Mailton Rego Almeida

Programação linear: Uma aplicação ao problema de compras de um supermercado da cidade de Macaúbas-BA

Vitória da Conquista

2018

Mailton Rego Almeida

Programação linear: Uma aplicação ao problema de compras de um supermercado da cidade de Macaúbas-BA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Licenciatura em Matemática

Orientador: Júlio César dos Reis

Vitória da Conquista

2018

Mailton Rego Almeida
Programação linear:
Uma aplicação ao problema de compras de um supermercado da cidade de Macaúbas-BA/ Mailton Rego Almeida. – Vitória da Conquista, 2018-
58 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Júlio César dos Reis

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Licenciatura em Matemática
, 2018.

1. Programação Linear. 2. Método Gráfico. 3. Método Algébrico. 4. Método Computacional I. Júlio César dos Reis. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. IV. Programação Linear uma aplicação real

Mailton Rego Almeida

Programação linear:
Uma aplicação ao problema de compras de um supermercado da cidade de Macaúbas-BA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática

Trabalho. Vitória da Conquista,

Júlio César dos Reis
Orientador

Jandresson Dias Pires-IFNMG
Professor 1

Edson Patricio Barreto de Almeida-IFBA
Professor 2

Vitória da Conquista
2018

Este trabalho é dedicado as minhas duas estruturas, mãe e pai,
vocês têm grande parcela nessa nova conquista

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitário, mas na minha luta para chegar na universidade.

Ao meu orientador Júlio César, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos nos momentos difíceis.

A minha família, por sua capacidade de acreditar em mim. Mãe, seu cuidado, dedicação e todas as ligações depois das 23h foram o que me deram, em alguns momentos, a esperança para seguir. Pai, sua presença, mesmo distante, significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

Aos meus amigos, pelas alegrias, resenhas, piadas e sofrimentos compartilhados, que não foram poucos.

A todos os professores do curso, que foram tão importantes na minha vida acadêmica.

No fim tudo dá certo.
Se não deu certo, é porque ainda não é o fim.

Resumo

A Programação Linear é uma ferramenta da Pesquisa Operacional aplicada à solução de problemas que objetivam a otimização de um sistema de estudo. No sistema, a função-objetivo e as restrições assumem características lineares e que tem diversas aplicações no controle gerencial, normalmente, envolvendo problemas de utilização dos recursos disponíveis na busca da utilização otimizada dos mesmos, observando-se limitações impostas pelo processo produtivo ou pelo mercado. O presente trabalho mostra algumas aplicações da Programação Linear e como ela pode ser usada para resolver problemas. Abordaremos três métodos de resolução de problemas de Programação Linear: 1) o método de Resolução Gráfica; 2) o Método Algébrico; e 3) Método Computacional (usaremos o software Lindo 6.1 e o Excel). Vamos solucionar, com auxílio desses métodos citados, problemas de otimização com duas ou mais variáveis. Por fim, será determinado um modelo matemático que solucione o problema de compra de mercadoria em um supermercado na cidade de Macaúbas-BA para obter maior lucro, aproveitando ao máximo o capital a ser investido e o espaço disponível para armazenamento.

Palavras-chave: Programação Linear. Método Gráfico. Método Algébrico. Método Computacional.

Abstract

Linear Programming is a tool of the Operational Research applied to the solution of problems to optimize of a system. In the system, the objective function and the constraints assume linear characteristics. This tool has several applications: in the search for optimum use of resources The present work to show some applications of Linear Programming and how it can be used to solve problems. We will talk about three methods of solving Linear Programming problems: 1) the Resolution method Graph; 2) the Algebraic Method ; and 3) Computational Method (we will use the software Lindo 6.1 and Excel). Let us solve optimization problems with two or more variables. Finally, we will find the solution to the problem of buying merchandise in a supermarket in the city of Macaúbas-BA. The objective is to obtain greater profit, taking advantage of the capital to be invested and the space available for storage.

Keywords: Linear Programming. Graphic Method. Algebraic Method. Computational Method

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Muitos colocam o desenvolvimento da Programação Linear como um dos avanços científicos mais importantes do século XX. Seu impacto desde 1950 tem sido extraordinário. Hoje em dia é uma ferramenta padrão que tem possibilitado aumento do lucro para a maioria das companhias nos países industrializados, sendo que seu uso em outros setores da sociedade vem crescendo rapidamente. Qual a natureza desta ferramenta e que tipo de problemas ela resolve?

No primeiro capítulo apresentaremos as respostas para estas 2 perguntas. Resumidamente, o tipo mais comum de aplicação envolve o problema de distribuir recursos limitados entre atividades que estão competindo por aquele recursos da melhor maneira possível (da maneira ótima). A Programação Linear utiliza um modelo matemático para descrever o problema . O termo linear significa que todas as funções matemáticas do modelo são, obrigatoriamente, funções lineares. A palavra programação não se refere a programação de computadores e deve ser vista como um sinônimo de planejamento. Assim, podemos definir a programação linear como sendo o planejamento de atividades para obter um resultado ótimo, isto é, um resultado que atenda, da melhor forma possível, a um determinado objetivo. Embora, alocação de recursos para atividades seja o tipo mais comum, programação linear tem numerosos outros tipos de aplicação. De fato, qualquer problema cujo modelo matemático se enquadre na forma geral desse modelo, é um problema de programação linear.

No segundo capítulo, trataremos de três técnicas utilizadas para encontrar a solução de modelos de Programação Linear. A primeira delas, será o Método de Resolução Gráfica para problemas de otimização com duas variáveis. A segunda técnica abordada será o Método Algébrico, que determina numericamente a solução de um problema de Programação Linear, podendo esse método ser utilizado para resolver problemas de mais de duas variáveis. A terceira será o Método Computacional, no qual utilizaremos os Softwares Lindo 6.1 e o Solver do Excel onde será possível resolver qualquer dos tipos anteriores de problemas.

A compra de mercadoria de um supermercado para obter o lucro máximo é o que todos querem. Existem desafios a serem contornados ao fazer um investimento em mercadoria para revender, limitações físicas para armazenamento de materiais, recursos financeiros disponíveis, orçamento de capital, etc. Com isso, existe a necessidade de delinear um sistema de informações para apoio à tomada de decisão.

Este trabalho tem como objetivo um desenvolvimento de um modelo de Programação Linear, que maximize o resultado operacional (maximizando o lucro total) obedecendo as restrições. Tendo como variáveis ajustáveis, a quantidade de produtos a ser comprada. Os problemas de compras envolvem vários produtos e diversas restrições que dificultam a otimização, sendo que as variáveis e informações iniciais sofrem mudanças graduais, ou seja, os preços dos produtos podem mudar o valor. No terceiro capítulo denominado Aplicações, será resolvido esse problema de maximização.

1 Programação linear

1.1 O que é programação linear?

A programação linear, no campo da programação matemática, é uma área da pesquisa operacional com vasta aplicação em apoio à decisão. O termo “programação”, tanto linear quanto matemática, não tem a ver diretamente com programação de computadores, ou linguagem de programação. Este termo tem origem em suas aplicações, originalmente desenvolvido para resolver problemas industriais. Assim, o termo “programação” da programação linear está relacionado ao planejamento de recursos escassos visando atender as condições operacionais. O termo “linear” como o próprio nome já diz, expressa que as funções do modelo são funções lineares.

Puccini (1981) afirma que os problemas de programação linear referem-se a distribuição eficiente de recursos limitados entre atividades competitivas, com a finalidade de atender a um determinado objetivo, por exemplo maximização de lucros ou minimização de custos. Se tratando de programação linear, esse objetivo será expresso por uma função linear, a qual chamamos de função objetivo. É claro que é necessário dizer quais as atividades que consomem cada recurso e em que proporção é feita esse consumo. Essas informações serão fornecidas por equações ou inequações lineares, uma para cada recurso. Ao conjunto dessas equações ou inequações lineares chamamos de restrições do modelo.

Geralmente, existem inúmeras maneiras de distribuir os escassos recursos entre as diversas variáveis de decisão, bastando para isso que essas distribuições sejam coerentes com as equações de consumo de cada recurso, ou seja, que elas satisfaçam as restrições do problema. Entretanto, deseja-se achar aquela distribuição que satisfaça as restrições do problema e que alcance o objetivo desejado, isto é, que maximize o lucro e minimize o custo. A essa solução chamamos de solução ótima.

Uma vez obtido o modelo linear, constituído pela função objetivo (linear) e pelas restrições lineares, a programação linear se incumbe de achar a solução ótima. Vamos ver inicialmente como isso pode ser obtido graficamente, quando o modelo envolve apenas duas variáveis de decisão. Se o número de variáveis for maior que dois, como acontece na maioria dos casos reais, só será possível determinar a solução ótima com outras técnicas.

A programação linear tem sido utilizada em áreas muito diversas, destacando-se: dosagem (mistura, receita ou blending) – alimentação, formulações de rações, fabricação de adubos, ligas metálicas, petróleos e minérios; transporte; investimentos; avaliação de recursos – fábricas, fazendas; localização industrial; designação; compras; fluxo de redes. Onde mais se destaca a aplicação da Programação Linear é no setor industrial. Modelos de transporte e de fluxo em redes também são utilizados em logística com excelentes resultados.

1.2 Aspectos Históricos

Conforme Prado (1999), durante a Segunda Guerra Mundial foi levantado um problema, nos EUA, que desafiou os estudiosos de ciências exatas. Este problema ficou conhecido pelo nome de *"Problema da Dieta"* e se resumia em descobrir qual a alimentação mais econômica, levando-se em conta que o organismo humano necessita de uma quantidade mínima diária de certos nutrientes(tais como proteínas, vitaminas, etc), que devem ser obtidos de alimentos que possuem preços e composição de nutrientes diferentes. O desafio foi publicado no conhecido jornal The New York Times e ganhou repercussão nacional. A melhor solução ao problema foi apresentada por George Stigler, em 1945, na qual, partindo de 77 alimentos e levando em consideração a composição de 9 nutrientes em cada um, ele chegou à conclusão de que a dieta ideal implicaria um custo anual de US$59,88 e seria composta de farinha de trigo, repolho e fígado de porco. A solução apresentada era inusitada, pois Stigler não levou em consideração nenhum aspecto de diversidade, gosto, aspecto, etc: apenas considerou aspectos econômicos. O valor do custo de sua composição ficava muito abaixo das outras propostas mas, certamente, ninguém iria manter aquela única alimentação por qualquer período. Assim, o concurso foi alvo de muitas chacotas, mas em pouco tempo se constatou que aquela técnica poderia ser utilizada sem rejeição em áreas semelhantes, tais como alimentação de animais ou carga de um alto-forno de uma siderúrgica. Imediatamente, iniciaram-se tais estudos, mas a técnica utilizada por Stigler (tentativas) mostrou-se sujeita a erros, extremamente tediosa e cansativas, além de nem sempre encontrar a solução ótima.

Esta técnica de planejamento somente se consolidou com George Dantizig, em 1947, que desenvolveu o Método Simplex, capaz de resolver qualquer problema de PL. Dantzig desenvolveu esta técnica quando trabalhava na Rand Corporation no projeto SCOOP *(Scientific Computation of Optimum Programs)* para a Força Aérea Americana, desenvolvendo técnicas de otimização para problemas militares. O algoritmo Simplex implica uma quantidade muito grande de cálculos e, nos primeiros anos de uso, ele se apoiou exclusivamente na resolução manual. Com o surgimento do computador, em 1951, a Programação Linear encontrou seu aliado natural e foi se expandindo em uma maneira extraordinária.

Do ponto de vista histórico é importante saber que o assunto foi inicialmente analisado em 1936 por Wassily Leontieff, que criou um modelo constituído por um conjunto de equações lineares, considerando como o primeiro passo para o estabelecimento das técnicas de Programação Linear. O matemático russo L. V. Kantorovick, em 1939, publicou um trabalho sobre planejamento da produção o qual apresentava, dentre diversas abordagens, o uso de equações lineares. Esse trabalho somente veio a ser conhecido no ocidente em 1960. É importante ainda citar que, em 1940, Frank L. Hitchcock apresentou uma abordagem ao problema de transportes.

1.3 Modelos de Programação linear

Segundo definição de Giordano (2008), um problema de otimização é dito Programação Linear se ele satisfizer algumas propriedades:

1. Quando tiver uma única função objetivo.
2. Sempre que a variável de decisão aparecer tanto na função objetivo quanto nas funções restrições, deve-se aparecer somente como potências de expoente 1 e quando muito, multiplicada apenas por uma constante.
3. Nenhum termo da função objetivo ou de qualquer restrição pode conter produto de variáveis de decisão.
4. Os coeficientes das variáveis de decisão da função objetivo e de cada restrição são constantes.
5. As variáveis de decisão podem assumir tanto valores reais como também valores inteiros.

A seguir, estudaremos os principais modelos de programação linear destacados por Puccini (1981).

1.3.1 Problemas da Análise das Atividades

Esse problema consiste em achar x_1, x_2, ..., x_n que maximize a função linear(função objetiva):

$$Z_{max} = f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sabendo que x_1, x_2, ..., x_n devem satisfazer o seguinte sistema de inequações lineares(restrições):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

e que

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \geqslant 0$$

Pode-se representar esse modelo de forma mais compacta, ou seja:

Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ sujeito as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (para \ \ i = 1, 2, ..., m)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (para \ \ j = 1, 2, ..., n)$$

Esse modelo pode ser associado a uma empresa que tem m recursos disponíveis para realização de n atividades. Suponha que as atividades representem a fabricação de produtos.

Tem-se, então, para $j = 1, 2, ..., n$ e $i = 1, 2, ..., m$

$b_i \longrightarrow$ quantidade do recurso i disponível para as n fabricações de produtos;

$x_j \longrightarrow$ nível de produção j. Os x_j são as incógnitas do problema;

$c_j \longrightarrow$ Lucro unitário por produto j;

$a_{ij} \longrightarrow$ quantidade de recurso i consumida na produção de uma unidade do produto j.

Verifica-se, que a função objetiva a ser maximizada representa o lucro total da empresa nessas n produções.

A notação matricial desse modelo é obtida abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \ C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_n \end{bmatrix}$$

então o modelo pode ser representado da seguinte forma:

Max $\quad Z = CX$ sujeito a

$$AX \leqslant B$$

e

$$X \geqslant 0$$

Os dois próximos exemplos foram retirados de Prado (1999).

Exemplo 1 *Uma fábrica de computadores produz 2 modelos de computador: x_1 e x_2. O modelo x_1 fornece um lucro de R\$180,00 e x_2 de R\$ 300,00. O modelo x_1 requer, na sua produção um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo x_2 requer de 1 gabinete grande e 2 unidades de disco. Existem no estoque: 60 unidades do gabinete pequeno, 50 do gabinete grande e 120 unidades de disco.*

Pode-se colocar as informações na tabela 1

Computador	Gabinete pequeno	Gabinete grande	Disco	Lucro R$
x_1	1	0	1	180
x_2	0	1	2	300

Tabela 1 – Informações

Nesse exemplo desejamos maximizar o lucro, portanto a função objetivo é

$$Z_{max} = 180x_1 + 300x_2$$

Sujeito as restrições de estoque

$$\begin{gathered} x_1 \leqslant 60 \\ x_2 \leqslant 50 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 120 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{gathered}$$

1.3.2 Problema da Dieta

Esse problema consiste em achar x_1, x_2, ..., x_n que minimize a função objetiva:

$$Z_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sabendo que x_1, x_2, ..., x_n devem satisfazer o seguinte sistema de inequações lineares(restrições):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{cases}$$

e que

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \geqslant 0$$

Pode-se representar esse modelo da seguinte forma:

Minimizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ sujeito as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \quad (para \ \ i = 1, 2, ..., m) \tag{1.1}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (para \ \ j = 1, 2, ..., n)$$

Esse modelo pode ser associado a uma pessoa que deseja minimizar o custo da sua dieta diária. As atividades representam os consumos dos alimentos que poderão entrar na dieta e os recursos são as vitaminas que não podem deixar de serem supridas pela dieta.

Tem-se então, para $j = 1, 2, ..., n$ e $i = 1, 2, ..., m$

$b_i \longrightarrow$ quantidade minima da vitamina i que deve ser obtida dos n alimentos.

$x_j \longrightarrow$ quantidade de alimentos j na dieta. Os x_j são as incógnitas do problema;

$c_j \longrightarrow$ custo unitário do alimento j;

$a_{ij} \longrightarrow$ quantidade de vitamina i fornecida por uma unidade do alimento j.

Verifica-se, que a função objetiva a ser minimizada representa o custo total da dieta a ser realizada com os n alimentos.

As restrições 1.1 indicam que o total da vitamina obtida i dos n alimentos tem que ser maior ou igual que a quantidade mínima b_i daquela vitamina.

Em notação matricial esse modelo tomaria o seguinte molde:

Min $Z = CX$ sujeito a

$$AX \geqslant B$$

e

$$X \geqslant 0$$

onde A, B, C, e X já foram definidas anteriormente.

Exemplo 2 *Vamos apresentar um problema de dieta para minimização de custo sobre produção de ração para aves. Suponha que se deseja produzir uma ração a custo mínimo pela mistura de dois produtos x_1 e x_2, sendo que eles apresentam custos diferenciados:*

- *Produto x_1: R\$0,03 por Kg*
- *Produto x_2: R\$0,04 por Kg*

Quanto às aves, sabe-se que uma ave necessita de uma alimentação de vitaminas, cujas quantidades mínimas(em unidades por semana) mostramos a seguir:

Os nutrientes acima serão obtidos dos produtos x_1 e x_2, que possuem as composições mostradas na tabela 2 a seguir:

Vitaminas	Composição Produto x_1	Composição Produto x_2	Q. mínima por semana
1	5	25	50
2	25	10	100
3	10	10	60
4	35	20	180

Tabela 2 – Informações

Nesse exemplo desejamos minimizar o custo portanto a função objetivo é:

$$Z_{min} = 0,03x_1 + 0,04x_2$$

Para montar uma das restrições, vamos analisar a primeira linha da tabela 2. O produto x_1 possui 5 unidades e x_2 possui 25 unidades de Vitamina 1, sendo que a necessidade mínima da Vitamina 1 é 50 unidades. Assim umas das restrições será;

$$5x_1 + 25x_2 \geqslant 50$$

Utilizando o mesmo procedimento para as demais Vitaminas, o problema está sujeito às restrições a seguir, ou seja, as necessidades mínimas das Vitaminas

$$\begin{gathered} 5x_1 + 25x_2 \geqslant 50 \\ 25x_1 + 10x_2 \geqslant 100 \\ 10x_1 + 25x_2 \geqslant 60 \\ 35x_1 + 20x_2 \geqslant 180 \end{gathered}$$

1.3.3 Problema de Transporte

O modelo dos transportes tem por objetivo minimizar o custo total do transporte necessário para abastecer n centros consumidores(destinos), a partir de m centros fornecedores (origens).

Para $i = 1, 2, ..., m$ e $j = 1, 2, ..., n$, tem-se

$c_{ij} \longrightarrow$ custo unitário de transporte da origem i para o destino j;

$a_i \longrightarrow$ quantidade disponível na origem i;

$b_j \longrightarrow$ quantidade requerida no destino j;

$x_{ij} \longrightarrow$ quantidade a ser transportada da origem i para o destino j. São as incógnitas do problema.

O problema consiste em achar os valores de x_{ij} $(i = 1, 2, ..., m)$ e $(j = 1, 2, ..., n)$ que minimize o custo total do transporte, ou seja, minimize a função objetivo:

$$Z_{min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

sabendo que os x_{ij} devem satisfazer as seguintes restrições de oferta e de demanda:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, ..., m) \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{1.3}$$

e

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, ..., m) \text{ e } (j = 1, 2, ..., n)$$

As m restrições de oferta 1.2, uma para cada origem, indicam que a quantidade que sai da origem i tem de ser igual a quantidade a_i disponível naquela origem.

As n restrições de demanda 1.3, uma para cada destino, indicam que a quantidade que chega a cada destino j tem de ser igual a quantidade b_j requerida por aquele destino.

Exemplo 3 *Suponhamos que uma empresa possui dois armazéns A1 e A2 com 100 e 50 unidades de um determinado produto, a qual devem ser transportados para três mercados M1, M2 e M3 que consomem respectivamente 80, 30 e 40 unidades. Além disso os custos de transporte dos armazéns Ai para os mercados Mj são dadas pela tabela 3 abaixo:*

	M1	M2	M3
A1	5	3	2
A2	4	2	1

Tabela 3 – Custos de transporte em R$

O 5 da linha A1 e coluna M1 é o custo do transporte do armazém A1 para o mercado M1, o 3 é o valor do transporte do armazém A1 para o mercado M2, todos em R$(reais). O grafo que melhor representa esse problema está na figura 1 a seguir, sistema de transporte com duas fontes e três destinos:

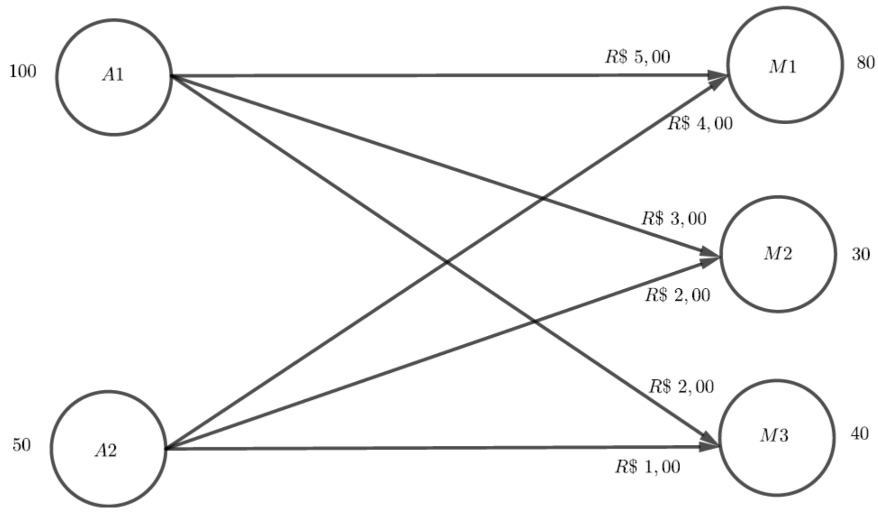

Figura 1 – Sistema de transporte com duas fontes de três destinos

A formulação do problema é a seguinte:

$$Z_{min} = 5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 2x_{22} + 1x_{23}$$

Sujeito as seguintes restrições

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50 \end{cases} \quad \text{Capacidades das origens}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 30 \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{cases} \quad \text{Absorção pelos destinos}$$

1.3.4 Problema da designação

O problema da designação é um caso particular do problema dos transportes, em que

$$m = n$$
$$a_i = 1 \text{ para } i = (1, 2, ..., m)$$
$$b_j = 1 \text{ para } j = (1, 2, ..., n)$$

O modelo toma, então, o seguinte modo:

Min. $Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{_{ij}}$, sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_j = 1 \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i = 1 \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{1.5}$$

e

$$x_{ij} \geqslant 0 \ \ (i = 1, 2, ..., n) \quad e \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{1.6}$$

Esse modelo tem o nome de problema da designação porque a sua solução ótima vai indicar qual a origem i que foi designada para abastecer o destino j. Devido as restrições 1.4 e 1.5, as restrições 1.6 são equivalentes a:

$$x_{ij} \quad = \quad \begin{cases} \text{1, se a origem i for designada para o destino j,} \\ \text{0, caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 4 *Uma companhia de transportes possui 3 caminhões disponíveis localizados nas cidades P1, P2 e P3. Necessita-se de um caminhão nas cidades C1, C2 e C3. Qual a designação dos caminhões que minimize a quilometragem percorrida por todos os caminhões, dado as quilometragens entre as cidades? A tabela 4 mostra a quilometragem entre as cidades.*

	C1	C2	C3
P1	20	12	26
P2	4	2	1
P3	18	15	2

Tabela 4 – Quilometragem entre as cidades

Veja que o número 4 na linha P2 e coluna C1 significa que da cidade P2 até a cidade C1 são 4 km de distância. O grafo da figura 2 abaixo facilita a interpretação do problema

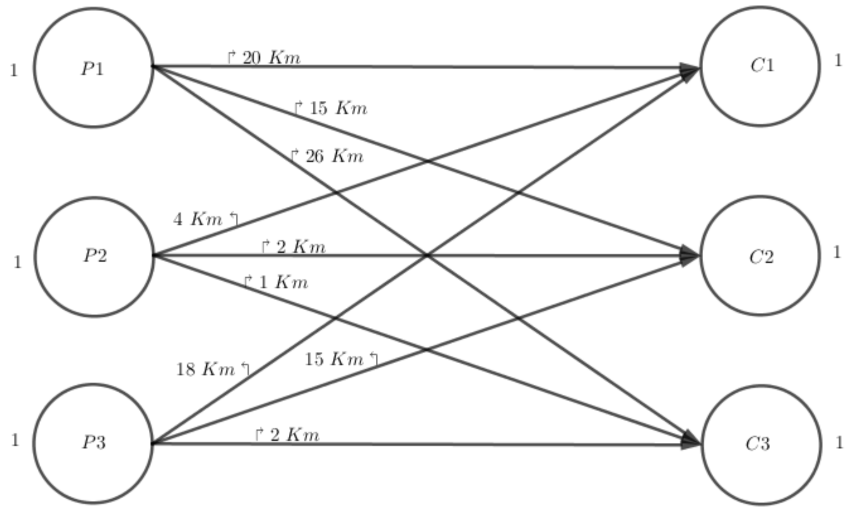

Figura 2 – Sistema de Designação

A formulação do problema é a seguinte:

$$Z_{min} = 20x_{11} + 15x_{12} + 26x_{13} + 4x_{21} + 2x_{22} + 1x_{23} + 18x_{31} + 15x_{32} + 2x_{33}$$

Sujeito as seguintes restrições

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \end{cases} \qquad \text{Capacidades das origens}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{cases} \qquad \text{Absorção pelos destinos}$$

2 Solução

Segundo Lachtermacher (2009), as soluções podem ser classificadas da seguinte maneira:

- Solução: Qualquer especificação de valores, dentro do domínio da função-objetivo, Z, para as variáveis de decisão, independentemente de se tratar de uma escolha desejável ou permissível
- Solução viável: Uma solução em que todas as restrições são satisfeitas.
- Solução ótima: Uma solução viável que tem o valor mais favorável da função-objetivo, Z, isto é, maximiza ou minimiza a função-objetivo, podendo ser única ou não.

Considere o seguinte modelo de programação linear:

Maximizar $Z = 5x_1 + 2x_2$ sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 3 \\ x_2 &\leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 9 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Podemos representar as regiões de soluções do problema conforme a figura 3.

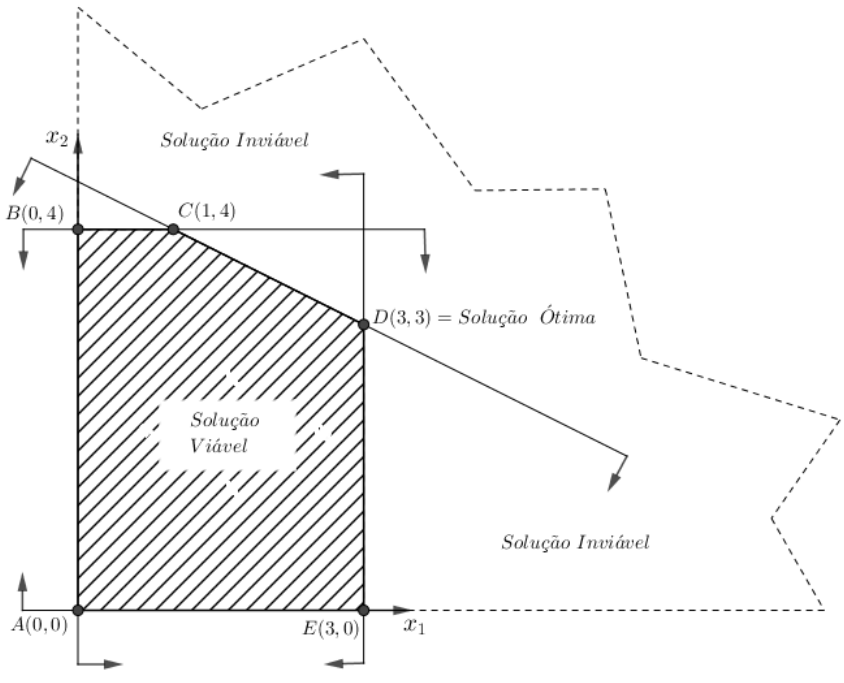

Figura 3 – Classificação das soluções

2.1 Solução gráfica

Geometricamente, as restrições lineares definem um polígono convexo, que é chamado de conjunto dos pontos viáveis. Uma vez que a função objetivo é também linear, todo ótimo local é automaticamente um ótimo global. Quando envolve apenas duas variáveis de decisão, a solução ótima de um problema de programação linear pode ser encontrada graficamente.

Considere o seguinte problema:

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$ sujeito a

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\leqslant 30 \\
4x_1 + 8x_2 &\leqslant 70 \\
x_1 \geqslant 0&, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Esse modelo pode, por exemplo, ser relacionado a uma construtora em que para construir uma casa popular por mês necessite de 2 pedreiros e 4 serventes. Para construir um apartamento no mesmo intervalo de tempo, a mesma construtora necessita de 3 pedreiros e 8 serventes. A construtora possui um efetivo total de 30 pedreiros e 70 serventes contratados.

A construtora obtém um lucro de R$3.000,00 na venda de cada casa popular e de R$5.000,00 na venda de cada apartamento e toda “produção” da construtora é vendida.

Qual é a quantidade ótima de casas populares e apartamentos que a construtora deve construir para que esta obtenha lucro máximo?

Vamos inicialmente representar esse problema na tabela 5 abaixo.

	Casa Popular	Apartamento	Disponibilidade de mão de obra
Pedreiro	2	3	30
Servente	4	8	70
Lucro (em mil R$)	3	5	

Tabela 5 – Informações

A Função Objetivo (que deve expressar o lucro total) é dada por:

$$Z_{max} = 3x_1 + 5x_2$$

onde:

x_1 é a quantidade de casas populares construídas;

x_2 é a quantidade de apartamentos construídos.

A modelagem matemática da função objetivo neste exemplo é muito simples, pois o lucro total vai ser dado pela soma do lucro obtido com casas populares e apartamentos multiplicados por suas respectivas quantidades produzidas (x_1 e x_2).
Por exemplo, se a construtora construir 2 casas populares (x_1) e 3 apartamentos (x_2) o lucro total vai ser:

$$Z = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$$

Como o lucro está dado em milhares de reais, a construtora terá um lucro de R$21.000,00. No entanto, será que este lucro de R$21.000,00 é o melhor resultado que esta construtora pode obter? Prestando atenção no enunciado do problema, podemos reparar que existe uma limitação de mão de obra (não existem infinitos pedreiros e serventes!) e portanto, este fato limitará a “produção” desta construtora. Esta limitação é denominada de restrição . Vamos ver como estas restrições pode ser modeladas matematicamente: Para cada casa construída, a construtora necessita de 2 pedreiros e para cada apartamento, de 3 pedreiros. Existem 30 pedreiros contratados. Portanto, podemos modelar está restrição de maneira matemática por:

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 30 \tag{2.2}$$

De maneira análoga a expressão acima, a construtora necessita de 4 e 8 serventes para cada casa e apartamento construído, respectivamente. Existem 70 serventes contratados. Esta restrição é dada por:

$$4x_1 + 8x_2 \leqslant 70 \tag{2.3}$$

Além das inequações (2.2) e (2.3), podemos escrever mais duas inequações de restrição apenas para limitar as quantidades construídas de casas e apartamentos para valores positivos por motivos óbvios (não se pode construir -1 (menos um) apartamento ou -2 (menos duas) casas!). Estas inequações são:

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{2.4}$$

Inicialmente podemos marcar as restrições (2.2) e (2.4) conforme mostra a figura 4 abaixo.

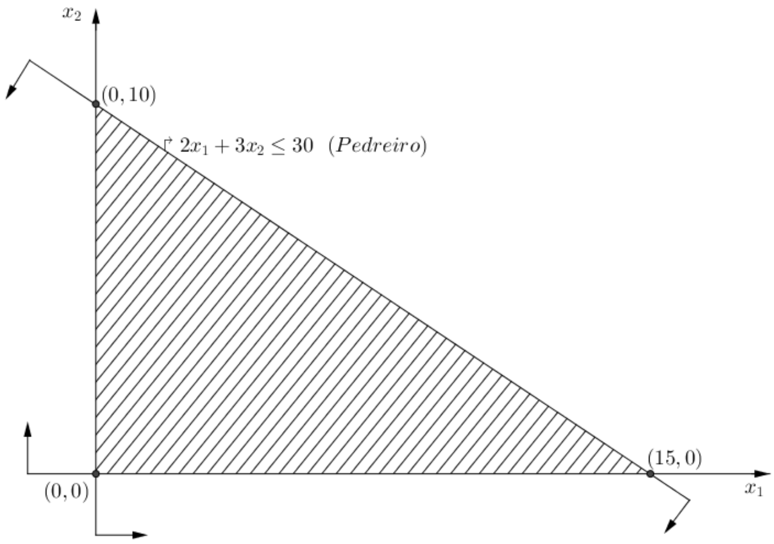

Figura 4 – Restrições (2.2) e (2.4)

Inserindo a restrição (2.3) obtemos:

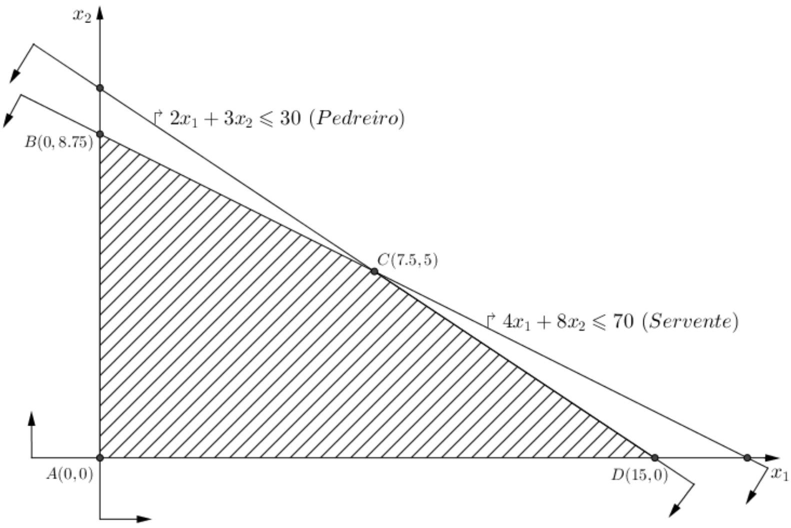

Figura 5 – Restrições (2.2), (2.3) e (2.4)

Qualquer ponto do quadrilátero ABCD satisfaz todas as restrições do modelo (2.1), e diz que esse quadrilátero é o conjunto das soluções viáveis do modelo.

Desejamos achar uma solução compatível que maximize a função $Z = 3x_1 + 5x_2$. É claro que essa função será tanto maior quanto maiores forem os valores de x_1 e x_2. Quem restringe o crescimento de x_1 e x_2 são as restrições do modelo. Para achar a solução ótima marca-se na figura 5 a reta $3x_1 + 5x_2 = 0$ e depois tira-se uma paralela a essa reta, procurando se afastar ao máximo da origem dos eixos. O ponto ótimo é o ponto $C(7.5, 5)$ dando o valor máximo igual a 47.5 para a função objetivo.

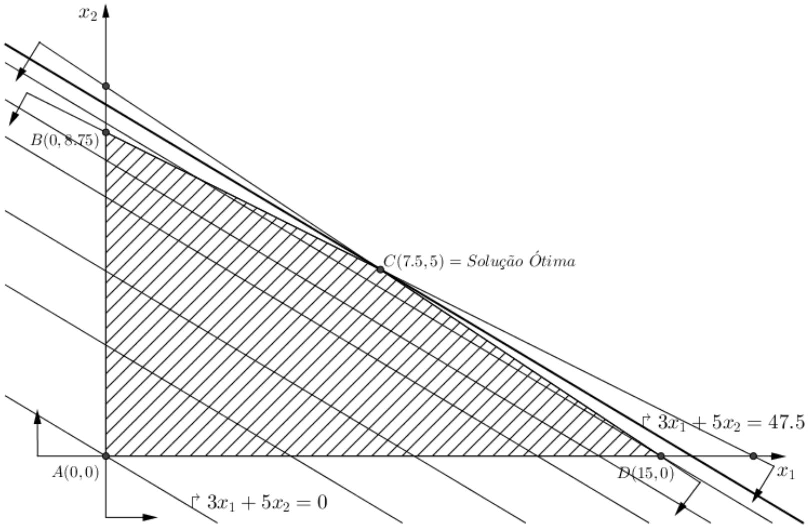

Figura 6 – Método para encontrar a solução ótima

Convém ressaltar que o ótimo foi obtido num dos vértices (ponto extremo) do quadrilátero ABCD. Na próxima seção mostraremos que isso é sempre verdade, isto é, que a função objetiva sempre passa por um ótimo num dos pontos extremos do conjunto das soluções viáveis.

2.2 Limitações da Programação Linear

Piccini (1981) destaca que um problema de programação linear parte de algumas hipóteses que são assumidas quando tentamos resolvê-lo:

2.2.1 Proporcionalidade

O valor da função-objetivo é diretamente proporcional ao valor de cada variável de decisão, ou seja, o lucro de cada atividade é proporcional ao nível de produção x_j, sendo o lucro unitário c_j o coeficiente de proporcionalidade. Essa hipótese diz que o lucro unitário c_j independe do nível de produção x_j e não considera a chamada economia de escala, não sendo válida na maioria dos problemas reais. Para facilitar, pode-se considerar intervalos de produção nos quais essa proporcionalidade é, aproximadamente, verificada. Para o caso dos coeficientes a_{ij} também assume-se que eles são independentes do nível de produção x_j, qualquer que seja o recurso i.

2.2.2 Aditividade

Considera as atividades (variáveis de decisão) do modelo como entidades totalmente independentes, não permitindo que haja interdependência entre elas, isto é, não permitindo a existência de termos cruzados, tanto na função-objetivo como nas restrições.

Assim, por exemplo, o lucro total de uma empresa será sempre igual a soma dos lucros obtidos em cada uma das atividades. Para mostrar que isso nem sempre é verdade considere uma empresa que deseja produzir dois produtos, bastante similares, como por exemplo óleo de soja e girassol. Se tal empresa produzir apenas óleo de soja, o seu lucro será c_1x_1, sendo c_1 o lucro unitário e x_1 o nível de produção. Se a mesma empresa produzir apenas óleo de girassol, o seu lucro será c_2x_2, sendo c_2 o lucro unitário e x_2 o seu nível de produção. Caso a empresa resolva produzir tanto o de soja como o de girassol e colocar no mercado os dois produtos, o modelo de programação linear garante que o lucro total desses dois produtos será igual $c_1x_1 + c_2x_2$. O que não foi levado em conta é que os valores de c_1 e c_2 não deverão ser iguais aos anteriores, pois é possível que o preço de venda do óleo de soja interfira no preço de venda do óleo de girassol, desde que tais produtos sejam competitivos.

Raciocínio análogo pode ser feito para o caso dos coeficientes a_{ij}.

2.2.3 Divisibilidade

Assume que todas as variáveis de decisão possam ser divididas em qualquer número de partes, isto é, qualquer variável de decisão pode assumir qualquer valor fracionário. Assim, por exemplo, se uma variável representar o número de pneus a serem produzidos por uma empresa, ela poderia tomar um valor fracionário na solução ótima, o que não é possível. O arredondamento de valores fracionários pode conduzir a erros bastante impressionantes. Quando as variáveis do modelo só puderem tomar valores inteiros, deve-se impor estas condições no próprio modelo. Passa-se então a lidar com um modelo de programação linear inteira, que não será abordado neste trabalho.

2.2.4 Certeza

Assume que todos os parâmetros do modelo são constantes e conhecidos, ou seja, a_{ij}, b_j e c_j são constantes e conhecidos. Em problemas reais, a hipótese de certeza quase nunca é satisfeita, provocando a necessidade de análise de sensibilidade dos resultados.

A análise desse modelo não será feita nesse trabalho.

2.2.5 Conclusão

Apesar de todas essas limitações, a programação linear ainda é a ferramenta mais utilizada da resolução de problemas reais de otimização que envolvam formulação de modelos matemáticos. Existem inúmeras áreas nos quais a programação linear pode ser utilizada com sucesso. Como norma geral, ela pode ser aplicada em qualquer problema envolvendo distribuição de recursos escassos entre atividades competitivas.

2.3 Solução Algébrica

Nesta seção, desenvolveremos a técnica utilizada para achar, algebricamente, a solução ótima de um modelo de programação linear.

2.3.1 Teoremas Fundamentais

É necessário enunciar e demonstrar os teoremas nos quais o método se baseia, para que se possa entender, perfeitamente o seu funcionamento.

Teorema 1 *O conjunto de todas as soluções viáveis do modelo de programação linear é um conjunto convexo.*

Para demonstrá-lo considere o modelo do Item 1.3.1, como a seguinte notação matricial:

$Z_{max} = CX$ sujeito a

$$AX \leqslant B$$

e

$$X \geqslant 0$$

Seja C o conjunto formado por $AX \leqslant b$ e $X \geqslant 0$. Tem-se de provar que o conjunto C é convexo. Para isso, temos que demonstrar que

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_2 \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

$x_1 \neq x_2$

Sejam x_1 e x_2 duas soluções compatíveis quaisquer, então:

$$\begin{cases} Ax_1 \leqslant b \\ x_1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \therefore \ \alpha Ax_1 \leqslant \alpha b \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} Ax_2 \leqslant b \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \therefore \ (1-\alpha)Ax_2 \leqslant (1-\alpha)b \tag{2.6}$$

Considere o vetor

$$\begin{cases} x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Temos de provar que

$$x \geqslant 0 \tag{2.7}$$

$$Ax \leqslant b \tag{2.8}$$

A relação (2.7) é facilmente demonstrada pelas relações

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \quad e \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

A relação (2.8) pode ser assim desenvolvida:

$$Ax = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha A x_1 + (1-\alpha)A x_2$$

Devido as relações (2.5) e (2.6) passa-se a ter

$$Ax \leqslant \alpha b + (1-\alpha)b \quad \text{ou} \quad Ax \leqslant b$$

Ficando assim demonstrado esse teorema.
Esse teorema também pode ser demonstrado nos casos em que

$$Ax = b \quad \text{ou} \quad Ax \geqslant b$$

Teorema 2 *Toda solução viável básica do sistema $AX = B$ é um ponto extremo do conjunto das soluções viáveis, isto é, do conjunto convexo C do teorema 1.*

Considere o conjunto convexo formado por

$$Ax = b \tag{2.9}$$

$$x \geqslant 0$$

De maneira explícita tem-se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Considere-se a solução compatível básica formada pelo vetor x, de dimensão n, abaixo:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ com todos os } x_i \geqslant 0$$

Suponha-se que x não seja um ponto extremo do conjunto (2.9). Então x pode ser obtido como uma combinação convexa de outros dois pontos distintos do conjunto. Sendo y e z esses dois pontos do conjunto (2.9), pode-se ter

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z \tag{2.11}$$
$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

Como y e z pertencem ao conjunto (2.9), as seguintes relações são válidas:

$$\begin{array}{cc} Ay = b & Az = b \\ y \geqslant 0 & z \geqslant 0 \end{array}$$

Se x for um ponto extremo de (2.9) então não existem y e z, distintos de x, que satisfaçam a relação (2.11) A relação (2.11), colocada em termos das coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações:

$$\left| \begin{array}{c} x_1 = \alpha y_1 + (1 - \alpha)z_1 \\ x_2 = \alpha y_2 + (1 - \alpha)z_2 \\ \vdots \\ x_m = \alpha y_m + (1 - \alpha)z_m \\ 0 = \alpha y_{m+1} + (1 - \alpha)z_{m+1} \\ \vdots \\ 0 = \alpha y_n + (1 - \alpha)z_n \end{array} \right| \tag{2.12}$$

Devido as relações $0 \leqslant \alpha 1$, $y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$, as últimas $(n - m)$ relações de (2.12) só podem ser satisfeitas num dos seguintes casos:

1. Caso: $0 < \alpha 1$ e $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$ para $i = 1, ..., n - m$.

   Nesse caso tem-se $x = y = z$ pois as três soluções apresentam uma coincidência nas variáveis não básicas do sistema (2.10). Consequentemente os valores das variáveis básicas serão os mesmos para essas três soluções.

2. Caso: $\alpha = 0$ e $z_{m+i} = 0$ para $i = 1, ..., n - m$.

   Nesse caso tem-se $x = z$ pelas mesmas razões anteriores.

3. Caso: $\alpha = 1$ e $y_{m+i} = 0$ para $i = 1, ..., n - m$.

   Nesse caso tem-se $x = y$ pelas mesmas anteriores.

Fica assim demonstrado que não existem soluções viáveis y e z, distintas da solução viável básica x, que satisfaçam a relação (2.11). Então, o ponto x é um ponto extremo do conjunto convexo (2.9)

Teorema 3 *a) Se a função objetiva possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto C do Teorema 1.*

b) Se a função objetiva assume o máximo (mínimo) em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos.

Demonstração a)

Seja C o conjunto convexo definido por (2.9).

Seja $Z(x)$ a função objetiva que toma o valor máximo M no ponto x_0, então pode-se afirmar que

$$Z(x_0) \geqslant Z(x), \forall x \in C$$

Sejam $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p$ os pontos extremos do conjunto C. Temos que provar que x_0 é i, desses pontos extremos.

Suponha-se que x_0 não seja um ponto extremo de C. Então ele pode ser obtido pela combinação convexa abaixo:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \bar{x}_i \tag{2.13}$$

sendo

$$\alpha_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, ..., p)$$
$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

Usando as relações (2.13) podemos obter

$$Z(x_0) = Z(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \bar{x}_i) = Z(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \cdots + \alpha_p \bar{x}_p) =$$

$$\alpha_1 Z(\bar{x}_1) + \alpha_2 Z(\bar{x}_2) + \cdots + \alpha_p Z(\bar{x}_p) = M \tag{2.14}$$

Consideremos agora o ponto extremo $\bar{x}_M$ definido pela relação abaixo:

$$Z\bar{x_M} = Z_{max}(\bar{x}_i) \qquad (i = 1, ..., p) \tag{2.15}$$

Devido as relações (2.13) e (2.14) a relação (2.14) pode sofrer as seguintes modificações:

$$Z(x_0) \leqslant \alpha_1 Z(\bar{x}_M) + \alpha_2 Z(\bar{x}_M) + \cdots + \alpha_p Z(\bar{x}_M)$$

ou seja,

$$Z(x_0) \leqslant Z(\bar{x}_M) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$$

isto é,

$$Z(x_0) \leqslant Z(\bar{x}_M)$$

mas tínhamos

$$Z(x_0) \geqslant Z(x) \text{ para todo } x \in C$$

Então, é necessário ter $Z(x_0) = M = Z(\bar{x}_M)$ e fica provado que a solução ótima x_0 é um ponto extremo do conjunto convexo C.

Demonstração b)

Sejam $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_q$ os pontos extremos dos conjuntos convexo C, nos quais assume-se que

$$Z(\bar{x}_1) = Z(\bar{x}_2) = \cdots = Z(\bar{x}_q) = M \tag{2.16}$$

Consideremos agora a combinação convexa

$$x_0 = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \bar{x}_i \tag{2.17}$$

sendo

$$\alpha_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, ..., q)$$

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$$

Temos que

$$Z(x) = Z(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \bar{x}_i) = Z(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \cdots + \alpha_q \bar{x}_q) =$$
$$\alpha_1 Z(\bar{x}_1) + \alpha_2 Z(\bar{x}_2) + \cdots + \alpha_q Z(\bar{x}_q)$$

e pelas relações (2.16) e (2.17), obtém-se

$$Z(x) = M \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = M$$

2.3.2 Solução Algébrica

A seguir, um procedimento rudimentar para encontrar uma solução ótima de um problema com uma região viável não vazia e limitada de acordo Silva (2013).

1. Encontrar todos os pontos de intersecção das restrições.
2. Determinar quais os pontos de intersecção que são viáveis para obtenção dos pontos extremos.
3. Avaliar a função objetivo em cada ponto extremo.
4. Escolher o(s) ponto(s) extremo(s) com o menor (ou maior) valor da função objetivo.

Esse procedimento diz que, para determinar a região convexa que corresponde à região viável (factível), é necessário determinar todos os possíveis pontos de intersecção, igualando duas a duas todas as restrições. Nem sempre duas restrições possuem um ponto de intersecção. Depois de encontrados os pontos de intersecção, caracterizar os pontos extremos do conjunto convexo que compõe a região viável, implementando esse procedimento algébrico. Determinados todos os pontos extremos da região viável, basta avaliar a função objetivo e comparar todos esses valores, escolhendo como solução do problema aquele que maximiza (ou minimiza) a Programação Linear.

Para ilustrar esse método, suponha que os lados do conjunto convexo sejam formados a partir de três restrições lineares e duas outras restrições de não negatividade como mostra a Figura 7. As variáveis não negativas y_1, y_2, y_3 medem o grau em que um ponto satisfaz cada uma das restrições 1, 2 e 3, respectivamente. A variável y_i é adicionada do lado esquerdo da desigualdade da restrição i para convertê-la numa igualdade. [1] Além disso, $y_2 = 0$ caracteriza aqueles pontos que se encontram precisamente na restrição 2, ou seja, o recurso relativo à essa restrição foi utilizado por completo, e um valor negativo para y_2 indica a violação da regra 2. Também, as variáveis de decisão x_1 e x_2 medem o grau

[1] A variável y_i é uma variável de folga, isto é, indica o quanto se deixou de atingir o limite máximo de restrição.

de satisfação das restrições de não negatividade, $x_1 \geqslant 0$ e $x_2 \geqslant 0$. Note que ao logo da reta x_1, a variável de decisão x_2 é 0. Agora, considere todos os valores para o conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3\}$. Se duas das variáveis tem simultaneamente o valor zero, então caracteriza-se um *ponto de interseção* no plano x_1x_2

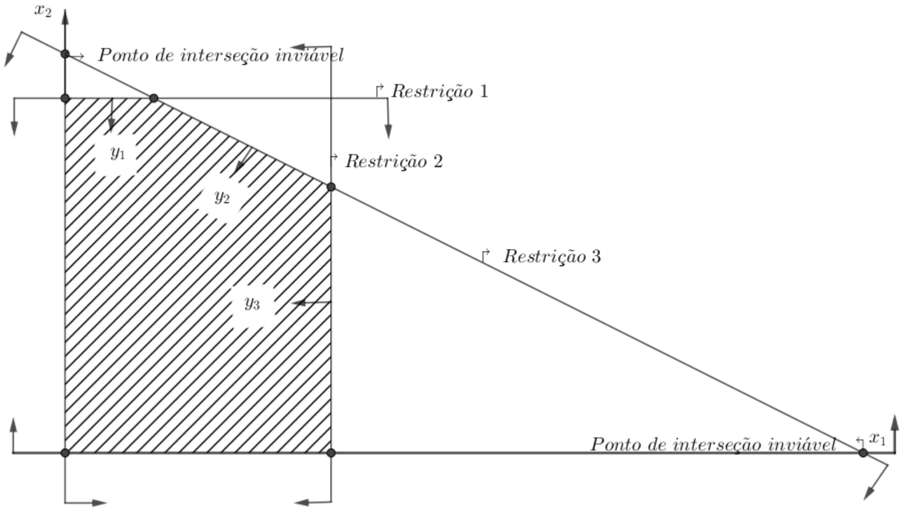

Figura 7 – Introdução das variáveis de folga

Todos os pontos de intersecção podem ser determinados, sistematicamente, definindo todos os pares possíveis e distintos das cinco variáveis como sendo zero e, em seguida, resolvendo o restante do sistema com três variáveis dependentes. Se existir a solução do sistema resultante de equações lineares, então ela será um ponto de intersecção, que pode ser ou não uma solução viável. Um valor negativo para qualquer uma das cinco variáveis indica que a restrição não foi satisfeita, nesse caso, o ponto de intersecção seria inviável. Por exemplo, o ponto de intersecção B, onde $y_1 = 0$ e $x_1 = 0$, dá um valor negativo para y_2 e, portanto, não é uma solução viável para o problema. Para ilustrar o procedimento, algebricamente, será resolvido o problema 2.1 da construtora.

$Z_{max} = 3x_1 + 5x_2$ sujeito as restrições

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 30 \\ 4x_1 + 8x_2 &\leqslant 70 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Adicionando as novas *variáveis de folga*, não negativas, y_1 e y_2, converte-se cada uma das inequações em equações. Se alguma delas, y_1 ou y_2, for negativa, a restrição não será satisfeita. Assim, a formulação do problema torna-se

$Z_{max} = 3x_1 + 5x_2$ sujeito as restrições

$$2x_1 + 3x_2 + y_1 = 30$$

$$4x_1 + 8x_2 + y_2 = 70 \tag{2.18}$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \geqslant 0$$

Considerando todo o conjunto com quatro variáveis $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, interpretados geometricamente na Figura 8. Para determinar um possível ponto de intersecção no plano x_1x_2, atribui-se o valor zero a duas das quatro variáveis, existindo $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ pontos de intersecção possíveis.

Pode-se começar assumindo para as variáveis x_1 e x_2 o valor zero, resultando no seguinte conjunto de equações

$$\begin{cases} y_1 = 30 \\ y_2 = 70 \end{cases}$$

com um ponto e intersecção viável $A(0,0)$ pois todas as quatros variáveis são não negativas.

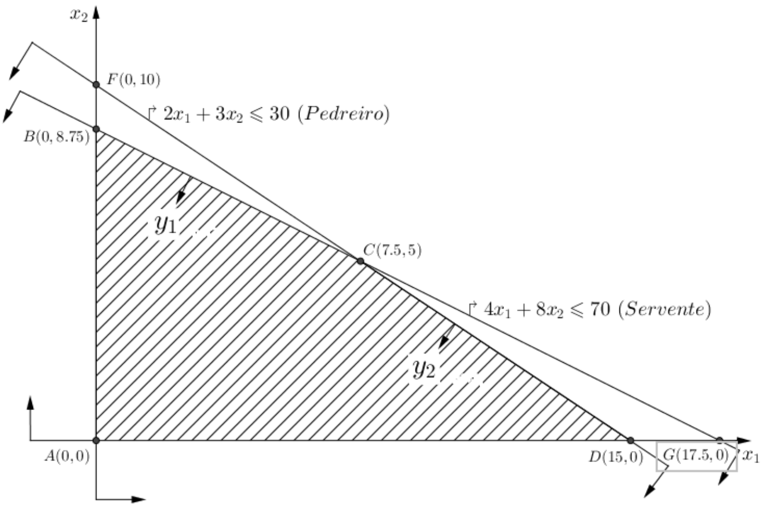

Figura 8 – Conjunto de variáveis

Para o segundo ponto de interseção, escolhe-se as variáveis x_1 e y_1 como sendo zero, resultando no sistema

$$\begin{cases} 3x_2 = 30 \\ 8x_2 + y_2 = 70 \end{cases}$$

que tem soluções $x_2 = 10$ e $y_2 = -10$. Note que a segunda constante é violada por 10 unidades, ou seja, viola uma das restrições (2.18), indicando que o ponto de intersecção $F(0,10)$ é inviável.

Para o terceiro ponto de intersecção, escolhe-se as variáveis x_1 e y_2 como sendo zero, resultando no sistema

$$\begin{cases} 3x_2 + y_1 = 30 \\ 8x_2 = 70 \end{cases}$$

com soluções $x_2 = 8.75$ e $y_1 = 3.75$, que é também um ponto de intersecção viável $B(0, 8.75)$

De maneira semelhante, escolhe-se y_1 e y_2 como sendo zero, o que fará $x_1 = 7.5$ e $x_2 = 5$, correspondendo ao ponto de intersecção $C(7.5, 5)$ que é viável.

A quinta escolha é das variáveis x_2 e y_1 como sendo zero, obtendo os valores de $x_1 = 15$ e $y_2 = 10$. Assim, o ponto de intersecção $D(15, 0)$ é viável.

Por fim, escolhe-se o sexto ponto de interseção definindo as variáveis x_2 e y_2 como zero para determinar $x_1 = 17.5$ e $y_1 = -5$ de modo que uma das restrições 2.18 não é satisfeita.

Em síntese, dos seis pontos de intersecção possíveis no plano x_1x_2, quatro deles foram considerados viáveis. Para os quatros pontos viáveis, os valores da função objetivo são encontrados com a substituição dos valores de x_1 e x_2 na função objetivo, conforme podemos ver na tabela 6 abaixo

Ponto extremo	Valor da função objetivo
A(0,0)	0
B(0, 8.75)	43.75
C(7.5, 5)	47.5
D(15, 0)	45

Tabela 6 – Avaliação da Função Objetivo.

Esse procedimento determina que a solução ótima que maximiza o lucro é $x_1 = 7.5$ e $x_2 = 5$. Isto é, a construtora deve construir 7.5 casas e 5 apartamentos para um lucro de R$47.500,00.

2.4 Resolução com o software Lindo 6.1 e o Solver do Excel

Nesta seção veremos como resolver um problema utilizando o software Lindo 6.1 e o Solver do Excel. Resolveremos o mesmo problema (2.1) da construtora mostrando os passos de como seria resolvido nos dois softwares.

2.4.1 Lindo 6.1

O Lindo 6.1 (Linear, Interactive and Discrete Optmizer) é um software desenvolvido pela Lindo Systems Inc. de Chicago, Illinois, EUA, para a resolução de modelos de programação linear, quadrática ou inteira.

Problema (2.1)

$Z_{max} = 3x_1 + 5x_2$ sujeito as restrições

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 30$$
$$4x_1 + 8x_2 \leqslant 70$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

Inicialmente, devemos inserir a função objetivo que deverá ser escrito com o comando Max (Min) para maximizar (minimizar) esta função. Em seguida, entre os comandos *subject to* e *end* deve ser escrito as restrições. O exemplo desse modelo pode ser conferido na figura 9 abaixo.

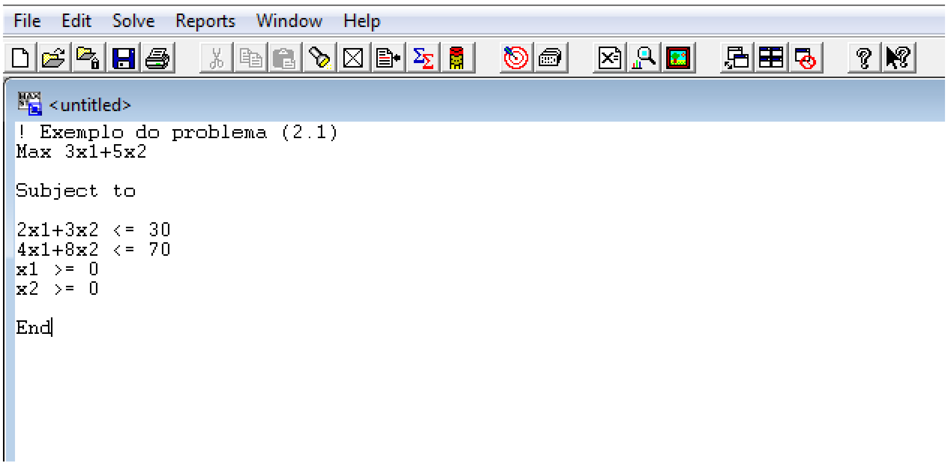

Figura 9 – Inserção de dados

Observe que:

Linha	Significado
`!Exemplo do problema (2.1)`	Trata-se de uma linha de comentários pois inicia-se com !
`Max`	Comando que solicita maximizar uma função (outra opção seria Min)
`Subject to`	Significa "sujeito a": Informa que a seguir temos o conjunto de restrições
End	Informa o fim dos dados

Tabela 7 – Significado das informações

Após inserir as funções basta clicar na ferramenta “Resolver” que está indicado na figura 10 a seguir

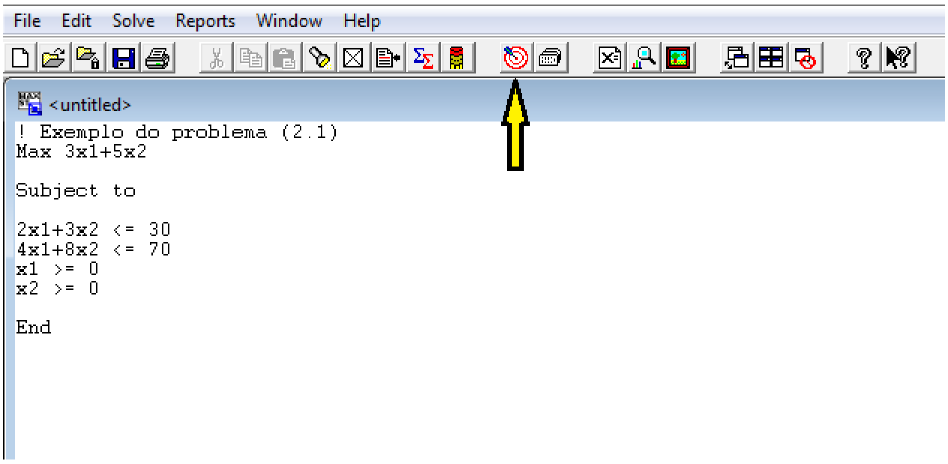

Figura 10 – Resolvendo

Após a execução de um modelo sem erros, o Lindo 6.1 apresenta uma nova janela de resultados mostrado na figura 11.

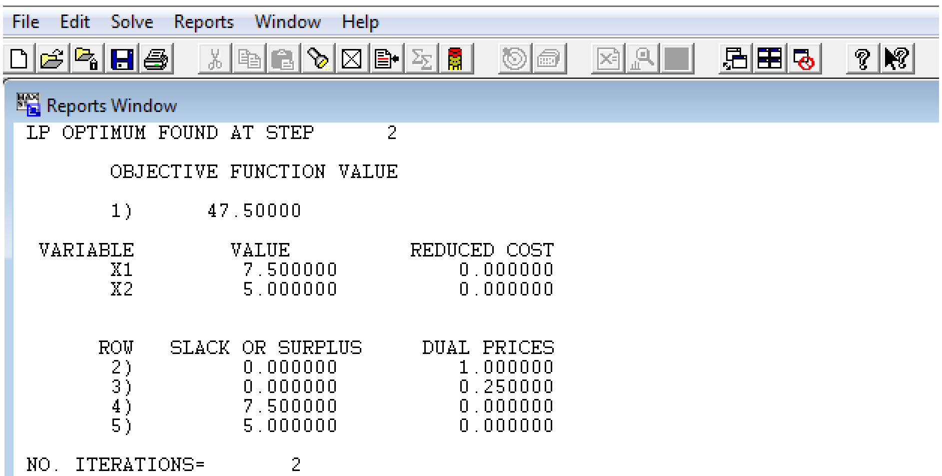

Figura 11 – Software Lindo

Os valores da figura 11 que nos interessa são:

- `OBJECTIVE FUNCTION VALUE`
  `1)        47.50000`

Indica o valor ótimo encontrado para a função-objetivo (no caso temos lucro de R$47500,00)

```
   VARIABLE    VALUE    REDUCED COST
•     x1     7.500000     0.00000
      x2     5.000000     0.00000
```

Como podemos ver o lucro máximo que a construtora pode obter é 47.5 como está em milhares de reais, o lucro será R$47500,00. A quantidade de casas e apartamentos construídos devem ser respectivamente 7.5 casas e 5 apartamentos.

2.4.2 Solver do Excel

O Solver é um suplemento do Microsoft Excel que você pode usar para teste de hipóteses, sendo utilizado principalmente para análise de sensibilidade com mais de uma variável e com restrições de parâmetros. Utilizaremos o Solver para encontrar um valor ideal (máximo ou mínimo) conforme restrições.

Problema 2.1

$Z_{max} = 3x_1 + 5x_2$ sujeito as restrições

$$
\begin{gathered}
2x_1 + 3x_2 \leqslant 30 \\
4x_1 + 8x_2 \leqslant 70 \\
x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0
\end{gathered}
$$

Primeiro devemos designar uma célula para representar cada uma das seguintes entidades: função-objetivo, variáveis de decisão, número de pedreiros e serventes disponível.

Na planilha da figura 12, as células designarão cada uma das entidades citadas anteriormente.

	A	B	C	D	E
1		Coeficientes das Variáveis			
2	Função	x1	x2		
3	Objetivo	3	5		
4	Variáveis	7,5	5		
5					
6	Max Z =	47,5			
7					
8	Restrições	Coeficientes das Restrições		Q. utilizadada	Disponibilidade
9	nº	x1	x2		
10	1 - Servente	2	3	30	30
11	2 - Pedreiro	4	8	70	70

Figura 12 – Modelagem no Excel

- B6 representará o valor da função-objetivo a ser maximizada.
- B4 e C4 representarão os valores que as variáveis de decisão assumirão na solução ótima.
- D10 e D11 representarão a quantidade de serventes e pedreiros que serão utilizadas respectivamente.

- E10 e E11 representarão a quantidade disponível de servente e pedreiros respectivamente.

Ainda temos que lembrar o que representa o restante das células

- B3 e C3 são utilizadas para inserir os valores dos coeficientes da função objetivo.
- B10 e C10 são utilizadas para inserir os valores dos coeficientes da restrição de serventes.
- B11 e C11 são utilizadas para inserir os valores dos coeficientes da restrição de pedreiros.

Na tabela 8 vamos definir cada uma das entradas das células da modelagem do problema

B6	=(B3+B4)*(C3+C4)	Função Objetivo
D10	=(B10*B4)+(C10*C4)	Restrição de servente
D11	=(B11*B4)+(C11*C4)	Restrição de pedreiro

Tabela 8 – Fórmulas utilizadas nas células da modelagem do problema

Agora precisamos avisar ao Excel quais são as células que representam a nossa função objetivo, as variáveis de decisão, as restrições do modelo e, finalmente, mandá-lo resolver o problema. Isto é feito utilizando-se a ferramenta Solver do Excel. Para tal, clique com o botão esquerdo no mouse sobre a opção “Dados” na barra de menu, e a tela mostrada na Figura 13 aparecerá. Clique sobre a ferramenta Solver assinalada na figura.

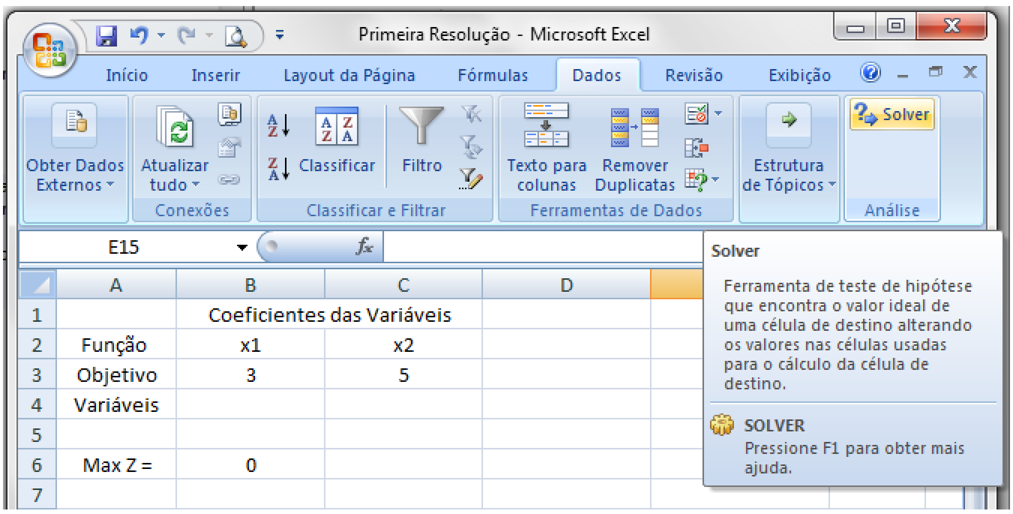

Figura 13 – Tela de ativação da ferramenta Solver

Após esse procedimento, aparecerá na tela a janela representada na Figura 14. Nessa janela é que serão informados ao Excel as células que representarão a função objetivo, as variáveis de decisão e a quantidade de serventes e pedreiros que serão utilizados.

Na parte superior da janela (Figura 14) aparece um campo para a inserção de dados chamando "Definir célula de destino" que deve representar o valor (equação) da função-objetivo. No nosso caso a célula será B6.

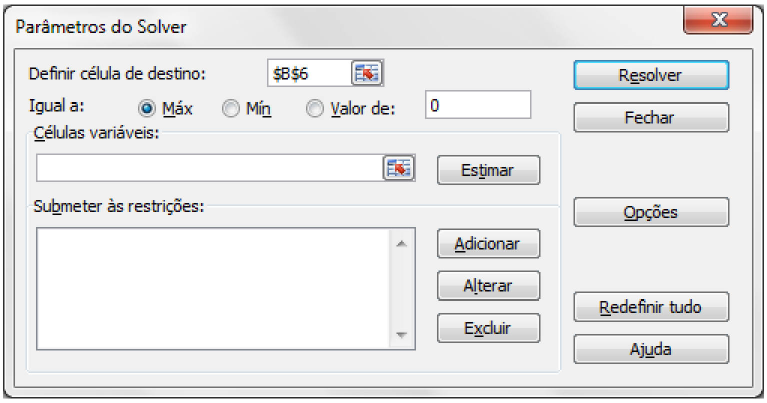

Figura 14 – Tela de ativação da ferramenta Solver

Na linha seguinte são apresentadas as opções de *Maximizar*, *Minimizar* e *Valor de.*. Dependendo do problema, devemos clicar sobre uma das três. Na próxima linha há um campo denominado "Células variáveis". Nesse campo serão inseridas as células que representarão as variáveis de decisão. Os valores podem ser inseridas da mesma maneira como no caso da função objetivo. Todas as informações podem ser vista na figura 16

O próximo passo é designar as restrições do problema. Devemos inserir uma restrição de cada vez. Para inserir a primeira restrição, devemos clicar no botão "Adicionar" para exibir a janela de entrada de restrições. A janela de restrições tem três campos, que representa o total que foi de servente que será necessário e a direita representa a quantidade máxima de servente que pode ser utilizado.

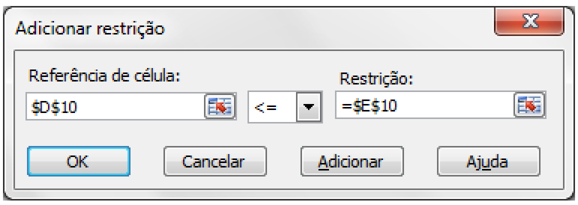

Figura 15 – Janela de entrada de restrição

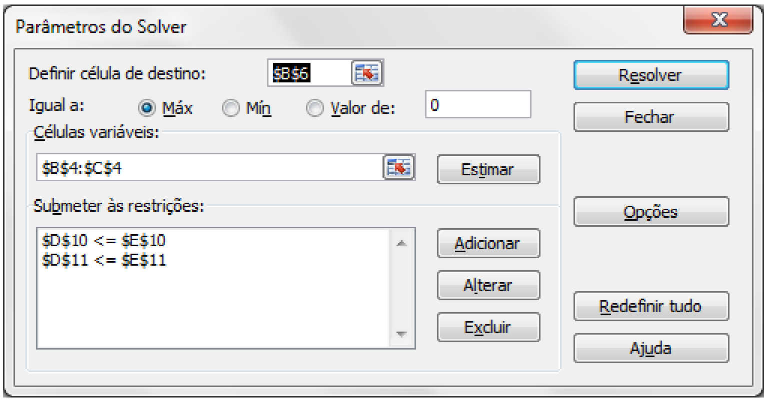

Figura 16 – Designação das células para receber as variáveis e submeter as restrições

Faltam ainda as restrições de não-negatividade, isto é, quando as variáveis de decisão não são negativas. Para fazermos isso devemos clicar no botão "Opções" na janela da figura 16. Em seguida, basta marcar a caixa de seleção da opção "Presumir não negativos" como assinalado na figura 17. A última característica do modelo que deve ser implementada é a de programação linear. Isso é feito na mesma janela de opções marcando a opção "presumir modelo linear" também assinalada na figura 17. Pra sair da janela, basta clicar sobre o botão "OK".

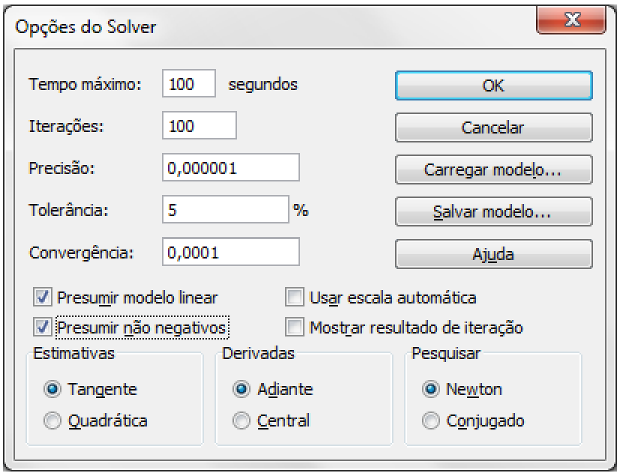

Figura 17 – Opção de não-negatividade

Uma vez inserido o modelo e suas características, devemos efetivamente resolvê-lo. Para tanto, basta clicar no botão "Resolver" na janela inicial vista na figura 16.

Se o modelo foi corretamente inserido, será processado, e o resultado será automaticamente exibido na planilha. A janela representada na figura 18 aparecerá na tela.

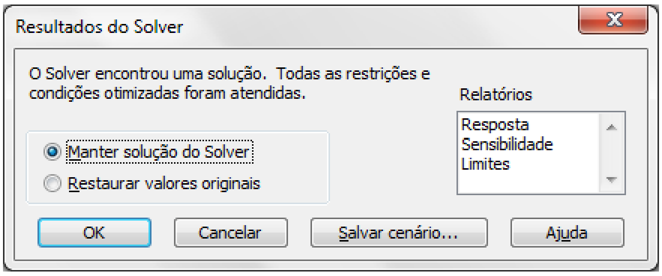

Figura 18 – Opções de resultado da ferramenta Solver

Se observarmos valores incoerentes ou inesperados, devemos clicar na opção "Restaurar valores originais" para voltar aos valores iniciais do modelo. Devemos ser cuidadosos com a mensagem que o Excel está nos exibindo. Nesse caso, a mensagem é: "O Solver encontrou uma solução. Todas as restrições e condições ótimas foram atendidas", informando que uma solução ótima foi encontrada para o nosso modelo. Outras mensagens também podem aparecer, indicando que soluções não foram encontradas por serem inviáveis ou ilimitadas.

Ao clicar no botão "OK", a janela de resultados do Solver desaparecerá e os resultados aparecerão na planilha como mostra na figura 19.

	A	B	C	D	E
1		Coeficientes das Variáveis			
2	Função	x1	x2		
3	Objetivo	3	5		
4	Variáveis	7,5	5		
5					
6	Max Z =	47,5			
7					
8	Restinções	Coeficientes das Restrinçõoes		Q. utilidada	Disponipilidade
9	nº	x1	x2		
10	1 - Servente	2	3	30	30
11	2 - Pedreiro	4	8	70	70

Figura 19 – Resultados inseridos na planilha

Assim resolvemos nosso problema, ou seja, obtemos a solução ótima.

3 Aplicação

Neste capítulo vamos otimizar a compra de mercadorias em um supermercado situado na cidade de Macaúbas no estado da Bahia para obter maior lucro. Este modelo será otimizado com o intuito de aproveitar ao máximo o capital a ser investido e o espaço disponível para armazenamento. O problema é da seguinte forma:

Suponhamos que o supermercado deseje comprar n itens para abastecer seu depósito. Em um mês qualquer ela tem um valor de b_1 reais para ser investido e um espaço de armazenamento de $b_2 m^3$. Sabe-se que o lucro de cada item é $c_1, c_2, ..., c_n$. O preço de custo unitário é $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ e o volume unitário é $a_{21}, a_{21}, ..., a_{2n}$.

O supermercado deve conter uma quantidade mínima e uma máxima de cada item i para satisfazer a demanda. A quantidade mínima de cada item é $q_1, q_2, ..., q_n$ e a máxima é $p_1, p_2, ..., p_n$, tal que $i = (1, 2, ..., n)$.

Então nosso problema consiste em achar $x_1, x_2, ..., x_n$ que maximize a função objetivo.

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$, sujeito as restrições

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \end{cases}$$

e que

$$\begin{cases} q_1 \leqslant x_1 \leqslant p_1 \\ q_2 \leqslant x_2 \leqslant p_2 \\ \qquad \vdots \\ q_n \leqslant x_n \leqslant p_n \end{cases} \tag{3.1}$$

As inequações 3.1 já restringem que $x_i \geqslant 0$ para $(i = 1, 2, ..., n)$.

3.1 Problema particular

Neste problema será otimizado a quantidade a ser comprada de Açúcar, Arroz, Óleo, Feijão, Macarrão, Sal, Café.

Os valores da pesquisa no supermercado estão na tabela 9 abaixo.

	Açúcar x_1	Arroz x_2	Óleo x_3	Feijão x_4	Macarrão x_5	Sal x_6	Café x_7
Lucro R$	0,43	0,23	0,6	1,09	0,99	0,45	0,65
Custo R$	1,96	2,16	3,05	3,66	3	0,1	3,8
Volume m^3	0,00166	0,00156	0,00112	0,00176	0,00553	0,00143	0,00052
Q. Mínima	1984	2145	755	678	327	198	853
Q. Máxima	3692	4573	1497	1306	609	387	1632

Tabela 9 – Informações

O 0,43 da linha Lucro e coluna Açúcar é o Lucro por unidade da Açúcar, 1,96 da linha Custo e coluna Açúcar é o custo por unidade de Açúcar, 0,00166 da linha Volume e da coluna Açúcar é o volume ocupado por uma unidade de Açúcar, 1984 da linha Q. Mínima e da coluna Açúcar é a quantidade mínima de unidades de Açúcar a ser comprado e por fim 3692 da linha Q. Máxima e coluna Açúcar é a quantidade máxima de unidade de Açúcar a ser comprado. Isso se estende pra os demais alimentos.

Vamos chamar os alimentos da seguinte forma:

x_1 = Açúcar
x_2 = Arroz
x_3 = Óleo
x_4 = Feijão
x_5 = Macarrão
x_6 = Sal
x_7 = Café

A modelagem da função objetivo nesse exemplo é muito simples, pois o lucro total vai ser dado pela soma do lucro obtido com cada item multiplicados por suas respectivas quantidades vendidas. Assim nossa função objetivo consiste em

Maximizar $Z = 0,43x_1 + 0,23x_2 + 0,6x_3 + 1,09x_4 + 0,99x_5 + 0,45x_6 + 0,65x_7$ sujeito as restrições de capital para investir e volume para estoque.

$$\begin{cases} 1,96x_1 + 2,16x_2 + 3,05x_3 + 3,66x_4 + 3x_5 + 0,1x_6 + 3.8x_7 \leqslant b_1 \\ 0,00166x_1 + 0,00156x_2 + 0,00112x_3 + 0,00176x_4 + 0,00553x_5 + 0,00143x_6 + 0,00052x_7 \leqslant b_2 \end{cases}$$

e

$$\begin{array}{ccccc} 1984 & \leqslant & x_1 & \leqslant & 3692 \\ 2145 & \leqslant & x_2 & \leqslant & 4573 \\ 755 & \leqslant & x_3 & \leqslant & 1497 \\ 678 & \leqslant & x_4 & \leqslant & 1306 \\ 327 & \leqslant & x_5 & \leqslant & 609 \\ 198 & \leqslant & x_6 & \leqslant & 387 \\ 853 & \leqslant & x_7 & \leqslant & 1632 \end{array} \qquad (3.2)$$

As restrições $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0$ já estão satisfeitas por 3.2.

Para otimizar a compra dos itens, três casos que pode acontecer.

3.1.1 Caso 1

Suponhamos que o proprietário tenha R\$ 22550,00 para investir e possui $13,5m^3$ disponível para armazenar a mercadoria.

$Z_{max} = 0,43x_1 + 0,23x_2 + 0,6x_3 + 1,09x_4 + 0,99x_5 + 0,45x_6 + 0,65x_7$,
sujeito a

$$\begin{cases} 1,96x_1 + 2,16x_2 + 3,05x_3 + 3,66x_4 + 3x_5 + 0,1x_6 + 3,8x_7 \leqslant 22550 \\ 0,00166x_1 + 0,00156x_2 + 0,00112x_3 + 0,00176x_4 + 0,00553x_5 + 0,00143x_6 + 0,00052x_7 \leqslant 13,5 \end{cases}$$

e

$$\begin{array}{ccccc} 1984 & \leqslant & x_1 & \leqslant & 3692 \\ 2145 & \leqslant & x_2 & \leqslant & 4573 \\ 755 & \leqslant & x_3 & \leqslant & 1497 \\ 678 & \leqslant & x_4 & \leqslant & 1306 \\ 327 & \leqslant & x_5 & \leqslant & 609 \\ 198 & \leqslant & x_6 & \leqslant & 387 \\ 853 & \leqslant & x_7 & \leqslant & 1632 \end{array}$$

Resolvendo o problema pelo software Lindo 6.1

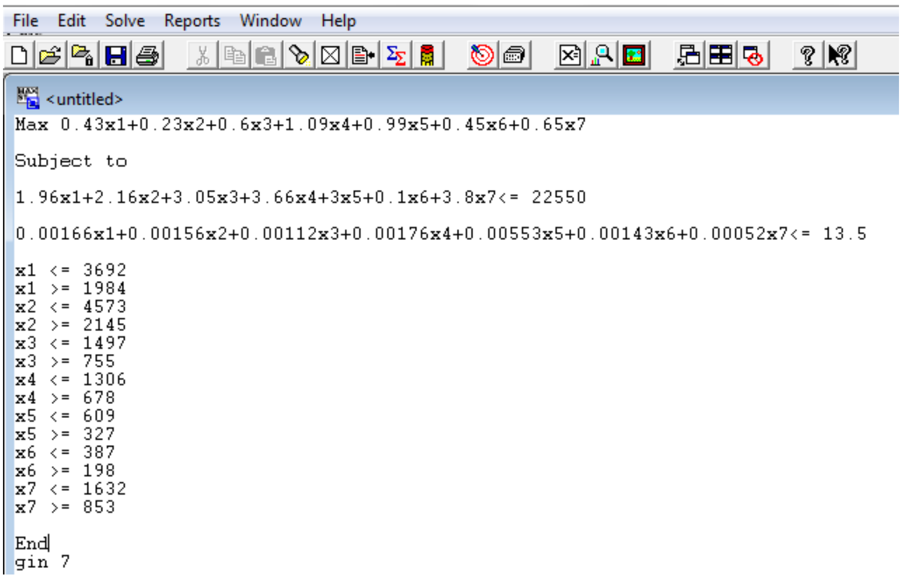

Figura 20 – Inserção dos dados no software

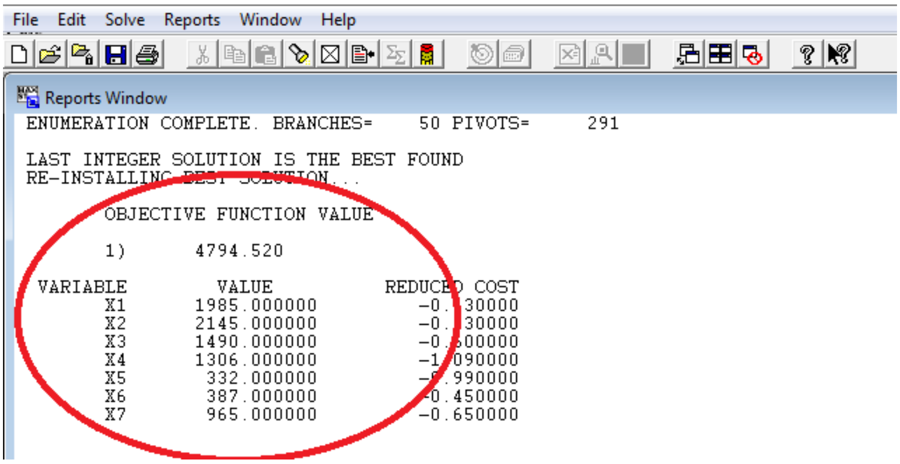

Figura 21 – Resultados

Resolvendo agora pelo Solver do Excel. A modelagem no Excel é semelhante ao problema do exemplo da subseção 2.4.2. Na tabela 10 abaixo estão as fórmulas e restrições que foram inseridas no Excel. Esse modelo será utilizado nos três casos.

B17	=(B3*E3)+(B4*E4)+(B5*E5)+(B6*E6)+ (B7*E7)+(B8*E8)+(B9*E9)	Função Objetivo
C13	=(E3*F3)+(E4*F4)+(E5*F5)+(E6*F6)+ (E7*F7)+(E8*F8)+(E9*F9)	Despesas Total
D11	=(E3*G3)+(E4*G4)+(E5*G5)+(E6*G6)+ (E7*G7)+(E8*G8)+(E9*G9)	Volume total
Restrições inseridas	\$C\$13 <=\$D\$11 \$C\$14 <= \$D\$12 \$C\$3 <= \$E\$3 <= \$D\$3 \$C\$4 <= \$E\$4 <= \$D\$4 \$C\$5 <= \$E\$5 <= \$D\$5 \$C\$6 <= \$E\$6 <= \$D\$6 \$C\$7 <= \$E\$7 <= \$D\$7 \$C\$8 <= \$E\$8 <= \$D\$8 \$C\$9 <= \$E\$9 <= \$D\$9	

Tabela 10 – Fórmulas e restrições utilizadas no Excel

Com isso, podemos seguir na resolução do problema,

	A	B	C	D	E	F	G
1				Modelo do mercado			
2		Lucro p/ unidade	Mín.de mercadoria	Máx. de mercadoria	Melhor compra	Custo por unidade	Volume unitário m
3	Açucar	0,43	1984	3692		R$ 1,96	0,00166
4	Arroz	0,23	2145	4573		R$ 2,16	0,00156
5	Óleo	0,6	755	1497		R$ 3,05	0,00112
6	Feijão	1,09	678	1306		R$ 3,66	0,00176
7	Macarrão	0,99	327	609		R$ 3,00	0,00553
8	Sal	0,45	198	387		R$ 0,10	0,00143
9	Café	0,65	853	1632		R$ 3,80	0,00052
10							
11	**Capital para investir**			R$ 22.550,00			
12	**Volume disponível para armazenamento**			13,5			
13	Despesas Total		R$ -				
14	Volume total		0,0000000				
15	Investimento mínimo		R$ 17.548,27				
16	Investimento máximo		R$ 34.527,11				
17	**Lucro**	R$ -					

Figura 22 – Inserção de dados

	A	B	C	D	E	F	G
1				Modelo do mercado			
2		Lucro p/ unidade	Mín.de mercadoria	Máx. de mercadoria	Melhor compra	Custo por unidade	Volume unitário m
3	Açucar	0,43	1984	3692	1985,0000000	R$ 1,96	0,00166
4	Arroz	0,23	2145	4573	2145,0000000	R$ 2,16	0,00156
5	Óleo	0,6	755	1497	1490,0000000	R$ 3,05	0,00112
6	Feijão	1,09	678	1306	1306,0000000	R$ 3,66	0,00176
7	Macarrão	0,99	327	609	332,0000000	R$ 3,00	0,00553
8	Sal	0,45	198	387	387,0000000	R$ 0,10	0,00143
9	Café	0,65	853	1632	965,0000000	R$ 3,80	0,00052
10							
11	**Capital para investir**			R$ 22.550,00			
12	**Volume disponível para armazenamento**			13,5			
13	Despesas Total		R$ 22.549,96				
14	Volume total		13,4998300				
15	Investimento mínimo		R$ 17.548,27				
16	Investimento máximo		R$ 34.527,11				
17	**Lucro**	R$ 4.794,52					

Figura 23 – Resultados

Assim, o valor máximo da função objetivo é $Z_{Max} = 4794{,}52$, ou seja, o lucro máximo com essas restrições. A solução ótima está na tabela 11 abaixo.

	Açúcar x_1	Arroz x_2	Óleo x_3	Feijão x_4	Macarrão x_5	Sal x_6	Café x_7
Solução ótima	1985	2145	1490	1306	332	387	965

Tabela 11 – Solução ótima caso 1

Nesse caso foram utilizado quase 100% do dinheiro e do volume.

3.1.2 Caso 2

Suponhamos agora que o proprietário tenha R$ 29560,00 para investir e possui $15,6m^3$ para armazenamento da mercadoria.

$$Z_{max} = 0,43x_1 + 0,23x_2 + 0,6x_3 + 1,09x_4 + 0,99x_5 + 0,45x_6 + 0,65x_7, \text{ sujeito a}$$

$$\begin{cases} 1,96x_1 + 2,16x_2 + 3,05x_3 + 3,66x_4 + 3x_5 + 0,1x_6 + 3.8x_7 \leqslant 29560 \\ 0,00166x_1 + 0,00156x_2 + 0,00112x_3 + 0,00176x_4 + 0,00553x_5 + 0,00143x_6 + 0,00052x_7 \leqslant 15,6 \end{cases}$$

e

$$\begin{array}{rcccl} 1984 & \leqslant & x_1 & \leqslant & 3692 \\ 2145 & \leqslant & x_2 & \leqslant & 4573 \\ 755 & \leqslant & x_3 & \leqslant & 1497 \\ 678 & \leqslant & x_4 & \leqslant & 1306 \\ 327 & \leqslant & x_5 & \leqslant & 609 \\ 198 & \leqslant & x_6 & \leqslant & 387 \\ 853 & \leqslant & x_7 & \leqslant & 1632 \end{array}$$

Resolvendo utilizando o software Lindo 6.1

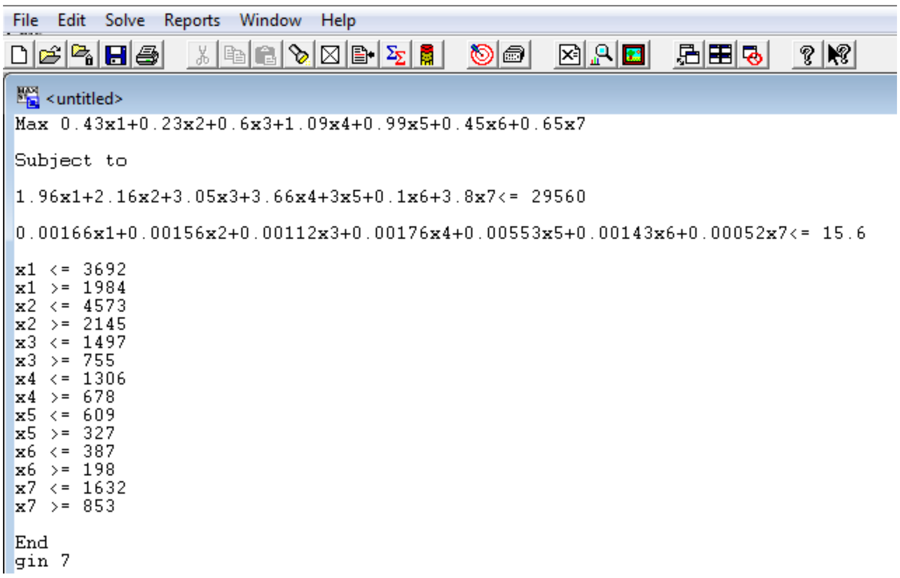

Figura 24 – Inserção dos dados no software

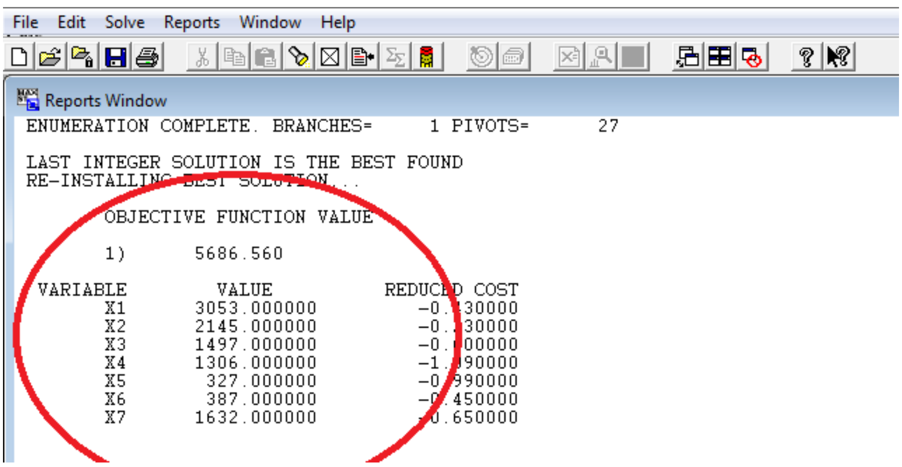

Figura 25 – Resultados

Resolvendo utilizando o Solver do Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1				Modelo do mercado			
2		Lucro p/ unidade	Mín.de mercadoria	Máx. de mercadoria	Melhor compra	Custo por unidade	Volume unitário m
3	Açucar	0,43	1984	3692		R$ 1,96	0,00166
4	Arroz	0,23	2145	4573		R$ 2,16	0,00156
5	Óleo	0,6	755	1497		R$ 3,05	0,00112
6	Feijão	1,09	678	1306		R$ 3,66	0,00176
7	Macarrão	0,99	327	609		R$ 3,00	0,00553
8	Sal	0,45	198	387		R$ 0,10	0,00143
9	Café	0,65	853	1632		R$ 3,80	0,00052
10							
11	**Capital para investir**			R$ 29.560,00			
12	**Volume disponível para armazenamento**			15,6			
13	Despesas Total		R$ -				
14	Volume total		0,0000000				
15	Investimento mínimo		R$ 17.548,27				
16	Investimento máximo		R$ 34.527,11				
17	**Lucro**	R$ -					

Figura 26 – Inserção de dados

	A	B	C	D	E	F	G
1				Modelo do mercado			
2		Lucro p/ unidade	Mín.de mercadoria	Máx. de mercadoria	Melhor compra	Custo por unidade	Volume unitário m
3	Açucar	0,43	1984	3692	3053,0000000	R$ 1,96	0,00166
4	Arroz	0,23	2145	4573	2145,0000000	R$ 2,16	0,00156
5	Óleo	0,6	755	1497	1497,0000000	R$ 3,05	0,00112
6	Feijão	1,09	678	1306	1306,0000000	R$ 3,66	0,00176
7	Macarrão	0,99	327	609	327,0000000	R$ 3,00	0,00553
8	Sal	0,45	198	387	387,0000000	R$ 0,10	0,00143
9	Café	0,65	853	1632	1632,0000000	R$ 3,80	0,00052
10							
11	**Capital para investir**			R$ 29.560,00			
12	**Volume disponível para armazenamento**			15,6			
13	Despesas Total		R$ 27.184,19				
14	Volume total		15,5997400				
15	Investimento mínimo		R$ 17.548,27				
16	Investimento máximo		R$ 34.527,11				
17	**Lucro**	R$ 5.686,56					

Figura 27 – Resultados

Nesse caso o $Z_{max} = 5686{,}56$, ou seja, o lucro máximo com essas restrições. A solução ótima está representado na tabela 12 abaixo.

	Açúcar x_1	Arroz x_2	Óleo x_3	Feijão x_4	Macarrão x_5	Sal x_6	Café x_7
Solução ótima	3053	2145	1497	1306	327	387	1632

Tabela 12 – Solução ótima caso 2

Neste caso não foi investido quase todo o dinheiro, pois o volume disponível para armazenamento não é suficiente. Foi utilizado R$27184,19 dos R$29560,00 disponível.

3.1.3 Caso 3

Suponhamos agora que o proprietário tenha R$ 20757,00 para investir e possui $14,3m^3$ para armazenamento da mercadoria.

$$Z_{max} = 0,43x_1 + 0,23x_2 + 0,6x_3 + 1,09x_4 + 0,99x_5 + 0,45x_6 + 0,65x_7, \text{ sujeito a}$$

$$\begin{cases} 1,96x_1 + 2,16x_2 + 3,05x_3 + 3,66x_4 + 3x_5 + 0,1x_6 + 3.8x_7 \leqslant 20757 \\ 0,00166x_1 + 0,00156x_2 + 0,00112x_3 + 0,00176x_4 + 0,00553x_5 + 0,00143x_6 + 0,00052x_7 \leqslant 14,3 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} 1984 &\leqslant x_1 \leqslant 3692 \\ 2145 &\leqslant x_2 \leqslant 4573 \\ 755 &\leqslant x_3 \leqslant 1497 \\ 678 &\leqslant x_4 \leqslant 1306 \\ 327 &\leqslant x_5 \leqslant 609 \\ 198 &\leqslant x_6 \leqslant 387 \\ 853 &\leqslant x_7 \leqslant 1632 \end{aligned}$$

Resolução utilizando o Software Lindo 6.1

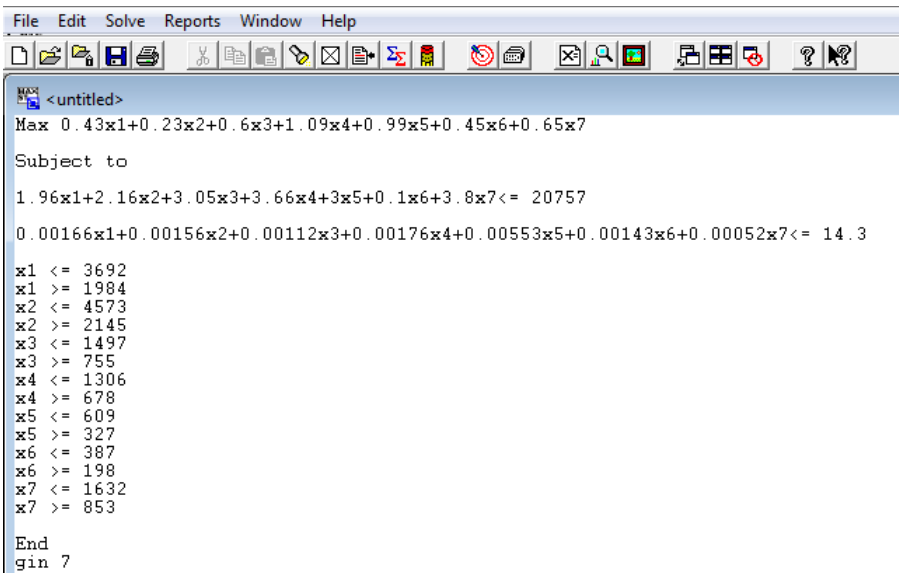

Figura 28 – Inserção dos dados no software

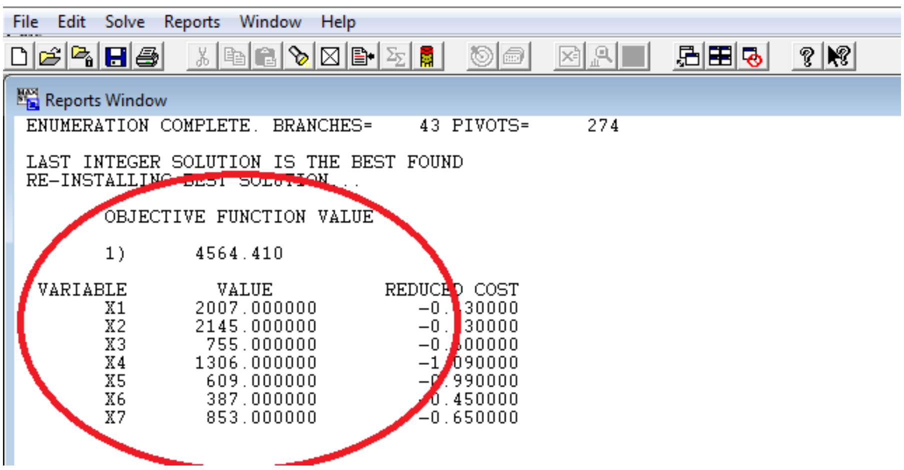

Figura 29 – Resultados

Resolução utilizando o Solver do Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1				**Modelo do mercado**			
2		Lucro p/ unidade	Mín.de mercadoria	Máx. de mercadoria	Melhor compra	Custo por unidade	Volume unitário m
3	Açucar	0,43	1984	3692		R$ 1,96	0,00166
4	Arroz	0,23	2145	4573		R$ 2,16	0,00156
5	Óleo	0,6	755	1497		R$ 3,05	0,00112
6	Feijão	1,09	678	1306		R$ 3,66	0,00176
7	Macarrão	0,99	327	609		R$ 3,00	0,00553
8	Sal	0,45	198	387		R$ 0,10	0,00143
9	Café	0,65	853	1632		R$ 3,80	0,00052
10							
11	**Capital para investir**			R$ 20.757,00			
12	**Volume disponível para armazenamento**			14,3			
13	Despesas Total		R$ -				
14	Volume total		0,0000000				
15	Investimento mínimo		R$ 17.548,27				
16	Investimento máximo		R$ 34.527,11				
17	**Lucro**	R$ -					

Figura 30 – Inserção de dados

	A	B	C	D	E	F	G
1				**Modelo do mercado**			
2		Lucro p/ unidade	Mín.de mercadoria	Máx. de mercadoria	Melhor compra	Custo por unidade	Volume unitário m
3	Açucar	0,43	1984	3692	2007,0000000	R$ 1,96	0,00166
4	Arroz	0,23	2145	4573	2145,0000000	R$ 2,16	0,00156
5	Óleo	0,6	755	1497	755,0000000	R$ 3,05	0,00112
6	Feijão	1,09	678	1306	1306,0000000	R$ 3,66	0,00176
7	Macarrão	0,99	327	609	609,0000000	R$ 3,00	0,00553
8	Sal	0,45	198	387	387,0000000	R$ 0,10	0,00143
9	Café	0,65	853	1632	853,0000000	R$ 3,80	0,00052
10							
11	**Capital para investir**			R$ 20.757,00			
12	**Volume disponível para armazenamento**			14,3			
13	Despesas Total		R$ 20.756,73				
14	Volume total		14,1867200				
15	Investimento mínimo		R$ 17.548,27				
16	Investimento máximo		R$ 34.527,11				
17	**Lucro**	R$ 4.564,41					

Figura 31 – Resultados

Nesse caso o $Z_{Max} = 4564{,}41$, ou seja, o lucro máximo com essas restrições. A solução ótima está na tabela 13, abaixo

	Açúcar x_1	Arroz x_2	Óleo x_3	Feijão x_4	Macarrão x_5	Sal x_6	Café x_7
Solução ótima	2007	2145	755	1306	609	387	853

Tabela 13 – Solução ótima caso 3

Nesse caso foi investido quase todo o dinheiro e não foi utilizado todo o espaço disponível para armazenamento.

Na tabela 14 abaixo podemos fazer a comparação das soluções ótimas dos três casos.

		Açúcar x_1	Arroz x_2	Óleo x_3	Feijão x_4	Macarrão x_5	Sal x_6	Café x_7	Lucro Total R$
Solução ótima	Caso 1	1985	2145	1490	1306	332	387	965	4794,67
Solução ótima	Caso 2	3053	2145	1497	1306	327	387	1632	5686,56
Solução ótima	Caso 3	2007	2145	755	1306	609	387	853	4564,46

Tabela 14 – Soluções do problema

Podemos perceber que a cada valor do investimento e para cada quantidade de espaço para armazenamento disponível, as soluções ótimas mudam, obtendo assim um lucro máximo diferente para cada caso.

4 Considerações Finais

O presente trabalho de conclusão de curso apresentou uma ferramenta matemática de otimização utilizando ferramentas gráficas, algébricas, computacionais e concretas, permitiu reconhecer a técnica da Programação Linear como uma importante aliada quando se deseja alcançar êxito em problemas lineares.

Julga-se de extrema importância a aplicação de ferramentas de pesquisa operacional que permitam embasar as tomadas de decisões em nível gerencial. O maior estreitamento da relação entre o setor de programação e o de execução é fundamental para elaborar as restrições envolvidas no processo, de maneira que seja possível alinhar o modelo matemático com a realidade, tornando a programação cada vez mais aderente ao planejado e eficiente.

O software utilizado para resolução do problema de programação linear, Lindo 6.1, atendeu as necessidades, ao passo que apresentou resultados com elevada confiabilidade e rapidez. Para a realização deste trabalho foi utilizada a versão demonstrativa do referido software, que se mostrou suficiente para fins acadêmicos. É importante ressaltar que em caso de aplicação do modelo pela empresa, será necessário adquirir a licença da versão oficial.

Os resultados obtidos para a programação de compra do mês em estudo demonstraram que os conceitos iniciais foram plenamente atendidos, de maneira que a solução final utilizasse culminante o espaço e o capital disponível naquele mês. Além disso, é possível também elaborar uma modelagem para a semana, dia ou para qualquer outro período, chegando assim a programação de compra ótima para aquele período. Este problema pode ser estendido para outros campos, como por exemplo para uma montadora de automóvel, podemos otimizar a compra do número de peças, para a produção desejada de automóveis.

De acordo com as análises realizadas, considera-se que o estudo cumpriu com seus objetivos iniciais, configurando-se em excelente oportunidade de aplicação dos conceitos abordados na Engenharia de Produção.

Referências

ARENALES, M. et al. *Pesquisa Operacional.* Rio de Janeiro: Campus, 2011.

GIORDANO, F.R.; FOX, W. P.; HORTON, S. B. *A first course in Mathematical Modeling.* 5.ed. Boston: M. D. Brooks Cole, 2008.

KOLMAN, B. *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.* 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LACHTERMACHER, G. *Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões.* 1. ed. São Paulo: Pearson, 2009.

NOGUEIRA, F.M.A. Programação Linear.[online] Disponível na Internet via WWW. URL:http://www.ufjf.br/epd015/files/2010/06/IntrodPL.pdf. Arquivo capturado em 19 de fevereiro 2018.

PRADO, D. *Programação Linear.* Belo Horizonte: DG, 1999.

PUCCINI, A. de L. *Introdução a Programação Linear.* Rio de Janeiro: LTC, 1972.

SILVA, K. *Modelagem matemática com Programação Linear: Uma Proposta de Trabalho no Ensino Médio.*2013. Dissertação (Mestrado em Matemática), Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista.

.