o ponto de vista computacional. Logo, a Programação Linear faz parte de um amplo campo da Matemática, com exponencial importância e aplicação.

1.2 Álgebra Linear

Nas últimas décadas, os modelos lineares e o desenvolvimento da informática assumiram um papel importantíssimo, estimulando o significativo crescimento da Álgebra Linear. Sua aplicação se estende desde as ciências exatas às ciências sociais, possibilitando que diversos problemas e situações do cotidiano sejam modelados por matrizes e sistemas lineares, nas mais variadas áreas como na economia, petrolífera, aviação e circuitos eletrônicos. Sendo assim, a Álgebra Linear torna-se uma importante ferramenta para a modelagem matemática, o que justifica a revisão de alguns conceitos à que se destina esta seção, possibilitando um melhor entendimento.

1.2.1 Matrizes

Apresentaremos nesta subseção algumas definições e operações de matrizes, tendo como referência Boldrini et al. (1980) e Kolman (1998). Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes. Porém, todas as definições a seguir são baseadas no conjunto dos números reais.

Definição 1. Uma **matriz** $m \times n$ é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

A i**-ésima linha** da matriz A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

onde, $i = 1, \dots, m$, ou seja, i pode ser qualquer número entre 1 e m.

A j**-ésima coluna** da matriz A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

onde, $j = 1, \dots, n$, ou seja, j pode ser qualquer número entre 1 e n.

Definição 2. Duas matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{r\times s} = [b_{ij}]_{r\times s}$, são iguais, $A = B$, se elas tem o mesmo número de linhas $(m = r)$ e colunas $(n = s)$, e todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

Exemplo 1.

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & 5 \\ \log 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \operatorname{sen} 90^\circ & 5 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2.1.1 Matriz Quadrada

Definição 3. Se $m = n$, dizemos que A é uma **matriz quadrada**. Os números a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... , a_{nn} formam a **diagonal principal** de A.

1.2.1.2 Matriz Nula

Definição 4. Recebe o nome de **matriz nula** toda matriz que, independentemente do número de linhas e colunas, todos os seus elementos são iguais a **zero**, ou seja, $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

1.2.1.3 Matriz Coluna

Definição 5. É toda matriz do tipo $n \times 1$, ou seja, possui uma única coluna.

1.2.1.4 Matriz Linha

Definição 6. É toda matriz do tipo $1 \times n$, ou seja, possui uma única linha.

Uma matriz do tipo $n \times 1$ ou $1 \times n$ é também chamada de um **vetor de dimensão n**, sendo denotada por letras minúsculas em negrito.

1.2.1.5 Matriz Diagonal

Definição 7. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, é denominada uma **matriz diagonal**.

1.2.1.6 Matriz Escalar

Definição 8. Uma matriz diagonal $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos da diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = c$, para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, é denominada uma **matriz escalar**.

1.2.1.7 Matriz Identidade Quadrada

Definição 9. Uma matriz diagonal em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, é denominada uma **matriz identidade**.

1.2.1.8 Matriz Triangular Superior

Definição 10. Uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$, é denominada uma **matriz triangular superior**.

1.2.1.9 Matriz Triangular Inferior

Definição 11. Uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$, é denominada uma **matriz triangular inferior**.

1.2.1.10 Matriz Simétrica

Definição 12. Uma matriz quadrada de ordem n, em que $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i \geq 1,\ j \leq n$.

Numa matriz simétrica, a parte superior é uma "reflexão" da parte inferior, em relação à diagonal principal.

1.2.1.11 Matriz Transposta

Definição 13. Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$, então a matriz $n \times m$, $A^T = a^T_{ij}$, onde

$$a^T_{ij} = a_{ji} \ \ (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

é chamada de **transposta** de A. Logo, podemos obter a transposta de A trocando-se as linhas de A por suas colunas, e vice-versa.

1.2.1.12 Adição de Matrizes

Definição 14. A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, que denotaremos $A + B$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B. Ou seja,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

1.2.1.13 Multiplicação por Escalar

Definição 15. Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e **k** é um número real, então definimos uma nova matriz

$$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]_{m\times n} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

1.2.1.14 Multiplicação de Matrizes

Definição 16. Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times p$ e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $p \times n$, então o produto de A por B denotado por AB é matriz $C_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}} = [c_{ij}]$, definida por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Note que o produto de A por B está definido apenas quando o número de **linhas** de B é exatamente **igual** ao número de **colunas** de A.

$$
\begin{array}{cccc}
A & B & = & AB \\
m \times p & p \times n & & m \times n
\end{array}
$$

. tamanho de AB

O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz-produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

1.3 Sistemas Lineares

Nesta seção, discorremos sobre os Sistemas Lineares, utilizando as definições de Boldrini et al. (1980), considerando o conjunto dos números reais.

1.3.1 Equações Lineares

Definição 17. Uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, com n incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, onde a_1, a_2, a_3, a_n, b são constantes reais, é denominada **Equação Linear**.

Um conjunto de números reais $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$, é uma solução para a equação linear citada acima, se ao substituir-mos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, ..., x_n = s_n$, a equação for satisfeita.

Exemplo 2. Temos como exemplo a equação

$$x_1 + 5x_2 = 6$$

1.4 Sistemas de Equações Lineares

Um **sistema** de **equações lineares** com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1.1}$$

com a_{ij}, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, números reais (ou complexos).

Uma n-upla de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações, é uma solução do sistema 1.1.

Dois sistemas de equações são equivalentes se, e somente se, toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

Podemos escrever o sistema 1.1 numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ é a matriz dos coeficientes,}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ é a matriz das incógnitas e}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ é a matriz dos termos independentes.}$$

Podemos associar ao sistema 1.1, o que chamamos de ***matriz ampliada do sistema***, como segue:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Cada linha dessa matriz é, simplesmente, uma representação abreviada da equação correspondente no sistema.

Definição 18. Uma **solução** para o sistema linear $A.X = B$ é uma matriz coluna de números reais

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

de maneira que **todas** as equações do sistema 1.1 são satisfeitas ao substituirmos

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, ..., x_n = s_n,$$

ou seja, **A.S=B**.

O **conjunto solução** de um sistema linear é composto pelo valor das incógnitas que satisfazem todas as equações desse sistema.

Exemplo 3. Seja o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 & = & 2 \\ 3x_1 + 2x_2 & = & 7 \end{cases} \tag{1.2}$$

A equação matricial desse sistema é

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

e apresenta uma única solução

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

isto é, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

1.5 Método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan, de acordo com Biezuner (2008), consiste num método de escalonamento onde são aplicadas operações elementares à matriz aumentada de um sistema, obtendo a **forma escalonada reduzida**. Com tal processo, um sistema cuja matriz aumentada é uma matriz na forma escalonada reduzida apresenta solução imediata. Entretanto, para resolver um sistema que está apenas na **forma escalonada** ainda é necessário fazer uma série de substituições para obter a solução final.

São três as **operações elementares** sobre as linhas de uma matriz:

i) Permuta das i-ésima e j-ésima linhas. $(L_i \longleftrightarrow L_j)$

ii) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. $(L_i \longrightarrow k.L_i)$

iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha. $(L_i \longrightarrow L_i + k.L_j)$

Mas como saber quando uma matriz está em sua **forma escalonada reduzida**?

Definição 19. Uma matriz está na forma escalonada reduzida quando ela satisfaz as seguintes condições:

1. O primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula (chamado o **pivô** da linha) é igual a 1.
2. O pivô da linha $i+1$ ocorre à direita do pivô da linha i.
3. Se uma coluna contém um pivô, então todas os outros elementos desta coluna são iguais a 0.
4. Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não-nulas.

Exemplo 4. Dado o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 = 90 \\ 5x_1 & + & 6x_2 = 195 \end{cases}$$

escreveremos a matriz ampliada, associada ao sistema, e reduziremos à forma escalonada reduzida, resolvendo o sistema original.

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 90 \\ 5 & 6 & | & 195 \end{bmatrix}$ e com algumas operações elementares com as linhas desse sistema podemos produzir outro sistema equivalente ao inicial, como segue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 90 \\ 5 & 6 & 195 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 90 \\ 1 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 90 \\ 1 & 0 & 15 \end{array}\right] L_1 \longleftrightarrow L_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 15 \\ 2 & 3 & 90 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 15 \\ 2 & 3 & 90 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 3 & 60 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 3 & 60 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow \tfrac{1}{3}L_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

Assim, obtemos a matriz escalonada reduzida $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$, que nos apresenta a solução para o sistema original:

$$\begin{aligned} x_1 &= 15, \\ x_2 &= 20. \end{aligned}$$

1.6 Conjuntos Convexos

Nesta seção abordaremos alguns conceitos sobre conjuntos convexos, destacados por Zachi (2016), em sua dissertação. Tais conceitos são importantes, pois o conjunto dos pontos viáveis para um Problema de Programação Linear (PPL) é um conjunto convexo cujos vértices correspondem às soluções.

Definição 20. Seja um conjunto de pontos $x_i \in X$. Diz-se que X é uma combinação linear convexa dos pontos x_i, se $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, em que λ_i são os coeficientes escalares que terão que assumir os seguintes valores:

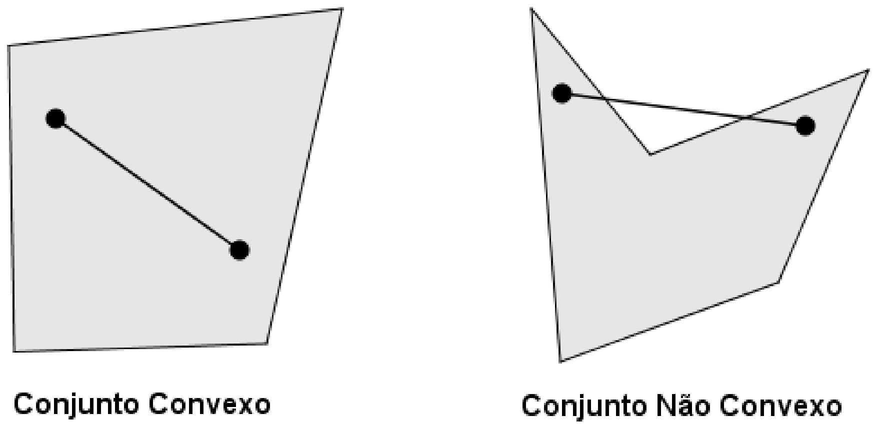
$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Ou seja, dois pontos definem um segmento de reta e uma combinação linear convexa, que é igual ao segmento que os une.

Definição 21. Um conjunto K é convexo quando todos os segmentos de reta que unem dois pontos quaisquer de K estão contidos em K. Um conjunto é fechado se ele compreende a sua fronteira.

Podemos compreender melhor tal definição, por meio da representação gráfica, na Figura 1.

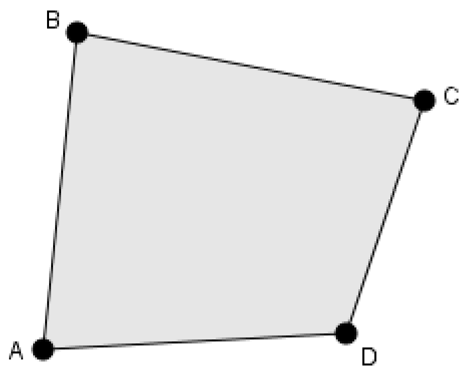
Figura 1 – Exemplo de conjuntos convexos e não convexos



Fonte: Autoria própria, 2018

Definição 22. Um vértice é um ponto pertencente a um conjunto convexo que não pode ser obtido por meio de combinação convexa dos outros pontos do conjunto. Podemos dizer que um vértice é um ponto extremo de um conjunto convexo. Vejamos melhor na Figura 2.

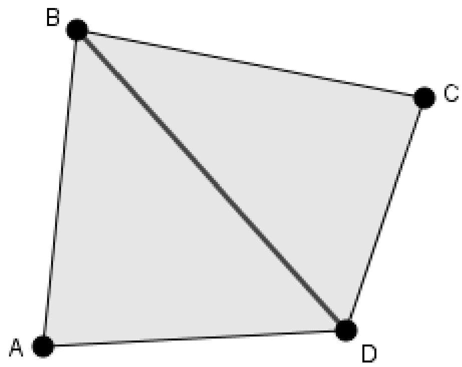
Figura 2 – A, B, C e D são vértices.



Fonte: Autoria própria, 2018

Definição 23. A combinação convexa de dois vértices A e B é considerada uma aresta se nenhum ponto de $\overline{AB}$ puder ser obtido pela combinação convexa de pontos não pertencentes a $\overline{AB}$.

Figura 3 – São exemplos de arestas os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. O segmento $\overline{BD}$ não é uma aresta.



Fonte: Autoria própria, 2018

Capítulo 2

Programação Linear

2.1 Definições e Teoremas Importantes

Para o desenvolvimento deste trabalho, a exposição de algumas definições e teoremas torna-se necessária.

Definição 24. Uma função é linear quando envolve apenas constantes e termos com variáveis de primeira ordem.

Definição 25. Variáveis são contínuas quando puderem assumir quaisquer valores em um intervalo de números reais.

Definição 26. Seja X um conjunto de pontos $X \subset \Re^n$, tais que, para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, existem a_i e b, com pelo menos um a_i não nulo. Assim,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

é um hiperplano em $\Re^n$.

Exemplo 5. Temos como exemplo os pontos que são hiperplanos em $\Re$, as retas que são hiperplanos em $\Re^2$ e os planos que são hiperplanos em $\Re^3$.

Definição 27. Em R^n, um semiespaço é a região de um dos lados de um hiperplano. Em outras palavras, são os pontos x tais que:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$$

ou

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b$$

para determinados a_i e $b \in \Re$.

Definição 28. As **variáveis de decisão** são as incógnitas, ou valores desconhecidos, que serão determinados pela solução do modelo. Podem ser classificadas de acordo com as seguintes escalas de mensuração: variáveis contínuas, discretas ou binárias. As variáveis de decisão devem assumir valores **não negativos**.

Definição 29. A **função objetivo** é uma função matemática que determina o valor-alvo que se pretende alcançar ou a qualidade da solução, em função das variáveis de decisão e dos parâmetros, podendo ser uma função de **maximização** ou de **minimização**.

Definição 30. As **restrições** podem ser definidas como um conjunto de equações e inequações que as variáveis de decisão do modelo devem satisfazer. As restrições são adicionadas ao modelo de forma a considerar as limitações físicas do sistema, e afetam diretamente os valores das variáveis de decisão.

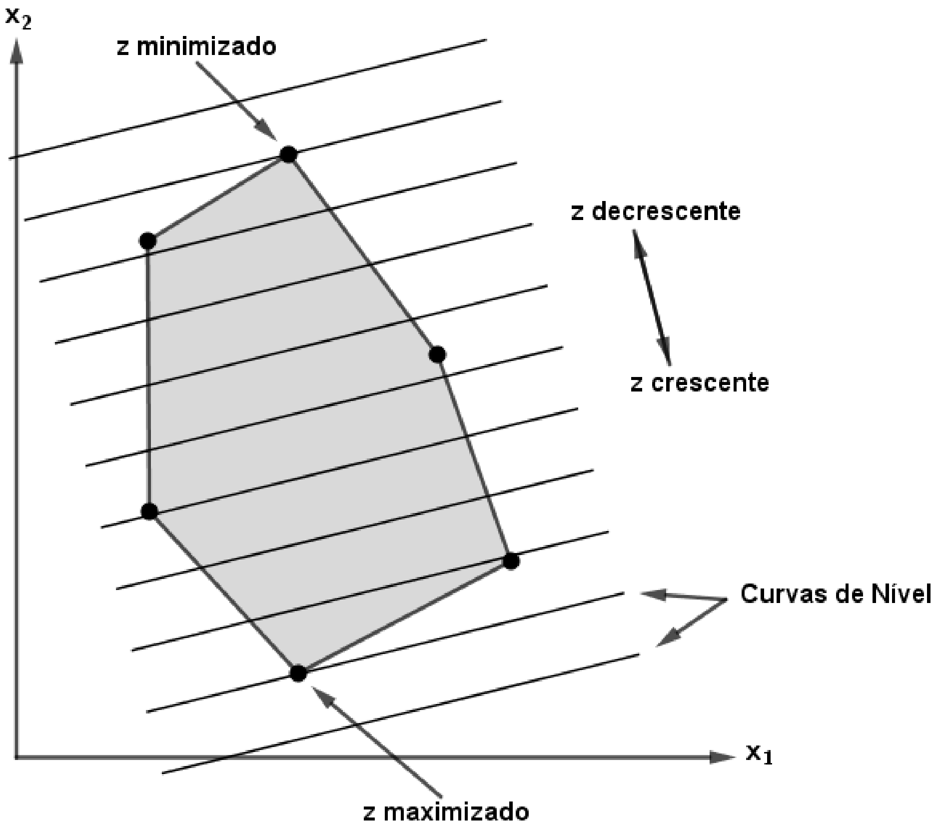
Definição 31. Solução viável ou **factível** é aquela que satisfaz todas as restrições do modelo, inclusive as de não negatividade.

O teorema a seguir destaca a importância dos pontos extremos de uma região viável.

Teorema 1. Se a região viável de um Problema de Programação Linear é não-vazia e limitada, então a função-objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo; contudo, se atingir um máximo ou um mínimo, este ocorrerá em pontos extremos.

A Figura 4 nos auxilia na compreensão do Teorema 1. A função objetivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ de um PPL é uma função linear de x_1 e de x_2, e apresenta retas, que são curvas de nível, ao longo das quais z tem valor constante. Ao deslocarmos perpendicularmente tais retas, a função objetivo ou decresce ou cresce de forma monótona. Numa região viável limitada, os valores de mínimos e máximos devem ocorrer nos pontos extremos, como vemos na Figura 4.

Figura 4 – Representação da região viável de um PPL e suas curvas de nível.



Fonte: Adaptado de Zachi (2016).

Definição 32. Solução Ótima é a solução factível que apresente o melhor valor da função objetivo.

Teorema 2. O conjunto S de soluções viáveis para um Problema de Programação Linear é fechado, convexo e limitado inferiormente.

Prova: Pela restrição $x \geq 0$, S é limitado inferiormente. Além disso, S é intersecção dos semiespaços definidos pelas restrições do problema e pela restrição de não negatividade. Como os semiespaços são convexos e fechados, o mesmo acontece com S.

Teorema 3. Seja S o conjunto de soluções viáveis para um Problema de Programação Linear. Então, se existe solução ótima para o Problema de Programação Linear, existe um ponto extremo em S com valor ótimo.

Prova: Seja $c = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ a matriz dos coeficientes da função objetivo e $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ a matriz das variáveis de decisão da função objetivo. Desta forma, a função objetivo pode ser representada por: $z = c^T x$.

S tem um número finito de pontos extremos que denotamos por $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_p^*$. Seja x_0 um ponto viável maximizando $c^T x$ em S:

$$\forall x \in S, c^T x_0 \geq c^T x$$

Suponha que x_0 não é ponto extremo. Então x_0 pode ser descrito como combinação convexa dos pontos extremos de S.

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^*, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$$

Seja então x_r^* o ponto extremo com maior valor objetivo. Então,

$$c^T x_0 = c^T (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (c^T x_i^*)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (c^T x_r^*)$$

$$= c^T x_r^* \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$$

$$c^T x_r^*$$

Temos então $c^T x_0 \leq c^T x_r^*$. Como x_0 é ótimo, $c^T x_0 = c^T x_r^*$, e existe o ponto extremo x_r^* onde o valor do objetivo é ótimo.

Teorema 4. O conjunto de soluções ótimas para um Problema de Programação Linear é um conjunto convexo.

Prova: Seja K o conjunto de soluções ótimas, x_1^*, $x_2^* \in K$, e z^* o valor ótimo da função objetivo. Então,

$$c^T x_1^* = c^T x_2^* = z^*.$$

Como são viáveis, x_1^* e $x_2^* \in S$ e S é convexo, portanto

$$\lambda x_1^* + (1 - \lambda) x_2^* \in S.$$

$$0 \leq y \leq 1.$$

Temos então,

$$c^T (x_1^*, x_2^*) = \lambda c^T x_1^* + (1 - \lambda) c^T x_2^*$$

$$= \lambda z^* + (1-\lambda)z^* = z^*$$

Assim, $\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \in K$, para $0 \leq y \leq 1.$, e K é convexo.

Tomemos um PPL em que $m < n$, considerando um sistema $\mathbf{A}\ .\ \mathbf{X} = \mathbf{B}$ de m equações lineares e n variáveis.

Teorema 5. Um sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções.

Prova: Se $\mathbf{A}\ .\ \mathbf{X} = \mathbf{B}$ é um sistema de equações lineares, vale exatamente uma das afirmações:

(a) o sistema não tem solução;

(b) o sistema tem exatamente uma solução;

(c) o sistema tem mais de uma solução.

A prova estará completa se conseguirmos mostrar que o sistema tem uma infinidade de soluções no caso (c).

Suponha que $\mathbf{A}\ .\ \mathbf{X} = \mathbf{B}$ tenha mais de uma solução e seja $x_0 = x_1 - x_2$, onde x_1 e x_2 são duas soluções distintas quaisquer. Como x_1 e x_2 são distintas, a matriz x_0 é não nula; além disso,

$$Ax_0 = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = B - B = 0$$

Se k for um escalar qualquer, então

$$A(x_1 + kx_0) = Ax_1 + A(kx_0) = Ax_1 + k(Ax_0) = B - k0 = B + 0 = B$$

No entanto, isso significa que $x_1 + kx_0$ é uma solução de $\mathbf{A}\ .\ \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Como x_0 é não nula e existe uma infinidade de escolhas para k, o sistema $\mathbf{A}\ .\ \mathbf{X} = \mathbf{B}$ tem uma infinidade de soluções.

Definição 33. Variáveis não básicas (VNB) são as variáveis obtidas escolhendo-se um conjunto de variáveis $n - m$ de x, e atribuindo valores iguais a zero a elas.

Definição 34. Variáveis básicas (VB) são as m variáveis restantes do sistema, que serão determinadas.

Definição 35. Solução básica (SB) são os valores encontrados para as variáveis básicas.

Definição 36. Base é o conjunto de variáveis básicas.

Definição 37. Solução básica factível (SBF) é a solução que atende as restrições de não negatividade.

A solução do sistema $\mathbf{A} \ . \ \mathbf{X} = \mathbf{B}$, se dará seguindo os seguintes passos:

1 Determinar quem serão as variáveis não básicas;

2 Determinar quem serão as variáveis básicas;

3 Resolver o sistema das variáveis básicas encontrando assim, a solução básica;

4 Calcular a solução ótima, aplicando na função objetivo z todas as possíveis soluções básicas e escolher a melhor alternativa.

2.2 Formulação de um Problema de Programação Linear

Segundo Lisboa (2002), o Problema de Programação Linear é utilizado para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear de variáveis, chamada de função objetivo, sujeita a uma série de equações ou inequações lineares, chamadas restrições.

Ao representarmos um dado sistema por meio de um modelo de Programação Linear (PL), devemos verificar se ele possui as seguintes características (GOLDBARG; LUNA, 2005):

- **Proporcionalidade**: a quantidade de recurso consumido por uma dada atividade deve ser proporcional ao nível dessa atividade na solução final do problema. E ainda, o custo de cada atividade é proporcional ao nível de operação da atividade.
- **Não Negatividade**: deve ser sempre possível desenvolver dada atividade em qualquer nível não negativo, e qualquer proporção de um dado recurso deve sempre poder ser utilizado.
- **Aditividade**: o custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade.
- **Separabilidade**: pode-se identificar de forma separada o custo (ou consumo de recursos) específico das operações de cada atividade.

De acordo com Puccini (1980):

> *Os problemas de Programação Linear referem-se à distribuição eficiente de recursos limitados entre atividades competitivas, com a finalidade de atender a um determinado objetivo, por exemplo, maximização de lucros ou minimização de custos. Em se tratando de programação linear, esse objetivo será expresso por uma função*

> *linear, à qual se dá o nome de função objetiva. É claro que é necessário dizer quais as atividades que consomem cada recurso, e em que proporção é feito esse consumo. Essas informações serão fornecidas por equação ou inequações lineares, uma para cada recurso. Ao conjunto dessas equações ou inequações lineares dá-se o nome de restrição do modelo. Geralmente existem inúmeras maneiras de distribuir os escassos recursos entre as diversas atividades, bastando para isso que essas distribuições sejam coerentes com as equações de consumo de cada recurso, ou seja, que elas satisfaçam as restrições do problema. Entretanto, deseja-se achar aquela distribuição que satisfaça as restrições do problema, e que alcance o objetivo desejado, isto é, que maximize o lucro ou minimize o custo. A essa solução dá-se o nome de solução ótima. Uma vez obtido o modelo linear, constituído pela função objetiva (linear) e pelas restrições lineares, a programação linear se incumbe de achar a sua solução ótima.*

Um PPL pode ser formulado, de forma geral, da seguinte maneira:

$$\textit{Otimizar} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n,$$

satisfazendo as restrições:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array} \tag{2.1}$$

onde, z é a função objetivo.

As restrições podem vir acompanhadas de $\leq$ ou $=$;
x_j são as variáveis de decisão, principais ou controláveis, $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$;
a_{ij} é a constante ou coeficiente da i-ésima restrição da j-ésima variável, com $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$;
b_i é o termo independente ou quantidade de recursos disponíveis da i-ésima restrição, com $i = 1, 2, \ldots, m$;
c_j é a constante ou coeficiente da j-ésima variável da função objetivo, com $j = 1, 2, \ldots, n$.

Na resolução de um PPL, a formulação do modelo pode apresentar-se de outras duas maneiras distintas, sendo a forma padrão e a canônica.

Definição 38. Um modelo de Programação Linear está na **forma padrão** quando atende aos seguintes requisitos:

1 Os termos independentes das restrições devem ser não negativos.

2 Todas as restrições devem estar representadas por equações lineares e apresentadas na forma de igualdade.

3 As variáveis de decisão devem ser não negativas.

Assim, podemos representar a forma padrão, matematicamente, da seguinte forma:

$$Otimizar \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n,$$

satisfazendo as restrições:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$b_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

Em um modelo de programação linear na **forma canônica**, as restrições serão apresentadas na forma de inequações, onde a função objetivo z poderá ser de maximização ou de minimização.

Definição 39. Para uma função objetivo z de **maximização**, todas as restrições devem ser representadas com sinal do tipo $\leq$, já para uma função objetivo z de **minimização**, as restrições devem estar com sinal do tipo $\geq$.

Sendo assim, num problema de maximização, podemos apresentar a forma canônica, matematicamente, da seguinte maneira:

$$Maximizar \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n,$$

satisfazendo as restrições:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \tag{2.3}$$

com $x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$.

Num problema de minimização, podemos apresentar a forma canônica, matematicamente, da seguinte maneira:

$$Minimizar \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n,$$

satisfazendo as restrições:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array} \tag{2.4}$$

com $x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$.

Tais formulações são equivalentes, pois utilizando operações elementares podemos transformá-las.

Mas quais são essas operações elementares?

Um mesmo PPL pode ser reescrito, sem qualquer perda das suas propriedades matemáticas, desde que obedeça as seguintes operações elementares (GOLDBARG; LUNA, 2005):

Operação 1: O critério de otimização pode ser mudado, isto é, pode-se transformar um problema de minimização para maximização e vice-versa, através da seguinte propriedade:

Minimizar $(f(x))$ corresponde a Maximizar $(-f(x))$, bem como
Maximizar $(f(x))$ corresponde a Minimizar $(-f(x))$.

Operação 2: Uma variável livre ($x_j \in \Re$) pode ser transformada numa variável não-negativa. Entretanto, devemos substituir a variável em transformação por duas variáveis auxiliares, ambas maiores ou iguais a zero, e cuja soma é igual a variável original.

$$x_j = x_j^1 - x_j^2 \text{ e } x_j^1 \geq 0,\ x_j^2 \geq 0$$

Operação 3: Podemos transformar desigualdades em igualdades, e vice-versa. Assim, temos dois casos a analisar:

Caso 1. Transformação de restrições de menor ou igual em restrições de igualdade.

Suponhamos a seguinte restrição

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq b$$

Introduziremos uma **variável de folga** x_{n+1} para "completar" a desigualdade, transformando-a em uma restrição de igualdade:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = b, \qquad x_{n+1} \geq 0$$

Caso 2. Transformação de restrições de maior ou igual em restrições de igualdade.

Suponhamos a seguinte restrição

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq b$$

Introduziremos uma **variável de folga** x_{n+1} com coeficiente negativo, para "completar" a desigualdade, transformando-a em uma restrição de igualdade:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_{n+1} = b, \qquad x_{n+1} \geq 0.$$

Para Goldbarg e Luna (2005), o processo de organização de um modelo de Programação Linear pode ser decomposto nas seguintes etapas:

- **Definição das atividades**
  Devemos analisar o problema, para definir as atividades que o compõem. Uma unidade de medida é adotada, normalmente, para cada atividade.

- **Definição dos recursos**
  Considerando os insumos disponíveis dentro de cada atividade, determinam-se os recursos que estão sendo usados e produzidos em cada uma.

- **Cálculo dos coeficientes de insumo/produção**
  É indispensável estabelecer claramente como as atividades e os recursos estão relacionados em termos de recursos necessários por unidade de atividade produzida.

- **Determinação das condições externas**
  Considerando que os recursos são limitados, cumpre determinar a quantidade de cada recurso disponível para o processo modelado. Essas são as denominadas condições externas do modelo.

- **Formalização do Modelo**
  Consiste em associar quantidades não negativas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ a cada uma das atividades, escrever as equações de balanceamento e indicar o uso de cada recurso.

Vejamos um exemplo de modelagem de problema de PL:

Exemplo 6. Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 80 hectares. Pretende semear pelo menos 20 hectares de trigo e pelo menos 10 hectares de milho.
Sabe-se que:

- o custo de produção de um hectare de trigo é 1500 euros;
- o custo de produção de um hectare de milho é 1000 euros; e que,
- cada hectare de trigo dá um lucro de 700 euros;
- cada hectare de milho dá um lucro de 600 euros.

Admitindo que o agricultor não pode investir mais do que 100 000 euros nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear de modo a que tenha um lucro máximo?

Adaptado de Rafael (2014).

Formalizando o problemas, temos que:
o número de hectares de trigo e de milho a se produzir são, respectivamente, variáveis de decisão x_1 e x_2. Representaremos por z, o lucro total proveniente da produção. O objetivo é determinar os valores das variáveis que maximizam

$$z = 700x_1 + 600x_2.$$

Devemos considerar as restrições impostas pela área de cultivo e pela capacidade financeira do agricultor, sendo formulado matematicamente pelo seguinte modelo:

$$Maximizar \qquad z = 700x_1 + 600x_2,$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \geq 20$$

$$x_2 \geq 10$$

$$1500x_1 + 1000x_2 \leq 100000$$

2.3 O Método Simplex

A forma padrão de se desenvolver um PPL foi formalizada por George B. Dantizg em 1947. Com mais alguns anos dedicados à PL, o *Método Primal Simplex* foi elaborado e publicado, também por Dantzig (1951). Daí em diante, o número de pesquisadores que tem contribuído para o avanço dos estudos sobre a otimização linear aumentou exponencialmente. Em sua dissertação, Ignácio (2009) relata que o avanço significativo dos *hardwares* e o aumento da capacidade de processamento dos *softwares* específicos, contribuiu para o utilização tem sido amplamente difundida, mesmo para problemas complexos.

2.3.1 Método Simplex na Forma Tableau

Com o intuito de facilitar os cálculos manuais utilizamos um formato tabular para desenvolver o algoritmo Simplex. Trata-se, apenas, de um recurso para que possamos melhor acompanhar os cálculos. Como já apresentado, um PPL, em sua forma padrão, pode ser descrito da seguinte maneira:

$$Otimizar \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n,$$

satisfazendo as restrições:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$b_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

Agora, organizemos em seu formato tableau, como a seguir:

Tabela 1 – Formato Tableau

		Índice das Variáveis		Termo Independente	
Índice das Variáveis Básicas		Variáveis Não-Básicas	Variáveis Básicas		Área para Cálculos
	Função Objetivo				

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Luna (2005)

A resolução, por meio do Método Simplex, de um PPL de maximização, será apresentada numa seção posterior, e deverá obedecer os seguintes procedimentos, a saber:

Passo 1: Introduzir as variáveis de folga; uma para cada desigualdade.

Passo 2: Montar uma tabela para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na última linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada.

Passo 3: Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga.

Passo 4: Como próxima variável a entrar na base, escolher a variável não básica que oferece, na última linha, a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo). Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo. Isso quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo.

Passo 5: Para escolher a variável que deve deixar a base, deve-se realizar o seguinte procedimento:

a) Dividir os elementos da coluna dos termos independentes pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base. Caso não haja elemento algum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria ilimitada.

b) O menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não básica.

Passo 6: Usando operações válidas com as linhas da matriz, transformar o quadro de cálculos de forma a encontrar a nova solução básica. A coluna da nova variável básica deverá se tornar um vetor identidade, onde o elemento 1 aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada.

Passo 7: Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

Exemplo 7. Seja o PPL a seguir:

$$Maximizar \quad z = 5x_1 + 6x_2,$$

sujeito a:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 30 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 40 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} \end{array}$$

Transformando para a forma padrão, teremos:

$$Maximizar \quad z = 5x_1 + 6x_2 + 0xF_3 + 0xF_4 + 0xF_5,$$

sujeito a:

$$\begin{array}{rcrcccccl} 2x_1 & + & 4x_2 & + & xF_3 & & & = & 30 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & & xF_4 & & = & 40 \\ x_1 & + & x_2 & + & & & xF_5 & = & 12 \\ \multicolumn{9}{c}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, xF_3 \geq 0, xF_4 \geq 0, xF_5 \geq 0} \end{array} \tag{2.6}$$

Montaremos a tabela para ordenar as operações, inserindo apenas os coeficientes das variáveis. A função objetivo deverá ser reescrita, passando de

$$z = 5x_1 + 6x_2$$

para,

$$z - 5x_1 - 6x_2 = 0$$

Assim, teremos o seguinte formato tableau:

Tabela 2 – Formato Tableau do PPL 2.6

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
xF_3	2	4	1	0	0	30	
xF_4	4	3	0	1	0	40	
xF_5	1	1	0	0	1	12	
z	-5	-6	0	0	0	0	

Fonte: Autoria própria, 2018.

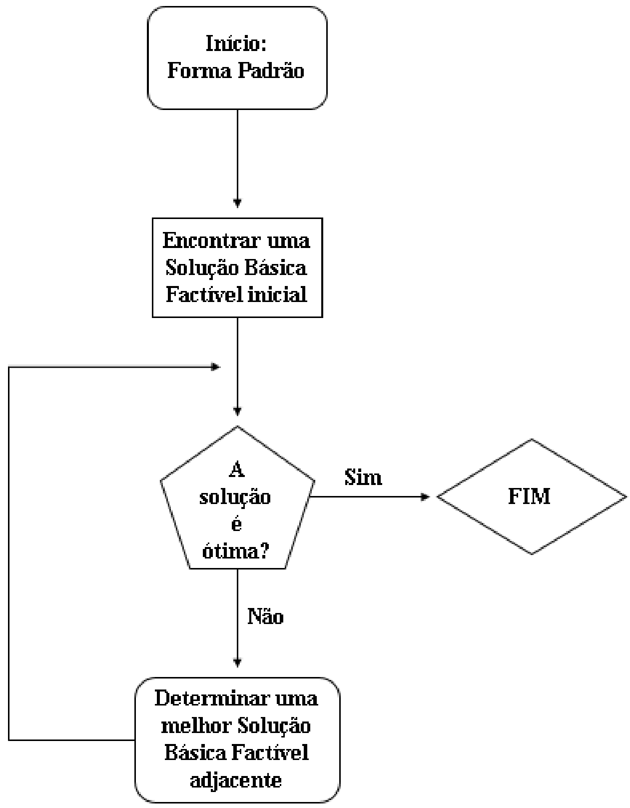
Lisboa (2002) cita que na penúltima coluna encontramos os termos independentes das equações, e a última linha corresponde aos coeficientes das variáveis da função objetivo, que representa a contribuição que cada variável dá para o lucro total z, por unidade, em cada iteração do processo de solução. Chamamos a última linha de **função objetivo transformada** ou **função** z**-transformada**.

2.3.2 O Algoritmo Simplex

De acordo com Bregalda, Oliveira e Bornstein (1988), o Simplex trata-se de um algoritmo de buscas, que não encontra a solução ótima de forma direta, mas aponta e melhora as soluções viáveis, encontrando após algumas iterações, a solução ótima. Tal método, não enumera todas as soluções básicas, mas apenas investiga, por diversas iterações, as potenciais candidatas a solução ótima.

Na Figura 5 observamos o fluxograma que descreve o algoritmo Simplex.

Figura 5 – Fluxograma geral do algoritmo Simplex.



Fonte: Autoria própria, 2018.

Considerando um PPL de maximização, detalharemos os passos do algoritmo descrito na Figura 5, a seguir:

Início: O problema deve estar em sua forma padrão.

Passo 1: Devemos encontrar uma SBF inicial para o PPL. Esta, pode ser obtida, atribuindo valores iguais a zero às variáveis de decisão, observando que nenhuma das restrições do problema pode ser violada.

Passo 2: Um teste de otimalidade deve ser realizado. Uma SBF é ótima se não houver soluções básicas factíveis adjacentes melhores. Observamos o valor de z, e caso haja um incremento positivo em seu valor, a SBF adjacente será melhor. Mas, caso haja um incremento negativo no valor de z, a SBF adjacente será pior do que a SBF atual. Enquanto pelo menos uma das variáveis não básicas da função objetivo z tiver coeficiente positivo, há uma SBF melhor.

Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor. Podemos identificar a direção de maior incremento em z, para determinarmos uma melhor SBF. Devemos seguir três passos (ZACHI, 2016):

1. Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (base). Ela deve ser aquela que tem maior incremento em z, isto é, com maior coeficiente positivo em z.

2. Escolher a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas. A variável escolhida a sair da base deve ser aquela que limita o crescimento da variável não básica selecionada no passo anterior a entrar na base.

3. Resolver o sistema de equações recalculando os valores da nova solução básica adjacente. Antes disso, o sistema de equações deve ser convertido para uma forma mais conveniente, por meio de operações algébricas elementares, utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan. A partir do novo sistema de equações, cada nova equação deve possuir apenas uma variável básica com coeficiente igual a 1, cada variável básica deve aparecer em apenas uma equação, e a função objetivo deve ser escrita em função das variáveis não básicas, de forma que os valores das novas variáveis básicas e da função objetivo z podem ser obtidos diretamente, e o teste de otimalidade pode ser verificado facilmente.

Exemplo 8. Resolveremos o Problema de Programação Linear 2.6, citado anteriormente:

$$Maximizar \quad z = 5x_1 + 6x_2 + 0xF_3 + 0xF_4 + 0xF_5,$$

sujeito a:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & xF_3 & & & = & 30 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & & xF_4 & & = & 40 \\ x_1 & + & x_2 & + & & & xF_5 & = & 12 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, xF_3 \geq 0, xF_4 \geq 0, xF_5 \geq 0$$

Relembrando o formato tableau, já apresentado, temos:

Tabela 3 – Formato Tableau do PPL 2.6

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
xF_3	2	4	1	0	0	30	
xF_4	4	3	0	1	0	40	
xF_5	1	1	0	0	1	12	
z	-5	-6	0	0	0	0	

Fonte: Autoria própria, 2018.

Solução Inicial

Podemos obter a solução inicial fazendo, sempre, as variáveis originais do problema iguais a zero, nesse caso x_1=x_2=0 (variáveis não-básicas).

Assim, obteremos

$xF_3 = 30$

$xF_4 = 40$ Variáveis básicas

$xF_5 = 12$

$z = 0$

Segunda Solução

Certamente, a primeira solução não é a melhor, logo procuremos outra que apresente um valor maior para z. Consideremos estas duas indagações:

1 Das duas variáveis não-básicas (nulas), na primeira solução, qual deve se tornar positiva?

2 Das três variáveis básicas (positivas), na primeira solução, qual deverá ser anulada?

Para responder à primeira pergunta, observemos que na última linha do formato tableau, temos os coeficientes da função objetivo que mostram a contribuição para o incremento em z, de cada unidade produzida, ou o menor número negativo. Logo, pelo critério de que devemos escolher primeiro a variável que mais contribui para o incremento de z, comecemos pela variável x_2, visto que ela aumenta em 6 e x_1, em 5.

Dizemos que a variável x_2, em azul na tabela abaixo, entra para a base.

Respondendo à segunda pergunta, basta efetuar a divisão dos elementos da coluna b pelos elementos correspondentes da coluna x_2. O menor quociente indica a linha da variável básica que deve ser anulada. Em outras palavras, dizemos que tal variável sai da base.

Sendo assim, temos que:

Tabela 4 – Identificação do elemento que entra e que sai da base, bem como, do elemento pivô.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
xF_3	2	4	1	0	0	30	$30/4 = 7.5$
xF_4	4	3	0	1	0	40	$40/3 = 13.33$
xF_5	1	1	0	0	1	12	$12/1 = 12$
z	-5	-6	0	0	0	0	

Fonte: Autoria própria, 2018.

Logo, a variável que sai da base é xF_3, em vermelho, na tabela acima, visto que apresenta o menor valor de crescimento para x_2: $min\{\frac{30}{4}, \frac{40}{3}, \frac{12}{1}\} = \frac{30}{4}$.

Ao observarmos a intercessão advinda da união da coluna do menor z negativo com a linha que possui a menor razão, encontramos o elemento **pivô**, que neste caso é o número 4, destacado em amarelo.

Devemos dividir a linha que contém o pivô, pelo próprio pivô, para obtermos uma **nova linha pivô** (NLP), que irá integrar a próxima tabela do algoritmo Simplex.

Assim, teremos como NLP:

Tabela 5 – Nova linha pivô.

	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$	

Fonte: Autoria própria, 2018.

Então, iniciaremos a nova tabela Simplex pela nova linha pivô, como na tabela 5.

Tabela 6 – Nova linha pivô na tabela Simplex.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
xF_3	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$	
xF_4							
xF_5							
z							

Fonte: Autoria própria, 2018.

Para prosseguir com a construção da tabela devemos realizar um cálculo em cada uma das demais linhas para a entrada na nova tabela Simplex. Os cálculos obedecem operações algébricas elementares, utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan, visto na Seção 1.5, do capítulo 2.

Sendo assim, para obtermos a nova Linha 2, realizaremos a seguinte transformação:

$$L_2 \longrightarrow L_2 - 3.NLP,$$

onde o número 3 é o elemento que pertence à Linha 2 e à coluna do elemento pivô.

$$L_2 \longrightarrow (4 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 40) - 3 \bullet (\frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{15}{2})$$

$$L_2 \longrightarrow (4 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 40) - (\frac{3}{2} \quad 3 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{45}{2})$$

$$L_2 \longrightarrow (\frac{5}{2} \quad 0 \quad -\frac{3}{4} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{35}{2})$$

Disto posto, podemos preencher a tabela com os novos valores da Linha 2.

Tabela 7 – Nova Linha 2 na tabela Simplex.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
xF_3	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$	
xF_4	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{-3}{4}$	1	0	$\frac{35}{2}$	
xF_5							
z							

Fonte: Autoria própria, 2018.

Para obtermos a nova Linha 3, realizaremos a seguinte transformação:

$$L_3 \longrightarrow L_3 - 1.NLP,$$

onde o número 1 é o elemento que pertence à Linha 3 e à coluna do elemento pivô (Acompanhe na Tabela 3).

$$L_3 \longrightarrow (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 12) - 1 \bullet (\frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{15}{2})$$

$$L_3 \longrightarrow (\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \quad 1 \quad \frac{9}{2})$$

Tabela 8 – Nova Linha 3 na tabela Simplex.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
xF_3	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$	
xF_4	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{-3}{4}$	1	0	$\frac{35}{2}$	
xF_5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	0	1	$\frac{9}{2}$	
z							

Fonte: Autoria própria, 2018.

Geramos a nova linha da função objetivo z, realizando a seguinte transformação:

$$L_4 \longrightarrow L_4 - (-6).NLP,$$

onde o número (-6) é o elemento que pertence à Linha 4 e à coluna do elemento pivô (Acompanhe na Tabela 3).

$$L_4 \longrightarrow (-5 \quad -6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) - (-6) \bullet (\frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{15}{2})$$

$$L_4 \longrightarrow (-5 \quad -6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) + (3 \quad 6 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 45)$$

$$L_4 \longrightarrow (-2 \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 45)$$

Tabela 9 – Nova Linha 4 na tabela Simplex.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
xF_3	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$	
xF_4	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{-3}{4}$	1	0	$\frac{35}{2}$	
xF_5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	0	1	$\frac{9}{2}$	
z	-2	0	$\frac{3}{2}$	0	0	45	

Fonte: Autoria própria, 2018.

Da identificação do pivô, na Tabela 3, tem-se que x_2 entra na base, no lugar de xF_3. Então, a coluna da base terá x_2, xF_4 e xF_5.

Tabela 10 – Nova Tabela Simplex com a Base composta.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$	
xF_4	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{-3}{4}$	1	0	$\frac{35}{2}$	
xF_5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	0	1	$\frac{9}{2}$	
z	-2	0	$\frac{3}{2}$	0	0	45	

Fonte: Autoria própria, 2018.

Como ainda existe um número negativo (-2) na linha da função objetivo, a solução não é ótima. Calcularemos novamente a variável que entra e que sai da base, identificando o menor negativo em z.

Logo vemos que x_1 entrará na base e, em seguida, calcularemos a razão entre os elementos da coluna b pelos elementos correspondentes da coluna x_1, para descobrir qual variável sairá da base.

Tabela 11 – Nova coluna que entra, que sai e pivô.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$	(15/2):(1/2)=15
xF_4	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{-3}{4}$	1	0	$\frac{35}{2}$	(35/2):(5/2)=7
xF_5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	0	1	$\frac{9}{2}$	(9/2):(1/2)=9
z	-2	0	$\frac{3}{2}$	0	0	45	

Fonte: Autoria própria, 2018.

Iniciaremos uma nova iteração, sabendo que $\frac{5}{2}$ é o novo elemento pivô, visto que $min\{15, 7, 9\} = 7$. Devemos calcular a nova linha pivô, dividindo toda a Linha de xF_4 por $\frac{5}{2}$, e a variável xF_4 deixará a base, pois apresenta o menor incremento em z.

Tabela 12 – Nova linha pivô na tabela Simplex.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
x_2							
xF_4	1	0	$\frac{-3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	7	
xF_5							
z							

Fonte: Autoria própria, 2018.

Agora, vamos calcular as demais linhas, utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan. Os cálculos serão suprimidos, para agilizar o processo.

$$L_1 \longrightarrow L_1 - \frac{1}{2}.NLP,$$

$$L_1 \longrightarrow (0 \quad 1 \quad \frac{2}{5} \quad \frac{-1}{5} \quad 0 \quad 4)$$

Tabela 13 – Nova Linha 1 na tabela Simplex.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	4	
xF_4	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	7	
xF_5							
z							

Fonte: Autoria própria, 2018.

Calculando a nova Linha 3, temos:

$$L_3 \longrightarrow L_3 - \frac{1}{2}.NLP,$$

$$L_3 \longrightarrow (0 \quad 0 \quad -\frac{1}{10} \quad -\frac{1}{5} \quad 1 \quad 1)$$

Tabela 14 – Nova Linha 3 na tabela Simplex.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	4	
xF_4	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	7	
xF_5	0	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	1	1	
z							

Fonte: Autoria própria, 2018.

Para os valores da nova linha da função objetiva z, Linha 4, faremos a seguinte transformação:

$$L_4 \longrightarrow L_4 - (-4).NLP,$$

$$L_4 \longrightarrow (0 \quad 0 \quad -\frac{1}{10} \quad -\frac{1}{5} \quad 1 \quad 1)$$

Tabela 15 – Nova Linha 4 na tabela Simplex.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	4	
xF_4	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	7	
xF_5	0	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	1	1	
z	0	0	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{5}$	0	59	

Fonte: Autoria própria, 2018.

Mudando a posição do elemento que entra e sai da base, temos a nova tabela:

Tabela 16 – Nova Tabela Simplex.

Base	x_1	x_2	xF_3	xF_4	xF_5	b	Cálculos
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	4	
x_1	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	7	
xF_5	0	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	1	1	
z	0	0	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{5}$	0	59	

Fonte: Autoria própria, 2018.

Desta última tabela, nota-se que não temos mais elementos negativos na linha de z, o que determina a tão almejada solução ótima.

Concluímos que o máximo valor que é possível para a função objetivo $z = 5x_1 + 6x_2 + 0xF_3 + 0xF_4 + 0xF_5$ é de 59, sendo:

$x_1 = 7$
$x_2 = 4$ **Solução Ótima**
$xF_5 = 1$
$xF_3 = xF_4 = 0$

A variável de folga, xF_5, não é escassa e possui uma folga de 1.

Capítulo 3

Programação Linear Geométrica

Neste capítulo veremos como se dá a resolução gráfica de um Problema de Programação Linear, um método não muito prático, por ser adequado para problemas mais simples, que envolvam duas variáveis de decisão. Embora seja possível resolver problemas com 3 variáveis de decisão, o caminho a se percorrer será muito mais complexo, sendo imprescindível, a utilização de um *software*, como Graph, Winplot, Graphmatica, GeoGebra, entre outros. Nesta etapa, abordaremos apenas PPL que envolvam duas variáveis de decisão.

Segundo Vasconcelos (2013), o Método Simplex é iterativo, determinando a solução de modo algébrico. O método consiste de um vetor inicial, escolhido convenientemente, e de uma sequência de iterações a partir deste vetor inicial, que deve convergir para a solução ótima.

O espaço das soluções de problemas com duas variáveis é o plano $\Re^2$. Uma reta $ax + by = c$ divide o plano em duas regiões chamadas de semiplanos e as inequações $ax + by < c$ e $ax + by > c$, representam semiplanos abertos distintos.

Já as inequações $ax + by \leq c$ e $ax + by \geq c$ determinam semiplanos fechados, que tem por interseção a reta $ax + by = c$.

> Se um semiplano é a representação gráfica de uma inequação em duas variáveis, então a representação gráfica de um sistema de inequações lineares em duas variáveis será a intersecção dos semiplanos correspondentes a cada inequação. As restrições de um PPL juntamente com as condições de não-negatividade é um conjunto de semiplanos cuja intersecção determina um conjunto de pontos do $\Re^2$ denominado **Região das Soluções Viáveis** ou simplesmente **Região Viável (RV)**. (CARDOSO, 2011)

Um PPL com duas variáveis de decisão pode ser formulado, em sua forma geral, da seguinte maneira:

$$Otimizar \quad z = c_1x_1 + c_2x_2,$$

satisfazendo as restrições:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \geq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \geq & b_m \end{array} \tag{3.1}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Sabemos que nas condições 3.1, podemos utilizar também $\leq$ e $=$.

Devemos, então, encontrar um par de variáveis (x_1, x_2) que satisfaça todas as restrições, o qual chamaremos de ***solução viável***. O conjunto de todas as soluções viáveis determina um subconjunto do plano x_1x_2, que denomina-se ***região viável***. Logo, temos como objetivo encontrar uma solução viável que melhor otimize a função objetivo z, ou seja, determinar a solução ótima do PPL.

Nota-se que, cada restrição do tipo $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ define uma reta no plano x_1x_2. E que cada restrição da forma $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ ou $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$, define um semiplano que inclui a reta de fronteira.

Sendo assim, podemos dizer que a região viável é uma interseção de um número finito de retas e semiplanos.

De acordo com Cardoso (2011), em $\Re^3$, as funções lineares do tipo $z = f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ são, geometricamente, planos, admitindo máximo e/ou mínimo se estiverem sujeitas a restrições, como os PPL. As curvas de nível desse tipo de função são retas paralelas que crescem monotonamente na direção do gradiente

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right).$$

O único ponto crítico de funções lineares é a origem do sistema de coordenadas, e especificamente, nos PPL com duas variáveis, o ponto crítico é $(0, 0)$, um dos vértices da RV. Qualquer outro ponto extremo da função objetivo deverá estar na fronteira da região delimitada pelas restrições, devendo-se percorrer a família de retas paralelas no sentido do gradiente.

As possíveis soluções de um PPL podem ser obtidas de acordo com a região viável encontrada em cada situação. Veremos, agora, como se apresentam as possíveis regiões viáveis.

O **Teorema de Weierstrass** ou **Teorema do Valor Extremo** garante a condição de existência de um PPL, como veremos a seguir.

Teorema 6. *Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é contínua em um subconjunto fechado e limitado do $\Re^n$, então f atinge valores globais de máximo e mínimo.*

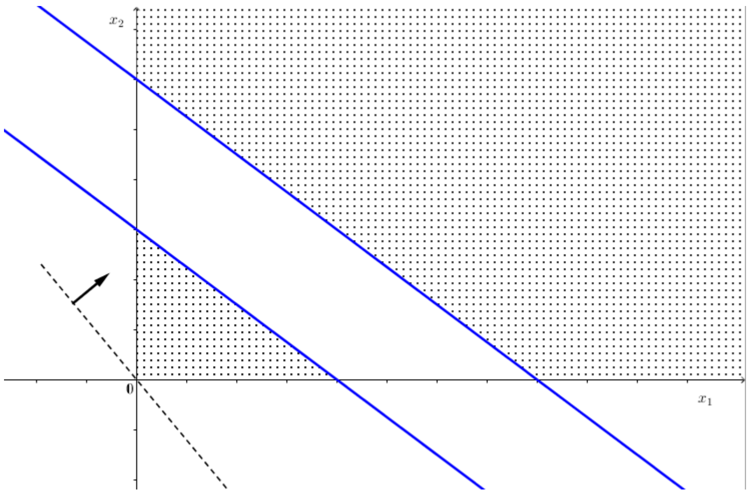
Visto que, as funções lineares são uniformemente contínuas, caso o conjunto das soluções viáveis, em $\Re^2$, forme um polígono fechado, então o problema admite solução.

Três situações podem ocorrer ao resolvermos graficamente um PPL, a saber:

1. A Região Viável é um conjunto vazio.

A solução degenerada ou problema inviável ocorre no caso em que não existe nenhum ponto no plano cartesiano que satisfaz, simultaneamente, as restrições.

Figura 6 – Representação Gráfica de um PPL com solução degenerada.

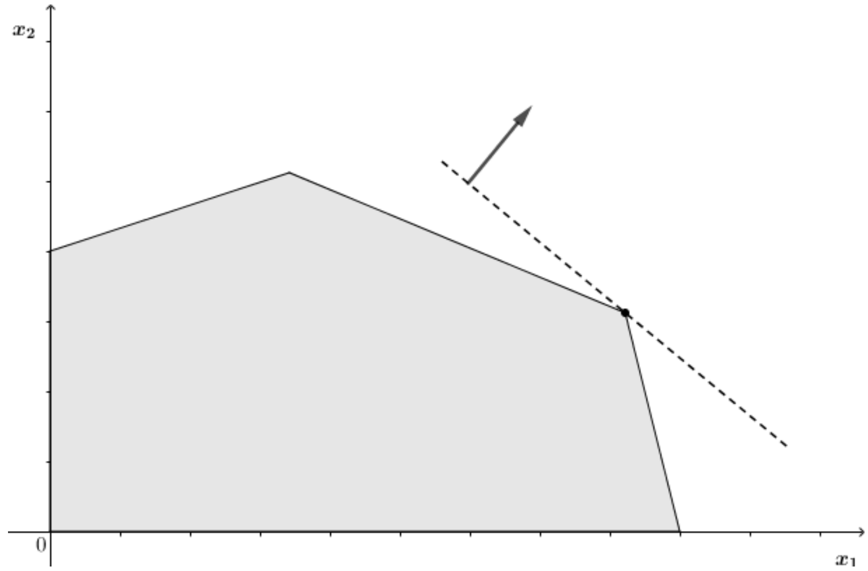


Fonte: Autoria própria, 2018.

2. A Região Viável é um conjunto não vazio e limitado. Duas situações distintas podem ocorrer, pois o PPL apresenta solução ótima, única ou não:

2.1 O PPL apresenta uma **única** solução ótima

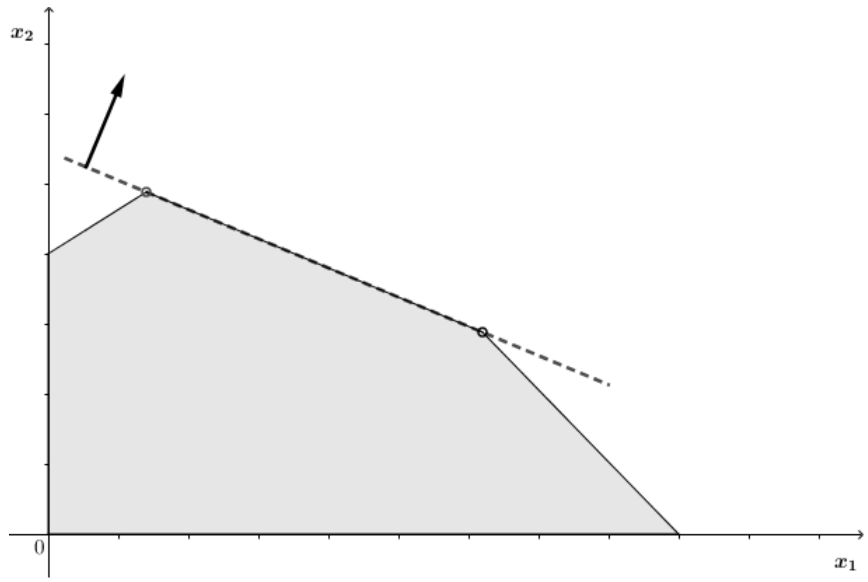
Figura 7 – Representação Gráfica de um PPL com solução ótima única.



Fonte: Autoria própria, 2018.

2.2 Neste caso, o PPL apresenta múltiplas soluções ótimas, ou seja, todos os infinitos pontos de um segmento de reta são soluções ótimas, e dão o mesmo valor para a função objetivo.

Figura 8 – Representação Gráfica de um PPL com múltiplas soluções ótimas.

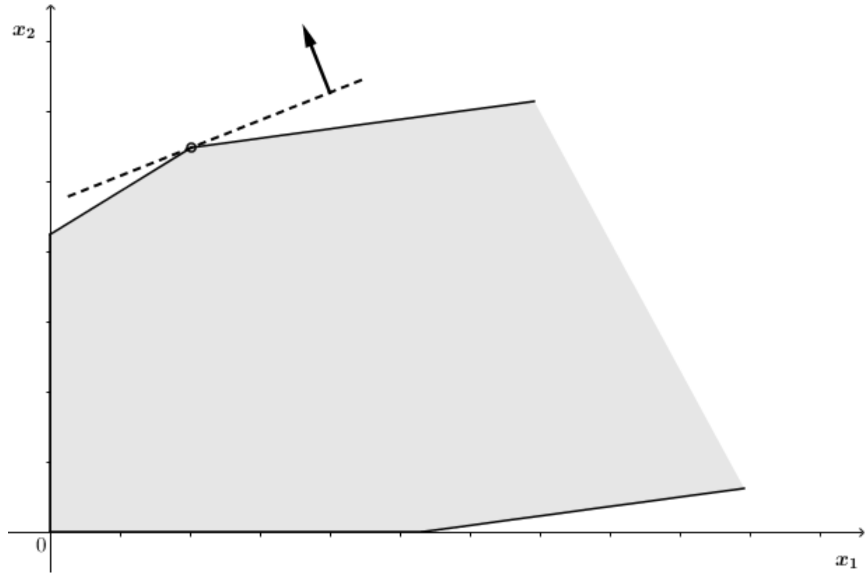


Fonte: Autoria própria, 2018.

3. A Região Viável é um conjunto não vazio e ilimitado. Duas situações distintas podem ocorrer:

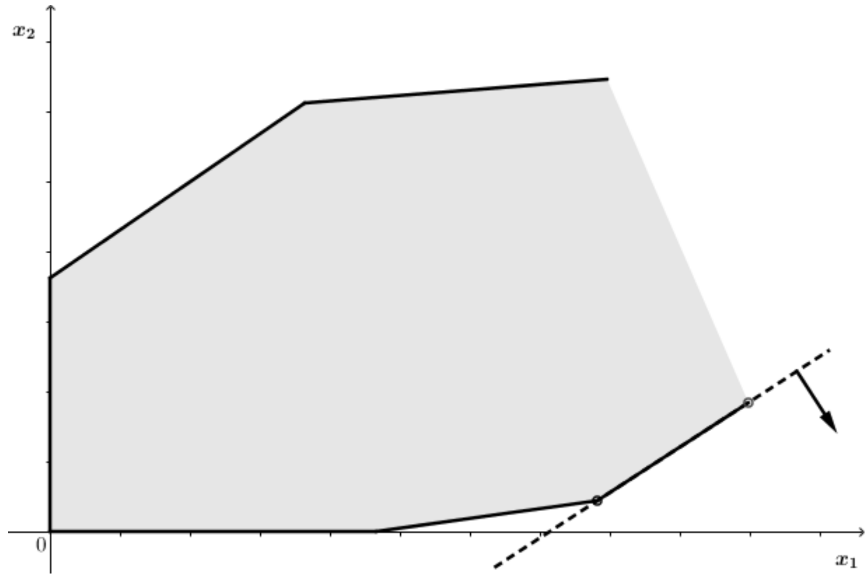
3.1 O PPL apresenta solução ótima, única ou não.

Figura 9 – RV não vazio e ilimitado de um PPL com solução ótima única.



Fonte: Autoria própria, 2018.

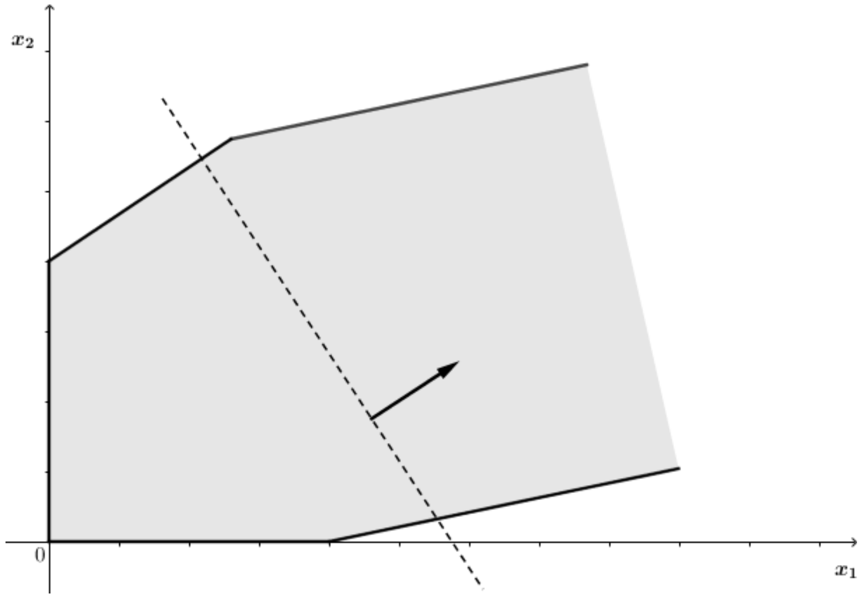
Figura 10 – RV não vazio e ilimitado de um PPL com múltiplas soluções ótimas.



Fonte: Autoria própria, 2018.

3.2 O valor da função objetivo cresce indefinidamente no sentido favorável, isto é, o PPL não apresenta ótimo finito.

Figura 11 – RV não vazio e ilimitado de um PPL que não apresenta ótimo finito.



Fonte: Autoria própria, 2018.

Exemplo 9. Encontre os valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = x_1 + 3x_2$$

sujeito a:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24 \qquad (a)$$

$$x_1 - x_2 \leq 7 \qquad (b)$$

$$x_2 \leq 6 \qquad (c)$$

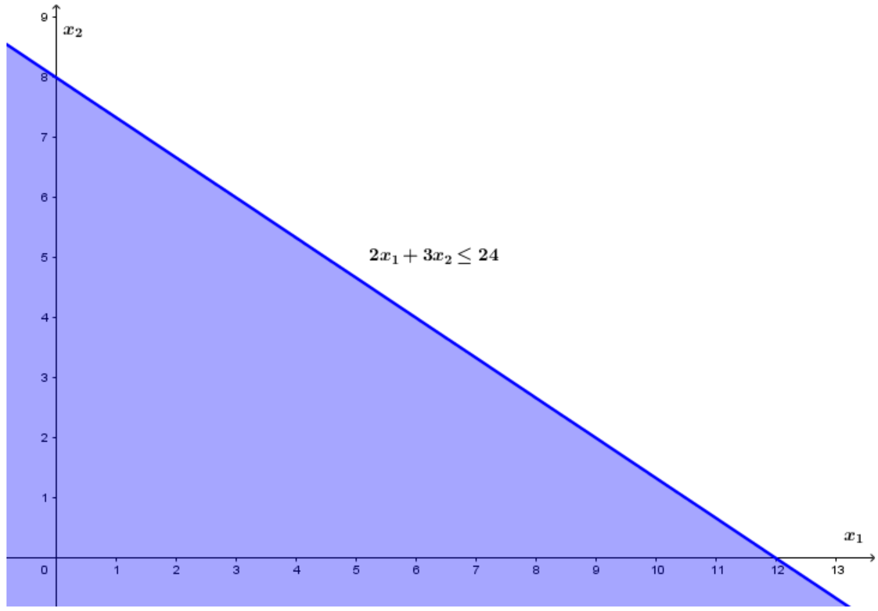
$$x_1 \geq 0 \qquad (d)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (e)$$

Neste primeiro exemplo de resolução pelo método gráfico, faremos os gráficos das restrições separadamente, para uma melhor compreensão do processo.

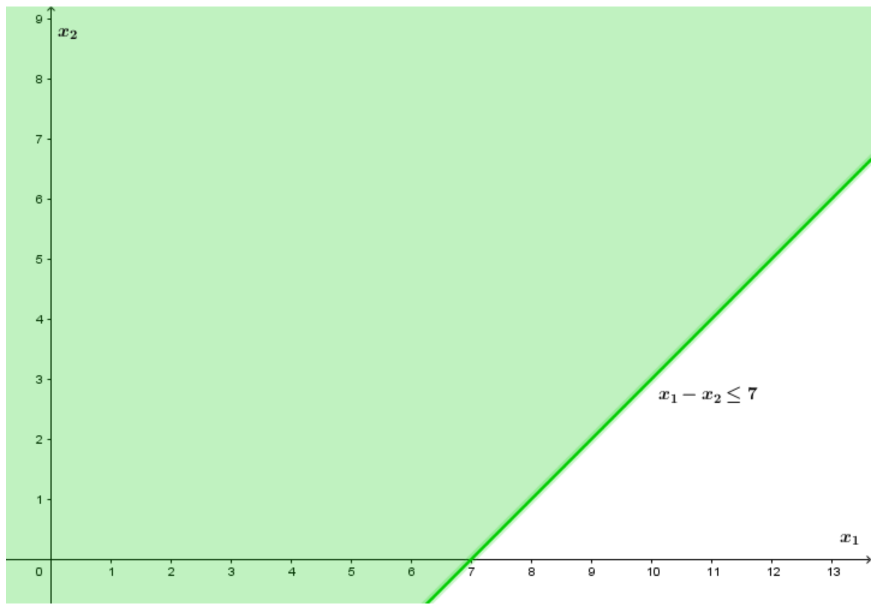
Vejamos como se apresentam os gráficos da restrições:

Figura 12 – Gráfico da restrição (a).



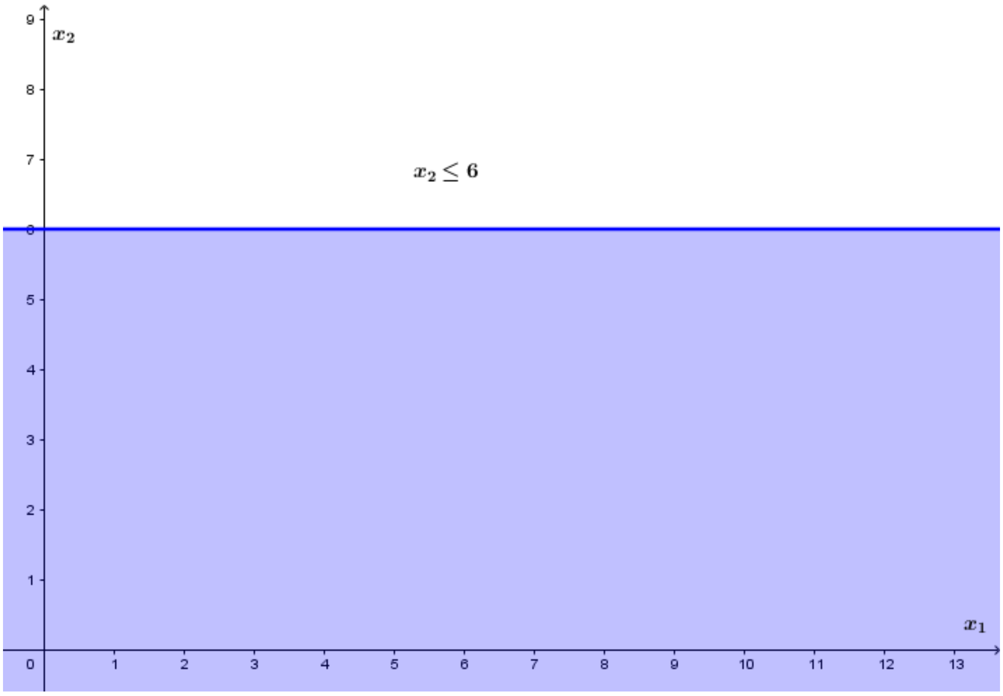
Fonte: Autoria própria, 2018.

Figura 13 – Gráfico da restrição (b).



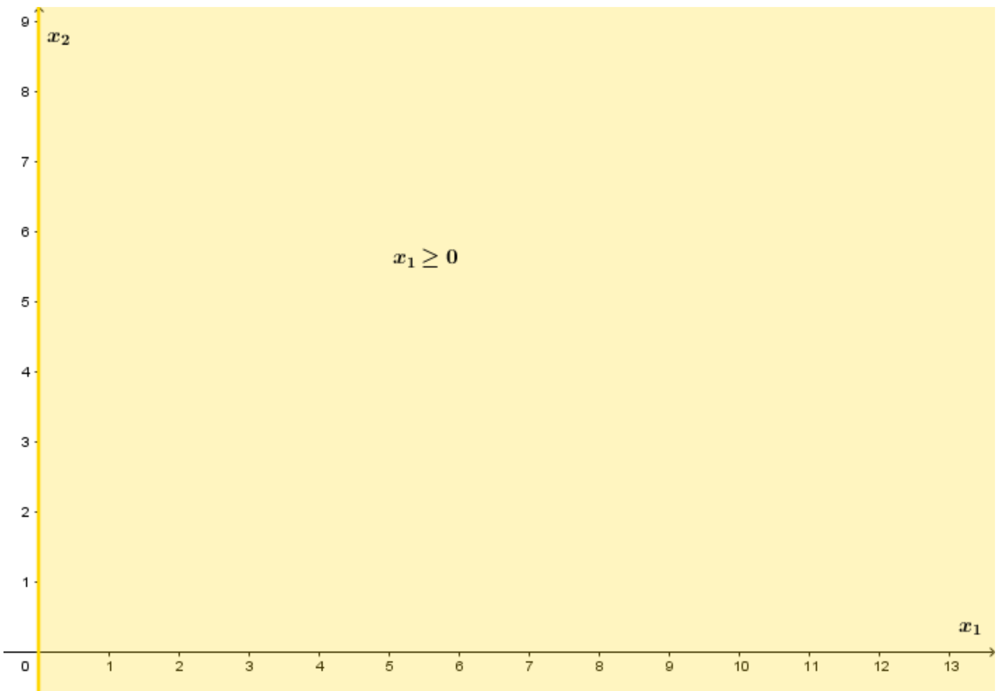
Fonte: Autoria própria, 2018.

Figura 14 – Gráfico da restrição (c).



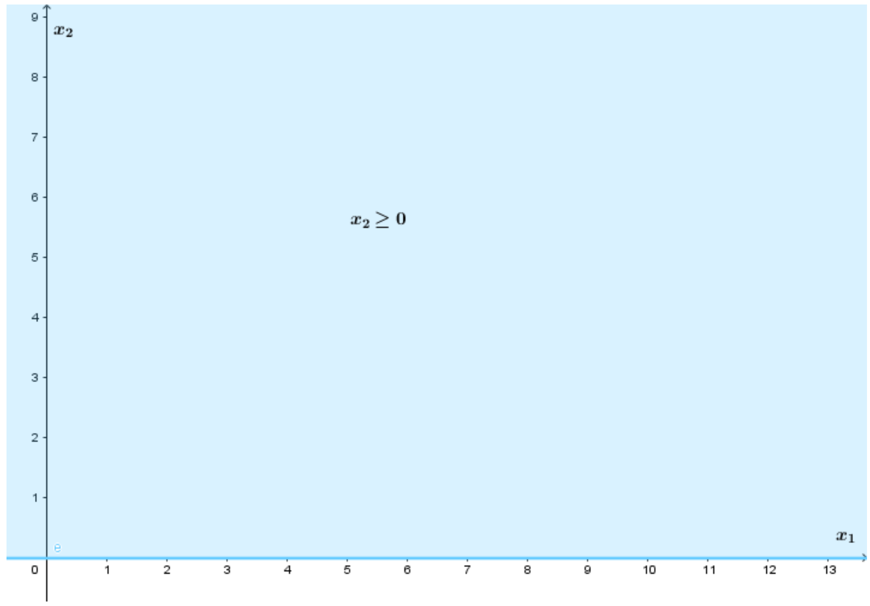
Fonte: Autoria própria, 2018.

Figura 15 – Gráfico da restrição (d).



Fonte: Autoria própria, 2018.

Figura 16 – Gráfico da restrição (e).



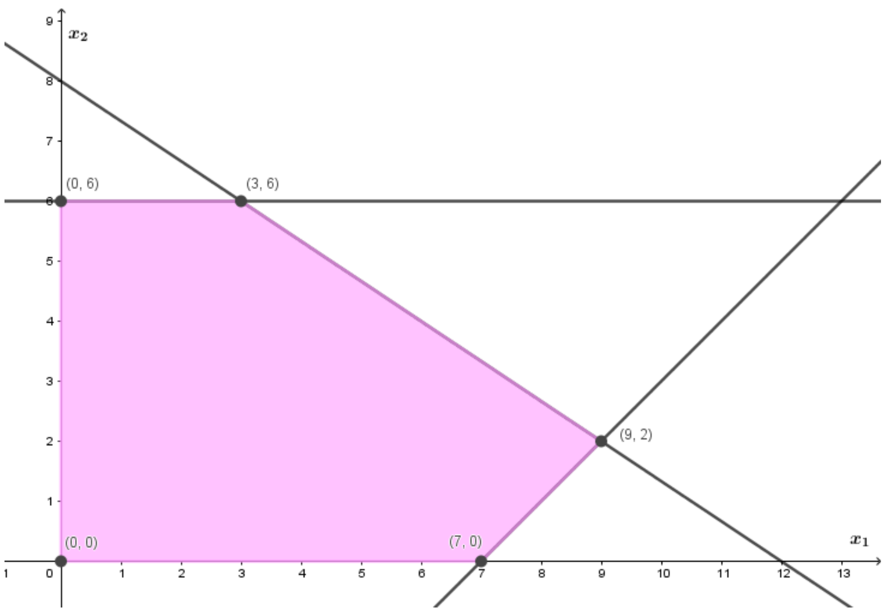
Fonte: Autoria própria, 2018.

Após essa etapa, vejamos como se comporta o gráfico da interseção das restrições apresentadas.

Como pode-se observar, a interseção dos gráficos contidos nas restrições de não-negatividade, Figura 15 e Figura 16, delimita a análise ao 1º quadrante.

Assim, o gráfico da interseção das restrições apresenta-se da seguinte maneira:

Figura 17 – Região Viável do Exemplo 9.

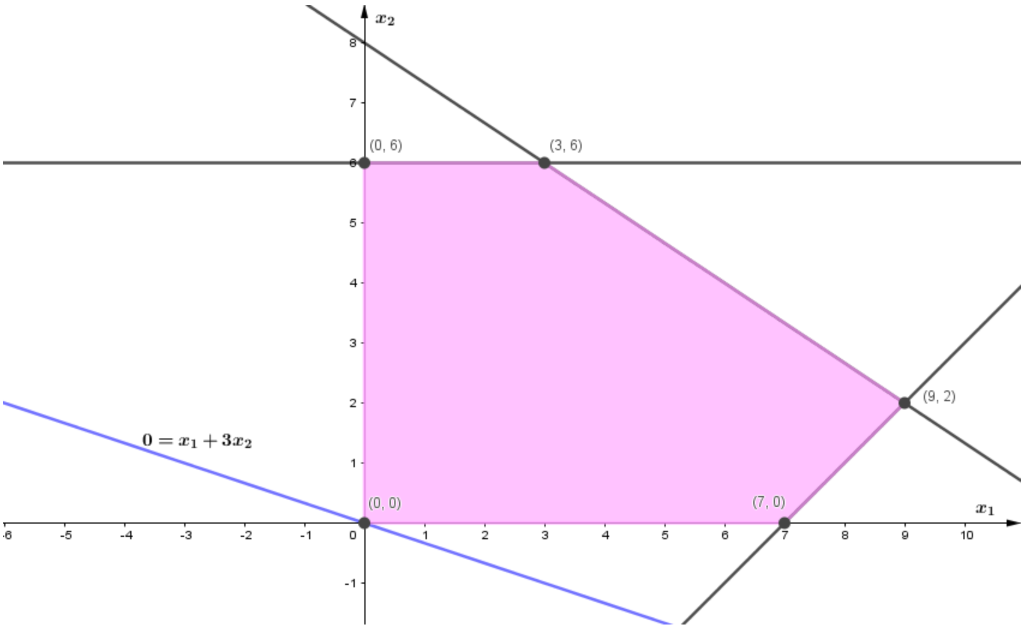


Fonte: Autoria própria, 2018.

Por ser limitada, o valor máximo de z é atingido em um dos cinco pontos extremos.

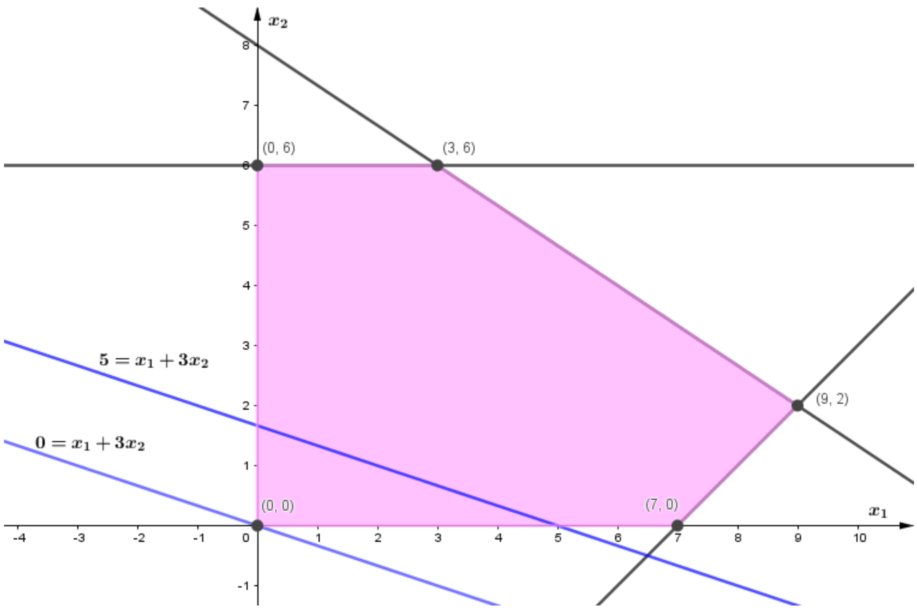
Atribuindo valores aleatórios para z, zero e cinco, por exemplo, podemos perceber o comportamento da função objetivo.

Figura 18 – Comportamento da função objetivo para $z = 0$.



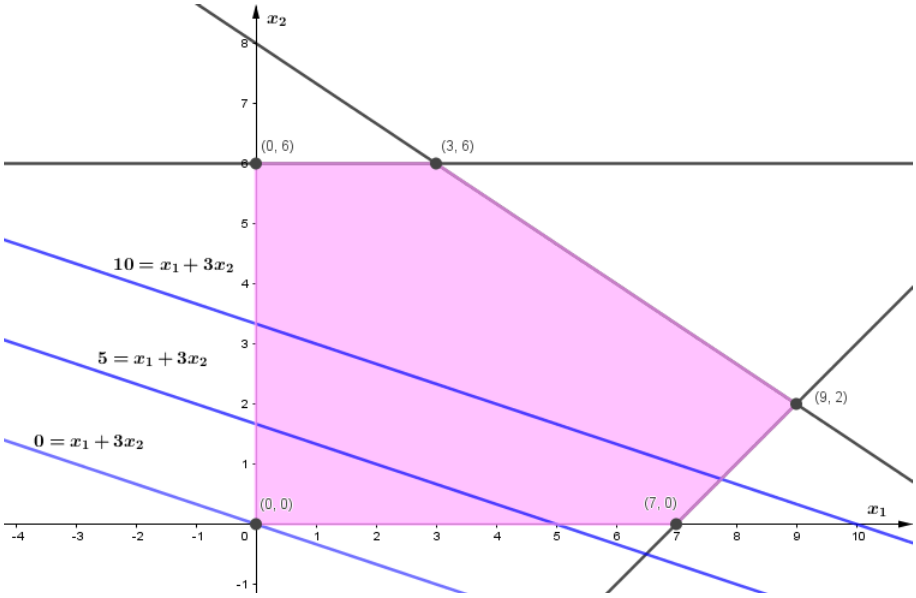
Fonte: Autoria própria, 2018.

Figura 19 – Comportamento da função objetivo para $z = 5$.



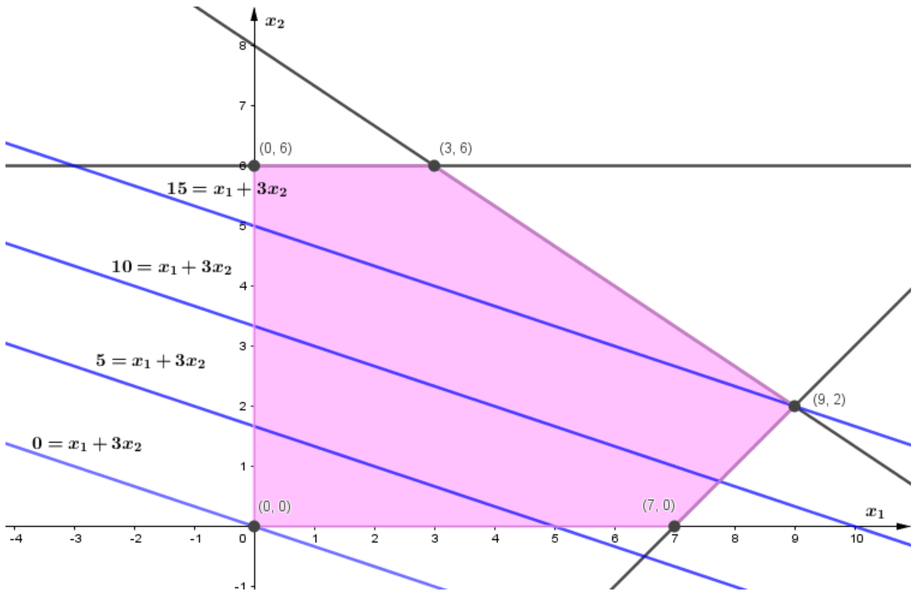
Fonte: Autoria própria, 2018.

Figura 20 – Comportamento da função objetivo para $z = 10$.



Fonte: Autoria própria, 2018.

Figura 21 – Comportamento da função objetivo para $z = 15$.



Fonte: Autoria própria, 2018.

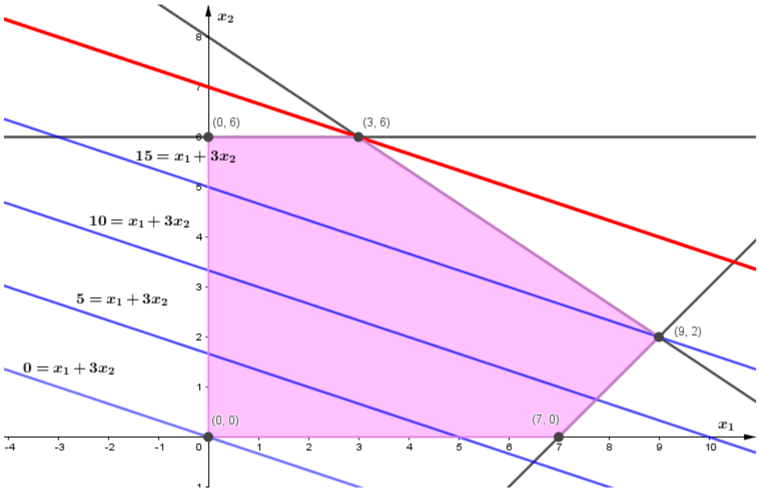
Como podemos ver, a função objetivo desloca-se no sentido do seu gradiente, efetuando uma varredura em toda a Região Viável, alcançando o valor máximo no último ponto em que ocorre interseção, no caso, no ponto $(3, 6)$. Logo, z atinge o seu valor máximo quando $x_1 = 3$ e $x_2 = 6$,

$$z = x_1 + 3x_2$$

$$z = 3 + 3.6$$

$$z = 21$$

Figura 22 – Representação gráfica da solução ótima de $z = x_1 + 3x_2$.



Fonte: Autoria própria, 2018.

A solução do problema foi obtida tangenciando-se à direita o polígono das soluções viáveis e este fato implica que a solução ótima, quando existe, localiza-se em ao menos um dos vértices da Região Viável.

Uma outra forma de determinar a solução de um problema de maximização é analisar algebricamente em qual vértice a função objetivo atinge o seu maior valor, conforme Tabela 17.

Tabela 17 – Tabela de pontos extremos do Exemplo 9.

Ponto Extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = x_1 + 3x_2$
$(0, 0)$	0
$(7, 0)$	7
$(9, 2)$	15
$(3, 6)$	21
$(0, 6)$	18

Fonte: Autoria própria, 2018.

Ao calcularmos os valores que a função objetivo assume enquanto percorre os pontos extremos da Região Viável, podemos observar que, partindo da origem, o valor de z aumenta à medida que deslocamos à direita, atingindo seu ápice no ponto ótimo único $(3, 6)$.

Exemplo 10. Determine os valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 10x_1 + 12x_2$$

sujeito a:

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

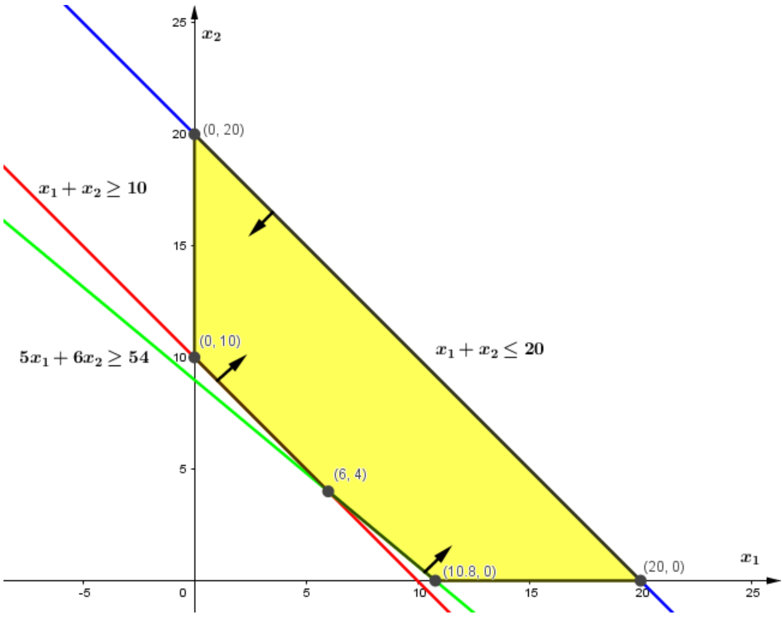
$$5x_1 + 6x_2 \geq 54$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Iniciaremos observando como se comporta a Região Viável, conforme a Figura 23.

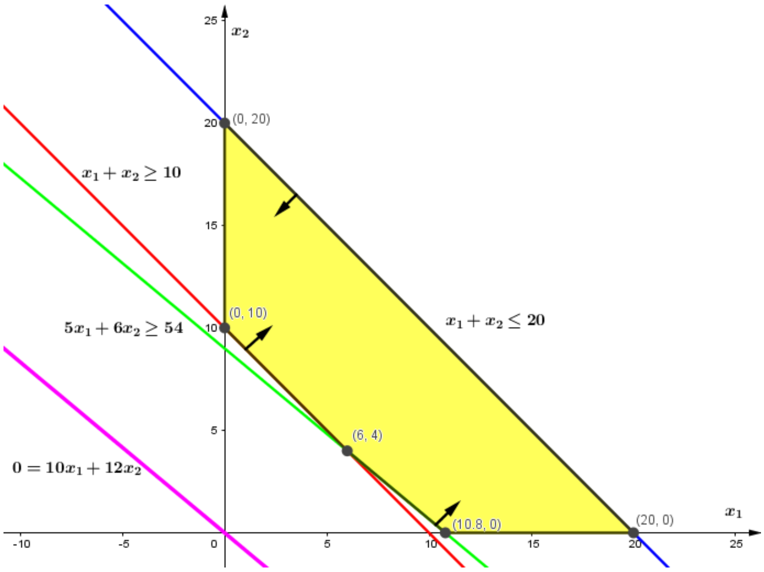
Figura 23 – Região Viável do Exemplo 10.



Fonte: Autoria própria, 2018.

Vejamos, então, a reta da função objetivo quando fazemos $z = 0$:

Figura 24 – Função objetivo quando $z = 0$.

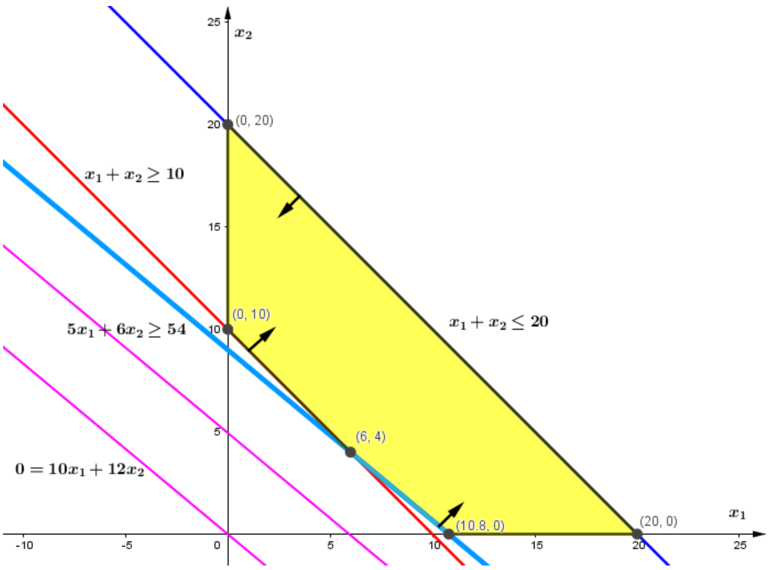


Fonte: Autoria própria, 2018.

Conforme dito, na Seção 2.2, Minimizar $(f(x))$ corresponde a Maximizar $(-f(x))$, bem como Maximizar $(f(x))$ corresponde a Minimizar $(-f(x))$. Logo, diferentemente dos problemas de maximização, onde a função objetivo percorre toda a Região Viável, alcançando o valor máximo no último ponto em que ocorre interseção, a solução ótima de um PPL de minimização estará no primeiro ponto extremo que a função objetivo interceptar.

Sendo assim, temos:

Figura 25 – Representação gráfica da solução ótima de $z = 10x_1 + 12x_2$.



Fonte: Autoria própria, 2018.

ou ainda,

Tabela 18 – Tabela de pontos extremos do Exemplo 10.

Ponto Extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = 10x_1 + 12x_2$
$(0, 10)$	120
$(0, 20)$	240
$(20, 0)$	200
$(10.8, 0)$	108
$(6, 4)$	108

Fonte: Autoria própria, 2018.

Vemos que a função objetivo, em azul claro na Figura 25, sobrepõe-se à reta da restrição $5x_1 + 6x_2 \geq 54$ e atinge um valor mínimo de 108 nos dois pontos extremos adjacentes $(10.8, 0)$ e $(6, 4)$. Isto mostra que uma solução ótima em um PPL não precisa ser única. Se a função objetivo assume o mesmo valor em dois pontos extremos adjacentes, ela tem o mesmo valor em todos os pontos do segmento de reta da fronteira.

Exemplo 11. Considere o seguinte PPL de Maximização:

$$z = 10x_1 + 12x_2$$

sujeito a:

$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$

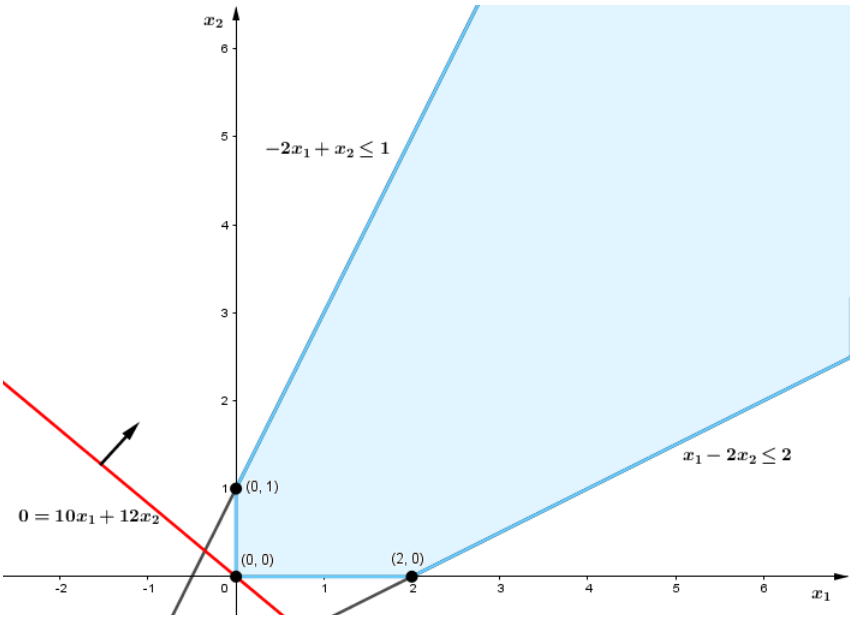
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Vejamos a RV do referido problema:

Figura 26 – Região Viável do Exemplo 11.



Fonte: Autoria própria, 2018.

O problema apresenta uma RV com três vértices, mas não é limitada. Observando a função objetivo, percebe-se que esta pode ser deslocada paralelamente a si própria no sentido de crescimento de z e conter sempre pontos do conjunto das soluções admissíveis.

A função objetivo pode alcançar valores muito elevados e, como consequência, não existir um valor máximo finito para z. Dizemos, então que o PPL não apresenta ótimo finito.

3.1 *Softwares* Gráficos utilizados na resolução de problemas de Programação Linear

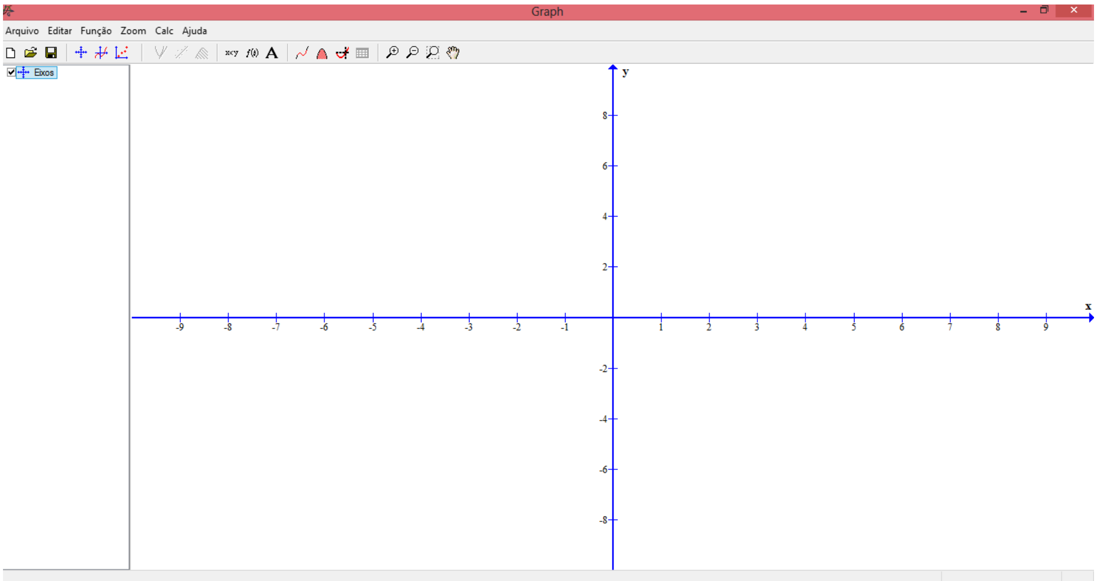
A utilização de *softwares* gráficos nas aulas de Matemática pode estimular a aprendizagem e aumentar o interesse por determinados conteúdos. Professores e alunos deparam-se com a proposta desafiadora, principalmente nas aulas de geometria e no estudo das funções, em virtude da necessidade de se desenvolver gráficos.

Nesta seção, apresentaremos 4 *softwares* que auxiliam na resolução de problemas de Programação Linear Geométrica: Graph, Winplot, Graphmatica e GeoGebra.

3.1.1 Graph

O Graph é um programa de livre circulação, criado por Ivan Johansen, de fácil utilização, usado para desenhar gráficos matemáticos em um sistema cartesiano e permite uma melhor visualização do que a calculadora gráfica.

Figura 27 – Tela inicial do *software* Graph



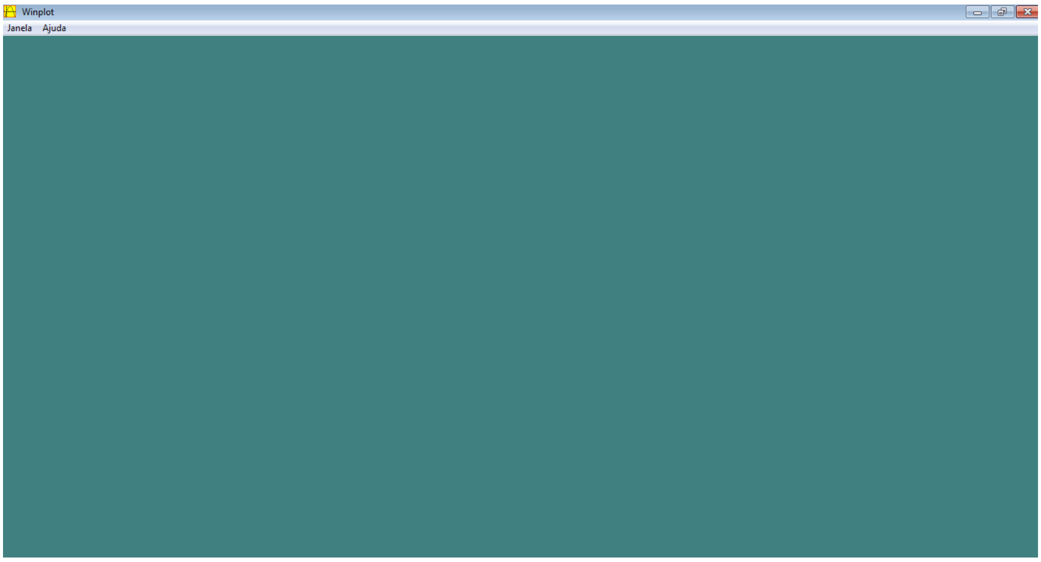
Fonte: Graph

Ele apresenta uma Barra de Menu que contém todos os recursos disponíveis no programa. Todos eles são acessíveis através dos diversos menus, que podem ser ativados clicando sobre o nome. Apresenta ainda, uma Barra de Ferramentas, Área de Plotagem, Área de Elementos e uma Barra de Mensagem.

3.1.2 Winplot

Foi desenvolvido pelo Professor Richard Parris "Rick", da Philips Exeter Academy, por volta de 1985. Escrito em linguagem C, chamava-se PLOT e rodava no antigo DOS. Com o lançamento do Windows 3.1, o programa foi rebatizado de "Winplot". A versão para o Windows 98 surgiu em 2001 e está escrita em linguagem C++. Os menus são bastante amigáveis, existe ajuda em todas partes do programa, aceita as funções matemáticas de modo natural e possibilita a construção de gráficos em 2D e 3D.

Figura 28 – Tela inicial do *software* Winplot

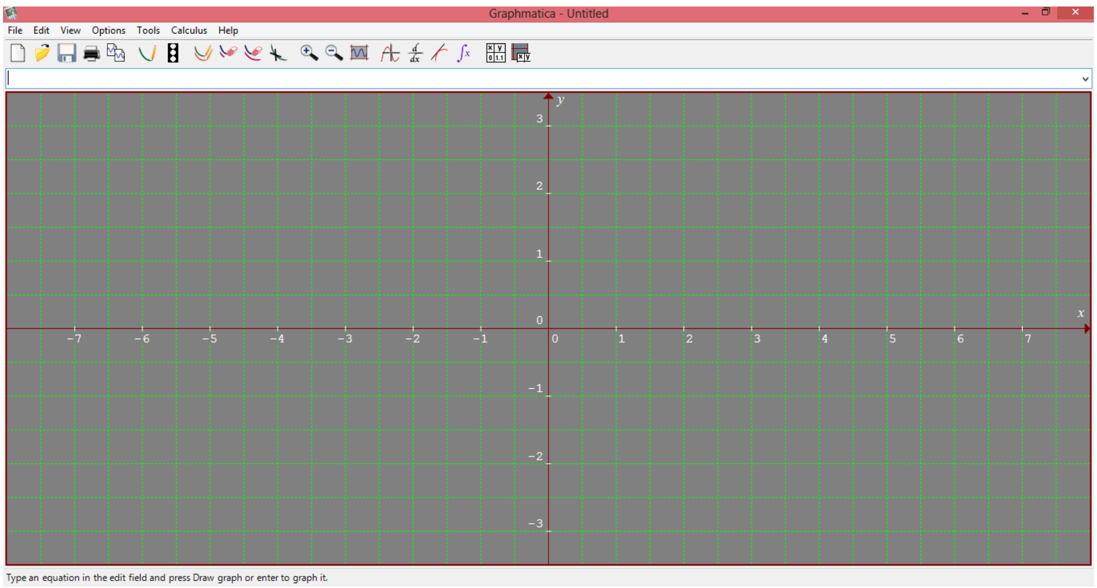


Fonte: Winplot

3.1.3 Graphmatica

O *software* Graphmatica, criado por Keith Hertzer, um bacharel em Engenharia Elétrica e Ciência da Computação, é um aplicativo que trabalha com duas dimensões, sendo capaz de representar graficamente funções de qualquer grau, funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, etc. Também é útil no Cálculo Diferencial e Integral: hachura áreas para ilustrar integrais, desenha gráficos de derivadas e cria gráficos de equações diferenciais ordinárias.

Figura 29 – Tela inicial do *software* Graphmatica



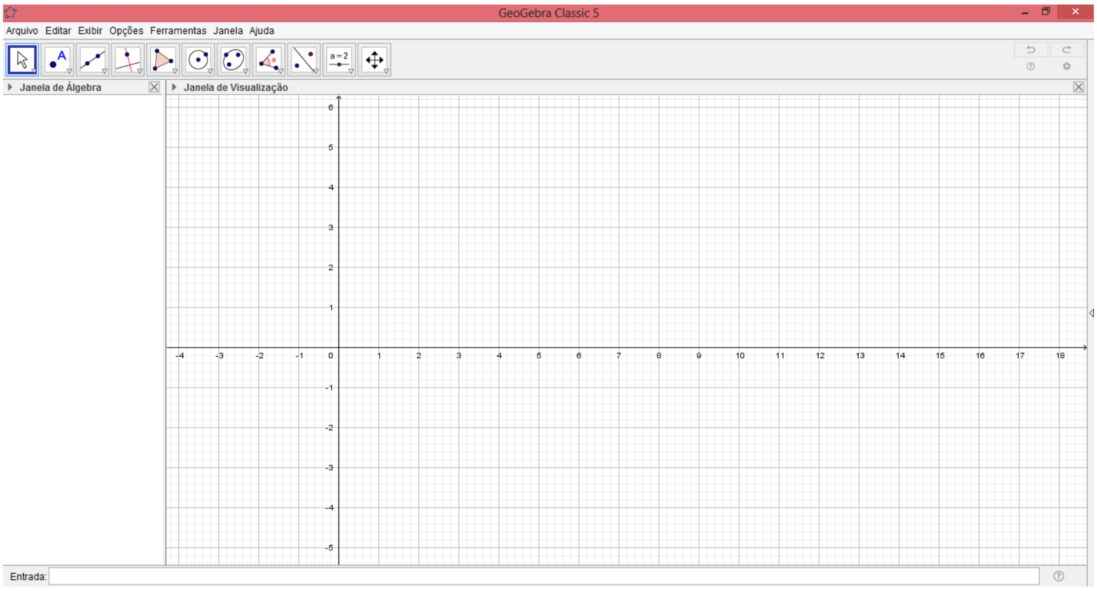
Fonte: Graphmatica

O programa apresenta uma barra de botões rápidos com os principais comandos, uma área editável das funções, a barra de menus e uma área de plotagem onde aparecem os gráficos digitados na área editável das funções.

3.1.4 GeoGebra

O GeoGebra (2017), cujo nome é formado pela aglutinação das palavras Geometria e Álgebra, é gratuito e foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então.

Figura 30 – Tela inicial do *software* GeoGebra



Fonte: GeoGebra

É um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos em 2D e 3D, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. Possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países, tornando-se líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

Como ferramenta para a resolução dos problemas de Programação Linear presentes neste trabalho utilizaremos o *software* GeoGebra (2017), pois a Geometria, a Álgebra e a Planilha de Cálculo estão interconectadas e são dinâmicas, além de tratar-se de um programa de código aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais e apresentar uma interface fácil de usar, possibilitando a criação de materiais didáticos.

Capítulo 4

Estado da Arte

Acreditando ser de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho, neste capítulo, apresentaremos o estado da arte, visando compreender a literatura que aborda assuntos assemelhados aos aqui propostos.

Ribas (2014), cita a obra "A arte de resolver problemas", de George Polya (1994), fundamental para ampliar os conceitos aprendidos pelo aluno, explorar novas possibilidades e instigá-los. Sua dissertação foi provocada pelo desejo dos discentes sobre as aplicações dos conteúdos matemáticos.

A autora propôs 8 aulas, tendo como principais atividades a discussão dos problemas apresentados, a abordagem dos conceitos de PL e construções nos *softwares* GeoGebra (2017), Excell e Linux Calc, para a resolução de problemas. Como a atividade não foi aplicada aos seus alunos, não foi possível elaborar uma avaliação dos resultados.

Zachi (2016) inicia seu trabalho apresentando os fundamentos da PL, com destaque à Programação Linear Geométrica, ressaltando a importância desse instrumento para a resolução de problemas pertences à "Economia, gestão de empresas, problemas de transportes, obtenção de misturas ótimas, entre outros".

Em sua dissertação, a autora destaca que a PL é um tema de fácil aplicação e atende perfeitamente ao questionamento dos alunos quanto à contextualização da Matemática no dia a dia. Porém, o tema não é muito explorado no Ensino Médio. Ela utiliza o caderno de apoio do aluno do 3º ano do Ensino Médio do Estado de São Paulo - volume 1, que apresenta uma situação de aprendizagem sobre Problemas de Programação Linear, como motivação para uso das equações e inequações associadas a retas e regiões do plano. Como facilitador, Zachi (2016) utiliza o *software* GeoGebra (2017) trazendo a possibilidade de introduzir conteúdos mais "palpáveis".

Pinheiro et al. (2016) aborda, em sua dissertação, os Problemas de Programação Linear e as soluções geométricas, com os recursos do GeoGebra (2017), soluções algébricas, além da ferramenta *Solver* da planilha *Calc do LibreOffice*. O autor destaca o "ganho valioso para o alunado", pois, ressalta ainda, "os alunos reafirmam conhecimentos algébricos, aumentam conhecimentos em informática e relacionam sua aplicação com a tecnologia que se encontra a seu alcance".

Camargo et al. (2014) segue as orientações propostas por Paiva (2008) ao realizar atividades de Programação Linear com alunos do 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação do Amazonas - Campus Parintins e da Fundação Centro de Análise Pesquisa e Inovação Tecnológica em Manaus. Tais atividades foram realizadas no laboratório de informática de cada instituto com o uso dos recursos computacionais do *software* GeoGebra (2017), resolvendo problemas de programação linear com duas variáveis pelo método da resolução gráfica.

O autor destaca o fato da atividade realizada no Instituto Federal de Educação do Amazonas, Campus Parintins, ter sido transformada em trabalho estendido, apresentado no "1º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática", realizado na UnB-Brasília, intitulado "Introduzindo a Programação Linear no Ensino Médio".

Camargo et al. (2014) apresenta como resultado a participação dos alunos na elaboração de "conjecturas e conclusões sobre os conteúdos estudados, respeitando seus ritmos e ideias". Destaca ainda, que "a experiência com essa atividade mostrou ser conveniente iniciar as aulas com problemas de programação linear com apenas duas variáveis".

Martins (2013), em sua dissertação, destaca a necessidade de se repensar o currículo, propondo estratégias e alternativas que conectem a matemática ao cotidiano e respondam aos questionamentos dos alunos. O autor ofereceu uma oficina aos estudantes do Centro de Ensino Médio Pastor Dohms, localizada em Porto Alegre, totalizando 20 horas de aulas em 8 encontros.

Durante a aplicação da sequência didática, os discentes foram provocados a conjecturar e elaborar conclusões ao longo das atividades. Martins (2013) salienta que a teoria foi desenvolvida no decorrer das oficinas, em paralelo à revisão de alguns conteúdos, e as atividades foram aplicadas sem explanação de conceitos prévios, visando despertar a percepção de um método para resolução de problemas.

Ao término das oficinas, Martins (2013) verificou que, em geral, os alunos despertaram interesse para um conteúdo, até então, desconhecido, além de perceberem que, somente as tabelas, não resolvem todos os problemas de PL. Houve ainda, a conexão de conhecimentos prévios e sem sentido, até àquele momento, e a utilização do *software* GeoGebra (2017).

4.1 Análise do livro didático

Considerando a importância dos livros didáticos para o processo educativo, suporte de conhecimento cultural, científico e literário, faz-se necessário analisar como o conteúdo de Programação Linear é abordado em livros voltados para o Ensino Médio e se alguma ferramenta é utilizada e/ou sugerida.

Para tanto, consultando-se o guia digital do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD (2018), ganha destaque a coleção "Matemática: contextos e aplicações", do renomado autor Dante (2016), por ser amplamente conhecido e utilizado em escolas públicas e privadas.

O livro apresenta duas referências sobre a Programação Linear, sendo a primeira na introdução do capítulo 5, que trata dos Sistemas Lineares, num pequeno texto sobre as regras do jogo Sudoku, e a segunda na seção "Outros Contextos", que apresenta "temas interessantes e curiosos que tratam de situações práticas, articulando a Matemática com outras disciplinas".

Na introdução do capítulo 5, na página 94, o texto relata que "em 2008 foi proposta uma solução para o jogo Sudoku por meio da Programação Linear", descrevendo-a logo em seguida, como sendo "um tipo de programação utilizada para resolver diversos tipos de problema que podem ser escritos matematicamente na forma de sistemas lineares".

Dante (2016), na seção "Outros Contextos", presente no capítulo 5, página 112, apresenta como título "Programação Linear e a otimização de funções" destacando a importância dos sistemas de equações e inequações simultâneas na resolução de problemas nas mais diversas áreas, como na economia, transportes, alimentação(dietas), etc. O autor motiva o discente relatando a necessidade de encontrar valores máximo ou mínimo de uma função sujeita a restrições.

Em seguida, o autor inicia o estudo do método gráfico para Problemas de Programação Linear, enunciando o seguinte problema e apresentando o quadro da Figura 31:

> "Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro abaixo. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?" (DANTE, 2016, p.112)

Figura 31 – Quadro do problema da dieta

	P	Q	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

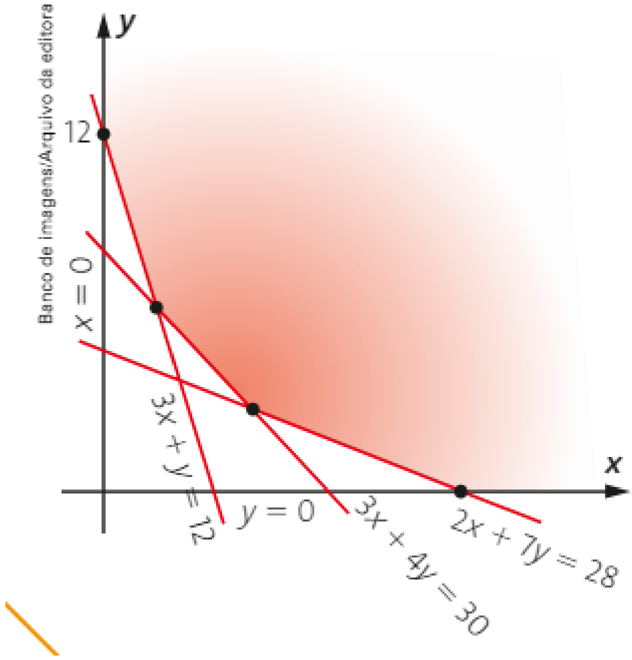
Fonte: Livro de Dante (2016, p.112)

Dante (2016) apresenta as seguintes orientações para resolver um problema de Programação Linear, pelo método gráfico:

> **1.** Estabelecemos a **função objetivo**, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar.
> **2.** Transformamos as restrições impostas no problema em um sistema de inequações lineares.
> **3.** Traçamos o gráfico da região poligonal convexa correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices.
> **4.** Calculamos os valores da função objetivo em cada um dos vértices.
> **5.** Constatamos que o maior desses valores é o máximo e o menor é o mínimo da função objetivo. Voltamos ao problema e damos a sua solução.

Em seguida, Dante (2016) apresenta o passo a passo para a resolução do problema, apresentando a função objetivo de custo, as restrições, um esboço do gráfico (Figura 32) e os sistemas que determinam os vértices (Figura 33), mas não os resolve.

Figura 32 – Esboço do gráfico do problema da dieta



Fonte: Livro de Dante (2016, p.112)

O gráfico acima, extraído do livro didático, apresenta clara falta de proporção no ponto de intersecção das retas $3x + 4y = 30$ e $2x + 7y = 28$, representadas no terceiro sistema da Figura 33, o que pode comprometer a análise e compreensão do problema.

Figura 33 – Sistemas que determinam os vértices na Figura 32

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 12)$$

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 6)$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{98}{13}, \frac{24}{13}\right)$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (14, 0)$$

.

Fonte: Livro de Dante (2016, p.112)

Logo após, apresenta um quadro (Figura 34) com os valores que a função objetivo assume nos respectivos vértices.

Figura 34 – Quadro com os valores assumidos pela função objetivo de Custo

Vértice	Valor da função $C = 3x + 2y$
$(0, 12)$	$C = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 24$
$(2, 6)$	$C = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18 \leftarrow$ mínimo
$\left(\frac{98}{13}, \frac{24}{13}\right)$	$C = 3 \cdot \frac{98}{13} + 2 \cdot \frac{24}{13} = 26{,}3$
$(14, 0)$	$C = 3 \cdot 14 + 2 \cdot 0 = 42 \leftarrow$ máximo

Fonte: Livro de Dante (2016, p.113)

Com base no quadro acima, Dante (2016) apresenta a conclusão, afirmando que a dieta ótima consiste no consumo de 2 unidades do produto P e 6 unidades do produto Q.

O autor propõe dois quesitos onde aborda questões relacionadas ao texto e sugere uma pesquisa sobre o sudoku, para apresentação posterior em seminário.

Dante (2016) exibe 4 *links* de sites onde podem ser consultadas outras informações sobre a Programação Linear e a otimização de funções, como vemos na Figura 35.

Figura 35 – Demais materiais para consulta

Veja mais sobre o assunto

Procure informações e curiosidades sobre programação linear e a otimização de funções em jornais, revistas, livros e na internet. Sugestões: (acessos em: 5 maio 2016)

- ARSIE, K. C. *Jogos sudoku e quadrado mágico*. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2010. Disponível em: <http://people.ufpr.br/~ewkaras/ic/karla10.pdf>.
- Geniol: <www.geniol.com.br/logica/sudoku/>.
- MELO, J. N. B. *Uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear no Ensino Médio*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012. Disponível em: <www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novos_conteudos/modulo_II/pdf/dissertacao_jorge_melo.pdf>.
- SILVA, K. *Modelagem Matemática com programação linear: uma proposta de trabalho no Ensino Médio*. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/486/2011_00379_KLEBER_SILVA.pdf?sequence=1>.

Sistemas lineares 113

Fonte: Livro de Dante (2016, p.113)

Destaca-se acima, entre os trabalhos de aprofundamento sugeridos por Dante (2016), a dissertação de Silva (2013), apresentada à Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB. Entretanto, o acesso à dissertação está indisponível, sendo necessária uma busca direta no site do PROFMAT.

No que tange ao conteúdo de Programação Linear apresentado por Dante (2016), vemos que o autor fornece subsídios necessários para os professores que desejarem apresentar para os alunos tal conteúdo. Entretanto, fica evidente a necessidade de se buscar outros materiais para realizar aprofundamento no tema.

Percebe-se, ainda, que o problema da dieta abordado pelo autor pode ser de difícil compreensão para discentes que estão mantendo um primeiro contato com a PL. A mudança dos dados da tabela para equações e inequações pode apresentar-se uma barreira difícil, para os alunos.

O roteiro apresentado por Dante (2016) não possibilita que o aluno elabore suas próprias conjecturas e construa suas conclusões, à medida que desenvolve a atividade proposta. A apresentação de uma resolução do problema, com o auxílio de um *software*, poderia despertar o interesse dos discentes para o tema, visto que a informática possibilita dinamismo, agilidade e a capacidade de entrelaçar diferentes formas de linguagem, despertando mudanças no processo de ensino-aprendizagem. A resolução da situação-problema apresentada resume-se a transformar os dados da tabela e seguir os passos determinados pelo autor, o que não garante o aprendizado dos discentes, pois estes necessitam estar engajados no confronto com desafios.

Capítulo 5

Proposta de Resolução de Problemas de Programação Linear, voltada para o Ensino Médio, com o uso do GeoGebra

Para desenvolvimento de uma proposta de ensino de Programação Linear, voltada para o Ensino Médio, faz-se necessário o domínio de conteúdos prévios, que podem ser revisados pelo docente, em aulas anteriores, ou mesmo no decorrer da atividade, além dos objetivos de aprendizagem e os conteúdos subjacentes.

Temos como **conhecimentos prévios**:

- Mostrar autonomia para utilização do *software* GeoGebra (2017).
- Identificar os elementos e os tipos de polígonos - ângulos, lados, vértices, regulares e irregulares, côncavo e convexo;
- Representar graficamente pontos e retas no plano;
- Representar graficamente equações e inequações lineares com duas incógnitas;
- Identificar planos e semiplanos.
- Dominar a resolução de matrizes e suas propriedades.
- Resolver graficamente sistemas de equações e inequações lineares com duas incógnitas;
- Identificar as inequações que determinam regiões no plano.

Os **objetivos de aprendizagem** são:

- Interpretar e equacionar problemas;
- Representar retas em referenciais cartesianos do plano;
- Identificar regiões do plano limitadas por retas;
- Identificar a posição relativa de retas e determinar pontos de intersecção de retas;
- Identificar geometricamente pontos do plano como solução ótima de um problema.
- Verificar analiticamente que determinados pontos são solução ótima de um problema;
- Escolher, analisar e validar a solução de um problema.

No **âmbito dos conteúdos subjacentes** temos os seguintes itens:

- Resolução de problemas envolvendo:
  - Sistemas de eixos coordenados;
  - Equações de retas e funções afins;
  - Resolução de sistemas de equações e/ou inequações;
- Resolução de problemas de Programação Linear, com referências expressas à identificação:
  - das variáveis de decisão;
  - das restrições e;
  - da função objectivo, bem como a sua formulação matemática.

A aplicação dos conceitos da Programação Linear, sobretudo o estudo do Método Gráfico, contribui para o aprofundamento de conteúdos importantes do ensino de nível médio, pois utiliza-se das equações e inequações polinomiais de 1º grau, dos polígonos e seus elementos, da geometria espacial de posição, com noções de par ordenado, sistema de coordenadas cartesianas, ponto, reta, plano, semiplano e paralelismo, das matrizes, sistemas de equações lineares e suas propriedades, expandindo a abrangência de conteúdos explorados no Ensino Médio.

A proposta de abordagem da Programação Linear, apresentada a seguir, visa desenvolver uma atividade que auxilie os docentes a despertar em seus discentes o interesse pelo tema, sem a necessidade de que se mencione, sequer, o termo Programação Linear.

Tal proposta, que pode ser aplicada em grupo ou individualmente, conta com o auxílio do GeoGebra (2017), facilitando o estudo e a compreensão da parte gráfica, a interpretação dos sistemas de equações e inequações, bem como a visualização das regiões planas. A utilização do *software* GeoGebra (2017) justifica-se por ser gratuito e disponível em diversos equipamentos, como: *PC, notebook, tablet e smartphone*, viabilizando o acesso de todos os alunos.

Antes de iniciar-se a resolução de problemas é aconselhável que o GeoGebra (2017) seja apresentado aos discentes, para que possam manuseá-lo, permitindo que estejam aptos e seguros quanto à utilização do *software*. O docente pode solicitar que eles insiram no *software* algumas equações e inequações lineares com duas incógnitas ou mesmo que construam polígonos, livremente, explorando, principalmente, os conceitos de lado, vértice, côncavo e convexo.

Situação-problema 1

Concluída a etapa anterior, podemos apresentar o seguinte problema, adaptado de Martins (2013, p.61):

A Corrida Maluca

Na Corrida Maluca o importante é ***maximizar*** *a quantidade de pontos.*

Para pontuar, Dick Vigarista pode escolher entre duas pistas.

Cada volta na Pista 1 é percorrida em exatamente 4 minutos e cada volta na Pista 2 é percorrida em 3 minutos, sendo que a corrida termina em, no máximo, 50 minutos.

Ele pode percorrer, ao todo, no máximo, 15 voltas, sendo que precisa dar, no mínimo, duas voltas na Pista 2.

A cada volta dada na Pista 1 ele ganha 5 pontos e a cada volta na Pista 2 ganha 4 pontos.

Qual a estratégia que Dick Vigarista deve escolher para maximizar a quantidade de pontos e, finalmente sem trapaças, subir ao pódio?

A apresentação do texto no problema acima foi modificada, visando auxiliar os alunos na assimilação da construção do modelo matemático, visualizando as inequações e a função objetivo, à medida em que forem interpretando o texto.

Após a explanação do problema, os discentes devem, por um tempo, refletir, discutir e propor soluções, com base nas informações fornecidas pelo texto. Os docentes não devem interferir na discussão, pois é necessário que os alunos proponham resoluções intuitivas, utilizando conhecimentos prévios, organizando suas ideias, levantando hipóteses, fazendo testes e discutindo possíveis soluções.

Concluída essa etapa, caso não tenha sido citado durante a discussão, o professor pode propor aos alunos que convertam os dados do texto da língua natural para a linguagem matemática. Assim, espera-se que as algumas equações e inequações lineares sejam encontradas. Para tanto, o docente pode conduzir os trabalhos de forma mais direta, orientando-os e indagando-os, como abaixo:

Se denominamos por x, o número de voltas na Pista 1 e y, o número de voltas na Pista 2:

1. O número total de pontos (P) que Dick Vigarista pode obter é representado por qual equação?

2. Qual a expressão envolvendo x e y que descreve a restrição em relação ao tempo de corrida?

3. Qual a expressão envolvendo x e y que descreve a restrição em relação ao número de voltas da corrida?

4. Qual a expressão envolvendo y para se dar, no mínimo, duas voltas na Pista 2?

Após uma nova reflexão, os alunos devem organizar as equações e inequações que representam matematicamente o problema, como a seguir:

1. $P = 5x + 4y$; (Função Objetivo)

2. $4x + 3y \leq 50$;

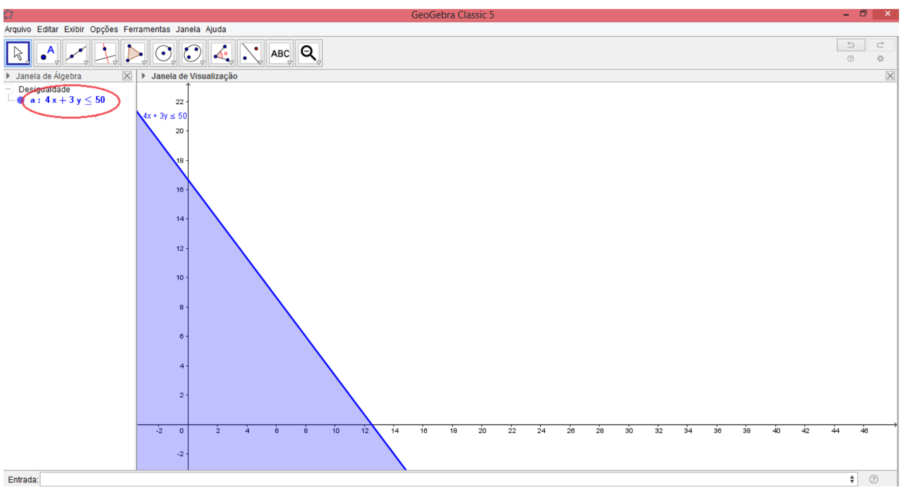
3. $x + y \leq 15$;

4. $y \geq 2$; e ainda,

5. $x \geq 0$.

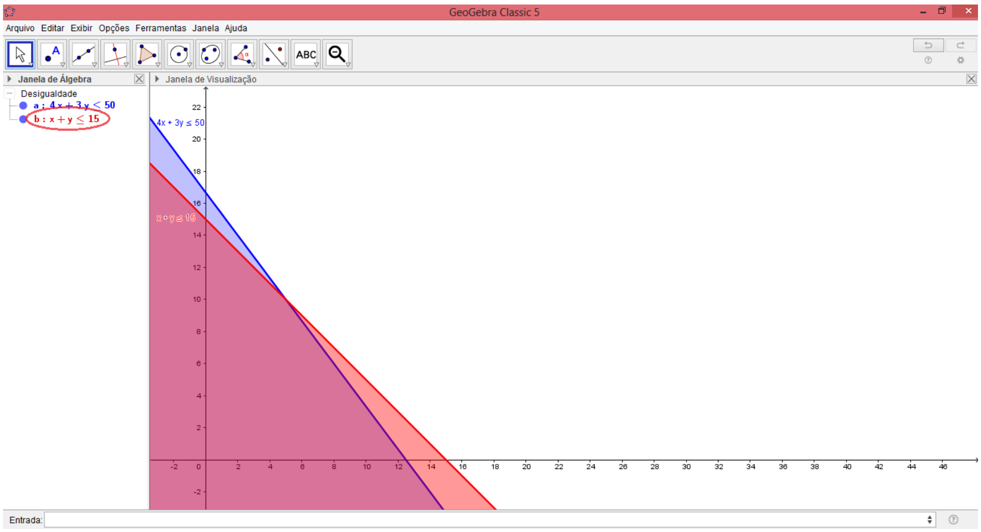
De posse desses dados, podemos orientá-los a inserir, primeiramente, as inequações no *software* GeoGebra (2017), digitando os comandos na barra de entrada e observando as regiões obtidas:

Figura 36 – Gráfico da inequação $4x + 3y \leq 50$



Fonte: Autoria própria, 2018.

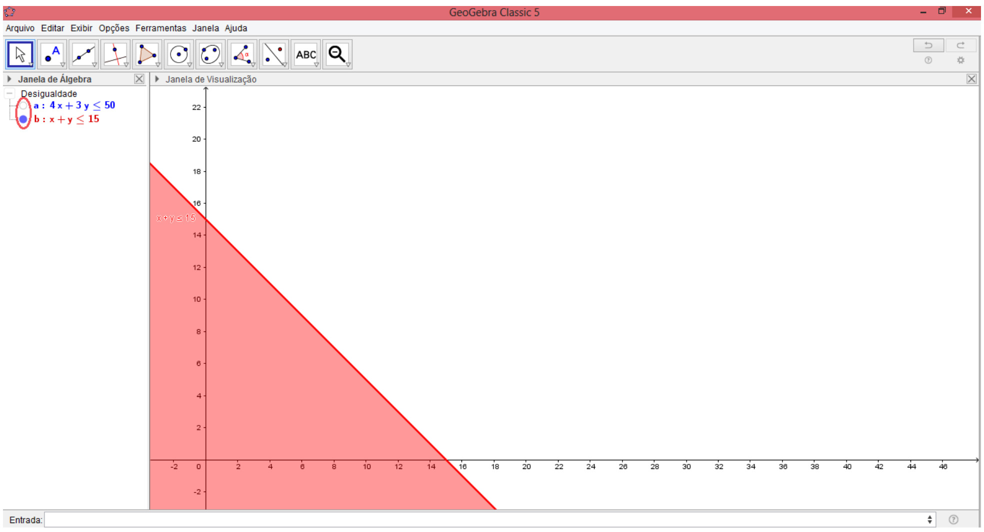
Figura 37 – Gráfico da inequação $x + y \leq 15$



Fonte: Autoria própria, 2018.

Após a inserção da inequação $x + y \leq 15$, basta desmarcar a bolinha azul, correspondente à inequação $4x + 3y \leq 50$, para visualizar apenas uma das inequações, conforme Figura 38.

Figura 38 – Alternar visualização entre as inequações



Fonte: Autoria própria, 2018.

Continuando, observemos como se comporta o gráfico da inequação $y \geq 2$, conforme Figura 39.

Figura 39 – Gráfico da inequação $y \geq 2$

Fonte: Autoria própria, 2018.

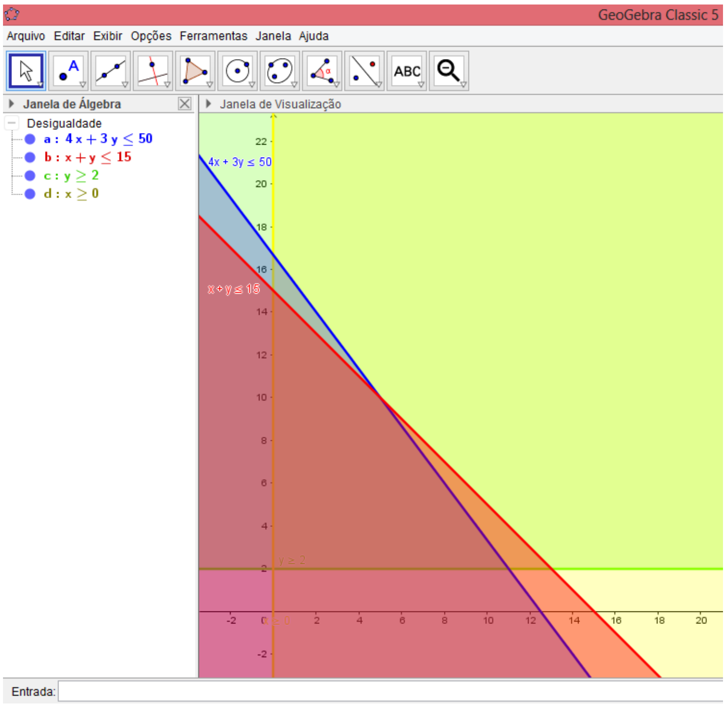
Agora, orientamos os discentes a inserir a inequação $x \geq 0$, como pode ser observado na Figura 40.

Figura 40 – Gráfico da inequação $x \geq 0$

Fonte: Autoria própria, 2018.

Concluída essa etapa, solicitamos aos discentes que visualizem o gráfico de todas as inequações, simultaneamente:

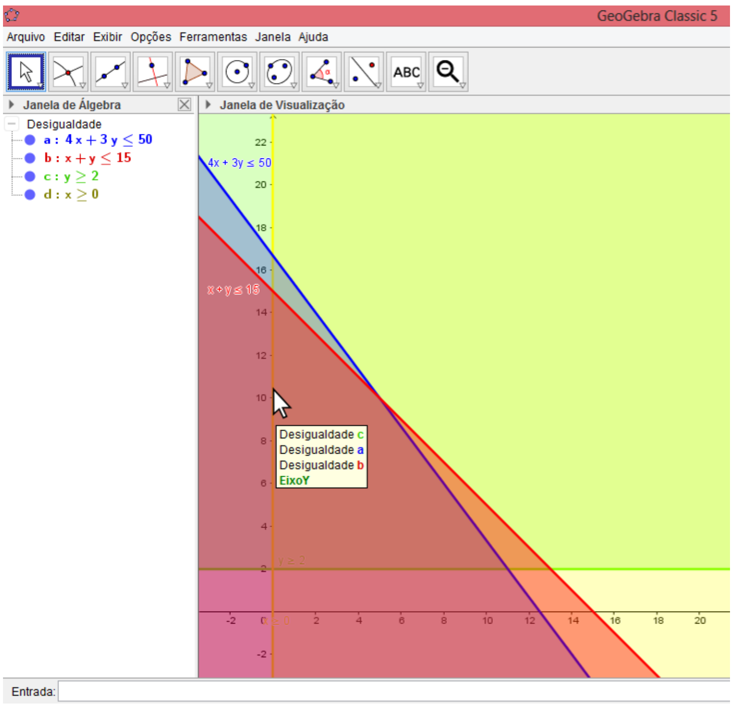
Figura 41 – Gráfico da intersecção das inequações



Fonte: Autoria própria, 2018.

Esse é o momento ideal para que os discentes explorem a intersecção das inequações, movendo o mouse pelas regiões encontradas, como vemos na Figura 42:

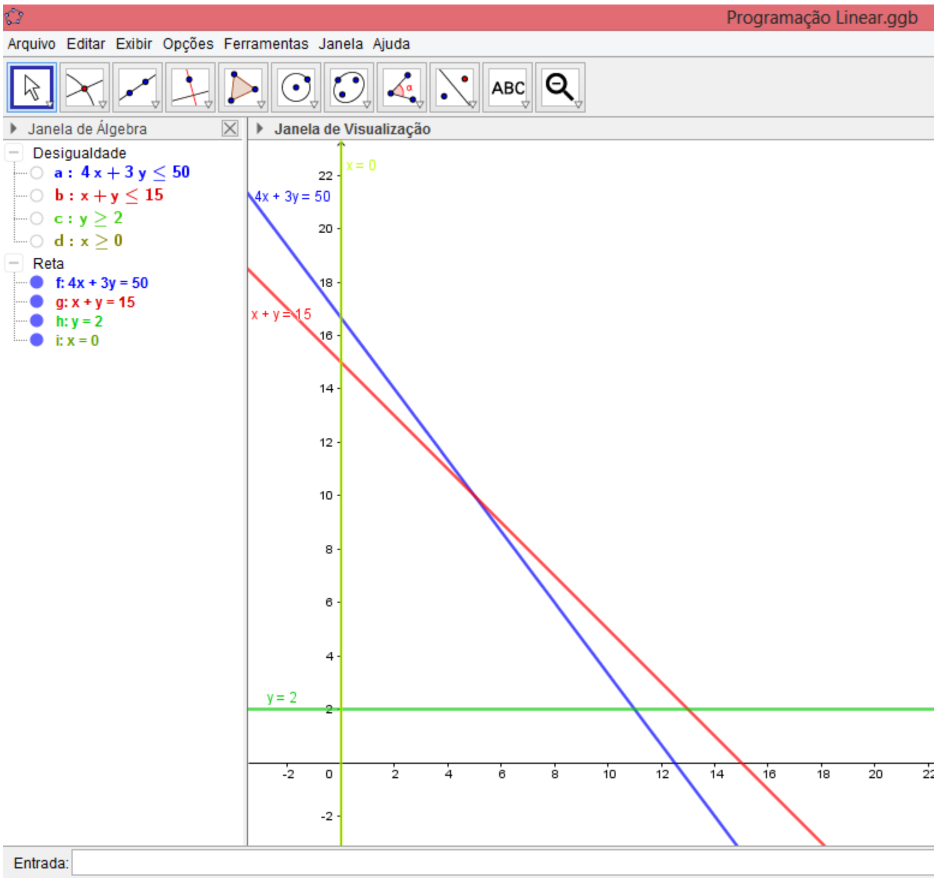
Figura 42 – Explorando a intersecção das inequações



Fonte: Autoria própria, 2018.

Visando facilitar a construção futura do polígono, solicitaremos aos discentes que transformem as inequações inseridas, em equações, e insertem no *software* GeoGebra (2017), conforme Figura 43.

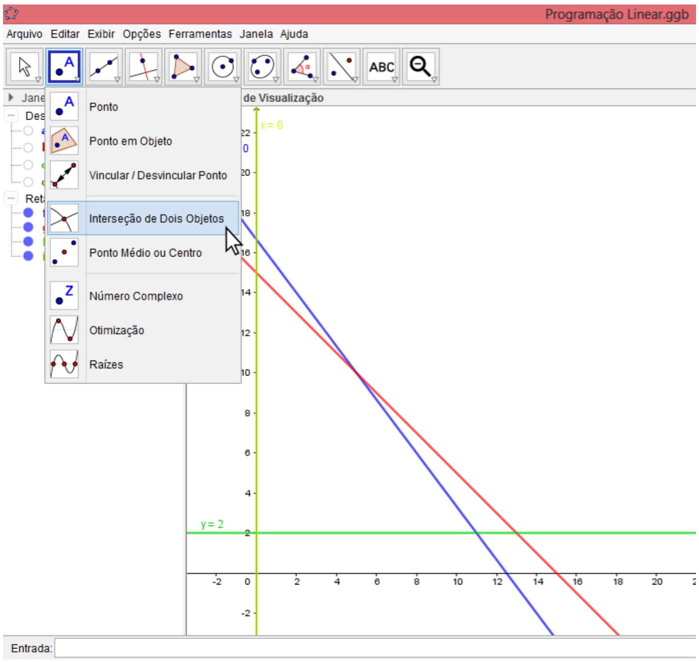
Figura 43 – Inserção das equações



Fonte: Autoria própria, 2018.

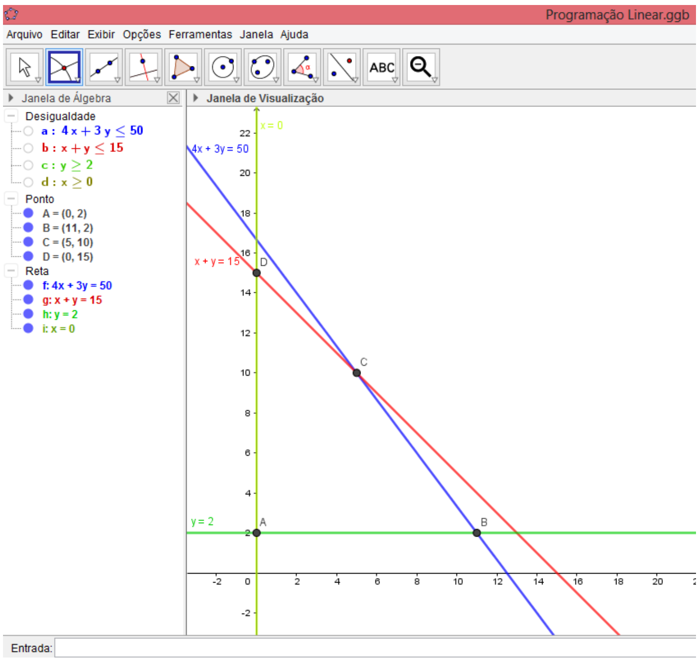
Feito isso, utilizaremos a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" (Figura 44), disponível na 2ª posição do menu, para marcar os pontos de intersecção das retas $4x+3y = 50$, $x + y = 15$, $y = 2$ e $x = 0$, como vemos na Figura 45.

Figura 44 – Ferramenta “Interseção de Dois Objetos”



Fonte: Autoria própria, 2018.

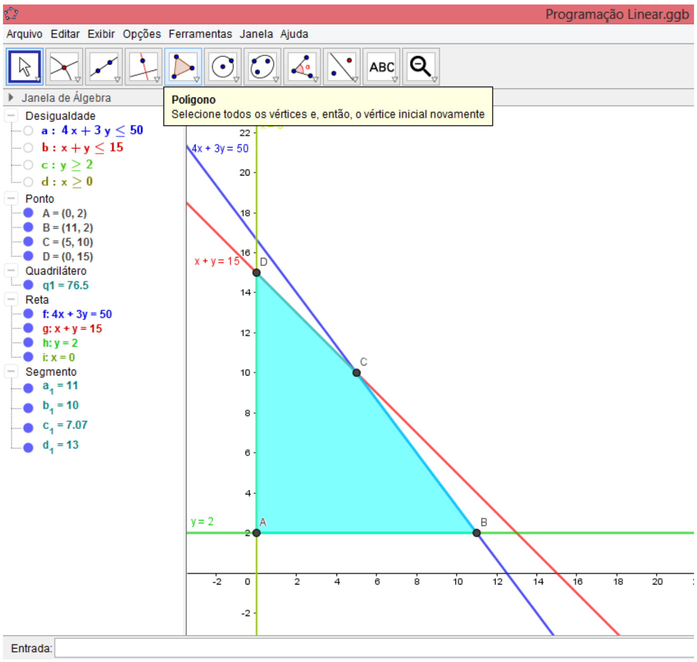
Figura 45 – Intersecção das retas



Fonte: Autoria própria, 2018.

Agora, os discentes podem ser orientados a construir o polígono, utilizando a ferramenta “Polígono”, encontrada na 5ª posição do menu, conforme Figura 46. Nesse ponto, os alunos podem perceber, intuitivamente, que a solução do sistema pertence à região poligonal encontrada. Entretanto, caso não percebam, eles podem ser indagados sobre o significado da região convexa encontrada.

Figura 46 – Polígono que fornece a região viável



Fonte: Autoria própria, 2018.

Uma equação deve receber atenção especial, desse ponto em diante: $P = 5x + 4y$ (Função Objetivo). Solicitaremos que os discentes verifiquem o que ocorre com as retas abaixo, quando atribuímos valores aleatórios crescentes para P, iniciando do zero.

$$0 = 5x + 4y$$

$$8 = 5x + 4y$$

$$15 = 5x + 4y$$

$$20 = 5x + 4y$$

$$25 = 5x + 4y$$

$$30 = 5x + 4y$$

$$35 = 5x + 4y$$

$$40 = 5x + 4y$$

$$45 = 5x + 4y$$

$$50 = 5x + 4y$$

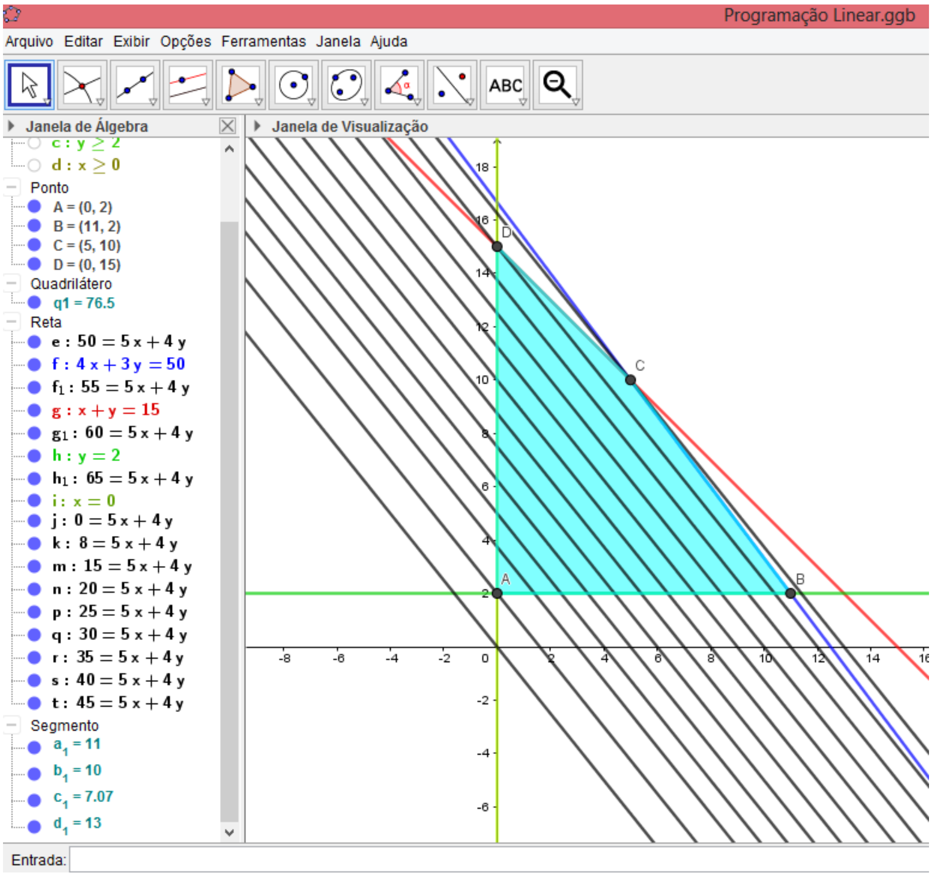
$$55 = 5x + 4y$$

$$60 = 5x + 4y$$

$$65 = 5x + 4y$$

Com exceção da equação $0 = 5x + 4y$, o conjunto de equações acima está representado no plano pelo conjunto de retas paralelas, que cortam o polígono de região viável (Figura 47). Logo, os discentes, intuitivamente, poderão compreender que a reta fora do polígono não pode figurar entre as candidatas à solução.

Figura 47 – Polígono que fornece a região viável



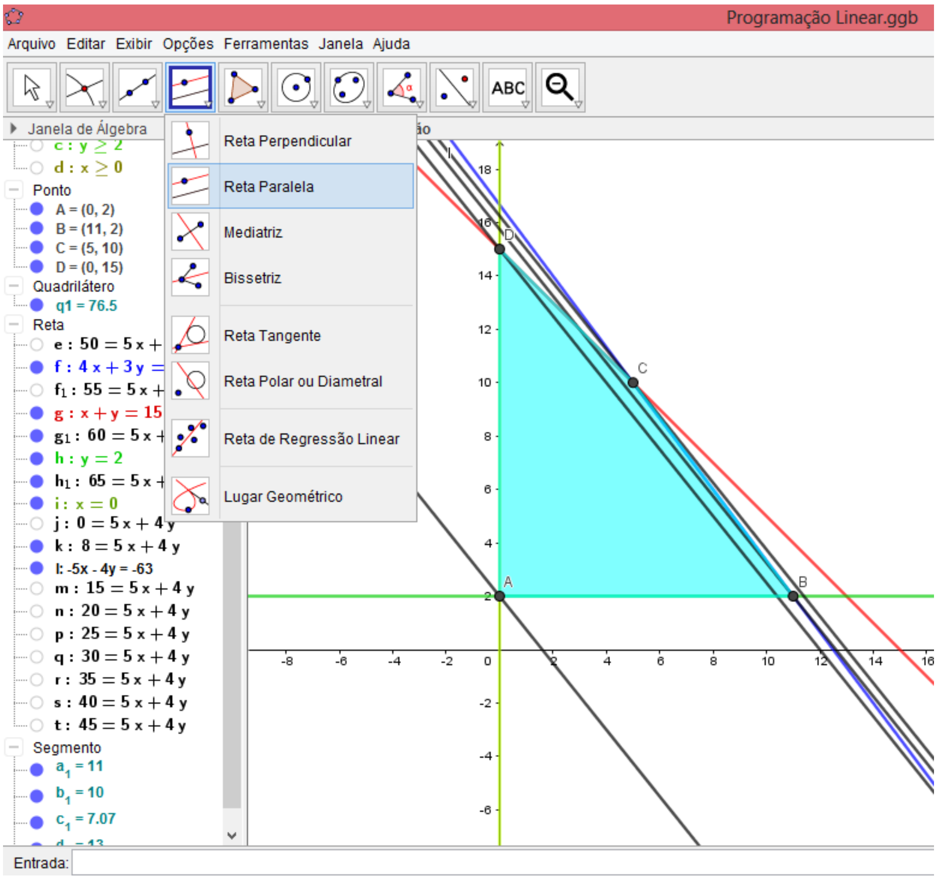
Fonte: Autoria própria, 2018.

Aqui, espera-se que os discentes já poderão compreender a relação existente entre a Função Objetivo e a região viável. Para além, pode-se semear a compreensão do Teorema Fundamental da Programação Linear (2.1), informando-os que a solução de um problema de Programação Linear estará em um dos vértices da região poligonal viável.

Feito isso, podemos explorar outras ferramentas do GeoGebra (2017) para verificar o que ocorre nos vértices do polígono encontrado. Assim, pode-se solicitar que os discentes desmarquem as bolinhas azuis das retas que não passam pelo vértice, verificando-se que o Ponto B não possui intersecção com nenhuma das retas paralelas. Utilizaremos a ferramenta

"Reta Paralela" para construí-la, clicando em alguma das retas da Função Objetivo e, posteriormente no Ponto B, como podemos observar na Figura 48.

Figura 48 – Construindo a reta paralela que passa pelo Ponto B



Fonte: Autoria própria, 2018.

Como podemos observar, todos os vértices do polígono foram interceptados por paralelas, construídas a partir da Função Objetivo $P = 5x + 4y$. Então, o questionamento pode ser apresentado:

Em qual das retas estaria a solução que maximiza os pontos, no problema da "*Corrida Maluca*"?

Pode-se deixar um tempo para que os discentes possam expor as suas opiniões, observando as conjecturas, dúvidas, concordâncias e discordâncias entre si.

Após esse período de tempo, caso nenhum dos alunos justifique corretamente, podemos esclarecer que, **no sentido de crescimento da Função Objetivo**, o ponto que **maximiza** o problema, encontra-se na reta que estiver "**saindo**" da região poligonal, e consequentemente, alcançando seu ponto **máximo**.

Pode-se ainda, solicitar que os alunos identifiquem os pontos dos vértices da região poligonal e construa um quadro, substituindo os pares ordenados encontrados, na Função

Objetivo, como veremos abaixo:

	Pista 1	**Pista 2**	**Máximo de Pontos**
Par Ordenado	Incógnita x	Incógnita y	$P = 5x + 4y$
$(0, 2)$	0	2	8
$(11, 2)$	11	2	63
$(5, 10)$	5	10	65
$(0, 15)$	0	15	60

Logo, obtemos o máximo de pontos quando se percorrem 5 voltas na Pista 1 e 10 voltas na Pista 2.

O docente poderá introduzir o contexto histórico da Programação Linear, realizando um projeto interdisciplinar com docentes de outras áreas do conhecimento, auxiliando os discentes na compreensão dos fatos históricos que contribuíram para o surgimento da Programação Linear.

Como desafio, poderá propor que os discentes elaborem uma animação no GeoGebra (2017), utilizando a ferramenta "Controle Deslizante", de tal maneira que a reta da Função Objetivo percorra todo o polígono, tendo como limite os pontos de máximo e mínimo.

A construção e o resultado encontrado pode ser acessado no *link*:
https://www.youtube.com/watch?v=DZjJMNhbgKg

Situação-problema 2

Após anos de economia, em busca de uma vida mais tranquila João resolve comprar uma pequena fazenda de **45 hectares** para plantar **milho** e **feijão**.

Cada hectare de milho gera um lucro de $R\$200,00$ e cada hectare de feijão retorna $R\$300,00$ de lucro.

João conta com 3 empregados por hectare de milho e 2 empregados por hectare de feijão, podendo contar com 100 empregados, no máximo.

Ele pode contar com 2 toneladas de fertilizantes por hectare de milho e 4 toneladas de fertilizantes por hectare de feijão, podendo utilizar 120 toneladas de fertilizante, no máximo.

Considerando os dados acima, como João pode maximizar seu lucro?

Adaptado de Neto (2010, p.07).

Para uma melhor compreensão do problema e suas restrições modificamos o texto de maneira que os alunos possam interpretar e escrever as equações e inequações lineares sem maiores dificuldades.

Seguindo os passos utilizados na situação-problema 1 os discentes devem determinar os pontos que satisfazem a região viável do PPL, precisando a intersecção das regiões definidas pelas inequações.

Inicialmente, espera-se que os alunos tentem descrever as equações e inequações lineares com um rigor matemático maior do que no problema 1. Em seguida, o docente pode conduzir a socialização dos dados encontrados, descartando os resultados absurdos e conduzindo a discussão num sentido que os auxiliem.

Definindo-se a variável x para o milho e a variável y para o feijão, espera-se que os alunos encontrem os seguintes resultados:

1. $Lucro = 200x + 300y$; (Função Objetivo)

2. $x + y \leq 45$;

3. $3x + 2y \leq 100$;

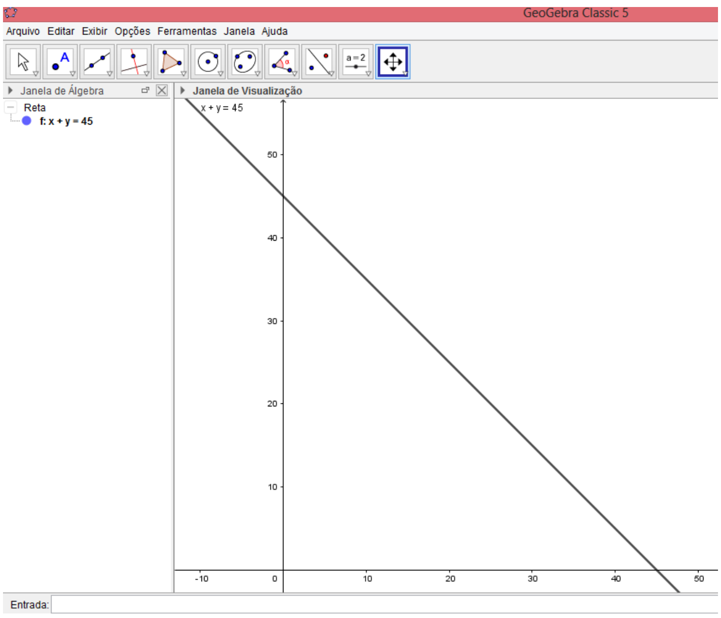
4. $2x + 4y \leq 120$; e ainda,

5. $x \geq 0$;

6. $y \geq 0$;

Uma a uma, as inequações devem ser transformadas em equações, trançando-se as retas encontradas. Posteriormente, identificamos quais dos semiplanos contém um ponto aleatório qualquer. A inequação 2 será transformada na equação $x + y = 45$, apresentando o gráfico abaixo:

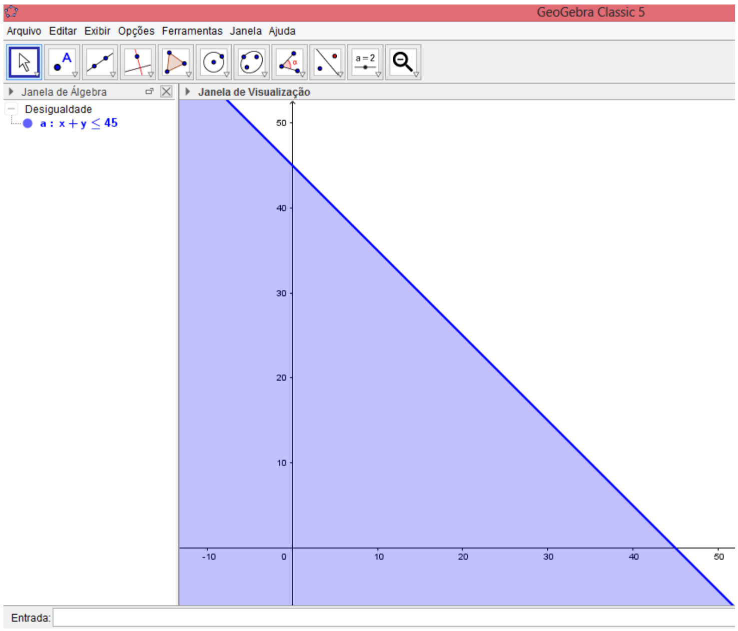
Figura 49 – Gráfico da reta $x + y = 45$



Fonte: Autoria própria, 2018.

Tomando um ponto P=(0,0) vemos que P satisfaz a inequação $x + y \leq 45$, o que significa que o semiplano indicado abaixo compreende os pontos que satisfazem a inequação:

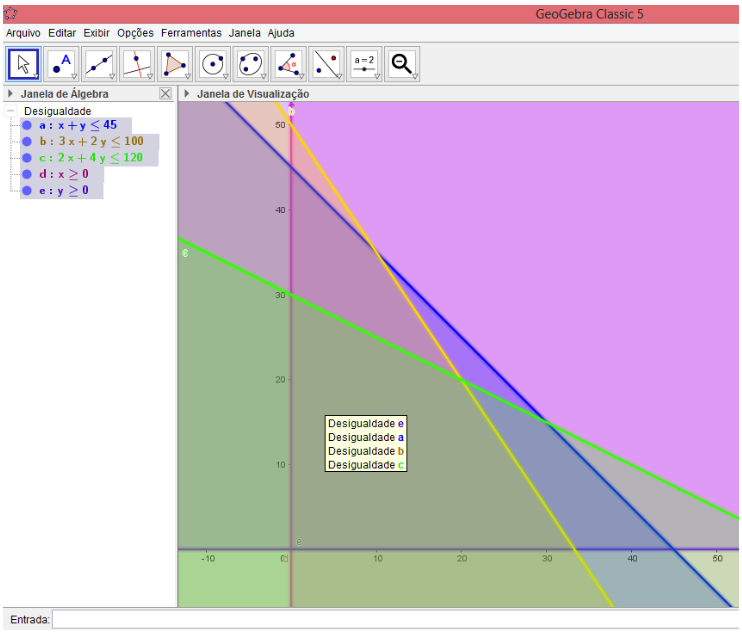
Figura 50 – Semiplano que satisfaz $x + y \leq 45$



Fonte: Autoria própria, 2018.

Repetindo o processo para as inequações restantes encontraremos a seguinte intersecção:

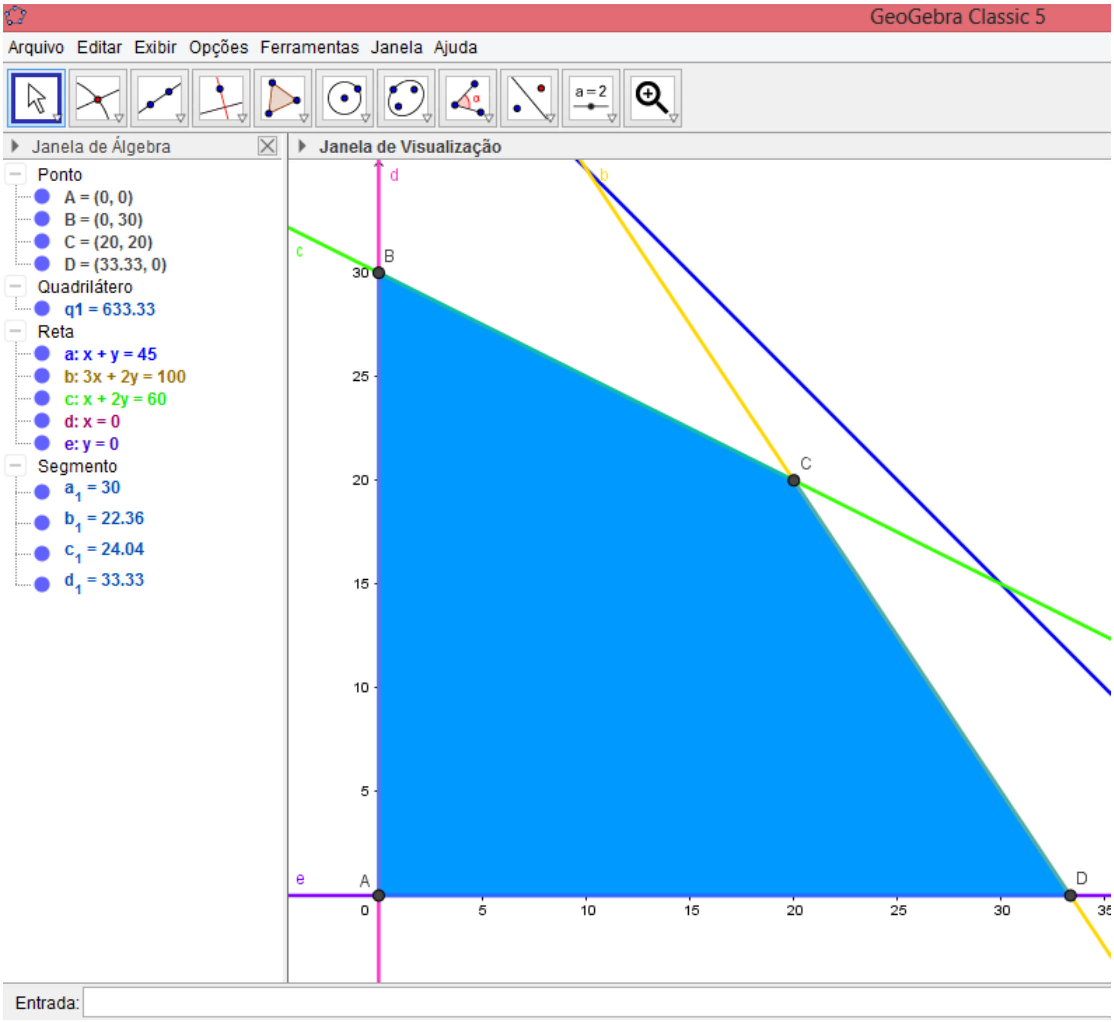
Figura 51 – Semiplano que satisfaz $x + y \leq 45$



Fonte: Autoria própria, 2018.

A intersecção dos planos forma a região poligonal das soluções factíveis, abaixo:

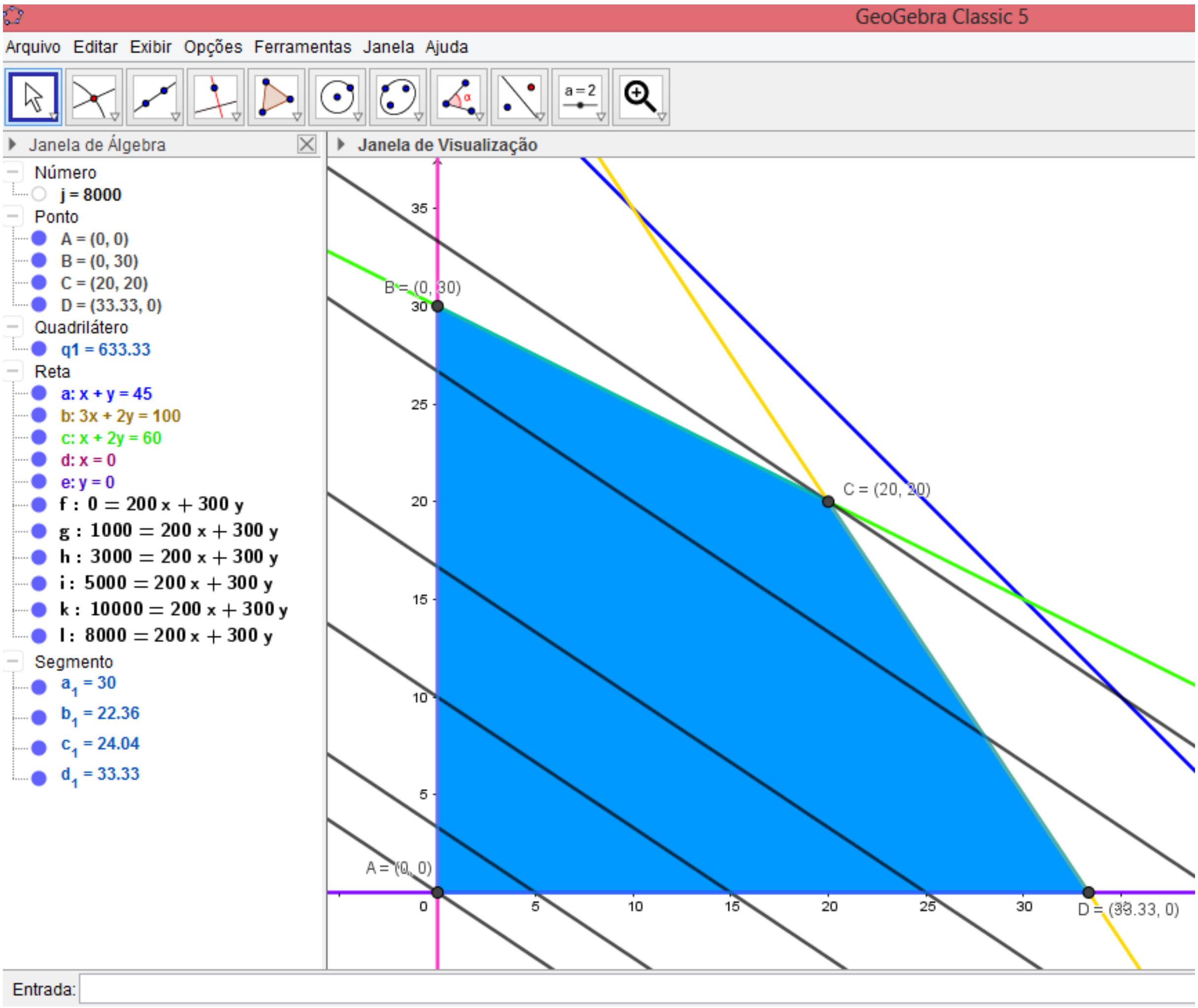
Figura 52 – Polígono formado pela intersecção dos planos.



Fonte: Autoria própria, 2018.

Observando a Função Objetivo $Lucro = 200x + 300y$ e atribuindo-se os valores $0, 1000, 3000, 5000, 8000e10.000$ para o Lucro, obtemos a figura a seguir:

Figura 53 – Curvas de nível da Função Objetivo.



Fonte: Autoria própria, 2018.

Após atribuir valores aleatórios para a Função Objetivo os alunos compreenderão que o valor máximo de x e y encontra-se no último ponto em que a reta $Lucro = 200x + 300y$ toca o polígono da região factível, ou seja, no ponto $C = (20, 20)$.

Logo, para que tenha lucro máximo, João deverá plantar 20 hectares de milho e 20 hectares de feijão.

Situação-problema 3

A empresa Bola Cheia S.A. tem como única atividade a fabricação de bolas, sendo todas elas em couro e fabricadas segundo os processos primordiais. Atualmente fabrica dois produtos, a bola de futebol ChuteFut e a bola de vôlei Tok40. Ambos os produtos são feitos do mesmo material, variando apenas na dimensão, tipo de costuras e rotulagem.

Os recursos que definem a fabricação das bolas são: o corte do couro, o trabalho de costura, a pintura de inscrições na bola e preparação final. Esta última é composta pelas atividades de enchimento, controle de qualidade (inspeção visual, calibração e pesagem) e embalagem.

Os dados fornecidos pela empresa referentes à quantidade de recursos necessários para a produção de cada tipo de bola e as quantidades disponíveis para o dia de amanhã são os indicados na tabela:

Tabela 19 – Dados fornecidos pela empresa.

Recursos	**Unid.**	**ChuteFut**	**Tok40**	**Disponibilidade**
Couro	m^2	0,25	0,3	ilimitada
Linha	m	2,5	4	ilimitada
Câmara de Ar	un	1	1	25
Embalagens	un	1	1	ilimitada
Operação de Corte	min	2	8	ilimitada
Operação de Costura	min	9	25	480
Operação de Logotipagem	min	1,5	1	ilimitada
Operações de Finalização	min	11	6	240

Para a tomada de decisão, a empresa disponibilizou informações a respeito dos valores monetários envolvidos (em *u.m.*) nos seus produtos, apresentados a seguir:

Tabela 20 – Tabela de valores monetários dos produtos.

Bola	**Custo de Produção**	**Preço de Venda**
ChuteFut	26,00	32,50
Tok40	15,00	25,00

Amanhã, como deve ser distribuída a produção de forma a **maximizar** o lucro, tendo em conta os recursos existentes?

Adaptado de (CARDOSO, 2011).

Pode-se orientar os alunos para que definam as variáveis de decisão da seguinte forma:

x_1: número de bolas *ChuteFut* a ser produzido amanhã.
x_2: número de bolas *Tok40* a ser produzido amanhã.

Espera-se que eles modelem o problema apresentando as seguintes hipóteses de linearidade:

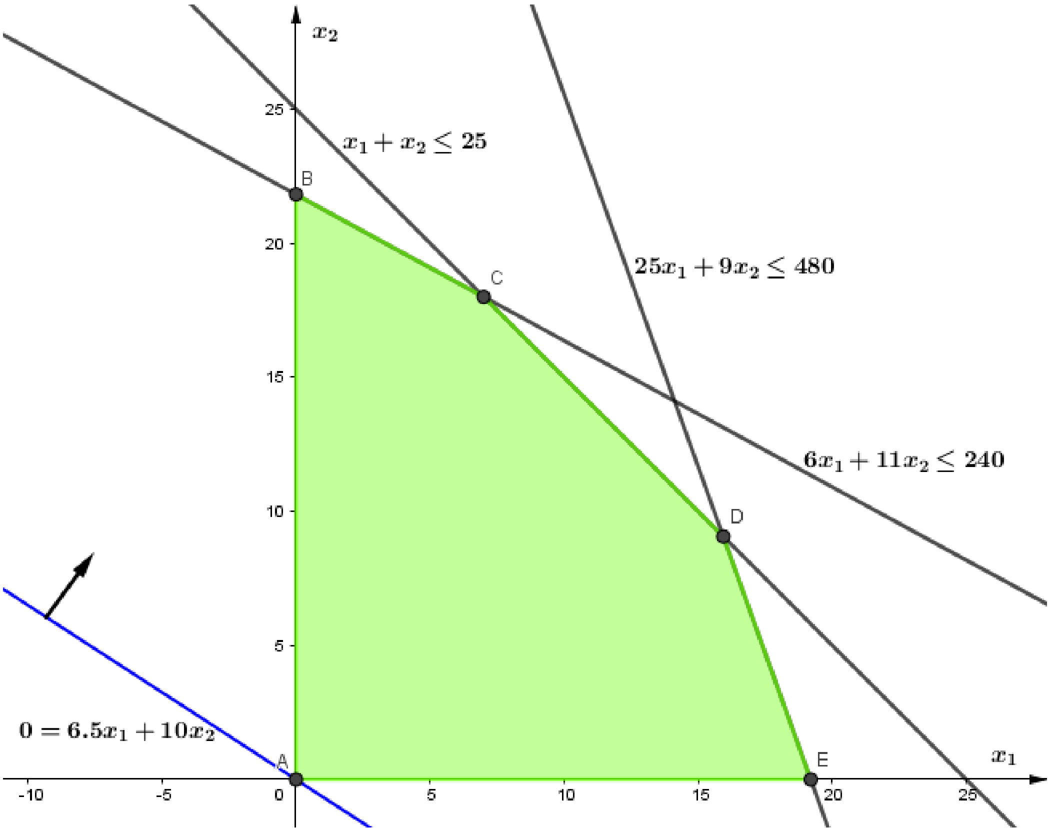
$$Max \qquad z = 6,5x_1 + 10x_2 \qquad \text{(Lucro Total)}$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & \leq & 25 & \text{(Restrição da câmara de ar)} \\ 25x_1 & + & 9x_2 & \leq & 480 & \text{(Restrição de operação de costura)} \\ 6x_1 & + & 11x_2 & \leq & 240 & \text{(Restrição de operações de finalização)} \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \text{(Restrição de não-negatividade)} \end{cases}$$

Solicita-se que insiram as inequações encontradas, formando a RV do PPL, conforme Figura 54 e, em seguida, insiram a função objetivo:

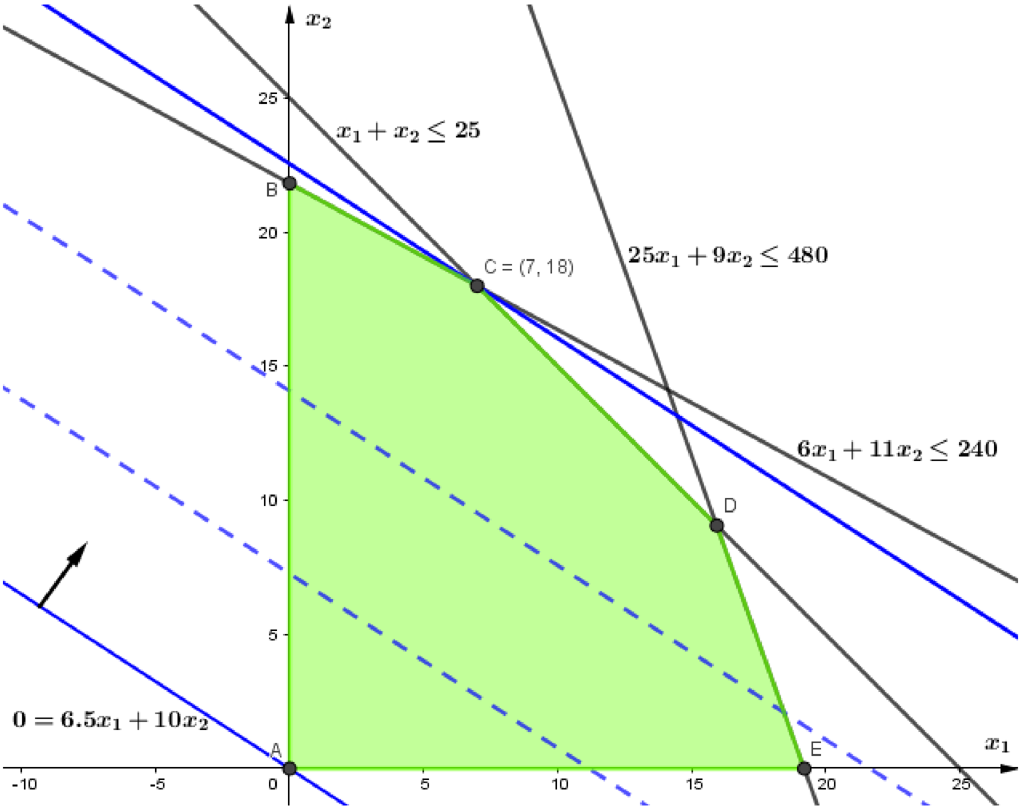
Figura 54 – Região Viável da situação-problema 3.



Fonte: Autoria própria, 2018.

A reta z, em azul, pode ser deslocada, atribuindo-se valores aleatórios partindo do zero, até atingir o vértice C, onde não será mais possível aumentar o valor da função objetivo respeitando todas as restrições do problema. Portanto, C é o ponto onde o valor de z é máximo nas condições do PPL.

Figura 55 – Representação gráfica da solução ótima de $z = 6,5x_1 + 10x_2$.



Fonte: Autoria própria, 2018.

Logo, conclui-se que $x_1 = 7$ e $x_2 = 18$ e, amanhã, deverão ser produzidas 7 bolas *ChuteFut* e 18 bolas *Tok40*, para se obter lucro máximo de \$ 225, 50.

Conclusão

Acreditando que uma das funções do professor pesquisador seja repensar o currículo e a própria docência, este trabalho apresentou uma proposta de resolução de problemas de Programação Linear, voltados para o Ensino Médio, com a utilização do *software* GeoGebra, evidenciando a importância das novas tecnologias para o ensino da Matemática.

Para estudo comparativo foi realizada a análise do Volume 2 da coleção "Matemática: contextos e aplicações", de Dante (2016), sendo constatada a deficiência no uso da informática na Educação Matemática. Foi possível perceber como a Programação Linear é abordada nos livros didáticos utilizados por alunos e professores da rede pública de ensino, propondo uma metodologia que possa ser aplicada por professores do Ensino Médio.

A resolução dos problemas de Programação Linear com o uso do GeoGebra proporciona aos alunos a compreensão dos conteúdos básicos possibilitando envolvimento dos docentes e discentes no processo educativo, contextualizando conteúdos estudados, demonstrando que a Programação Linear não está dissociada de outros conteúdos da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Ao contrário, possibilita a interação entre docentes das mais variadas áreas, favorecendo a elaboração de projetos que envolvam toda a comunidade escolar.

Quanto a trabalhos futuros, recomendamos a resolução de problemas de Programação Linear pelo método gráfico, no espaço $\Re^3$. Para tanto, recomenda-se o uso de um *software* gráfico que facilite a compreensão do comportamento das equações e inequações lineares.

Referências

BIEZUNER, R. J. *Sistemas Lineares*. Belo Horizonte, MG - Brasil: [s.n.], 2008. Disponível em: <http://.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/sistemas_lineares.pdf>. [Acesso em: 19-12-2017]. Citado na página 27.

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra linear*. [S.l.]: Harper & Row, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 24.

BREGALDA, P. F.; OLIVEIRA, A. A. F. de; BORNSTEIN, C. T. *Introdução à programação linear*. [S.l.]: Campus, 1988. Citado na página 45.

CAMARGO, R. S. S. et al. *Introdução à programação linear no Ensino Médio utilizando a resolução gráfica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amazonas, 2014. Citado na página 75.

CARDOSO, A. *Fundamentos da Pesquisa Operacional*. Alfenas, MG - Brasil: [s.n.], 2011. Disponível em: <http://www.unifal-mg.edu.br/matematica/files/file/po.pdf>. [Acesso em: 03-11-2017]. Citado 4 vezes nas páginas 18, 55, 56 e 98.

COMMANDINO, F. Euclides-elementos de geometria. *São Paulo: Edições Cultura*, 1944. Citado na página 18.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. *São Paulo: Ática*, v. 2, 2016. Citado 7 vezes nas páginas 17, 76, 77, 78, 79, 80 e 101.

DANTZIG, G. B. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. *New York*, 1951. Citado na página 42.

FERREIRA, B. d. S. *Problemas de máximos e mínimos*. Dissertação (Mestrado Matemática para Professores) — Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012. Citado na página 19.

FIANI, R. *Teoria dos jogos: para cursos de Administração e Economia*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2006. Citado na página 19.

GEOGEBRA, S. do. Disponível em:< https://www. geogebra. org/>. *Acesso em*, 07.12., 2017. Citado 12 vezes nas páginas 7, 17, 73, 74, 75, 81, 82, 83, 84, 88, 91 e 93.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. [S.l.]: Elsevier, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 36, 39, 40 e 43.

HERMES, A. P.; PEREIRA, J. C. P. Máximos e mínimos na geometria euclidiana: uma abordagem histórica. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, p. 1–17, 2013. Citado na página 19.

IGNÁCIO, B. A. F. *Desenvolvimento de um modelo de programação linear para apoio à tomada de decisão em uma cadeia de suprimentos*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia Mecânica, Centro Universitário da FEI, São Bernardo do Campo, 2009. Citado na página 42.

KANTOROVICH, L. Mathematical methods for production planning and organization. *Leningrad University (LGU), Leningrad*, 1939. Citado na página 20.

KOLMAN, B. *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações, sexta edição*. [S.l.: s.n.], 1998. Citado na página 21.

LISBOA, E. F. A. Pesquisa operacional. *Apostila da disciplina. Rio de Janeiro–RJ*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 45.

MARTINS, T. V. *Programação linear na escola básica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 17, 75 e 83.

MELO, J. N. B. *Uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012. Citado na página 16.

NETO, L. L. S. Pesquisa operacional no ensino médio. *Synergismus scyentifica UTFPR*, v. 4, n. 2, 2010. Citado na página 93.

OETIKER, T. et al. Uma não tão pequena introdução ao latex2ε. *Tradução portuguesa por*, 1995. Citado na página 17.

PAIVA, S. M. d. A. *A programação linear no ensino secundário*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Portucalense Infante D. Henrique, 2008. Citado na página 75.

PASSOS, A. N. d. *Estudos em Programação Linear*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

PINHEIRO, L. d. S. et al. *Programação Linear: uma proposta de abordagem no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, 2016. Citado na página 74.

PNLD, S. M. Disponível em:< http://www.fnde.gov.br/pnld-2018/ >. *Acesso em*, 13.03., 2018. Citado na página 76.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. *Tradução e Adaptação: Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro*, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 74.

PUCCINI, A. d. L. *Introdução à programação linear*. [S.l.]: LTC, 1980. Citado na página 36.

RAFAEL, A. O. D. N. *Programação linear e algumas extensões*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP), 2014. Citado na página 41.

RIBAS, C. C. G. B. *Programação linear: abordagem para ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. Citado na página 74.

SILVA, K. *Modelagem Matemática com Programação Linear: Uma proposta de trabalho no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2013. Citado na página 79.

VASCONCELOS, E. S. *Constribuições dos métodos simplex e das resoluções gráficas à aprendizagem da álgebra linear no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal de Goiás, 2013. Citado na página 55.

ZACHI, J. M. *Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o ensino médio com o uso do GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016. Citado 4 vezes nas páginas 28, 33, 46 e 74.