Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

João Batista Santos Prado

Os infinitésimos: suas origens e a análise não-standard

Vitória da Conquista

2018

João Batista Santos Prado

Os infinitésimos: suas origens e a análise não-standard

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Campus de Vitória da Conquista, para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Sérgio Da Silva Aguiar.

Vitória da Conquista
2018

João Batista Santos Prado

Os infinitésimos: suas origens e a análise não-standard

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

Trabalho aprovado. Vitória da Conquista, _____/ _____/ 2018.

Componentes da banca examinadora:

Prof. Dr. Sérgio Da Silva Aguiar
orientador

Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira
2º membro

Prof. Dr. Júlio César Dos Reis
3º membro

Vitória da Conquista
2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, criador de todas as coisas visíveis e invisíveis.

Aos meus familiares, pelo apoio e incentivo durante o período da graduação.

Ao Professor Doutor Sérgio Da Silva Aguiar por ter aceito me orientar neste trabalho.

Aos membros da Banca Examinadora Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira e Prof. Dr. Júlio César Dos Reis, pela leitura e correção dos erros do meu trabalho.

À professora Ana Paula Perovano pela contribuição dada a este trabalho.

À UESB, pelo acolhimento e por me proporcionar condições para a obtenção deste título.

À CAPES e ao PRAE, pelo apoio financeiro.

Aos colegas da turma de 2014.1, pela amizade e pelo convívio maravilhoso que tivemos durante o período da graduação.

Aos meus amigos Lucas Amorim e Velton Pires por terem me ajudado com os problemas técnicos que são comuns a este editor de texto.

Resumo

Este trabalho tem por finalidade mostrar um pouco da riquíssima e ao mesmo tempo conturbada trajetória dos infinitésimos no cenário da matemática. Além disso, apresentaremos a construção do *conjunto dos números hiper-reais*, uma extensão não-arquimediana de $\mathbb{R}$ que nos permite operar normalmente com números infinitos e infinitesimais. Este novo conjunto, idealizado por Robinson era a fundamentação que faltara a Leibniz e Newton no tratamento com as quantidades infinitesimais. Por fim, mostraremos algumas aplicações dos números hiper-reais na Análise Real e no Cálculo. Estas aplicações nos possibilita encarar alguns aspectos da Análise Real pautados no uso dos infinitésimos, criando assim uma Análise Não-Standard. O Cálculo, poderá nesta perspectiva ser encarado sem o uso da teoria de limites, ou seja, sem $\varepsilon' s$ e $\delta' s$. Com isso, veremos que várias demonstrações em análise poderão ser feitas de modo mais intuitivo e menos trabalhoso.

Palavras-chave: análise real; análise não-standard; infinitésimos; números hiper-reais.

Abstract

This work aims to show some of the rich and at the same time troubled trajectory of the infinitesimals in the mathematical scenario. In addition, we will present the construction of the *set of hyper-real numbers*, a non-archimedean extension of $\mathbb{R}$ that allows us operate normally with infinite and infinitesimal numbers. This new set, idealized by Robinson was the reasoning that Leibniz and Newton lacked in the treatment of quantities infinitesimals. Finally, we will show some applications of the hyper-real numbers in the Real and Calculus. These applications allow us to face some aspects of the Real Analysis based on the use of infinitesimals, thus creating a Non-Standard Analysis. The Calculation may in this perspective be considered without the use of boundary theory, that is, without $\varepsilon' s$ and $\delta' s$. With this, we will see that several demonstrations under analysis can be made more intuitively and less laborious.

Keywords: real analysis; non-standard analysis; infinitesimal; hyper-real numbers.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, iremos apresentar um pouco da trajetória dos infinitésimos no universo matemático que se inicia no século V a. C. na Grécia Antiga, com os filósofos atomistas Leucipo de Mileto (viveu no século V a. C., mas não se sabe o período de vida) e seu discípulo Demócrito de Abdera (460-370 a. C.). No entanto, os matemáticos gregos da época não aceitavam a existência de números infinitos e infinitesimais assim, o filósofo Zenão de Eléia (495-430 a. C.) embasados por seus famosos paradoxos e com o apoio da escola filosófica dos eleáticos, da qual fazia parte, tratou de excluir essas magnitudes do contexto matemático. As *quantidades* (ou *magnitudes*) infinitesimais, podem ser interpretadas como *"números" indefinidamente pequenos menores do que qualquer número real*. As magnitudes infinitas é a recíproca desta afirmação.

Por volta de onze séculos depois, estas magnitudes são novamente inseridas na matemática devido a pesquisadores como Johannes Kepler (1571-1630), Galileu Galilei (1564-1642) e Evangelista Torricelli (1608-1647). Estes cientistas, conseguiram avanços importantes tanto na física quanto na matemática utilizando, intuitivamente, técnicas infinitesimais. Porém, foi com os trabalhos de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que os infinitésimos ganharam notoriedade, mesmo não tendo conseguido apresentar uma formalização rigorosa para esses números e por esta razão foram duramente criticados. Leibniz e seus seguidores travaram, na Academia Real de Ciências de Paris, fervorosos debates a respeito da existência dos infinitesimais. Já Newton tinha como grande opositor George Berkeley (1685-1753) um bispo anglicano que escreveu importantes obras sobre as inconsistências destas magnitudes. Deste modo, os infinitésimos foram novamente banidos da matemática.

Em meados do século XX o matemático Abraham Robinson (1918-1974) cria a Análise Não-Standard (ANS) e introduz mais uma vez os infinitésimos no cenário matemático. Para a construção desta nova análise Robinson, com base na *teoria de modelos*, amplia o sistema numérico real criando o *conjunto dos números hiper-reais* que denotaremos por $^{\star}\mathbb{R}$. Foi mediante este conjunto que Robinson conseguiu apresentar uma formalização rigorosa para os números infinitos e infinitesimais, inserindo-os definitivamente na história da matemática.

O conjunto numérico $^{\star}\mathbb{R}$ constitui uma extensão não arquimediana de $\mathbb{R}$, dando-nos a possibilidade de reescrever toda a Análise Real e também o Cálculo pautados nos números hiper-reais. Mostraremos algumas demonstrações de teoremas clássicos de análise e do cálculo utilizando apenas métodos não-standard e também como calcular limite e derivada usando a noção, agora bem fundamentada, de número infinito e infinitesimal. Finalizaremos este trabalho com alguns resultados importantes obtidos pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783) que empregou, de forma intuitiva, os infinitesimais em suas pesquisas e apresentaremos de um jeito bastante inovador o cálculo do $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

No primeiro capítulo, iremos fazer um breve relato sobre os 25 séculos de história dos infinitesimais no cenário matemático que teve início no século V a. C com o apoio dos atomistas porém foram expulsos do contexto matemático pelos eleáticos. Tais magnitudes ressurgem nos séculos XVI, XVII e XVIII, sendo essenciais para o desenvolvimento de obras importantes como *Method of fluxiones* e *Nova methodus pro maximus et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* de Newton e Leibniz respectivamente. Com o surgimento da teoria de limites, no século XIX, os infinitésimos são novamente expulsos da matemática. No entanto, em meados do século XX, Robinson cria o conjunto dos números hiper-reais e apresenta uma formalização para as quantidades infinitesimais. No segundo capítulo, apresentaremos a construção deste conjunto mediante classes de equivalência e a noção de filtro. Por fim, no terceiro e último capítulo mostraremos algumas aplicações dos números hiper-reais no Cálculo e na Análise Real.

1 Os infinitésimos na História do Cálculo

Este capítulo foi fundamentado no artigo: Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente, escrito por Tadeu Fernandes de Carvalho e Itala Maria Loffredo D'Ottaviano (2006) e no livro Métodos Infinitesimais de Análise Matemática de José J. M. Sousa Pinto (2000).

1.1 Os infinitésimos e a Grécia Antiga

A primeira aparição dos infinitésimos na matemática ocorreu por volta do século V a. C. na Grécia Antiga, tendo os filósofos Leucipo e Demócrito como os primeiros a defender a existência dessas magnitudes. Estes filósofos foram os criadores da doutrina atômica que se fundamenta na divisibilidade da matéria, do tempo e do espaço, mostrando uma certa ligação com a noção de quantidade infinitesimal. Além disso, os problemas matemáticos que mais interessavam a Leucipo e seus seguidores eram aqueles que careciam de um tratamento infinitesimal.

Segundo Brolezzi (1999), Demócrito foi o primeiro matemático grego a determinar o volume da pirâmide e do cone como conhecemos hoje. É verdade que os egípcios já sabiam calcular o volume da pirâmide de base quadrada, mas coube a Demócrito uma generalização para pirâmides de base poligonal qualquer. Demócrito foi quem primeiro falou sobre *infinitesimais* ao cogitar o uso de lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones, antevendo-se as ideias de Cavalieri.

A doutrina dos eleáticos foi outra importante escola filosófica, contrariando as ideias atomistas, que contava com o apoio de filósofos como Parmênides de Eléia (530-460 a. C.), seu fundador, e Zenão de Eléia. Na opinião de Carvalho e D'Ottaviano (2006), esta escola tinha como grande marca a crença na *unicidade* e na *indivisibilidade* das entidades *verdadeiras* e *reais*, isto é, pela crença na *continuidade* e *homogeneidade* do espaço, do ser e de seus constituintes.

O primeiro grande ataque sofrido pelos infinitésimos é atribuído a Zenão que se apoiou em seus próprios paradoxos. Melchiors e Soares (2013) citando Eves apresentam dois desses paradoxos:

> *A Dicotomia:* Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, e antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, ad inifinitum. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.
>
> *A Flecha:* Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isto verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move.

Sampaio (2008) citando Boyer traz as ideias do mesmo que afirma “a Dicotomia argumenta que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo”. Desde modo, Zenão argumentava que o movimento de um corpo era impossível do ponto de vista da divisão infinita.

Por meio do paradoxo da flecha, percebemos a inviabilidade de movimento ao considerarmos que o espaço e o tempo são constituídos por indivisíveis. Para Zenão, tal movimento é ilusório já que a flecha não se move. Sampaio (2008) cita novamente Boyer que argumenta “a Flecha [Seta] e o Estádio,[1] de outro lado, argumentam que também é impossível, sob a hipótese contrária — de que a subdivisibilidade do tempo e do espaço termina em indivisíveis”.

Sampaio (2008) menciona Struik que relata, “os argumentos de Zenão começaram a preocupar ainda mais os matemáticos, depois de terem sido descobertos os irracionais”. Na visão de Sampaio (2008) os pitagóricos, discípulos de Pitágoras de Samos (580-500 a. C.), por volta do século V a. C. perceberam não ser possível determinar a razão entre o lado e a diagonal de um quadrado usando apenas números racionais. Essas novas medidas não eram vistas como números e sim grandezas, sendo chamadas de incomensuráveis.

Zenão e seus apoiadores pretendiam reduzir os infinitesimais a algo irrelevante ou até mesmo a delírios matemático-filosóficos, já que essas magnitudes, na época, apresentavam muitas inconsistências.

Na perspectiva de Carvalho e D’Ottaviano (2006), a ideia de *infinitésimo* está atrelada com as propriedades do *contínuo*,[2] como relata a matemática dos pitagóricos e a doutrina atomista de Demócrito. Porém, é em trabalhos de Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.) e Arquimedes de Siracusa (287-212 a. C.) que os infinitésimos são abordados de forma mais clara e ligados as propriedades do cálculo (CARVALHO e D’OTTAVIANO (2006) recomendam as leituras de Boyer, 1974; Lintz, 1999).

Carvalho e D’Ottaviano (2006) acreditam ser com base no lema

> *Se de uma grandeza qualquer se subtrair uma parte não menor do que sua metade, e do resto se subtrair não menos do que sua metade, e assim se prosseguir, restará ao final, uma grandeza menor do que qualquer grandeza da mesma espécie*,

que Eudoxo estabelece o *método da exaustão*, assim denominado por Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667) em 1647, mostrando por meio do mesmo ser possível trabalhar de forma finita e precisa no cálculo de comprimentos, áreas e volumes. Arquimedes aproximadamente um século mais tarde, ao utilizá-lo no tratado *O método* antecipa-se às ideias fundamentais da teoria de limites, diferenciação e integração, que seriam desenvolvidas, somente, no final do século XVII (CARVALHO e D’OTTAVIANO (2006) convidam a leitura de Arquimedes, 1950).

[1] Antiga medida de distância grega, equivalente a 125 pés geométricos, ou seja, 206,25 m.

[2] Referimo-nos, aqui, ao *contínuo matemático*, embora a noção de infinitésimo, ou quantidade infinitesimal, possa igualmente ser associada ao *contínuo físico* relativo ao espaço, tempo e movimento.

Para Sampaio (2008), Platão (429-348 a. C.) mostra por meio de seus famosos diálogos que os matemáticos gregos ficaram extremamente incomodados com a ideia de infinito. A escola platônica, para fugir dos *infinitesimais*, utiliza o método da exaustão, bastante rigoroso, nas demonstrações de cálculos de áreas e volumes, envolvendo apenas o uso da lógica formal. Vale ressaltar que para poder aplicar este método precisava-se conhecer o resultado previamente.

A obra de Brolezzi (1999), relata que o lema de Eudoxo, além de afastar o *infinitesimal* das demonstrações geométricas dos gregos nos permite raciocinar de forma clara e intuitiva, pois Eudoxo não sugere "ir até o infinito" para poder atingir o limite, no entanto, alega ser possível chegar a uma grandeza tão pequena quanto se queira. Para ele o que diferencia o método da exaustão da teoria de limites é a falta de compreensão, por parte dos gregos, sobre o infinito e também sobre o *contínuo* aritmético. Essas ideias possuem o mesmo tipo de argumentação, o que nos leva a pensar que os gregos possam ter conjecturado a noção de limite como relata Aristóteles no seguinte fragmento:

> *Minha teoria não tira nada às considerações dos matemáticos, ao suprimir o infinito que existiria em ato segundo o acréscimo infinito, que não se poderia recorrer: pois os matemáticos não necessitam realmente do infinito e não o utilizam; só necessitam de uma magnitude finita que escolhem tão grande quanto queiram.* (ARISTÓTELES, 1979.,523 p., p. 57, grifo do autor).

Os paradoxos de Zenão aliados ao método da exaustão de Eudoxo expulsaram os infinitesimais da Matemática grega.

1.2 Os infinitésimos e os séculos XVI, XVII e XVIII

Depois de um longo período de inatividade os infinitésimos são incorporados à matemática em meados do séculos XVI, e segundo Carvalho e D'Ottaviano (2006) esse retorno só foi possível graças a pesquisadores como Johannes Kepler, Galileu Galilei e do seu discípulos e sucessor na Universidade de Pisa, Evangelista Torricelli que aplicaram, com relativo sucesso e rigor, o método infinitesimal à física e à matemática (CARVALHO e D'OTTAVIANO (2006) sugerem que vejamos Torricelli, 1644)

Carvalho e D'Ottaviano (2006) citando Kepler, que utiliza transformações geométricas e métodos infinitesimais no cálculo do volume de vários sólidos de revolução, em particular, no cálculo do volume de tonéis de vinho.

Carvalho e D'Ottaviano (2006) apontam obras de Galileu, que emprega propriedades dos infinitésimos no estudo de problemas da mecânica e da dinâmica, como no movimento de projéteis e na queda livre de corpos. Um dos resultados alcançados afirma que "a área delimitada por uma curva dada pela velocidade de um móvel em função do tempo é a distância percorrida pelo mesmo, no intervalo de tempo considerado". Nesse trabalho é discutida a existência de objetos compostos por *partículas minúsculas de dimensões infinitesimais*, unidas entre si por uma infinidade de *pequenos vazios*, o que configura uma espécie de "atomismo matemático". Galileu é quem aborda pela primeira vez o termo *indivisível*, no entanto, o uso mais amplo ocorre com Bonaventura Cavalieri (1598-1647) que desenvolve, mesclando o método da exaustão e o método infinitesimal de Kepler, um novo procedimento para o cálculo geométrico de áreas e de volumes, pelo qual pode ser considerado um dos mais representativos precursores do cálculo diferencial e integral. Tais autores citam Torricelli, que apresenta de forma pioneira os conceitos de derivada e de integral e esclarece aspectos obscuros da obra de Cavalieri

De acordo com Carvalho e D'Ottaviano (2006), dentre os percursores do cálculo diferencial e integral, merece destaque, René Descartes (1596-1650), Pierre Simon de Fermat (1601-1655), Isaac Barrow (1630-1677) e John Wallis (1616-1703). Contudo, a paternidade do cálculo é compartilhada entre Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

Antes que o cálculo diferencial e integral fosse implementado, obras importantes desses cientistas já haviam sido usadas tanto por Newton quanto Leibniz na tentativa de formalizar o cálculo com uso dos infinitésimos.

Na opinião de Carvalho e D'Ottaviano (2006), Newton utiliza de intuições geométricas mescladas com elementos da então aprimorada linguagem algébrica para atribuir uma consistência lógica e formal ao seu cálculo infinitesimal, construído mediante à criação de um sistema natural que se apoia em leis naturais universais. Para tanto, melhorou o uso do conceito cinemático de infinitésimo de Barrow e Fermat – os "momentary increments" (momentos) –, todavia não conseguiu evitar as inconsistências originadas pelos mesmos, por se tratarem de quantidades não-finitas e não-nulas. Acredita-se que Newton tenha tido a ideia incompleta das propriedades, do que viria a ser a teoria de limites, satisfatória, na sua visão, para propiciar a divisão por "momentos", ignorando-os na sequência das operações, como se fossem nulos. Newton não conseguia explicar de modo convincente tais resultados, sujeitando-se às críticas daqueles que acreditaram ter ocorrido, no desenrolar das operações, a divisão por zero.

Ainda segundo Carvalho e D'Ottaviano (2006), a primeira tentativa de formalização do cálculo não deu muito certo, então Newton apresenta uma nova abordagem em seu trabalho *Method of fluxiones*, esclarecendo que suas variáveis quantitativas são originadas pelo movimento e define as entidades como *fluxões* e *fluentes*. As quantidades infinitesimais são estudadas cinematicamente, com isso as variações infinitesimais da variável *tempo* tornam-se parte do processo que gera magnitudes geométricas. As quantidades variáveis x são chamadas *fluentes* e a ideia de *derivada* é obtido a partir da noção de *fluxão* (denotada por $\dot{x}$): $\dot{x}$ é a fluxão do fluente x, $\ddot{x}$ é a fluxão do fluente $\dot{x}$ e assim sucessivamente, inversamente, $\acute{x}$ é o fluente do qual x é a fluxão. O *momento* de um fluente x é determinado como o acréscimo ocorrido em x num período muitíssimo pequeno (0) de tempo, indicado por $\dot{x}0$ (ou $0\dot{x}$).

Com o conceito de fluxão e fluente, Newton dá início a dois problemas clássicos do cálculo. O primeiro consiste em localizar a fluxão associada a fluentes dados, apoiando-se em relações existentes entre os mesmos, dando origem ao processo de *diferenciação* do cálculo usual. Já o segundo é um processo inverso ao primeiro que consiste em determinar a relação entre as fluxões de dois fluentes, baseado na equação que traduz tal relação, resultando no processo de *integração* do cálculo usual.

As constantes inconsistências na formulação do cálculo fez Newton apresentar uma terceira alternativa as chamadas *"prime and ultimate ratios"* (primeiras e últimas razões), que se assemelham a uma teoria cinemática de limites. No entanto, seu trabalho com fluxões e fluentes é apontado como o de maior relevância e brilho.[3]

Na visão de Carvalho e D'Otaviano (2006), Leibniz, em 1673, utiliza trabalhos de Descartes, Nicholas Mercator (1620-1687), Wallis, James Gregory (1638-1675) e Henry Oldenburg (1618-1677) com o propósito de aprimorar seus conhecimentos matemáticos e começar o seu projeto de padronização do cálculo. Tal como Newton, Leibniz almejava encontrar uma maneira de quantificar fenômenos que variam uniformemente com o tempo, porém seus objetivos eram distintos. Leibniz preocupou-se em apresentar uma maior sustentabilidade lógica e filosófica ao cálculo, já o trabalho de Newton mostrava uma maior precisão técnica e uma estreita relação com a física.

Dando continuidade as ideias de Carvalho e D'Ottaviano (2006), Leibniz em *Nova methodus pro maximus et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, larga na frente ao formalizar o cálculo diferencial adiantando-se em cerca de três anos à publicação dos *Principia Mathematica* de Newton. Nesta obra, a presença dos infinitésimos é vista como "instrumentos úteis", embora "ficcionais", estabelece por meio da notação dx, a noção de *diferencial* para nomear uma "quantidade infinitamente pequena", ligada a uma *variável x*. As diferenciais são, na realidade, tratadas como segmentos, donde são obtidos os quocientes diferenciais dy/dx. Pode-se interpretar a "diferencial" e o "quociente diferencial" de Leibniz como, respectivamente, ao "momento" e à "fluxão" de Newton (CARVALHO e D'OTTAVIANO (2006) recomendam a leitura de Leibniz, 1684).

Na mencionada obra surgem fórmulas como $d(xy) = xdy + ydx$ e $d(x/y) = (ydx - xdy)/y^2$, na qual termos como $dxdy$ são "negligenciados" por se tratarem de quantidades infinitesimais. Essa falta de rigor rendeu a Leibniz duras críticas, apesar de não comprometer o resultado final dos cálculos.

Para Carvalho e D'Ottaviano (2006), foi em *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* que Leibniz organizou o cálculo integral fixando a notação básica definitiva para o mesmo, isto é, $\int x$, depois modificada para $\int xdx$ como temos atualmente. O cálculo desenvolvido por Leibniz superou o de Newton e foi aceito no mundo inteiro, devido a

[3] Carvalho e D'ottaviano citando Fleuriot e Paulson, que usa infinitésimos, conceitos da análise não-standard, e recursos do aplicativo Isabelle – utilizado para a demonstração automática de teoremas –, desenvolvem uma geometria denominada geometria infinitesimal, com a qual é aprofundada a análise dos resultados introduzidos por Newton em *Principia Mathematica.*

sua melhor adequação notacional (CARVALHO e D'OTTAVIANO (2006) indicam o estudo de Leibniz, 1983).

Com base na obra de Pinto (2000), mostraremos o procedimento usado por Leibniz, a pouco mais de 300 anos, para determinar tangentes de curvas planas. Esse procedimento chamou a atenção dos matemáticos da época, pois Leibniz utilizou-se de um "número", até então, desconhecido para obter o resultado desejado.

Considere Γ uma curva plana de equação $y = f(x)$ que passa pelo ponto P_0 de coordenadas (x_0, y_0), definimos a tangente a Γ em P_0 como sendo a reta $\tau_f(x_0)$ que melhor aproxima Γ numa vizinhança específica de P_0. Esta ideia pode ser analisada de duas maneiras diferentes: uma *dinâmica* (newtoniana) e outra *estática* (leibniziana). Na intuição geométrica estática, sustentada por Leibniz e seus adeptos, a tangente $\tau_f(x_0)$ é a reta que corta Γ em dois pontos *infinitamente próximos* (que pertence a uma *vizinhança infinitesimal* de P_0), ou seja, é a reta que, numa vizinhança infinitesimal de P_0 e a menos de um infinitésimo, se iguala a Γ. Deste modo, não há uma outra reta com a propriedade *local* que, passando por P_0, se coloque entre Γ e $\tau_f(x_0)$.

Para fixar as ideias, considere o problema da determinação da tangente à parábola Γ, de equação $y = x^2$, no ponto $P_0 \equiv (1,1)$ sobre o olhar de Leibniz, isto é, sem o uso da teoria de limites que como sabemos não existia nos primórdios do cálculo.

A equação da reta que passa por dois pontos do plano (de coordenadas reais) $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ com ($x_1 \neq x_2$), é dado por

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

onde o coeficiente angular m, é da forma

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Contudo, o problema em questão não apresenta as mesmas informações, é dado apenas um ponto sendo o conhecimento do outro ponto substituído pela condição de tangência. Isto é, conhecemos o ponto $(1,1)$ e desfrutamos de uma informação extra que é a de que a reta procurada é tangente à parábola nesse ponto.

Para resolver esse problema Leibniz admitiu a existência de um número *infinitesimal* não nulo, com o qual se pode operar *normalmente*. Ou seja, supôs que existe, e satisfaz as leis algébricas usuais, um número ε positivo, menor que qualquer número real positivo (tal número não se verifica em $\mathbb{R}$!).

Tome na parábola $y = x^2$ dois pontos distintos *infinitamente próximos*, cuja distância é sempre menor que qualquer número real positivo, de coordenadas $(1, 1^2)$ e $(1+\varepsilon, (1+\varepsilon)^2)$. O coeficiente angular da reta que passa por estes dois pontos é dado pelo quociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\varepsilon)^2 - 1^2}{\varepsilon} = 2+\varepsilon$$

como já mencionamos, Leibniz chamou por dx o acréscimo infinitesimal da variável independente e por dy o acréscimo da variável dependente. Analogamente, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(1,1)$ e $(1-\varepsilon,(1-\varepsilon)^2)$ é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1^2-(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon} = 2-\varepsilon.$$

Com isso, qual será o coeficiente angular da tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1,1)$? Se analisarmos a questão apenas no universo dos números reais, então a resposta final deve estar isenta de qualquer tipo de elemento que não seja real. De fato, os cálculos realizados no sistema ampliado mostram que o coeficiente angular da tangente à curva no ponto $(1,1)$ deve estar entre $2-\varepsilon$ e $2+\varepsilon$. O único número real existente entre tais elementos é o 2 e, portanto, o coeficiente angular da tangente à curva $y = x^2$ no ponto $(1,1)$ é igual a 2. Logo

$$y = 2x-1$$

é a equação da tangente, $\tau_{x^2}(1)$, a Γ no ponto $(1,1)$. Veja que a reta $y = 2x-1$ cumpre o prometido, isto é, que *numa vizinhança infinitesimal de P_0 coincide, a menos de uma quantidade infinitesimal, com* Γ. Para $x = 1$ tem-se $y = 1$ na parábola e $y = 1$ na reta tangente, $\tau_{x^2}(1)$; para $x = 1+\varepsilon$ tem-se $y = 1+2\varepsilon+\varepsilon^2$ na parábola e $y = 2(1+\varepsilon)-1$ na reta tangente, $\tau_{x^2}(1)$. Estes dois pontos distam entre si de

$$|1+2\varepsilon+\varepsilon^2-(1+2\varepsilon)| = \varepsilon^2$$

que é uma quantidade infinitesimal comprovando a afirmação feita.

Acredita-se que essa ideia foi reescrita por Leibniz com a seguinte modificação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+dx)^2-1^2}{dx} = 2+dx = 2\ (!)$$

onde, inexplicavelmente, dx é diferente de zero num primeiro momento para que seja possível dividir por dx, porém é ignorado num segundo momento, como se fosse nulo, com o propósito de obter um número real no final das operações. O incremento infinitesimal dx surgia, no cenário matemático, com um conceito bastante incoerente (dx ora é zero ora não é zero).

Como pode ser observado, há uma relação muito forte entre a determinação de tangentes e o conceito de derivada. Leibniz, há mais de 300 anos, já tinha percebido tal relação, no entanto, não conseguia explicar de forma convincente a origem de seus próprios diferenciais, sendo duramente criticado pela comunidade matemática da época.

De acordo com Carvalho e D'Ottaviano (2006), o bispo George Berkeley foi um dos principais opositores do cálculo infinitesimal que após *Philosophical commentaries* precisou-se de mais de duas décadas para o embasamento de suas críticas, principalmente as referentes ao cálculo diferencial idealizado por Newton em 1687, até a divulgação de *The analyst*[4] (CARVALHO e D'OTTAVIANO (2006) indicam a leitura de Berkeley, 1734), considerada a principal obra de Berkeley que discute as inconsistências do método infinitesimal. O item VI de *The analyst*, mostra bem a repulsa do bispo a tais entidades e ao uso que delas fazem os seus defensores, que indelicadamente classifica como "modernos analistas":

> E ainda no *calculus differentialis*, cujo Método serve para todas as mesmas Intensões e Fins que os das Fluxões, nossos Analistas modernos não estão satisfeitos em considerar apenas as Diferenças de Quantidades finitas: eles também consideram as Diferenças dessas Diferenças, e as Diferenças das Diferenças das primeiras Diferenças. E assim continuadamente *ad infinitum*. Isto é, eles consideram Quantidades infinitamente menores que a menor Quantidade discernível; e outras infinitamente menores que aquelas infinitamente pequenas; e ainda outras infinitamente menores que as infinitesimais precedentes, e assim continuadamente sem fim ou limite. De tal forma que nós devemos admitir uma sucessão infinita de infinitésimos, cada um infinitamente menor que o anterior, e infinitamente maior que o seguinte. Como existem primeira, segunda, terceira, quarta, quinta, etc. Fluxões, assim existem Diferenças, primeira, segunda, terceira, quarta, quinta, etc. em uma Progressão infinita em direção a nada, do que você sempre se aproxima e nunca chega. E (o que é mais estranho) apesar de que você levaria Milhões de Milhões para a menor Quantidade dada, ela nunca será a maior. Pois este é um dos modestos *postulata* de nossos Matemáticos modernos, e é uma pedra-chave ou Fundamento de suas Especulações (BERKELEY, 1734, § VI).

Essas criticas, apesar de bem fundamentadas, não foram capazes de impedir a propagação dos trabalhos de Newton e Leibniz. Segundo Carvalho e D'Ottaviano (2006), os irmãos Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748), por conta das constantes correspondências que trocara com Leibniz,[5] tornou-se os seus primeiros divulgadores. Jean foi professor do Marquês Guillaume F. A. de L'Hospital (1661-1704), entre 1690 e 1692, a quem fez estranhas doações de descobertas importantes que, posteriormente, seriam utilizadas na redação do primeiro livro sobre o cálculo infinitesimal, de L'Hospital (1696). É apresentado neste trabalho um tratamento mais eficiente a natureza inconsistente das quantidades infinitesimais, graças à axiomatização usada por L'Hospital, como pode ser observado nos postulados seguintes.

- *Pode-se tomar, indiferentemente, qualquer uma de duas quantidades que diferem entre si por uma quantidade infinitamente pequena.*

[4] Título original: *The analyst; or a discourse addressed to an infidel mathematician. Wherein it is examined whether the object, principles, and inferences of the modern analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious mysteries and points of faith*. Em português: "O analista; ou um discurso dirigido a um matemático infiel. Onde se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são mais distintamente concebidos ou mais obviamente deduzidos do que os mistérios religiosos e as questões de fé."

[5] A denominação *cálculo integral*, sugerida por Jacques Bernoulli, foi acatada por Leibniz.

- *Uma linha curva pode ser considerada como uma coleção de infinitos segmentos, todos de comprimento infinitesimal, ou seja, pode ser aproximada por uma linha poligonal com quantidade infinita de lados, todos de comprimento infinitesimal.*

Os esforços realizados por Newton e Leibniz na abordagem formal dos infinitésimos e os progressos conquistados com o livro de L'Hospital não foram suficientes para a construção do cálculo diferencial e integral apenas com o uso dos infinitésimos. Consequentemente, iniciou-se na Academia Real de Ciências de Paris uma época de longos debates entre adeptos e contrários à recente teoria matemática de Newton e Leibniz. Podemos destacar entre os seus apoiadores, Pierre Varignon (1654,-1722) e Joseph Saurin (1659-1737), e entre seus opositores, Michel Rolle (1652-1719). Esses matemáticos franceses, protagonizaram as maiores discussões sobre o cálculo entre os anos de 1700 e 1706.

Varigon, advogava abertamente à respeito da existência real dos infinitésimos e no período de 1700 a 1701, exibe uma frágil defesa contra os argumentos de Rolle (CARVALHO e D'OTTAVIANO (2006) apontam as leituras de Pin, 1987; Joven, 1997).

Na perspectiva de Carvalho e D'Ottaviano (2006), Leibniz, depois de um período longo de silêncio, revela junto à Academia de Paris sua incredulidade quanto à *extensão material dos infinitésimos*, ao chamá-los de *ficções úteis*, mesmo sendo capazes de explicar propriedades de objetos com existência real. Essa atitude de Leibniz desanima seus seguidores que, como Varignon, acreditavam na existência real dessas entidades. Os debates continuaram até 1706 com o envolvimento mais franco de Saurin e Rolle, encerrando-se após a intervenção conciliadora de uma comissão criada especialmente pela Academia para tal fim. Deste modo, Rolle e seus seguidores saem com a sensação de vitória, já que todos os argumentos apresentados por Saurin e seus simpatizantes não foram suficientes para comprovar a existência dos infinitésimos.

1.3 Os infinitésimos e os séculos XIX e XX

Antes que os infinitesimais fossem novamente expulsos da matemática, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) realizaria uma das últimas investidas de seu tempo para fundamentar o cálculo baseado no uso dos infinitésimos, porém foi mais uma tentativa sem sucesso. Assim, Cauchy volta o seu olhar para a emergente teoria de limites onde, de acordo com Carvalho e D'Ottaviano (2006), expõem resultados que o colocam no rol dos mais importantes precursores do cálculo diferencial e integral moderno.

Carvalho e D'Ottaviano (2006) relatam que o matemático Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), com sua aritmetização, corrige problemas remanescentes das obras de Cauchy e formaliza definitivamente o cálculo diferencial e integral. A famosa definição de limite via $\varepsilon's$ e $\delta's$ é delegada a Weierstrass e também as definições de continuidade, diferenciabilidade entre outras. No ponto de vista desses autores, Weierstrass deve poucos artigos publicados em vida como o de 1854, quando é iniciada a teoria de *funções abelianas*. Seus trabalhos são totalmente editadas somente no período de 1894 a 1927, com uma reedição em 1967 (CARVALHO e D'OTTAVIANO (2006) indicam o estudo de Weierstrass 1894-1927).

Os infinitésimos retornariam de forma definitiva ao universo matemático com Abraham Robinson (1918-1974) que, na opinião de Carvalho e D'Ottaviano (2006), exibe uma nova teoria para a análise matemática pautada nos infinitésimos e com o uso da teoria de modelos. Fundada em 1960, essa teoria é exposta em novembro do mesmo ano na Universidade de Princeton nos Estados Unidos, foi publicada em *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam* com o título *Non-Standard Analysis*, em janeiro de 1961, no encontro anual da Association for Symbolic Logic. Em 1966 é editada como livro e revisada por Robinson em 1973, tendo sua segunda edição lançada em 1974, que é reeditada em 1996 (CARVALHO e D'OTTAVIANO (2006) mencionam as leituras de Robinson, 1961; 1996).

Carvalho e D'Ottaviano (2006) citando Robinson, que apresenta um modelo não-standard de ordem superior para a aritmética e outro para a análise, os quais preservam suas operações e propriedades básicas. O primeiro baseia-se numa extensão não-standard do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, denotada por ${}^{\star}\mathbb{N}$, cujos elementos, que incluem *números naturais infinitos*, são chamados *números hipernaturais*. O segundo baseia-se numa extensão do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, denotada por ${}^{\star}\mathbb{R}$, que inclui *números reais infinitos* e *infinitésimos*, denominados *números hiper-reais*.

D'Ottaviano e Bertato (2015) citando PIN, que analisa as famosas críticas feitas ao método das fluxões de Newton e, especialmente, às ideias de Leibniz, concluindo que a redenção de Leibniz (e dos infinitésimos) acontece, de certo modo, com Robinson, ao publicar sua análise não-standard:

> A Análise não-standard vem outorgar razão à intuição de Leibniz, vem legitimar seu fundamento na aporia e, ao mesmo tempo, redimi-la dela, vem procurar um modelo em que duas magnitudes que diferem entre si por uma magnitude infinitamente pequena são – ao menos no registro, que interessava a Leibniz – equiparáveis entre si, sem que isso exclua tal diferença do próprio conceito de magnitude (PIN, 1987, p. 13).

Na perspectiva de Pinto (2000), Leibniz está na origem da análise não-standard por duas razões. A primeira, porque Leibniz defendia abertamente o uso de *números infinitos* e *infinitesimais* para o desenvolvimento do cálculo. A segunda, pelo seu pioneirismo na difusão da lógica matemática, colocando-o na origem do instrumento matemático que daria legitimidade ao uso daquele tipo de quantidades - a teoria dos modelos.

A teoria dos modelos que *analisa as relações existentes entre uma estrutura matemática concreta e sua teoria, no sentido formal do termo* estabelece um crescimento (no séc. XX) da lógica matemática que se revelou determinante para a consolidação da noção de *infinitésimos*. De acordo com Pinto (2000), suas consequências vão muito além das aplicações à análise não-standard a qual, não se limita, à mera recriação ou reinterpretação do cálculo infinitesimal leibniziano.

Segundo Sampaio (2008), em 1976 o matemático Howard Keisler apresentou uma axiomática dos hiper-reais no seu livro Elementary Calculus: an infinitesimal approach e, no ano seguinte, um outro matemático, Edward Nelson (1932-2014), também propôs uma axiomática para a análise não-standard, desejando englobar todos os ramos da Matemática. Em consequência dos 20 anos da morte de Robinson, realizou-se, em Portugal, na Universidade de Aveiro, o primeiro Colóquio Internacional de Matemática Não Standard.

2 Construção dos números hiper-reais

A escrita deste capítulo foi baseado no livro Métodos Infinitesimais de Análise Matemática de José J. M. Sousa Pinto (2000) e na tese de mestrado Construção de conjuntos numéricos: dos números inteiros aos hiperreais de Michele Calefe (2016).

Apresentaremos neste capítulo a criação dos números hiper-reais, uma extensão não-arquimediana do sistema numérico real desenvolvida por Robinson em 1960 com base na *teoria de modelos*. O grande diferencial desta extensão está no fato de se poder operar normalmente com números infinitos e infinitesimais, cuja existência já tinha sido conjecturado por Leibniz em pleno século XVII.

Na criação dos hiper-reais, Robinson utilizou como *modelo* as sucessões reais que não são de Cauchy pois ele não estava interessado na convergência das mesmas, mas como cada sucessão poderia representar um número real (standard) e também números não-standard, caracterizando uma extensão do primeiro conjunto.

2.1 O corpo dos hiper-reais

Para iniciarmos esta construção, considere $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as sucessões de números reais definido da seguinte forma

$$\mathbf{x} \equiv (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots).$$

As operações de *adição* e *multiplicação* são realizadas normalmente neste conjunto, isto é, *ponto a ponto.* Consequentemente, a adição e a multiplicação de duas sucessões reais podem ser assim definidas

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \equiv (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$
$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \equiv (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \odot (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Deste modo, o conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é fechado com relação a essas duas operações e mais, toda sucessão de números reais tem um inverso aditivo. Basta tomarmos o inverso aditivo em cada ponto da sucessão.

Portanto, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ é um anel comutativo com elemento $\mathbf{0} \equiv (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ e unidade $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \cdots, 1, \cdots)$. A aplicação $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dada por

$$\varphi(x) = (x, x, \cdots, x, \cdots),$$

mergulha o conjunto $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Esta estrutura, no entanto, não é um corpo pois,

$$(1,0,0,\cdots,0,\cdots)\cdot(0,1,0,\cdots,0,\cdots) \equiv \mathbf{0}.$$

Temos aqui duas sucessões não nulas pertencentes a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com produto nulo, assim a estrutura $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ possui divisores de zero não podendo ser um corpo.

Em situações como esta se faz necessário a introdução de uma relação de equivalência que possibilite a identificação de sucessões *suficientemente parecidas.* Então, considere em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a seguinte definição.

Definição 2.1. *Duas sucessões reais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serão $[\equiv]$-equivalentes se e só se o conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n = a'_n\}$$

for cofinito em $\mathbb{N}$, (subconjunto cujo complementar em $\mathbb{N}$ é finito) escreve-se então $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} [\equiv] (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Esta relação permite divide o conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ em classes de equivalência. O conjunto quociente é dado por

$$^{\flat}\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/[\equiv]$$

e por $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ a classe de equivalência da sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \equiv \{(a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (a'_n)_{n \in \mathbb{N}} [\equiv] (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

O conjunto $^{\flat}\mathbb{R}$ pode ser algebrizado mediante as operações de adição e multiplicação de secessões definidas ponto a ponto em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou seja,

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]+[(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] \equiv [(a_n+b_n)_{n \in \mathbb{N}}] \text{ e } [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]\cdot[(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] \equiv [(a_n\cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Além disso, a relação $\leq$ deixará o sistema *parcialmente* ordenado,

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \leq [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] \text{ se e só se } \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \text{ for cofinito em } \mathbb{N}.$$

Logo teremos,

$$(^{\flat}\mathbb{R}, +, \cdot, \leq),$$

um anel comutativo parcialmente ordenado com elemento e unidade. A aplicação $\varphi : \mathbb{R} \to {}^{\flat}\mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = [(x,x,x,\cdots,x,\cdots)]$$

realiza um mergulho de $\mathbb{R}$ em ${}^{\flat}\mathbb{R}$, o que possibilita a escrita $\mathbb{R} \subset {}^{\flat}\mathbb{R}$. Contudo, o anel ${}^{\flat}\mathbb{R}$ não é um corpo pois, também, possui divisores de zero.

2.1.1 Os números hiper-reais

Como vimos, os conjuntos cofinitos não foram capazes de eliminar os divisores de zero que há em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, consequentemente precisamos de uma relação de equivalência mais refinada para prosseguirmos com a construção dos números hiper-reais.

Com a definição de filtro sobre $\mathbb{N}$ e de alguns filtros especias (filtros livres e ultrafiltros) é possível acabar com todos os divisores de zero presentes em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e assim obter a desejada estrutura de corpo para a extensão não standard.

Definição 2.2. *Chama-se* **filtro** *sobre* $\mathbb{N}$ *a uma família não vazia* $\mathcal{F}$ *de partes de* $\mathbb{N}$ *que satisfaça as seguintes propriedades:*

(1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$,

(2) *se* $A \in \mathcal{F}$ *e* $B \in \mathcal{F}$ *então* $A \cap B \in \mathcal{F}$,

(3) *se* $A \in \mathcal{F}$ *e* $A \subseteq B$ *então* $B \in \mathcal{F}$.

Considere os exemplos de filtro sobre $\mathbb{N}$.

Exemplo 2.1. O conjunto $\mathcal{F} = \{B \subseteq \mathbb{N} : A_0 \subseteq B\}$, com $A_0 \subseteq \mathbb{N}, A_0 \notin \varnothing$.

- O conjunto vazio não pertence a $\mathcal{F}$ pois $A_0 \subseteq B$ e A_0 é não vazio.
- Dados dois conjuntos B_1 e B_2 em $\mathcal{F}$, temos $A_0 \subseteq B_1$, e $A_0 \subseteq B_2$ implicando em $A_0 \subseteq B_1 \cap B_2$ e, portanto, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$.
- Se A está em $\mathcal{F}$, então $A_0 \subset A$. Dado B tal que $A \subseteq B$, temos $A_0 \subseteq B$, o que significa $B \in \mathcal{F}$.

Exemplo 2.2. $\mathcal{F}_0 = \{A \subset \mathbb{N} : \mathbf{card}(A^c) \in \mathbb{N}\}$ *é a família dos conjuntos cofinitos de* $\mathbb{N}$.

- O conjunto vazio $\varnothing$ não pertence a $\mathcal{F}_0$ pois o complementar de $\varnothing$ em $\mathbb{N}$ é $\mathbb{N} - \varnothing = \mathbb{N}$, que é infinito.
- Dados dois conjuntos cofinitos A_1 e A_2 pertencentes a $\mathcal{F}_0$, temos que $\mathbb{N} - (A_1 \cap A_2) = (\mathbb{N} - A_1) \cup (\mathbb{N} - A_2)$. Como A_1 e A_2 são cofinitos, os complementares de A_1 e A_2 dados respectivamente por $\mathbb{N} - A_1$ e $\mathbb{N} - A_2$ são finitos. Assim, $\mathbb{N} - (A_1 \cap A_2) = (\mathbb{N} - A_1) \cup (\mathbb{N} - A_2)$ é finito, o que implica em $\mathbb{N} - A_1 \cap A_2$ é finito. Logo, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_0$.

- Agora suponha $A_1 \in \mathcal{F}_0$. Assim, pela definição do conjunto $\mathcal{F}_0$ temos que $\mathbb{N} - A_1$ é finito. Tomando agora $A_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_1 \subset A_2$, temos $\mathbb{N} - A_2 \subseteq \mathbb{N} - A_1$. Como $\mathbb{N} - A_1$ é finito, temos $\mathbb{N} - A_2$ finito. Logo $A_2 \in \mathcal{F}_0$.

A família $\mathcal{F}_0$ é um importante exemplo de filtro sobre $\mathbb{N}$, sendo geralmente conhecido por **filtro de Fréchet**.

Definição 2.3. *Um filtro $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$ é chamado livre se não contém nenhum conjunto finito.*

De acordo com esta definição o filtro de Fréchet é um filtro livre, então a relação $[\equiv]$ pode ser redefinida no conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ do seguinte modo:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}[\equiv](a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = a'_n\} \in \mathcal{F}_0.$$

No entanto, como já foi falado, esta relação não permite à construção de um corpo. Então, precisaremos de uma relação de equivalência mais forte o que justifica a inclusão da próxima definição.

Definição 2.4. *Um filtro $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ diz-se um* **ultrafiltro** *se, para toda parte A de $\mathbb{N}$, se tiver*

(4) $A \in \mathcal{U}$ *ou* $A^c \in \mathcal{U}$.

Exemplo 2.3. O filtro $\mathcal{F}_0$ de Fréchet sobre $\mathbb{N}$ não é um ultrafiltro.

Suponha, por absurdo, que seja. Logo de acordo com a definição de ultrafiltro teremos $\{1,3,5,7,\ldots\} \in \mathcal{F}_0$ ou $\{2,4,6,8,\ldots\} \in \mathcal{F}_0$. Ora, isso contradiz a própria definição de filtro de Fréchet e, portanto, $\mathcal{F}_0$ não é um ultrafiltro. Porém, sendo $\mathcal{U}$ um ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ *um destes conjuntos e um só* pertencerá a $\mathcal{U}$.

Definição 2.5. *Um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ é chamado livre se não contém subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.*

A construção dos números hiper-reais baseia-se em *ultrafiltros livres*, pois só eles conduzem ao resultado desejado.

Segundo Pinto (2000, p. 85-86) “Não é imediatamente óbvio que existam ultrafiltros livres sobre um conjunto infinito e, na realidade, a sua existência pode mesmo ser uma questão bastante problemática a nível de fundamentos”. Entretanto, pondo de lado um debate acalorado sobre o tema, é possível continuar com a criação dos números hiper-reais graças a um conhecido teorema do matemático Alfred Tarski (1901-1983), que se enuncia a seguir.

Teorema 2.1. (Tarski) *Todo filtro livre se pode estender a um ultrafiltro livre.*

Esta demonstração pode ser vista em Pinto (2000), p. 210.

Seja $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ um ultrafiltro livre sobre $\mathbb{N}$ então, obrigatoriamente, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{U}_{\mathbb{N}}$: de fato, se $A \in \mathcal{F}_0 \Longrightarrow A^c \notin \mathcal{U}_{\mathbb{N}}$, pois A^c é finito e, portanto, $(A^c)^c \equiv A \in \mathcal{U}_{\mathbb{N}}$.

2.1.1.1 Definição dos números hiper-reais

Por uma questão de simplificação de linguagem fixaremos $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}_{\mathbb{N}}$, sendo chamado apenas de ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ que contém $\mathcal{F}_0$. Define-se em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ uma relação de equivalência mais forte que $[\equiv]$ usando agora, no lugar do filtro de Fréchet, o ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Definição 2.6. *Duas sucessões $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quaisquer, pertencentes a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, serão $\mathcal{U}$-equivalentes se e só se o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n = a'_n\}$ pertencer a $\mathcal{U}$; para simbolizar que aquelas sucessões são $\mathcal{U}$-equivalentes escreva-se-á $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou, apenas, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$).*

Mostraremos que a relação acima definida é, de fato, uma relação de equivalência. Para tanto, devemos mostrar que $\sim_u$ satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

- Reflexividade: Considere uma sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, assim o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n = a_n\}$ é o conjunto dos números naturais. Logo, $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, pois se $\mathbb{N} \notin \mathcal{U}$, então $\varnothing = \mathbb{N} - \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ o que é impossível e, portanto, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Simetria: Dadas as sucessões $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertencentes a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tais que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos que se $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$, então $\{n \in \mathbb{N} : (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$. Logo, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implica em $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Transitividade: Sejam as sucessões $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Suponhamos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Então os conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ e $\{n \in \mathbb{N} : (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ são ambos elementos de $\mathcal{U}$. Porém, os conjuntos nos quais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podem ser escritos na forma $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \wedge (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$. Como $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ e $\{n \in \mathbb{N} : (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ temos $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ (propriedade da intersecção finita). Como $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ temos $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ (propriedade de superconjunto). Assim, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implica em $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, o que prova a transitividade.

Esta relação de equivalência (mais refinada e sem divisores de zero) permite dividir o conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ em classes de equivalência. Indicaremos o conjunto quociente como sendo

$$^\star\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim_u$$

e a classe de equivalência que contém a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ (ou apenas por $[(a_n)]$). Donde obtemos o **conjunto dos números hiper-reais** que será denotado por $^\star\mathbb{R}$.

Definição 2.7. Dados dois números hiper-reais $a = [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ e $b = [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}]$, e um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$, definimos a relação $\leq_{\mathcal{U}}$ por $a \leq_{\mathcal{U}} b$, se $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$.

Vamos mostrar que a relação $\leq_{\mathcal{U}}$ definida acima impõe uma ordem total no conjunto dos números hiper-reais. Para tanto vamos verificar que $\leq_{\mathcal{U}}$ é uma ordem parcial obedecendo as propriedades de reflexividade, anti-simetria e transitividade.

- Reflexividade: Considere $a \in {}^\star\mathbb{R}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ é claro que $a_n \leq_{\mathcal{U}} a_n$ e, por isso, $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq_{\mathcal{U}} a_n\} = \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, temos $a \leq_{\mathcal{U}} a$ em $^\star\mathbb{R}$;

- Anti-simetria: Suponha $a, b \in {}^\star\mathbb{R}$ com $a \leq_{\mathcal{U}} b$ e $b \leq_{\mathcal{U}} a$. Assim, podemos escrever $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq_{\mathcal{U}} b_n\} \in \mathcal{U}$ e $\{n \in \mathbb{N} : b_n \leq_{\mathcal{U}} a_n\} \in \mathcal{U}$ o que implica em $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq_{\mathcal{U}} b_n \wedge b_n \leq_{\mathcal{U}} a_n\} \in \mathcal{U}$, isto é, $\{n \in \mathbb{N} : a_n =_{\mathcal{U}} b_n\} \in \mathcal{U}$. Portanto, $a =_{\mathcal{U}} b$;

- Transitividade: Para isso, considere os elementos $a, b, c \in {}^\star\mathbb{R}$, de modo que $a \leq_{\mathcal{U}} b$ e $b \leq_{\mathcal{U}} c$. Assim, $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq_{\mathcal{U}} b_n\} \in \mathcal{U}$ e $\{n \in \mathbb{N} : b_n \leq_{\mathcal{U}} c_n\} \in \mathcal{U}$. Pela propriedade da intersecção finita temos $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq_{\mathcal{U}} b_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq_{\mathcal{U}} c_n\} \in \mathcal{U}$. Logo, temos $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq_{\mathcal{U}} b_n \wedge b_n \leq_{\mathcal{U}} c_n\} \in \mathcal{U} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq_{\mathcal{U}} b_n \leq_{\mathcal{U}} c_n\} \in \mathcal{U}$. Como a transitividade vale para os números reais, temos $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq_{\mathcal{U}} c_n\} \in \mathcal{U}$. Portanto, $a \leq_{\mathcal{U}} c$.

Agora mostraremos que $\leq_{\mathcal{U}}$ satisfaz a propriedade adicional: dados $a, b \in {}^\star\mathbb{R}$, temos $a <_{\mathcal{U}} b$, $a =_{\mathcal{U}} b$ ou $a\ {}_{\mathcal{U}}\!> b$. Para isso, considere $a, b \in {}^\star\mathbb{R}$ e o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq_{\mathcal{U}} b_n\}$. Da definição 2.4 temos que X ou $\mathbb{N} - X$ pertence a $\mathcal{U}$. Se $X \in \mathcal{U}$, então $a \leq_{\mathcal{U}} b$. Se $X \notin \mathcal{U}$, então $\mathbb{N} - X = \{n \in \mathbb{N} : a_n\ {}_{\mathcal{U}}\!> b_n\} \in \mathcal{U}$ o que implica em $b <_{\mathcal{U}} a$, como queríamos.

A seguir, iremos algebrizar o conjunto $^\star\mathbb{R}$ de forma que a mesma não passe de uma ampliação das operações e relação de ordem já existentes em $\mathbb{R}$. Para tanto, considere o teorema.

Teorema 2.2. *Sejam* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *quatro secessões de números reais tais que* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. *Então*

(a) $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (a'_n + b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim_u (a'_n \cdot b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(c) $a_n \leq_{\mathcal{U}} b_n \Rightarrow a'_n \leq_{\mathcal{U}} b'_n$.

(*onde* $\leq_{\mathcal{U}}$ *significa que a propriedade em questão se verifica num subconjunto de índices pertencentes ao ultrafiltro* $\mathcal{U}$).

Demonstração:

(a) Da hipótese temos $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \sim_u (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \sim_u (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$, donde segue $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ e $\{n \in \mathbb{N} : (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$. Então, pela propriedade da intersecção finita sabemos que $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ o que significa dizer $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \wedge (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$. Sendo assim, temos que $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} + (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} + (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ o que implica em $\{n \in \mathbb{N} : (a_n + b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n + b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$. Portanto, $(a_n + b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \sim_u (a'_n + b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$, ou seja, a adição está bem definida.

(b) Para verificarmos que a multiplicação está bem definida, tome novamente $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \sim_u (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \sim_u (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$. Então $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ e $\{n \in \mathbb{N} : (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$. Pela propriedade da intersecção finita sabemos que $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ o que significa dizer $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \wedge (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$. Sendo assim, podemos escrever $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \cdot (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ o que implica em $\{n \in \mathbb{N} : (a_n \cdot b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n \cdot b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$. Portanto, $(a_n \cdot b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \sim_u (a'_n \cdot b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ o que significa que a multiplicação está bem definida em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(c) Da hipótese $a_n \leq_{\mathcal{U}} b_n$ implica em $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \leq_{\mathcal{U}} (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$. Mas do item **(a)** temos $\{n \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \wedge (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$. Logo, $\{n \in \mathbb{N} : (a'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \leq_{\mathcal{U}} (b'_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$ donde segue $a'_n \leq_{\mathcal{U}} b'_n$.

Este teorema dá legitimidade a próxima definição.

Definição 2.8. *Dados dois números* $\alpha \equiv [(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}]$ *e* $\beta \equiv [(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}]$ *de* ${}^{\star}\mathbb{R}$, *define-se* **soma,** $\alpha+\beta$ *e* **produto,** $\alpha\cdot\beta$, *pondo*

$$\alpha+\beta \equiv [(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}] + [(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}] = [(a_n + b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}]$$

$$\alpha \cdot \beta \equiv [(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}] \cdot [(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}] = [(a_n \cdot b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}]$$

introduzindo-se adicionalmente uma relação de ordem, escrevendo

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Com as operações usuais (adição e multiplicação) além da relação de ordem definidas deste modo, é possível verificar-se que

$$({}^{\star}\mathbb{R},\ +,\ \cdot,\ \leq)$$

é um **corpo totalmente ordenado** com zero $0 \equiv [(0,0,0,\cdots)]$ e unidade $1 \equiv [(1,1,1,\cdots)]$.

Observação 2.1. *A criação dos hiper-reais foi realizada mediante um ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *em* $\mathbb{N}$ *e sua existência é assegurada pelo teorema de Tarski. Não é possível dar ao ultrafiltro uma caracterização mais visível, pois isso provocaria à elaboração de diversas definições especiais de pertença: uma para cada um dos conjuntos do ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *cuja cardinalidade é não-numerável. Além do mais, há um infinidade de ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *em* $\mathbb{N}$ *e cada ultrafiltro particular corresponde a um conjunto de números hiper-reais. Veja, por exemplo, que* $[(0,1,0,1,0,\cdots)] \equiv 1$ *e* $[(1,0,1,0,1,\cdots)] \equiv 0$ *ou* $[(0,1,0,1,0,\cdots)] \equiv 0$ *e* $[(1,0,1,0,1,\cdots)] \equiv 1$, *porém não se sabe qual escolha se deve fazer. Tal escolha depende de se ter* $\{1,3,5,7,\cdots\} \in \mathcal{U}$ *ou* $\{2,4,6,8,\cdots\} \in \mathcal{U}$. *Esta situação que, num primeiro contato com* **Análise Não-Standard (ANS)**, *se mostra de difícil compreensão não tem nenhuma relevância sob o panorama prático da análise matemática.*

2.1.1.2 Propriedades dos números hiper-reais

A aplicação $^\star : \mathbb{R} \to {}^\star\mathbb{R}$ definida por

$$a \rightsquigarrow {}^\star a = [(a,a,a,\cdots)]$$

constitui um homomorfismo injetivo de corpos (monomorfismo) que preserva a relação de ordem, ou seja,

$$\forall_{a,b \,\in\, \mathbb{R}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} {}^\star(a+b) = {}^\star a + {}^\star b \\ {}^\star(a\cdot b) = {}^\star a \cdot {}^\star b \\ a \leq b \Rightarrow {}^\star a \leq {}^\star b \end{cases}$$

as operações básicas e a relação de ordem pré-existentes em $\mathbb{R}$ foram também adotadas em ${}^\star\mathbb{R}$. Esta aplicação estabelece um *mergulho* do corpo ordenado $\mathbb{R}$ no corpo ordenado ${}^\star\mathbb{R}$.

Este novo conjunto numérico nos permite caracterizar os números reais como sendo $\{{}^\star a \in {}^\star\mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\}$ logo, tem-se naturalmente $\mathbb{R} \subset {}^\star\mathbb{R}$ e com isso, os números reais passarão a ser elementos de ${}^\star\mathbb{R}$. Estes elementos são geralmente denominados por **elementos standard** de ${}^\star\mathbb{R}$, aos quais para não carregar a notação indicaremos sem a estrela. Os elementos deste conjunto vão muito além dos números standard. Veja o número hiper-real

$$\varepsilon \equiv [(1/n)_{n \,\in\, \mathbb{N}}] = [(1,1/2,1/3,\cdots)]$$

trata-se aqui de um *infinitésimo* positivo, em outras palavras, é maior que zero e menor que qualquer número real positivo. Obviamente que esse número não pertence ao conjunto $\mathbb{R}$, logo é um **número não-standard**.

Mostraremos agora que ε é, verdadeiramente, um infinitésimo positivo. Considere $(e_n)_{n \,\in\, \mathbb{N}}$ como a sucessão que representa ε. Logo teremos

$$\{n \in \mathbb{N} : e_n = 0\} = \varnothing \notin \mathcal{U} \text{ e } \{n \in \mathbb{N} : e_n > 0\} \equiv \mathbb{N} \in \mathcal{U}$$

e, portanto, $\varepsilon > 0$. Tomando r um número real positivo inteiramente arbitrário então, $\{n \in \mathbb{N} : e_n < r\}$ é cofinito (pois e_n tende para zero em $\mathbb{R}$). Assim,

$$\{n \in \mathbb{N} : e_n < r\} \in \mathcal{U}$$

como $r \in \mathbb{R}^+$ é qualquer, podemos escrever

$$\forall_r \left[r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 0 < \varepsilon < r \right] \qquad (3.3)$$

o que prova a afirmação feita.

Da expressão (3.3), mostra-se que ${}^\star\mathbb{R}$ não é um corpo arquimediano: de fato, fazendo sucessivamente $r = 1/n$, para $n = 1, 2, \cdots$, pode concluir-se que para $\varepsilon \in {}^\star\mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $n\varepsilon < 1$. E mais, como ${}^\star\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, ε possui inverso multiplicativo. Seja $\omega \in {}^\star\mathbb{R}$ tal que $\omega = \varepsilon^{-1}$. Então, para todo o $r \in \mathbb{R}^+$ tem-se $r < \omega$, e, portanto, ω é um número infinito.

Definição 2.9. *Seja $x = [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ um número hiper-real qualquer. Defini-se o* ***módulo** *de $x \in {}^\star\mathbb{R}$ da seguinte forma*:

$${}^\star|x| = [(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}]$$

que, naturalmente, é também um número hiper-real.

Observação 2.2. *Para simplificar a notação denota-se ${}^\star|\cdot|$, unicamente, por $|\cdot|$, usa-se sempre a mesma indicação de módulo independentemente de se tratar de um número real ou de um número hiper-real.*

Como já foi relatado, o número de elementos presentes em ${}^\star\mathbb{R}$ é infinitamente superior aos elementos de $\mathbb{R}$. Sendo assim, o mergulho de $\mathbb{R}$ em ${}^\star\mathbb{R}$ permite classificar os números hiper-reais de modo similar aos números reais.

Definição 2.10. *O número hiper-real $x \in {}^\star\mathbb{R}$ é dito:*

- **finito** *se e só se $|x| < r$ para algum número real $r > 0$;*
- **infinito** *se e só se $|x| > r$, para todo número real $r > 0$;*
- **infinitesimal** *se e só se $|x| < r$, qualquer que seja $r \in \mathbb{R}^+$.*

Considere os três números hiper-reais,

$$0 \equiv [(0,0,0,\cdots)], \quad \varepsilon \equiv [(1,1/2,1/3,\cdots)], \quad \sqrt{\varepsilon} \equiv [(1,1/\sqrt{2},1/\sqrt{3},\cdots)]$$

perceba que se trata de diferentes números infinitesimais que satisfazem a ordenação $0 < \varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$. Isso acontece porque as sucessões que os representam convergem para zero de maneiras distintas, observe que 0 é o único infinitésimo real. Por fim, temos em ${}^{\star}\mathbb{R}$ elementos do tipo

$$\omega \equiv [(n)_{n\in\mathbb{N}}], \quad \pi^{\omega} \equiv [(\pi^{n})_{n\in\mathbb{N}}] \text{ e } -\sqrt{\omega} \equiv [(-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}]$$

que são números infinitos, os dois primeiros positivos e o terceiro negativo.

Define-se agora alguns subconjuntos importantes de ${}^{\star}\mathbb{R}$.

Sejam ${}^{\star}\mathbb{R}_f$ o conjunto dos números hiper-reais finitos e $\mathbf{mon}(0)$ o conjunto de todos os números infinitesimais. Considere ainda ${}^{\star}\mathbb{R}_{\infty}$ como sendo o conjunto dos números infinitos, diferenciando, se preciso, o conjunto dos números infinitos positivos e negativos. Consequentemente teremos,

$${}^{\star}\mathbb{R} = {}^{\star}\mathbb{R}_f \cup {}^{\star}\mathbb{R}_{\infty}$$

Reforçamos a ideia de que todo número real é naturalmente um número hiper-real finito, donde segue $\mathbb{R} \subset {}^{\star}\mathbb{R}_f$. No próximo teorema, mostra-se que a álgebra em ${}^{\star}\mathbb{R}$ satisfaz as regras aritméticas básicas.

Teorema 2.3. *O conjunto dos números hiper-reais finitos e o dos números infinitesimais, com as operações usuais, são subanéis de* ${}^{\star}\mathbb{R}$, *isto é, somas, diferenças e produtos de números finitos são finitos e somas, diferenças e produtos de números infinitesimais são infinitesimais; os infinitésimos constitui um ideal de* ${}^{\star}\mathbb{R}_f$, *isto é, a diferença de dois infinitésimos e o produto de um infinitésimo por um número finito são ainda infinitesimais.*

Demonstração: Considere, arbitrariamente, $\alpha,\gamma \in {}^{\star}\mathbb{R}_f$. Logo existe um número real $a \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $|\alpha| < a/2$ e $|\gamma| < a/2$ o que implica em,

$$|\alpha \pm \gamma| \leq |\alpha| + |\gamma| < a \qquad (1)$$

$$|\alpha\gamma| = |\alpha| \cdot |\gamma| < b \qquad (2)$$

onde $b = a^2/4$ é um número real positivo. De (1) e (2) temos que $\alpha \pm \gamma$ e $\alpha\gamma$, pertencem a ${}^{\star}\mathbb{R}_f$. Suponha agora que $\varepsilon,\delta \in \mathbf{mon}(0)$ então, para todo o $r \in \mathbb{R}^{+}$ obtemos $|\varepsilon| < r/2$ e $|\delta| < r/2$ e, assim,

$$|\varepsilon \pm \delta| \leq |\varepsilon| + |\delta| < r \qquad (3)$$

Além do mais, como r é um número real positivo então $\sqrt{r} \in \mathbb{R}^{+}$. Logo $|\varepsilon| < \sqrt{r}$ e $|\delta| < \sqrt{r}$ e, portanto,

$$|\varepsilon\delta| = |\varepsilon| \cdot |\delta| < r \qquad (4)$$

Por (3) e (4) temos que $\varepsilon \pm \delta,\ \varepsilon\delta \in \mathbf{mon}(0)$, o que prova a primeira tarde do teorema. Ora, acabamos de mostrar que se ε e δ são infinitesimais então $\varepsilon - \delta \in \mathbf{mon}(0)$. Tome agora $\alpha \in {}^\star\mathbb{R}_f$ qualquer. Então existe um número real a positivo tal que $|\alpha| < a$ e, para todo o $r \in \mathbb{R}^+$ teremos $|\varepsilon| < r/a$. Logo,

$$|\alpha\varepsilon| < r$$

ou seja, $\alpha\varepsilon \in \mathbf{mon}(0)$, completando a demonstração do teorema.

A estrutura dos números hiper-reais é particularmente simples e pode ser vista por intermédio do próximo teorema.

Teorema 2.4. *Qualquer número hiper-real finito $x \in {}^\star\mathbb{R}_f$ se pode decompor, de forma única, numa soma do tipo*

$$x = a + \delta$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e δ é infinitesimal.

A demonstração deste teorema é apresentada por Pinto (2000), p. 93.

Definição 2.11. *Dois números $x, y \in {}^\star\mathbb{R}$ dizem-se* **infinitamente próximos** *se e só se $x - y$ for infinitesimal; escreve-se então $x \approx y$.*

Definição 2.12. *Seja $x \in {}^\star\mathbb{R}_f$ (um número hiper-real finito). O único número $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \approx a$ é chamado* **parte standard** (*ou* **sombra**) *de x e denota-se por $\mathbf{st}\,x$. Por outro lado, se $a \in \mathbb{R}$, o conjunto de números hiper-reais definido por*

$$\mathbf{mon}(a) = \{x \in {}^\star\mathbb{R} : \mathbf{st}\,x = a\}$$

chama-se ***mônada*** *de a.*

Considere a aplicação $\mathbf{st} : {}^\star\mathbb{R}_f \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in {}^\star\mathbb{R}_f$ associa $\mathbf{st}(x) \in \mathbb{R}$. Esta função possui as operações e relação de ordem usuais, como mostra o teorema que se segue:

Teorema 2.5. *Sejam $x, y \in {}^\star\mathbb{R}_f$ quaisquer. Então*

(a) $\mathbf{st}(x+y) = \mathbf{st}(x) + \mathbf{st}(y)$ *e* $\mathbf{st}(x-y) = \mathbf{st}(x) - \mathbf{st}(y)$

(b) $\mathbf{st}(x \cdot y) = \mathbf{st}(x) \cdot \mathbf{st}(y)$ *e* $y \notin \mathbf{mon}(0) \Rightarrow \mathbf{st}(x/y) = \mathbf{st}(x)/\mathbf{st}(y)$

(c) $x \leq y \Rightarrow \mathbf{st}(x) \leq \mathbf{st}(y)$ *e* $[x < y \wedge y - x \notin \mathbf{mon}(0)] \Rightarrow \mathbf{st}(x) < \mathbf{st}(y)$.

Demonstração:

(a) Sendo $x, y \in {}^{\star}\mathbb{R}_f$ então existem $a, b \in \mathbb{R}$, únicos, e $\varepsilon, \delta \in \textbf{mon}(0)$ tais que $x = a + \varepsilon$, $y = b + \delta$ e, portanto, $\textbf{st}(x) = a$ e $\textbf{st}(y) = b$. Note que $|x - a| \leq \varepsilon$ e $|y - b| \leq \delta$ implica em $|x - a| + |y - b| \leq \varepsilon + \delta$. Como $|x + y - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b|$ (desigualdade triangular), então fazendo $a + b = c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon + \delta = \beta \in \textbf{mon}(0)$ tem-se, $|x + y - c| \leq \beta$, isto é, $\textbf{st}(x + y) = c$.

A demonstração para a subtração é análoga.

(b) Como $x, y \in {}^{\star}\mathbb{R}_f$ então existem $r, s \in \mathbb{R}$, únicos, tais que, $|x - r| = \gamma$ e $|y - s| = \mu$, onde $\gamma, \mu \in \textbf{mon}(0)$ e $\textbf{st}(x) = r$ e $\textbf{st}(y) = s$. Basta mostrar que $\textbf{st}(xy) = rs$, ou seja, que $|xy - rs|$ é infinitesimal. De fato: $|xy - rs| = |xy - ry + ry - rs| = |y(x - r) + r(y - s)| \leq |y||x - r| + |r||y - s| = |y|\gamma + |r|\mu$. Como $\textbf{mon}(0)$ é um ideal de ${}^{\star}\mathbb{R}_f$, então $|y|\gamma + |r|\mu$ é infinitesimal. Assim, segue imediatamente que $\textbf{st}(x/y) = \textbf{st}\left(\frac{1}{y} \cdot x\right) = \textbf{st}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \textbf{st}(x) = \frac{\textbf{st}(x)}{\textbf{st}(y)}$, pois $\textbf{st}\left(\frac{1}{y}\right) = \textbf{st}(y^{-1}) = s^{-1} = \frac{1}{s} = \frac{1}{\textbf{st}(y)}$.

(c) Sejam $x = p + \beta$ e $y = q + \lambda$ com $p, q \in \mathbb{R}$ e $\beta, \lambda \in \textbf{mon}(0)$. Logo $\textbf{st}(x) = p$ e $\textbf{st}(y) = q$, então basta mostrarmos que $p \leq q$. Da hipótese que $x \leq y$ implica em $p + \beta \leq q + \lambda$. Tomando a função parte standard $\textbf{st}(.)$ obtemos $\textbf{st}(p + \beta) \leq \textbf{st}(q + \lambda) \Leftrightarrow p \leq q$.

Agora suponhamos que $\textbf{st}(x) \geq \textbf{st}(y)$. Então $\textbf{st}(p + \beta) \geq \textbf{st}(q + \lambda) \Leftrightarrow p \geq q$ o que contradiz a hipótese.

O próximo teorema mostra que existe uma relação natural entre o comportamento limite de uma sucessão de números reais e o número hiper-real representado por sua classe de equivalência.

Teorema 2.6. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais que converge para um número $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \approx \alpha$*

Esta demonstração também é relatada em Pinto (2000), p. 95.

O recíproco deste teorema não vale, pois da relação $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \approx \alpha$ só podemos concluir que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsucessão $(a_{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para α de modo que $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}$.

O conjunto dos números reais possui ainda outras extensões como é o caso dos números complexos $\mathbb{C}$ e dos quaternários $\mathbb{H}$. No entanto, diferentemente dos hiper-reais, esses conjuntos não podem ser representados na reta numérica, pois não possuem ordenação.

3 Aplicações dos números hiper-reais

A escrita deste capítulo também está fundamentada no livro de José J. M. Sousa Pinto (2000).

A Análise Não-Standard, criada por Robinson em 1960, representa uma importante aplicação dos números hiper-reais já que esta nada mais é que a Análise Real pautada no uso dos infinitésimos. O Cálculo também pode ser reescrito com base nesse novo conjunto numérico, contudo neste terceiro e último capítulo iremos apenas selecionar alguns teoremas clássicos de análise e do cálculo e exibiremos suas respectivas demonstrações utilizando somente argumentos não-standard, tornando-as mais simples e objetivas. Para tanto, é necessário a criação de algumas definições básicas de análise e também do cálculo no contexto da **ANS**, tais definições são normalmente mais compreensíveis que as suas congêneres standard.

Mostraremos a seguir uma extensão dos números naturais que será essencial para o desenvolvimento deste capítulo.

O conjunto numérico ${}^{\star}\mathbb{N}$ é uma extensão não-standard de $\mathbb{N}$ comumente designado **conjunto dos números hipernaturais.** Essa extensão é, na verdade, um subconjunto de números hiper-reais da forma $v \equiv [(m_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ onde m_n pertence a $\mathbb{N}$, para $\mathcal{U}$-quase todo o $n \in \mathbb{N}$ (isto é, para todo o n pertencente a um subconjunto de $\mathbb{N}$ que pertence a $\mathcal{U}$). Além disso, $\mathbb{N}$ é subconjunto de ${}^{\star}\mathbb{N}$ já que a todo o $m \in \mathbb{N}$ se pode fazer corresponder o número $[(m)_{n \in \mathbb{N}}]$ pertencente a ${}^{\star}\mathbb{N}$.

3.1 Convergência em ${}^{\star}\mathbb{R}$

3.1.1 Sucessões de números reais

Sendo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de números reais, define-se uma aplicação $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $a(n) = a_n$. Então uma sucessão de números reais é simplesmente uma função real cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ e, portanto, faz sentido falar na extensão não-standard de uma sucessão de números reais chamada de *hipersucessão standard,* que é a aplicação ${}^{\star}a : {}^{\star}\mathbb{N} \to {}^{\star}\mathbb{R}$ definida para cada número hipernatural $v \equiv [(m_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in {}^{\star}\mathbb{N}$, por

$$ {}^{\star}a(v) = a_v \equiv [(a_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}] \in {}^{\star}\mathbb{R} $$

Se v for finito então existe um número natural $j \in \mathbb{N} \subset {}^{\star}\mathbb{N}$ tal que $m_n = j$ para $\mathcal{U}$-quase todo o $n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$ [(a_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}] = [(a_j)_{n \in \mathbb{N}}] = {}^{\star}(a_j) \equiv a_j $$

ou seja, para índices finitos, a hipersucessão standard $(a_\nu)_{\nu \in {}^\star\mathbb{N}}$ coincide, como era previsto, com a sucessão original.

Definição 3.1. *Uma sucessão real* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diz-se* **S-convergente** *para o número real* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se e só se a relação* $a_\nu \approx \alpha$ *se verificar, qualquer que seja o número hipernatural infinito* ν, *isto é, se e só se*

$$\forall_\nu \, [\, \nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty \Rightarrow a_\nu \approx \alpha \,]$$

A sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *dirá-se* **S-divergente** *se não for* **S-convergente**.

Teorema 3.1. *Uma sucessão real* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge para o número* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se e só se for* **S***-convergente para o mesmo número.*

Demonstração: Suponha-se que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

e seja $\nu \equiv [\, (m_n)_{n \in \mathbb{N}} \,]$ um número hipernatural. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{\, n \in \mathbb{N} : m_n \geq n_0 \,\} \subset \{\, n \in \mathbb{N} : \, |a_{m_n} - \alpha| < r \,\}$$

Consequentemente, se $\nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$ então $\{\, n \in \mathbb{N} : m_n \geq n_0 \,\} \in \mathcal{U}$ e, portanto, da inclusão indicada resulta que se tem $\{\, n \in \mathbb{N} : |a_{m_n} - \alpha| < r\} \in \mathcal{U}$ o que, dada a arbitrariedade de $r \in \mathbb{R}^+$, significa que $|a_\nu - \alpha| \approx 0$. Ou seja, $\nu \in {}^\star\mathbb{N} \Rightarrow a_\nu \approx \alpha$. Reciprocamente, suponha-se que

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq \alpha$$

Então,

$$\exists_r \, [\, r \in \mathbb{R}^+ \wedge \forall_n \, [\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists_m \, [\, m \in \mathbb{N} \wedge m \geq n \wedge |a_m - \alpha| \geq r \,]]]$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $m_n \in \mathbb{N}$ um número natural que satisfaz a condição indicada acima. Definindo $\nu \equiv [(m_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ tem-se que $\nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$ e, no entanto, a_ν não é infinitamente próximo à α. Consequentemente a condição

$$\forall_\nu \, [\, \nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty \Rightarrow a_\nu \approx \alpha \,]$$

implica que a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convirja para α.

Este teorema mostra que a convergência de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para α equivale a dizer que **mon**(α) contém toda a cauda infinita da hipersucessão standard $(a_n)_{n \in {}^\star\mathbb{N}}$.

A seguir exibiremos algumas demonstrações de resultados importantes da análise real usando a definição 3.1 de **S**-convergência que, para simplificar a notação, chamaremos apenas por convergência.

Teorema 3.2. *Uma sucessão de números reais, converge, no máximo para um número real.*

Demonstração: Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão real convergente. Suponha que à mesma converge para dois limites, $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, para $v \in {}^{\star}\mathbb{N}_\infty$ teremos $a_v \approx a$ e $a_v \approx b$ o que implica em $a \approx b$. Mas, o único infinitésimo real é o zero, então $a = b$.

Teorema 3.3. *Uma sucessão real* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é* **limitada** *se e só se* a_v *pertencer a* ${}^{\star}\mathbb{R}_f$*, qualquer que seja* $v \in {}^{\star}\mathbb{N}_\infty$*, isto é, se e só se verificar a inclusão* $\{a_v : v \in {}^{\star}\mathbb{N}_\infty\} \subset {}^{\star}\mathbb{R}_f$.

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Sem perda de generalidade, suponha $(a_n)_{n \text{ ßn } \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada superiormente. Então existe um número real $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\forall_n \, [\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \leq M \,]$$

Transferindo para ${}^{\star}\mathbb{R}$ teremos

$$\forall_n \, [\, n \in {}^{\star}\mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \leq M \,]$$

com isso, $a_v \in {}^{\star}\mathbb{R}_f$ para todo o $v \in {}^{\star}\mathbb{N}_\infty$.

$(\Longleftarrow)$ Suponha, agora, que para todo o $v \in {}^{\star}\mathbb{N}_\infty$ tenhamos $a_v \in {}^{\star}\mathbb{R}_f$. Logo, podemos então escrever

$$\exists_M \, [\, M \in {}^{\star}\mathbb{R}^+ \wedge \forall_v \, [\, v \in {}^{\star}\mathbb{N} \Rightarrow |a_v| \leq M \,]]$$

Fazendo a transferência para $\mathbb{R}$ teremos

$$\exists_M \, [\, M \in \mathbb{R}^+ \wedge \forall_n \, [\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \leq M \,]]$$

donde conclui-se que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada.

Teorema 3.4. *Se uma sucessão real* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *for convergente então é limitada.*

Demonstração: Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo teremos $a_v \approx \alpha$, qualquer que seja o número hipernatural infinito $v \in {}^{\star}\mathbb{N}_\infty$. Como α é real, então $a_v \in {}^{\star}\mathbb{R}_f$ para todo o $v \in {}^{\star}\mathbb{N}_\infty$ e pelo teorema anterior obtemos o resultado pretendido.

3.1.1.1 Sucessões monótonas

Utilizando os resultados e definições não-standard relatados anteriormente, provaremos um teorema importante de Análise Matemática referente a sucessões monótonas e limitadas de números reais.

Teorema 3.5. *Uma sucessão de números reais monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponha $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais monótona crescente e limitada superiormente. Pelo teorema 3.3 temos que $a_\nu \in {}^\star\mathbb{R}_f$ qualquer que seja $\nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$. Fixando $\nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$, tome $\alpha = \mathbf{st}\, a_\nu$, mostraremos que α é um majorante de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da hipótese temos

$$\forall_{m,n} \, [\, m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow [\, n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m \,]]$$

aplicando o principio de transferência, temos

$$\forall_{m,n} \, [\, m,n \in {}^\star\mathbb{N} \Rightarrow [\, n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m \,]]$$

De modo particular, se $n \in \mathbb{N}$ é qualquer então $n < \nu$ donde segue, $a_n \leq a_\nu \approx \alpha$. Como $a_n, \alpha \in \mathbb{R}$ então $a_n \leq \alpha$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Logo, α é um majorante da sucessão real dada.

Considere γ um outro majorante da sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Então $a_n \leq \gamma$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e, por transferência, $a_n \leq \gamma$ qualquer que seja $n \in {}^\star\mathbb{N}$. Consequentemente, $\alpha \approx a_\nu \leq \gamma$ implicando em $\alpha \leq \gamma$, pois $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$. Logo α é o menor dos majorantes da sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e, portanto, $\alpha = \sup a_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Se ao invés de se ter fixado o número $\nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$ tivéssemos considerado um outro número $\nu' \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$ teríamos obtido para supremo da sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o número real $\alpha' = \mathbf{st}\, a'_\nu$. Porém, o supremo de um conjunto, quando existe, é único. Então $\alpha' = \alpha$ e, assim, podemos escrever

$$\forall_\nu \, [\, \nu \in \mathbb{N}_\infty \Rightarrow a_\nu \approx \alpha \,]$$

o que, com base na definição 3.1, equivale à dizer que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$.

3.1.1.2 Critério de convergência de Cauchy

Como vimos, a aplicação da definição 3.1, de sucessão real convergente, só é possível se conhecermos antecipadamente um número real α, candidato a limite da referida sucessão. Deste modo, para verificar a divergência de uma sucessão qualquer, seria preciso, teoricamente, analisar todos os possíveis números reais α. Mas, como se sabe, o simples conhecimento dos termos da sucessão é suficiente para fazermos inferências a respeito de sua natureza, de acordo com o chamado **critério de convergência de Cauchy**.

Da análise real temos que uma sucessão $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ se diz *de Cauchy* se e só se para todo o número real $e > 0$ for possível associar uma ordem $n_e \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall_{m,n}\,[\,m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow [\,m,n \geq n_e \Rightarrow |a_m - a_n| < e\,]] \qquad (1)$$

O teorema seguinte apresentará uma versão não-standard equivalente de sucessão de Cauchy. Esta versão se baseia na noção intuitiva de que uma sucessão é de Cauchy se e só se os termos de ordem infinita da hipersucessão standard estiverem todos infinitamente próximos uns dos outros.

Teorema 3.6. *Uma sucessão $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy se e só se verificar a condição $a_\nu \approx a_\sigma$ quaisquer que sejam os números hipernaturais $\nu,\sigma \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$.*

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Transferindo (1) para ${}^\star\mathbb{R}$, teremos

$$\forall_{m,n}\,[\,m,n \in {}^\star\mathbb{N} \Rightarrow [\,m,n \geq n_e \Rightarrow |a_m - a_n| < e\,]]$$

Considere, em particular, $m = \sigma$ e $n = \nu$ com $\sigma,\nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty \subset {}^\star\mathbb{N}$. Então, para todo o $e \in \mathbb{R}^+$ teremos que $\sigma,\nu > n_e$ (porque n_e é sempre finito) e, portanto, $|a_\sigma - a_\nu| < e$ o que implica em $a_\sigma \approx a_\nu$.

$(\Longleftarrow)$ Reciprocamente, suponha que a relação $a_\sigma \approx a_\nu$ é verdadeira quaisquer que sejam os números hipernaturais infinitos σ,ν. Tome um número real $e > 0$ arbitrário, então podemos escrever

$$\exists_\eta\,[\,\eta \in {}^\star\mathbb{N} \wedge \forall_{\sigma,\nu}\,[\,\sigma,\nu \in {}^\star\mathbb{N} \Rightarrow [\,\sigma,\nu \geq \eta \Rightarrow |a_\sigma - a_\nu| < e\,]]]$$

de acordo com a hipótese, esta expressão é verdadeira para qualquer $\eta \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$ fixado. Assim, transferindo para $\mathbb{R}$ teremos

$$\exists_p\,[\,p \in \mathbb{N} \wedge \forall_{m,n}\,[\,m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow [\,m,n \geq p \Rightarrow |a_m - a_n| < e\,]]]$$

e devido a arbitrariedade de e, concluímos que a sucessão $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Teorema 3.7. *Toda sucessão de Cauchy é limitada.*

Sua demonstração pode ser analisada em Pinto 2000, p. 160.

Embasados pelos resultados obtidos anteriores, provaremos um teorema bastante conhecido de Análise Real.

Teorema 3.8. *Uma sucessão de números reais $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ é convergente se e só se for uma sucessão de Cauchy.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Seja $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente para um número real α. De fato, dados $\sigma, \nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$ quaisquer temos $a_\sigma \approx \alpha$ e $a_\nu \approx \alpha$ e, consequentemente, $a_\sigma \approx a_\nu$. Portanto, do teorema 3.6 segue que $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy.

($\Longleftarrow$) Suponha $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy. Então $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada e para todo o $\nu \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$ temos $a_\nu \in {}^\star\mathbb{R}_f$. Agora, tome $\alpha = \mathbf{st}\, a_\nu$, da hipótese segue que $a_\sigma \approx \alpha$ qualquer que seja $\sigma \in {}^\star\mathbb{N}_\infty$. Logo, da definição de **S**-convergência, conclui-se que $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ converge para α.

3.2 Limite e derivada em ${}^\star\mathbb{R}$

Provaremos a seguir, as regras usuais do cálculo de limites de sucessões de números reais utilizando apenas raciocínios não-standard.

Teorema 3.9. *Sejam $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ duas sucessões reais convergentes para os números reais a e b, respectivamente, então*

i. $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} (a_n + b_n) = a + b$

ii. $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} (a_n - b_n) = a - b$

iii. $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

iv. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = a/b\ (b \neq 0)$

Demonstração:

i. Por hipótese, $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} b_n = b$. Então, pelo teorema 2.6 temos que $[(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}] \approx a$ e $[(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}] \approx b$ em particular, $a_n \approx a$ e $b_n \approx b$ e, consequentemente, $a_n - a = \varepsilon_1$ e $b_n - b = \varepsilon_2$, com $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{mon}(0)$. Assim, $(a_n + b_n) - (a + b) = \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbf{mon}(0)$. Por transferência para $\mathbb{R}$ tem-se $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\,\to\,\infty} (a + b) = a + b$.

ii. É análogo ao item ***i.***

iii. Partindo da hipótese do teorema e de algumas afirmações feitas no item ***i.***, obtemos $a_n - \varepsilon_1 = a$ e $b_n - \varepsilon_2 = b$, com $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{mon}(0)$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Logo, $(a_n - \varepsilon_1) \cdot (b_n - \varepsilon_2) = ab$ implicando em $a_n b_n - a_n \varepsilon_2 - b_n \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = ab$. Note que $-a_n \varepsilon_2 - b_n \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \delta \in \mathbf{mon}(0)$ e, portanto, transferindo-se para $\mathbb{R}$ tem-se $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\,\to\,\infty} a \cdot b = a \cdot b$.

iv. Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_n} \cdot a_n\right).$$

Da hipótese de $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} b_n = b$ temos que $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} 1/b_n = 1/b$ donde segue que $[(1/b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}] \approx 1/b$. Logo, $a_n - \varepsilon_1 = a$ e $1/b_n - \varepsilon_2 = 1/b$, com $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{mon}(0)$ e $a, 1/b \in \mathbb{R}$ implicando em $(a_n - \varepsilon_1) \cdot (1/b_n - \varepsilon_2) = a_n/b_n - a_n\varepsilon_2 - \varepsilon_1/b_n + \varepsilon_1\varepsilon_2 = a/b$. Como $-a_n\varepsilon_2 - \varepsilon_1/b_n + \varepsilon_1\varepsilon_2 = \delta \in \mathbf{mon}(0)$ então transferindo para $\mathbb{R}$ obtemos $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n/b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a/b = a/b$.

3.2.1 Cálculo de limites: $\mathbb{R}$ *versus* $^{\star}\mathbb{R}$

A seguir mostraremos, por meio de um exemplo, duas maneiras distintas de se demonstrar limites. A primeira, mais conhecida, baseia-se na teoria de limites dos famosos $\varepsilon' s$ e $\delta' s$ e a segunda, mais recente fundamenta-se nos números hiper-reais de Robinson.

Exemplo 3.1. Prove os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to 1} 2x + 3 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Inicialmente vamos escrever, sem muita formalidade, a definição de limite criada por Weierstrass no século XIX,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\,\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0\,;\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,).$$

Demonstração de **a)** usando limites:

Da definição temos que, $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |2x+3-5| < \varepsilon$, então $|2x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |2(x-1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |2||x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \varepsilon/2$. Portanto, tomando $\delta < \varepsilon/2$ teremos o resultado desejado, isto é, $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |2x+3-5| < \varepsilon$.

Demostração de **a)** usando os números hiper-reais:

Suponhamos que x esteja infinitamente próximo de 1, então $x = 1 + \varepsilon$, com $\varepsilon \in \mathbf{mon}(0)$. Utilizando a função parte standard $\mathbf{st}(\cdot)$ teremos

$$\mathbf{st}\,(2(1+\varepsilon)+3) = \mathbf{st}\,(2+2\varepsilon+3) = \mathbf{st}(5+2\varepsilon) = 5.$$

Demonstração de **b)** usando limites:

Dado $\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2-2^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x-2)(x+2)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2||x+2| < \varepsilon$. Agora, supondo $\delta \leq 1$ teremos, $\delta \leq 1 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow -1+4 < x-2+4 < 1+4 \Leftrightarrow 3 < x+2 < 5 \Leftrightarrow |x+2| < 5 \Leftrightarrow \delta|x+2| < 5\delta$. Da definição temos, $|x-2| < \delta \Leftrightarrow |x-2||x+2| < \delta|x+2|$. Como $\delta|x+2| < 5\delta$, então $|x-2||x+2| < 5\,\delta$. Finalmente, note que $|x-2||x+2| < \varepsilon$ e $|x-2||x+2| < 5\,\delta$ o que implica em $5\delta < \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \varepsilon/5$. Portanto, tomando $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$ teremos o resultado esperado $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$.

Demonstração de **b)** usando os números hiper-reais.

Novamente, suponhamos que x esteja infinitamente próximo de 2, logo $x = 2+\delta$, com $\delta \in \mathbf{mon}(0)$. Aplicando a função parte standard $\mathbf{st}(\cdot)$ teremos

$$\mathbf{st}((2+\delta)^2) = \mathbf{st}(4+4\delta+\delta^2) = 4$$

Demonstração de **c)** usando limites:

Dado $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \varepsilon$. Mas, temos da definição $|x-1| < \delta$, logo tomando $\delta \leq \varepsilon$ teremos o resultado desejado,

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon.$$

Demonstração de **c)** usando os números hiper-reais:

Consideremos x infinitamente próximo de 1 então $x = 1+\mu$, com $\mu \in \mathbf{mon}(0)$. Usando a função parte standard $\mathbf{st}(\cdot)$ obteremos:

$$\mathbf{st}\left(\frac{(1+\mu)^2-1}{1+\mu-1}\right) = \mathbf{st}\left(\frac{1+2\mu+\mu^2-1}{\mu}\right) = \mathbf{st}\left(\frac{\mu(2+\mu)}{\mu}\right) = \mathbf{st}(2+\mu) = 2$$

3.2.2 A derivada e os hiper-reais

Agora, vamos apresentar o raciocínio usado por Leibniz, em pleno século XVII, para o cálculo de derivadas.

Dada função $f(x) = x^2$, por exemplo, Leibniz argumentava da seguinte forma; considere dx um infinitésimo e calcule o diferencial $dy = f(x+dx) - f(x)$, agora divida esse diferencial por dx (não nulo) e teremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{dx(2x+dx)}{dx} = 2x + dx.$$

Mas, como dx é infinitesimal então podemos descartá-lo. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Perceba que esse raciocínio de Leibniz é um tanto confuso, pois de início ele supõe $dx \neq 0$ já que se pretendia dividir por dx e na fase final dos cálculos dx é abandonado como se fosse zero. Leibniz foi duramente criticado pelos matemáticos da época por não saber explica a origem do seu próprio diferencial dx. Surgia assim, o Cálculo Infinitesimal.

No entanto, três séculos depois, Robinson ao criar sua Análise Não-Standard explica a origem dos diferenciais de Leibniz provando se tratar de números infinitesimais, menores que qualquer numero real positivo. Pois bem, podemos aplicar essa nova análise no cálculo de derivadas e integrais sem usar a teoria de limites, isto é, nada de $\varepsilon' s$ e $\delta' s$. Então, para calcular a derivada da função $f(x) = x^2$ vamos usar, mais uma vez, a função parte standard. Portanto teremos,

$$f'(x) = \mathbf{st}\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right) = \mathbf{st}\left(\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}\right) = \mathbf{st}\left(\frac{x^2+2xdx+(dx)^2-x^2}{dx}\right) =$$

$$= \mathbf{st}\left(\frac{dx(2x+dx)}{dx}\right) = \mathbf{st}(2x+dx) = 2x$$

Para reforçar essa ideia, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 3.2. Usando a função parte standard, calcule a derivada de $f(x) = x^2+x+1$ no ponto $x = 1$.

De posse da função parte standard temos que:

$$f'(x) = \mathbf{st}\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right) = \mathbf{st}\left(\frac{(x+dx)^2+x+dx+1-(x^2+x+1)}{dx}\right) =$$

$$= \mathbf{st}\left(\frac{(2xdx+(dx)^2+dx}{dx}\right) = \mathbf{st}(2x+dx+1) = 2x+1.$$

Assim, em $x=1$ temos $f'(1) = 2\cdot 1+1 = 3$.

3.3 Euler e os infinitesimais

Veremos a seguir como o matemático Leonhard Euler descobriu o famoso número e de Neper usando intuitivamente a noção de número infinito e infinitesimal, sendo relatado na obra *"Introduction Analysin Infinitorum"* publicada em 1748.

Euler define $a^0 = 1$ para todo o $a \in \mathbb{R}^+$ e um valor ε infinitamente pequeno. Logo teremos,

$$a^{\varepsilon} = 1+k\varepsilon, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Agora tomando x em $\mathbb{R}^+$ implica que x/ε é, segundo o próprio Euler, um número infinitamente grande que será indicado por ω. Assim,

$$a^x = a^{\omega\varepsilon} = (a^{\varepsilon})^{\omega} = (1+k\varepsilon)^{\omega}.$$

Utilizando a fórmula do binômio de Newton, obtemos

$$a^x = \left(1+\frac{kx}{\omega}\right)^{\omega} \tag{1}$$

$$= 1+\omega\left(\frac{kx}{\omega}\right)+\frac{\omega(\omega-1)}{2!}\left(\frac{kx}{\omega}\right)^2+\cdots+\frac{\omega(\omega-1)\cdots(\omega-n+1)}{n!}\left(\frac{kx}{\omega}\right)^n+\cdots$$

$$= 1+\left(\frac{k}{1!}\right)x+\frac{\omega-1}{\omega}\left(\frac{k^2}{2!}\right)x^2+\cdots+\frac{\omega-1}{\omega}\frac{\omega-2}{\omega}\cdots\frac{\omega-n+1}{\omega}\left(\frac{k^n}{n!}\right)x^n+\cdots$$

Como ω é infinitamente grande. Euler, sem mais considerações, escreve

$$1 = \frac{\omega-1}{\omega} = \frac{\omega-2}{\omega} = \cdots = \frac{\omega-j}{\omega} = \cdots$$

ao passo que, após substituições, teremos o desenvolvimento em série

$$a^x = 1+\frac{x}{1!}k+\frac{x^2}{2!}k^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}k^n+\cdots$$

Finalmente, fazendo $x = 1$, define-se o número e como sendo o valor de a para o qual a constante k é igual a 1, ou seja,

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

Portanto de (1), obtemos

$$e^x = \left(1+\frac{x}{\omega}\right)^\omega = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

e, em particular, para $x = 1$,

$$e = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

onde, para Euler, ω é um número infinitamente grande.

Ainda em *"Introduction Analysin Infinitorum",* Euler deduz a série da função trigonométrica sen a, com $a \in \mathbb{R}$ utilizando-se somente de técnicas infinitesimais. Note que das fórmulas de Moivre,

$$(\cos z+i\text{sen } z)^n = \cos nz+i\text{sen } nz$$
$$(\cos z-i\text{sen } z)^n = \cos nz-i\text{sen } nz,$$

temos a expressão

$$\text{sen}(nz) = \frac{1}{2i}\{(\cos z+i\text{sen } z)^n-(\cos z-i\text{sen } z)^n\} \tag{1}$$

Aplicando novamente a fórmula do binômio, temos

$$(\cos\ z + i\text{sen}\ z)^n = \cos^n z + n\cos^{n-1} z\ i\text{sen}\ z - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2} z\ \text{sen}^2 z$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3} z\ i\text{sen}^3 z$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4} z\ \text{sen}^4 z$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5} z\ i\text{sen}^5 z + \cdots \quad (2)$$

$$(\cos\ z - i\text{sen}\ z)^n = \cos^n z - n\cos^{n-1} z\ i\text{sen}\ z - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2} z\ \text{sen}^2 z$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3} z\ i\text{sen}^3 z$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4} z\ \text{sen}^4 z$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5} z\ i\text{sen}^5 z + \cdots \quad (3)$$

Fazendo $(2)-(3)$ temos

$$(\cos z + i\text{sen}\ z)^n - (\cos z - i\text{sen}\ z)^n = 2in\cos^{n-1} z\ \text{sen}\ z - 2i\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3} z\ \text{sen}^3 z$$

$$+2i\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5} z\ \text{sen}^5 + \cdots \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1), temos

$$\text{sen}(nz) = \frac{1}{2i}\{2in\cos^{n-1} z\ \text{sen}\ z - 2i\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3} z\ \text{sen}^3 z + \cdots\}$$

$$= n\cos^{n-1} z\ \text{sen}\ z - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3} z\ \text{sen}^3 z + \cdots \quad (5)$$

Euler considerou, sem muitas explicações, n com sendo *um número infinito e* z *um infinitésimo* de tal forma que o produto nz seja um número real a. Com isso, temos as seguintes igualdades

$$\text{sen}\ z = z, \quad \cos z = 1$$

$$nz = a, \quad (n-1)z = a, \quad (n-2)z = a, \cdots$$

substituindo estas informações em (5) temos

$$\text{sen}\ a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \cdots$$

que hoje sabemos se tratar da fórmula do desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\operatorname{sen} a$, com $a \in \mathbb{R}$.

Exibiremos agora uma demonstração para as igualdades de Euler de modo que possamos calcular algebricamente o $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (limite trigonométrico fundamental), isto é, usando somente métodos não-standard. Desta forma, abriremos mão do uso da geometria em sua demonstração que outrora era impensado.

Sabemos que a função seno é crescente no primeiro quadrante, contínua em todo o seu domínio e que $\operatorname{sen} 0 = 0$. Logo, se z é um infinitésimo então $\operatorname{sen} z \in \mathbf{mon}(0)$, ou seja, $\operatorname{sen} z$ também será um infinitésimo.

Da trigonometria temos $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ donde segue que $\cos z = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z}$. Tomando a parte standard de $\cos z$ obtemos $\cos z = 1$.

Sendo ε um infinitésimo então $1/\varepsilon$ é um número infinito, digamos n. Assim, $nz = a \Leftrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot z = a \Leftrightarrow z = a\varepsilon$. Esta última igualdade e verdadeira de acordo com o teorema 2.3. Portanto, $nz = a$.

Finalmente provemos, com uso dos números hiper-reais, que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Note que,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\
\frac{\operatorname{sen} x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots
\end{aligned}$$

Como x está infinitamente próximo de zero então $x \in \mathbf{mon}(0)$, isto é, $x = 0 + \varepsilon$ com ε infinitesimal. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(0+\varepsilon)}{0+\varepsilon} &= 1 - \frac{(0+\varepsilon)^2}{3!} + \frac{(0+\varepsilon)^4}{5!} - \cdots \\
\frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\varepsilon} &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{3!} + \frac{\varepsilon^4}{5!} - \cdots
\end{aligned}$$

Utilizando a função parte standard $\mathbf{st}(.)$ temos

$$\mathbf{st}\left(\frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\varepsilon}\right) = \mathbf{st}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3!} + \frac{\varepsilon^4}{5!} - \cdots\right) = 1$$

o que prova a afirmação feita.

Considerações Finais

Este trabalho mostrou que os infinitésimos foram e continuam sendo essenciais para o avanço da matemática, pois como se sabe são 25 séculos de história até a sua formalização com a criação do conjunto dos números hiper-reais. No entanto, muito antes que Robinson pensasse em criar este conjunto matemáticos como Gottfried Leibniz, Isaac Newton, Leonhard Euler e tantos outros já tinham feito descobertas surpreendentes usando, de maneira intuitiva, a ideia de número infinito e infinitesimal.

Apresentamos a construção do conjunto $^{\star}\mathbb{R}$ uma importante extensão, não arquimediana, de $\mathbb{R}$ que nos permitiu calcular limite e derivada de uma maneira inovadora sem precisarmos recorrer a teoria de limites com seus $\varepsilon's$ e $\delta's$, ou seja, deixamos de operar logicamente para operarmos algebricamente o que torna as demonstrações mais fáceis e legíveis. Por meio deste novo conjunto, vimos ser possível encarar alguns aspectos da Análise Real e também o Cálculo usando métodos não-standard.

A teoria de limites e o conceito de derivada são duas áreas da matemática de muita relevância que já figuram em algumas escolas do ensino médio e a tendência é que futuramente venha a compor também o currículo obrigatório de matemática. Por esta razão, se faz necessário pensarmos em materiais didáticos e professores qualificados a ponto de ministrar aulas de limite e derivada embasado nos números hiper-reais. Na minha opinião e também de alguns autores, é mais fácil e intuitivo para os estudantes do ensino médio a abordagem destes conteúdos baseado nos números hiper-reais.

Referências

BROLEZZI, Antônio Carlos. Raízes do Cálculo na Grécia Antiga. **Revista da Pesquisa** & **Pós-Graduação**, ano 1 v. 1, n. 1, p. 38-41, jan/jun, 1999. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/ brolezzi/publicacoes/grecia.pdf>. Acesso em: 29 out. 2018.

CALEFE, Michele. **Construção de conjuntos numéricos:** dos números inteiros aos hiperreais, 2016. 102f. Trabalho de Conclusão de Curso (Tese). Curso de Matemática. Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, Campinas, 2016. Disponível em: <repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/321576>. Acesso em: 01 nov. 2018.

CARVALHO, Tadeu Fernandes de; D'OTTAVIANO, Itala M. Loffredo. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 8, n. 1, p. 13-43, 2006. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/544>. Acesso em: 26 out. 2018.

D'OTTAVIANO, Itala M. Loffredo; BERTATO, Fábio Maia. George Berkeley e os fundamentos do cálculo diferencial e integral. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**. Campinas, série 4, v. 1, n. 1, p. 33-73, jan/jun, 2015. Disponível em: <https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/cadernos/article/view/533>. Acesso em: 29 out. 2018.

MELCHIORS, Angeline; SOARES, Maricélia. Historia do Cálculo Diferencial e Integral. **Maiêutica - Curso de Matemática**. Santa Catarina, v. 1, n. 1, p. 67-79, 2013. Disponível em: <https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/download/.../233>. Acesso em: 26 out. 2018.

PINTO, J. J. M. S. **Métodos infinitesimais de análise matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. Infinito uma História a contar. **Revista Portuguesa de educação**. Braga, v. 1, n. 1, p. 205-222, 2008. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/234659902_Infinito_uma_historia_a_contar>. Acesso em: 22 nov. 2018