UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AMANDA CHAVES SANTOS

UM OLHAR PARA O CONHECIMENTO DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA SOBRE QUADRILÁTEROS

VITÓRIA DA CONQUISTA
2017

AMANDA CHAVES SANTOS

UM OLHAR PARA O CONHECIMENTO DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA SOBRE QUADRILÁTEROS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática, sob orientação da Profª M.ª Ana Paula Perovano dos Santos Silva.

VITÓRIA DA CONQUISTA
2017

FOLHA DE APROVAÇÃO

AMANDA CHAVES SANTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial par obtenção do título de Licenciada em Matemática, sob orientação da Profª M.ª Ana Paula Perovano dos Santos Silva.

BANCA EXAMINADORA

Vitória da Conquista, _____ de Junho de 2017

_____
Ana Paula Perovano dos Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

_____
Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

_____
Antônio Augusto de Oliveira Lima
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por estar comigo em todos os momentos da minha vida, por ter me guiado até aqui e por me dar forças pra continuar.

À minha mãe Marta e à minha avó Dilça, por muito me ensinarem sobre a vida e por serem responsáveis pelo que hoje sou e onde estou.

Aos meus irmãos, tios, tias e primos, que sempre estiveram presente na minha vida. Devo a eles a minha permanência na universidade, e sou muito grata por sempre me apoiarem e me incentivarem a lutar pelos meus sonhos.

À Professora Ana Paula, pelo carinho, persistência e paciência em me orientar.

À Patrícia e Júnior, pelo apoio dado durante esse percurso.

Aos amigos que conquistei durante o curso, especialmente Fernanda, Bianca, João e Will, que me ajudaram muito nessa trajetória, cada um a sua maneira.

Aos professores Antônio Augusto e Tânia Gusmão, por aceitarem participar da banca e pelas contribuições dadas a esse estudo.

À turma dos calouros, ingressantes no curso em 2016, pela disponibilidade em participar da nossa pesquisa, sem os quais não teria sido possível a realização desse trabalho.

Enfim, a todos que, de alguma forma, contribuíram na construção desse trabalho, muito obrigada!

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo analisar as estratégias utilizadas por estudantes de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, campus de Vitória da Conquista, na resolução de questões envolvendo quadriláteros. Para tanto, fundamentamos nossa pesquisa nos estudos de Amâncio (2013), Leivas (2012), Lorenzato (1995, 2006), Gazire (2000), Menezes et. al (2014), OCEM (2006), PCN (1998), PCN+ (2002) e Rêgo, Rêgo e Veira (2012), para compreender o ensino da Geometria, sua importância e o desenvolvimento do pensamento geométrico. Também nos pautamos em Barbosa (1994), Rezende e Queiroz (2000) e Tinoco (2011), no que tange as definições e propriedades dos quadriláteros apresentadas. Realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa, de acordo com Ludke e André (1986), a fim de obter dados descritivos acerca do objeto estudado, considerando que analisar as estratégias de resolução utilizadas possibilita a obtenção de dados que apresentem a percepção dos alunos a respeito do conteúdo abordado. Os dados obtidos na análise do questionário mostraram o baixo índice de acerto nas questões, em geral. Em suas estratégias de resolução, os alunos, muitas vezes, recorrem apenas à visualização, e não às definições e propriedades dos quadriláteros para resolver as questões, sendo que a vivência com objetos pouco variados reduz a capacidade do indivíduo de desenvolver o pensamento geométrico, de acordo com Amâncio (2013), e por essa razão, possivelmente, observamos alto índice de erro nas estratégias de resolução dos alunos, principalmente nas questões que abrangiam aspectos relativos às definições e propriedades dos quadriláteros.

Palavras-chave: Geometria. Pensamento Geométrico. Ensino de Geometria. Quadriláteros.

ABSTRACT

This work had as objective to analyze the strategies used by students of Mathematics Degree of the Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, thirst of Vitória da Conquista, in the resolution of questions about quadrilaterals. For this, we based our research in the studies of Amâncio (2013), Leivas (2012), Lorenzato (1995), Lorenzato (2006), Gazire (2000), Menezes et. (2001), PCN + (2002) and Rêgo, Rêgo and Veira (2012), to understand the teaching of Geometry, it importance and the development of geometric thinking. We also mentioned Barbosa (1994), Rezende and Queiroz (2000) and Tinoco (2011), for the definitions and properties presented. We conducted a qualitative research, according to Ludke and André (1986), for the purpose of to get descriptive data about the studied object, considering that to analyze the resolution strategies used enables us to obtain data that present the student's perception about the content addressed. The data obtained in the analysis of the questionnaires showed the low rate of correct answers in questions, in general. In their strategies of resolution, students often use only visualization, not the definitions and properties of the quadrilaterals to solve the questions, and the experience with little objects reduces the individual's ability to develop geometric thinking, According to Amâncio (2013), and for this reason, we may observe a high mistake rate in the student's resolution strategies, especially in the questions that covered aspects related to the definitions and properties of the quadrilaterals.

Keywords: Geometry. Geometric Thinking. Teaching of Geometry. Quads. Analysis of issues.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – desenvolvimento da Geometria na visão de Gazire.....16
Figura 2 – esquemas das Manifestações Geométricas.....16
Figura 3 – evolução das manifestações.....17
Figura 4 – exemplos de quadriláteros que não são trapézios nem paralelogramos.....32
Figura 5 – objeto cujas laterais se assemelham à forma de um trapézio.....32
Figura 6 – exemplos de linhas poligonais.....33
Figura 7 – representação de quadriláteros.....35
Figura 8 – diagrama dos quadriláteros de acordo a definição de trapézio.....36
Figura 9 – fragmento do questionário do aluno A10.....54
Figura 10 – fragmento do questionário do aluno A09.....55
Figura 11 – fragmento do questionário do aluno A04.....55
Figura 12 – fragmento do questionário do aluno A14.....56
Figura 13 – fragmento do questionário do aluno A11.....56
Figura 14 – fragmento do questionário do aluno A05.....58
Figura 15 – fragmento do questionário do aluno A12.....58
Figura 16 – fragmento do questionário do aluno A08.....59
Figura 17 – fragmento do questionário do aluno A12.....60
Figura 18 – fragmento do questionário do aluno A17.....60
Figura 19 – fragmento do questionário do aluno A18.....62
Figura 20 – fragmento do questionário do aluno A21.....63
Figura 21 – fragmento do questionário do aluno A14.....63
Figura 22 – fragmento do questionário do aluno A09.....65
Figura 23 – fragmento do questionário do aluno A17.....66
Figura 24 – fragmento do questionário do aluno A04.....67
Figura 25 – fragmento do questionário do aluno A10.....67
Figura 26 – fragmento do questionário do aluno A22.....69
Figura 27 – fragmento do questionário do aluno A15.....70
Figura 28 – fragmento do questionário do aluno A22.....72
Figura 29 – fragmento do questionário do aluno A15.....73
Figura 30 – fragmento do questionário do aluno A23.....73
Figura 31 – fragmento do questionário do aluno A21.....74

Figura 32 – fragmento do questionário do aluno A05.....75
Figura 33 – fragmento do questionário do aluno A06.....76
Figura 34 – fragmento do questionário do aluno A05.....77
Figura 35 – fragmento do questionário do aluno A23.....78
Figura 36 – representação dos quadriláteros no Geoplano.....81
Figura 37 – Representação de um trapézio isósceles.....82
Figura 38 – Quadriláteros que possuem lados opostos paralelos e congruentes.....83
Figura 39 – Quadriláteros cujas diagonais se interceptam no ponto médio.....84
Figura 40 – Quadriláteros cujas diagonais se interceptam no ponto médio e são perpendiculares.....85

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Estrutura do questionário.....46
Quadro 2: Distribuição das respostas por classe na questão 5.....54
Quadro 3: Distribuição das respostas por classe na questão 6.....57
Quadro 4: Distribuição das respostas por classe na questão 9.....59
Quadro 5: Distribuição das respostas por classe na questão 4.....62
Quadro 6: Distribuição das respostas por classe na questão 7.....65
Quadro 7: Distribuição das respostas por classe na questão 10.....69
Quadro 8: Distribuição das respostas por classe na questão 8.....72
Quadro 9: aspectos relevantes dos quadriláteros.....86

SUMÁRIO

Introdução.....10
Capítulo 1 – Fundamentação teórica.....15
1.1 O pensamento geométrico.....15
1.2 O ensino de Geometria.....21
Capítulo 2 – Quadriláteros e suas propriedades.....30
2.1 Abordagem dos quadriláteros em livros didáticos da Educação Básica.....30
2.2 Abordagem dos quadriláteros no Ensino Superior.....33
Capítulo 3 – Metodologia.....45
3.1 Procedimentos.....47
Capítulo 4 – Análise.....49
4.1 Definições e propriedades.....50
4.2 Ângulos.....61
4.3 Diagonais.....71
Conclusão.....79
Referências.....91
Apêndices.....93

Introdução

Desde criança carrego o gosto que tenho pela Matemática. Na escola, sempre foi minha matéria preferida. Antes de iniciar os estudos, aprendi com minha mãe a ler, escrever e as operações básicas de matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Ser professora era uma das profissões que sempre desejei, ajudava os professores na sala de aula com as atividades, tirava dúvidas dos colegas, e gostava disso. Muitas vezes recebi elogios dos professores das escolas onde estudei, pela habilidade que tinha na área de ciências exatas, no entanto, quando sabiam da minha vontade de ser professora, me aconselhavam a escolher outro curso, que não fosse licenciatura, diziam que eu tinha potencial pra escolher um curso “melhor”.

Por algum tempo, talvez pelo que ouvi de alguns professores, afastei a ideia de querer ser professora, mas tinha em mente que em algum momento faria um curso de Matemática, para aprofundar meus conhecimentos nessa área, independente de exercer a profissão.

Quanto à Geometria, era a parte da Matemática que eu menos gostava, não me interessava muito conhecer, talvez pela maneira como me foi ensinada, com conceitos básicos, apenas por meio de fórmulas e sem conexão com outras áreas do conhecimento e com a própria realidade. Além disso, os professores não enfatizavam a importância do conhecimento geométrico, diziam que outros conteúdos eram mais importantes e deveriam ser priorizados, e no caso de haver tempo, os conteúdos de Geometria seriam introduzidos já no final do ano letivo, o que quase nunca acontecia.

Ao final do Ensino Médio, ainda tinha dúvidas sobre que profissão seguir, mas tinha certeza de queria estudar Matemática, então prestei o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e fui aprovada pelo Sistema de Seleção Unificada (SISU) no curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), campus de Vitória da Conquista.

Ao ingressar no Ensino Superior, tive muitas dificuldades devido à falta de prerrequisitos, mas aos poucos fui me adaptando ao curso e evoluindo. As disciplinas voltadas à Educação Matemática, os estágios já vivenciados e

outras experiências que tive em sala de aula, como monitora ou substituindo professores, confirmaram minha vontade de seguir a carreira docente.

Logo no início do curso, pensava sobre como poderia ser meu trabalho final de conclusão do curso, não queria um tema relacionado à Geometria. A disciplina Fundamentos de Matemática Elementar III, que se tratava dos conhecimentos elementares de Geometria Plana e Espacial, e posteriormente a disciplina Geometria Euclidiana, foram extremamente relevantes na minha decisão em querer pesquisar sobre essa área da Matemática. A partir daí, posso dizer, que desenvolvi o pensamento geométrico e o gosto por esse conhecimento matemático, a Geometria.

Amâncio (2013) traz em seus estudos que o desenvolvimento da Geometria aconteceu de forma gradativa ao longo da história, passando por fases de observações, comparações e de generalizações até se alcançar o nível de sistematização que temos hoje.

A autora ressalta, com base em Tall e Vinner (1991), que a comunidade científica é que define os conceitos matemáticos, no entanto, a forma de pensar e de representar é diferente em cada pessoa, e por isso, os alunos não compreendem facilmente as definições formais, sendo comum que estes utilizem, inicialmente, conceitos informais, conhecidos por experiências vividas ou convívio com termos que se relacionem com o dia-a-dia, e que posteriormente venham a ser moldados, chegando à definição formal.

Para tanto, é necessário que os alunos possuam diversas experiências, com objetos diversificados, para que criem um conceito coerente. Alguns elementos, apontados por Amâncio (2013), são essenciais para o ensino e aprendizagem da Geometria, como os materiais didáticos utilizados, que devem servir de apoio na construção de novos conhecimentos, o desenho como forma de visualização de um conceito por meio de ilustrações, além das imagens mentais, que correspondem à capacidade de um indivíduo de transcrever propriedades de algo quando o objeto ou desenho não está presente, sendo assim de natureza abstrata, dentre outros.

Assim, o pensamento geométrico depende de experiências com objetos e desenhos variados, pois, quanto maior a diversidade entre eles, melhor será

a imagem mental formada pelo aluno, e a aproximação do conceito criado com a definição.

Relevância e Delimitação

Devido às experiências que tive em sala de aula, ditas anteriormente, bem como minha vivência escolar na Educação Básica, comecei a questionar o porquê de a Geometria estar pouco presente ou ausente da sala de aula, e por que os professores tendem a priorizar outros conteúdos matemáticos, desconsiderando o conhecimento geométrico e sua importância na formação do futuro cidadão.

De acordo com Lorenzato (1995), é importante entender as causas que levam ao detrimento do ensino de Geometria e sua ausência na sala de aula, visto que essa é uma área que permite diversificar as formas de abordagem do conteúdo, maior relação com outras áreas da Matemática e do conhecimento e conexões com a realidade, além de levar o aluno a desenvolver o pensamento geométrico e o raciocínio visual, pois, a Geometria exige uma forma específica de pensar que nem sempre depende de conhecimentos algébricos ou aritméticos, como é posto na maioria dos conteúdos matemáticos, em sua resolução. Segundo o autor, essas habilidades a serem desenvolvidas através da Geometria são extremamente relevantes para a resolução de situações da realidade que possam ser geometrizadas, para a leitura interpretativa do mundo, para a comunicação das ideias e visão da Matemática.

O autor revela ainda que, dentre as diversas causas para o fracasso no ensino de Geometria, uma delas é o fato de que muitos professores não possuem conhecimentos geométricos básicos para sua prática pedagógica, tentando ensinar o que não conhece ou não ensinar, não contribuindo significativamente para a construção do conhecimento.

Dada à importância da Geometria, sua beleza, seu poder e sua contribuição na formação do futuro cidadão, como destaca Lorenzato (1995), surgiu o interesse em analisar o conhecimento geométrico de futuros professores de Matemática. Para isso, estaremos interessados em analisar o conhecimento geométrico, especificamente sobre quadriláteros e suas

propriedades, que os estudantes ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática trazem consigo da Educação Básica.

Esperamos, a partir desse trabalho, contribuir no sentido de trazer reflexões em relação ao ensino de Geometria e especialmente dos quadriláteros e suas propriedades, pois, de acordo com Menezes et. al (2014), é importante começar a mudança no desenvolvimento do pensamento dos alunos a partir da formação inicial, pelo fato de estudos (AMÂNCIO, 2013; LEIVAS, 2012; LORENZATO, 1995; GAZIRE, 2000; MENEZES et. al, 2014) mostrarem que os professores em exercício possuem as mesmas dificuldades que seus alunos, se tratando do conhecimento geométrico, transmitindo conceitos errados e incompletos à alunos que podem um dia vir a ser docentes e repetirem o mesmo erro que seus professores.

Questão de pesquisa

A partir dessas reflexões, desenvolvemos a questão norteadora da pesquisa: **Quais estratégias são utilizadas por estudantes de Licenciatura em Matemática na resolução de questões envolvendo quadriláteros?**

Objetivo Geral

Analisar as estratégias utilizadas por estudantes de Licenciatura em Matemática na resolução de questões envolvendo quadriláteros.

Objetivos Específicos

Identificar e classificar as estratégias utilizadas pelos estudantes de Licenciatura em Matemática na resolução de problemas envolvendo quadriláteros e suas propriedades; verificar se os estudantes utilizam as propriedades referentes aos quadriláteros, em suas estratégias de resolução; constatar e analisar, caso houver, as estratégias de erros mais utilizadas pelos estudantes em suas resoluções; identificar as concepções dos alunos, a respeito dos quadriláteros, trazidas da Educação Básica,

Descrição

A introdução deste trabalho destina-se à exposição da motivação para a escolha do tema abordado, bem como sua relevância e delimitação, e os objetivos de nossa pesquisa.

No capítulo 1 apresentamos algumas considerações sobre o pensamento geométrico, com base em Amâncio (2013) e Gazire (2000), e sobre ensino de Geometria, nos pautando em Lorenzato (1995), Menezes et. al (2013), Leivas (2012), e em documentos curriculares oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1998), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) (2002) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) (2006), além das definições e propriedades dos quadriláteros, de acordo com Barbosa (1994), Tinoco (2011) e Rezende e Queiroz (2000), e a abordagem desse conteúdo nos livros didáticos e em trabalhos acadêmicos,

O capítulo 2 trata das observações acerca do ensino do conteúdo de quadriláteros e suas propriedades, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, pautadas em Souza e Pataro (2009), Dante (2015), Barbosa (1994), Rezende e Queiroz (2000) e Tinoco (2011).

Os procedimentos metodológicos utilizados, os sujeitos de nossa pesquisa e o instrumento de coleta de dados são descritos no capítulo 3.

O capítulo 4 está destinado à descrição e análise dos dados obtidos no questionário e na oficina, sendo este estruturado em quatro seções: Definições e propriedades; Ângulos; Diagonais; e Oficina.

Por fim, apresentamos as considerações acerca desse estudo, por meio da análise de dados.

CAPÍTULO 1 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo apresentamos algumas considerações acerca do pensamento geométrico e do ensino de Geometria. Apresentaremos as definições e propriedades dos quadriláteros, e sua abordagem nos livros didáticos.

1.2 O Pensamento Geométrico

Discutiremos o pensamento geométrico tomando como referência para esta seção as contribuições de Amâncio (2013) e Gazire (2000).

Gazire (2000) afirma que a natureza é repleta de padrões, e que quando o homem observou as formas da Lua, do Sol, de alguns frutos, das pétalas das flores, da colmeia das abelhas, foi percebendo figuras com formas parecidas. Essas percepções também foram salientadas nos estudos de Gazire (2000), destacando a autora que

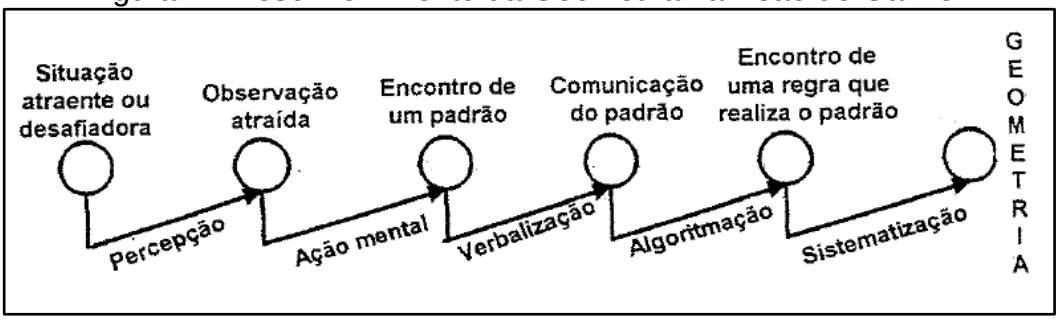
> Evidentemente são da natureza as primeiras manifestações de formas. Embevecido nesse verdadeiro mundo de formas e tendo os sentidos que tem e as razões que usa, seria inevitável que o homem nelas reparasse. Pelos mesmos motivos seria normal que alguém observasse pontos em comuns nessas formas, e de posse desses pontos comuns, que se descobrisse um padrão. Encontrado esse padrão, será que ele deixaria de comunicar aos demais essa curiosidade? É provável então, que, a partir daí se preocupasse registrar, reproduzir ou até mesmo modificar o padrão descoberto. Chegado a esse ponto, o homem então se encaminhava para o “mundo geométrico” (GAZIRE, 2000, p. 43)

Assim, procurando compreender, comunicar e registrar os padrões que ocorrem na natureza e os inventados pela mente humana, o homem adentrou no mundo da Geometria, que se se desenvolveu gradativamente ao longo da história, passando por fases de observações, comparações e de

generalizações até se alcançar um nível de sistematização que temos hoje. (AMÂNCIO, 2013)

Para ilustrar o desenvolvimento da Geometria, Gazire apresenta a imagem registrada na Figura 1.

Figura 1 - Desenvolvimento da Geometria na visão de Gazire

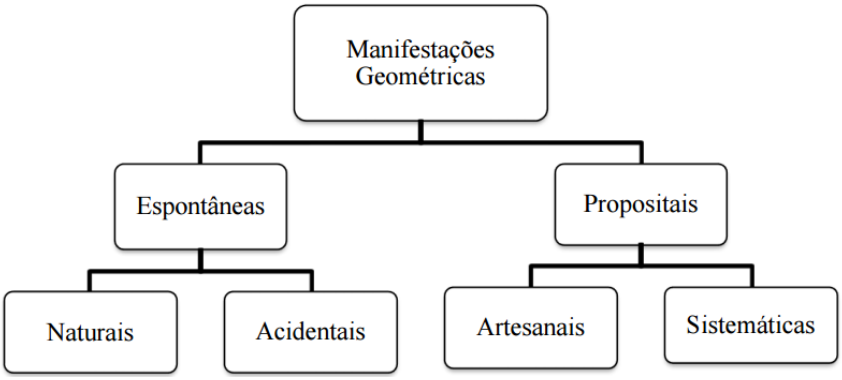


Fonte: Gazire (2000, p. 44)

A Figura 1 traz embutida a ideia de que a partir da observação de uma situação atraente ou desafiadora encontrou-se um padrão, que foi comunicado, sendo descoberta uma regra que realiza esse padrão, e de maneira inevitável esse conhecimento foi sendo sistematizado.

A Figura 2 exibe os tipos de manifestações geométricas nos quais se deram o desenvolvimento da Geometria a partir da observação de padrões, de um conhecimento intuitivo e empírico até chegar a um conhecimento abstrato e organizado, que conhecemos.

Figura 2 - esquemas das Manifestações Geométricas

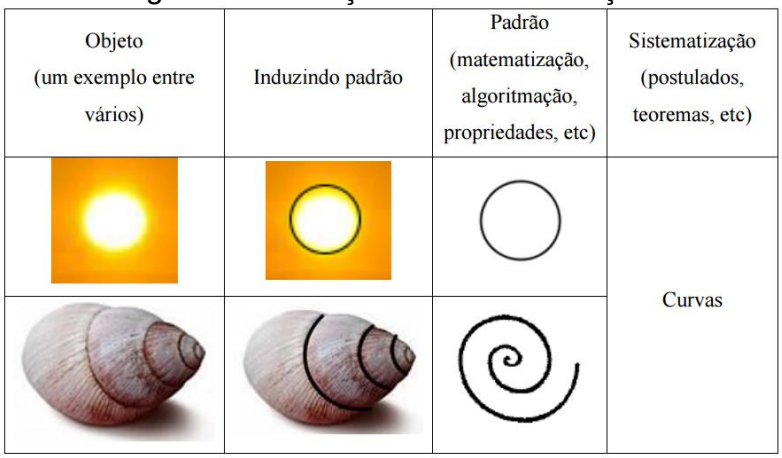


Fonte: Gazire (2000, p. 49)

Dentre as *manifestações geométricas espontâneas*, tem-se as *manifestações naturais*, que são as formas da natureza que induzem padrões como, por exemplo, os favos de mel que se parecem na visão superior com polígonos. No caso das *manifestações acidentais*, são ações humanas que não objetivam a atividade geométrica, mas os resultados induzem a padrões geométricos, como por exemplo, num chute ao pênalti, o movimento da bola pode descrever uma parábola. Enquanto nas *manifestações geométricas propositais*, aparecem as *manifestações artesanais* como as formas geradas pela atividade humana que usam regras, que constroem padrões, como, por exemplo, o traçado das cestarias, das tapeçarias. Já as *manifestações sistemáticas* possuem fundamentação no espírito filosófico grego, que encontrando tanto o reconhecimento empírico de padrões e o conhecimento de uso de algoritmos para a reprodução desses padrões, deu um espírito matemático à Geometria. (AMÂNCIO, 2013)

A Figura 3 retrata a evolução dessas manifestações.

Figura 3 - evolução das manifestações



Fonte: Amâncio (2013, p. 42)

A autora, fundamentada nas ideias de Tal e Vinner (1991), afirma que a comunidade científica define os conceitos matemáticos, “mas as realidades psicológicas de cada pessoa são um pouco diferentes. Existe uma estrutura cognitiva complexa na mente de cada aluno quando um conceito é evocado.” (AMÂNCIO, 2013, p. 43). E por isso, é comum que um conceito se forme inicialmente, de maneira informal, a partir das experiências vividas ou convívio

com termos que se relacionem com o dia-a-dia, e que posteriormente venham a ser moldados, chegando à definição formal.

> Nesse processo de construção conceitual, normalmente é dado um nome ou símbolo que permite à pessoa se comunicar, ajudando na manipulação mental. Por exemplo, quando se reconhece e nomeia figuras, como triângulos, quadrados, retângulos e hexágonos, está se firmando o primeiro passo na construção desse conceito. No entanto, a estrutura total cognitiva é muito maior do que a evocação de um único símbolo. É mais do que qualquer imagem mental, seja pictórica ou de outra forma simbólica. (AMÂNCIO, 2013, p. 43)

Portanto, reconhecer e nomear figuras geométricas, é apenas uma parte do todo, que é a construção do conceito de figuras geométricas. Lorenzato (2006) faz uso da Parábola Hindu para exemplificar a consequência de se conhecer apenas a parte do todo:

> Cinco cegos costumavam diariamente pedir esmolas no portal de entrada da cidade e nenhum deles, até então, havia conhecido um elefante. Por isto, ao saberem que logo chegaria um elefante à cidade, decidiram pedir ao dono que parasse o animal diante do portal para que eles pudessem “ver com às mãos” o tal elefante. E assim aconteceu: o primeiro cego apalpou a lateral do elefante e disse: ele parece um muro; o segundo apalpou uma orelha e disse: ele é como uma grande ventarola; o terceiro apalpou uma das pernas do elefante e disse: é como as colunas do templo; o quarto, depois de apalpar uma das presas de marfim, concluiu: é igual a uma lança; o quinto, apalpou a trompa e disse: é uma grande cobra. Então o elefante prosseguiu em sua viagem, enquanto os cegos, em meio a grande falatório, não conseguiram concordar sobre o que seria um elefante, uma vez que teve uma percepção parcial do animal. (LORENZATO, 2006, p. 60)

Essa parábola nos mostra que não podemos julgar que, por conhecermos partes do todo já conhecemos o todo. Assim, no processo de formação de conceitos se faz necessário distinguir *conceito imagem* e *conceito definição*.

> O conceito imagem é usado para descrever a estrutura total cognitiva, que é associada a um conceito. Construído ao longo de anos de experiência de todos os tipos, o conceito imagem vai sendo alterado à medida que a pessoa encontra novos estímulos, favorecendo seu amadurecimento e incluindo as imagens mentais, as propriedades e os processos associados a um conceito. [...] O termo conceito definição se refere às palavras usadas para especificar um conceito. Pode ser aprendido pelo indivíduo de uma forma mecânica ou mais significativa, podendo estar relacionado a um menor ou maior grau com o conceito como um todo. Pode, também, ser uma reconstrução pessoal da definição pelo aluno. Então, o conceito definição será a forma por meio de palavras que o aluno usará para explicar o seu próprio conceito imagem. Assim, um conceito definição de uma pessoa pode ser diferente do conceito formal, que é aceito pela comunidade científica. (AMÂNCIO, 2013, p. 44).

Sendo assim, cada pessoa possui um conceito imagem diferente do de outra, ambos associados a um mesmo conceito definição, podendo este estar relacionado adequadamente ou não com o conceito imagem, ou seja, um aluno pode utilizar de forma correta, a definição formal sem realmente compreendê-la. A autora também destaca que “é possível ensinar aos alunos a responder corretamente às questões envolvendo definições formais, mas, mesmo assim, eles podem desenvolver conceitos imagens que incluem potenciais conflitos com a definição.” (AMÂNCIO, 2013, p. 44). Isso significa que o conceito imagem desenvolvido pelo aluno interfere na compreensão de um conceito, podendo estar ou não de acordo com sua definição formal. A partir disso, são definidos dois tipos principais de fatores de conflitos.

O primeiro fator de conflito acontece quando o conceito imagem e o conceito definição causam um conflito cognitivo, ou seja, o conceito imagem não está associado de forma completamente coerente com o conceito definição. E “O outro tipo de fator de conflito, que é mais grave, é aquele que o conceito imagem está em contradição, não com uma parte do conceito definição, mas com a definição do conceito em si”. (AMÂNCIO, 2013, p. 45)

Nessa perspectiva, faz-se necessário que os alunos possuam conceitos imagens para trabalharem com definições formais, quanto mais experiências diversificadas, mais coerente será o conceito formado, ou seja, lidar com um

conceito necessita muito mais de um conceito imagem do que de um conceito definição.

Dessa forma, Amâncio (2013) destaca o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental como elementos essenciais para o ensino e aprendizagem da Geometria. O objeto está relacionado aos materiais didáticos utilizados, que devem servir de apoio na construção de novos conhecimentos, e que quando manipulados pelo aluno possibilite uma relação entre a teoria e a prática. O desenho é a forma de visualizar o conceito por meio de ilustrações, e por isso pode ser confundido com os conceitos em si, no entanto, os desenhos possuem natureza concreta, ao passo que, os conceitos são de natureza abstrata, e daí representar um conceito, ou seja, fazer a transposição do desenho se torna uma dificuldade. Por sua vez, as imagens mentais correspondem à capacidade de um indivíduo de transcrever propriedades de algo quando o objeto ou desenho não está presente, sendo assim de natureza abstrata.

Assim, a aquisição de conhecimento sobre um conceito geométrico depende da forma que se abrange esse conceito no que diz respeito aos elementos citados, pois

> Um conceito geométrico pode ser representado por uma infinidade de desenhos, mas, na prática, há uma predominância de algumas figuras particulares, encontradas com frequência em livros, cadernos, ou desenhadas na lousa pelo professor. [...] (AMÂNCIO, 2013, p. 47)

Há uma tendência dos alunos a formarem imagens mentais a partir da vivência maior com a manipulação de determinados objetos e desenhos. Isso significa que “A pouca experiência com manipulação de objetos e os desenhos esteriotipados, contribuem para que os alunos tenham imagens mentais reduzidas dos objetos geométricos”. (AMÂNCIO, 2013, p. 47). Por isso, é de fundamental importância no ensino de Geometria, ressaltar o uso do objeto, do desenho, do conceito e da imagem mental como ferramentas auxiliadoras para uma aprendizagem significativa no que se refere aos conceitos geométricos,

pois a restrição a determinadas figuras predominantes e suas transposições restringe também a construção do conhecimento, e com isso, o desenvolvimento do pensamento geométrico do indivíduo torna-se limitado aos recursos que lhes são apresentados.

Dessa maneira, a generalização de um conceito depende de atividades que permitam o contato com vários aspectos da definição, e não com situações particulares predominantes de objetos geométricos, pois os alunos poderiam "vivenciar situações de conflito quando o conceito imagem e o conceito definição forem evocados em um contexto mais amplo". (AMÂNCIO, 2013, p. 48). A autora aponta uma pesquisa realizada por Gravina (1996), na qual constatou que parte dos alunos de um curso de licenciatura possuem desequilíbrio entre componentes conceitual e figural em relação às definições de quadrado, retângulo e paralelogramo, fato também observado em nossa análise.

Daí a necessidade das experiências vivenciadas pelos alunos, pois é a partir destas que se desenvolve o pensamento geométrico, sendo importante salientar

> que os alunos devem ter ricas experiências envolvendo a manipulação de objetos e desenhos diversificados que permitam formar imagens mentais com qualidade e variedade, isto é, imagens que envolvam todos os aspectos abrangidos pela definição. (AMÂNCIO, 2013, p. 54)

Desse modo, o pensamento geométrico depende de experiências com objetos e desenhos variados, quanto maior a diversidade entre eles, melhor será a imagem mental formada pelo aluno, e consequentemente seu conceito imagem se aproximará da definição.

1.3 O ensino de Geometria

Na década de 1990, estudos apontavam dificuldades relacionadas ao ensino de Geometria. Segundo Lorenzato (1995), quando relacionado às

outras áreas da Matemática, o ensino de Geometria tem sido o que menos está presente na sala de aula, quando está é o menos priorizado e quando ensinado não faz conexões com a realidade dos alunos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (1998) ressaltam a importância do ensino de Geometria, destacando que

> Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações (BRASIL, 1998, p. 122)

Os PCN (1998) ressaltam a importância da Geometria no currículo escolar, visto que essa permite ao indivíduo desenvolver uma forma específica de pensar, pois possibilita o desenvolvimento do pensamento na medida em que desperta no aluno o interesse em buscar e construir o conhecimento.

Mais recentemente, Lorenzato (2006) afirma que a Geometria não tem ocupado o seu devido lugar no ensino da Matemática e que o seu ensino deve ser enfatizado para que o aluno possua uma visão integral da Matemática.

Lorenzato (1995) destacava, dentre as diversas causas para o não-ensino da Geometria, duas que estão diretamente ligadas à sala de aula. A primeira delas é o fato de que “muitos professores não detém os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas.” (LORENZATO, 1995, p. 3), fato também presente nos estudos mais recentes como, por exemplo, Menezes et. al (2013), que evidenciam a necessidade de uma mudança conceitual, pois os professores apresentam as mesmas dificuldades dos seus alunos, quanto aos conceitos geométricos. Dificuldades ligadas ao fato de os professores não possuírem conhecimento necessário a respeito desses conceitos, e daí, a importância da formação inicial como ponto de partida para essa mudança.

Além da falta de conhecimentos, a dificuldade dos professores consiste também em tentar ensinar o que não se conhece ou não ensinar, não proporcionando e não contribuindo de forma significativa para a construção do conhecimento, pois “o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão.” (LORENZATO, 1995, p.3).

A segunda causa, de acordo com Lorenzato (1995), está relacionada ao apego e importância exagerados dados ao livro didático, ou pela formação insuficiente dos professores, ou pela jornada de trabalho extensa que deve ser cumprida, não lhes permitindo buscar outros meios e materiais didáticos para suas aulas. O autor ressalta ainda que na maioria dos livros didáticos, a Geometria aparece de maneira apenas formal, sem relações e aplicações no cotidiano ou sem uma explicação lógica ou histórica, além de quase sempre ser apresentada no final do livro, aumentando as chances de não haver tempo para ser estudada.

Atualmente, a organização dos conteúdos de Geometria nos livros didáticos aparece, em sua maioria, de forma diferente das citadas por Lorenzato (1995), sendo distribuídos em todo o livro, e não apenas no final, trazendo também situações contextualizadas para que abordem esse tema. Mas destacamos a importância de serem utilizados outros recursos além dos livros didáticos, que, apesar da evolução, não deve ser visto como único recurso para se trabalhar o ensino de Geometria em sala de aula.

Quanto aos fatores externos à sala de aula, Lorenzato (1995) cita principalmente, o currículo nos cursos de formação de professores, no qual a Geometria pouco aparece, quando aparece, e os programas e guias curriculares, que separam completamente a Geometria da Aritmética e da Álgebra, interferindo no seu ensino na sala de aula, pois são exigidos dos autores dos livros didáticos que sigam essas propostas curriculares. Além disso, há o contexto histórico, em que o ensino de Geometria sofreu influências das propostas da Matemática Moderna, com práticas pedagógicas inadequadas que existem até hoje, e por isso, “está estabelecido um ciclo

vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la.” (LORENZATO, 1995, p. 4), sendo também destacado em seus estudos que

> Com frequência, o ensino da Geometria é iniciado ressaltando o constante, o permanente e o fixo; por exemplo, a posição da figura, o total de lados, a igualdade de lados e de ângulos. Estas propriedades parecem aceitáveis às crianças quando a figura está na posição frontal, que é um caso particular da realidade. Tal opção de ensino se assemelha a mostrar uma foto de um objeto em movimento, com a pretensão de que ela revele o tipo de movimento do objeto. Este modo de ensinar dificulta o reconhecimento do quadrado como caso particular de retângulo e do losango. (LORENZATO, 2015, p. 12)

Essa forma de ensino frequentemente adotada, apresenta conceitos geométricos a partir de casos particulares e predominantes, sem sua generalização, como os citados pelo autor, dificultando o acesso do aluno a um campo maior de possibilidades, e assim restringindo a construção do seu conhecimento a casos específicos, e não a generalização.

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (2002), a estrutura do ensino de Geometria no Ensino Fundamental busca proporcionar “uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas.” (p.123). E, para que seja alcançado um maior desenvolvimento do raciocínio lógico por parte dos alunos é importante que no Ensino Médio exista um desenvolvimento dessas ideias no sentido de que o aluno conceba um sistema comprovado por deduções em que sejam analisados os significados dos postulados e teoremas que já lhe foi apresentado durante o Ensino Fundamental.

É ressaltado pelos PCN+ (2002) que,

> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é “verdade” em Matemática

> significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma conseqüência lógica de outras proposições provadas previamente. O processo de provar em Matemática seria uma tarefa impossível de marchar para trás indefinidamente, a não ser que se estabelecesse um ponto de partida. Esse ponto inicial deve conter um certo número de afirmações, chamadas de postulados ou axiomas, que devem ser aceitas como verdadeiras e para as quais não se exige nenhuma prova. Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática. Esse é o caso, por exemplo, da geometria clássica. (BRASIL, 2002, p. 124)

Além desta forma de ensino, é destacado por Leivas (2012) alguns fatores de dificuldade no ensino de Geometria, justificados pela falta de tempo para cumprir os cronogramas, dentre eles, o currículo para a Licenciatura em Matemática e a forma como está estruturado em diversos cursos, nos quais a imaginação, intuição e visualização não aparecem como elementos norteadores do ensino de Geometria, levantando assim, questionamentos de qual a Geometria que deve ser ensinada na formação inicial de professores de Matemática e se é possível ensinar conceitos geométricos nos cursos de Licenciatura em Matemática partindo desses elementos citados.

Para tanto, Leivas (2012) fala da geometrização do currículo da Licenciatura em Matemática, e conceitua esse termo como:

> um processo de utilização de abordagens geométricas, como um método para compreender e representar visualmente conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, por meio de imaginação, intuição e visualização, de modo que a Geometria se transforme num ponto de vista capaz de conduzir à geometrização. (LEIVAS, 2012, p.186)

Segundo Leivas (2012), no ensino de Geometria, muitas vezes o termo “visualização” remete apenas a aspectos físicos de visão, ou seja, visualizar é “ver com os olhos”, porém, o autor define esse termo como “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar

determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos.” (LEIVAS, 2012, p. 188)

Nessa perspectiva, o autor traz a imaginação, intuição e visualização como um meio de desenvolver a capacidade de construção de estruturas geométricas mentais, alcançando conhecimentos matemáticos científicos. Esse processo é caracterizado pelo autor como pensamento geométrico avançado, que em seu ponto de vista, são:

> relações que se estabelecem entre os processos mentais na formulação de conceitos, que são ideias que necessitam ser esquematizadas a fim de se obter abstrações a partir de experiências realizadas e oriundas de conhecimentos intuitivos, imaginativos e visuais. (LEIVAS, 2012, p. 189)

Além das dificuldades relacionadas à formação inicial de professores de Matemática, “o professor enfrenta novas realidades a cada dia e ano e tem o desafio de descobrir de que forma essas informações e descobertas chegam à educação de seus alunos.” (LEIVAS, 2012, p. 190). Assim, cabe ao professor encontrar novas metodologias, de forma a melhorar o desempenho dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Algumas indagações são apresentadas como sugestão, pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (2006), como forma de despertar a curiosidade dos alunos a pensarem geometricamente:

> Como funcionam certos mecanismos do nosso quotidiano ou certos instrumentos de trabalho?”. São propriedades geométricas que explicam o funcionamento de um macaco de carro, dos brinquedos de uma praça infantil, do teodolito, do periscópio, da máquina fotográfica, do projetor de imagens. Também perguntas simples, como “Por que o parafuso é sextavado?” ou “Por que os prismas triangulares, junto com o movimento de rotação, são usados para veicular propagandas?”, são respondidas com conhecimento bastante elementar de geometria, que também possibilita inúmeras atividades de natureza interdisciplinar: os poliedros e os cristais, as simetrias nos seres vivos, a concha de Nautilus e a espiral de Arquimedes. (BRASIL, 2006 p. 92).

Essa forma de ensinar, através de questionamentos, de relação do conteúdo com a realidade, desperta o interesse em buscar respostas, traçar estratégias, criar possibilidades, além de utilizar os conhecimentos prévios do aluno acerca do tema abordado. Para que tal prática seja realizada, o professor precisa mediar o conhecimento e auxiliar o aluno no desenvolvimento do pensamento geométrico, o que só possível quando o professor detém conhecimento suficiente sobre o que irá ensinar aos seus alunos.

Para isso, é necessário que o professor domine também os conteúdos a serem ensinados por ele, pois, para Menezes *et. al* (2013) é “pouco provável que os professores consigam que os seus alunos compreendam os conceitos matemáticos se eles próprios não os compreenderem.” (MENEZES *et. al*, 2013, p.244)

Lorenzato (1995) afirma que os professores apresentam diversas razões para não ensinar Geometria, mas em nenhuma delas duvidam ou questionam os méritos e importância desse pensamento. O pensamento geométrico difere um pouco dos pensamentos algébrico e aritmético, pelo fato de que nele o aluno desenvolve um raciocínio específico, pois é mais do que trabalhar com números ou fazer contas, como é fortemente inserido aos alunos: aritmetizar o raciocínio, ou seja, os alunos tendem a preferir e pensar que só é possível resolver questões desse tipo, que apresentem nos seus dados números ou medidas, porque assim lhes foi ensinado.

O autor afirma ainda que, dominar a Álgebra e a Aritmética não é suficiente para resolver questões que envolvam Geometria, pois “os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificadas pela Geometria.” (LORENZATO, 1995, p.7). Ou seja, habilidades aritméticas e algébricas não implicam um bom desempenho em questões de Geometria, ao passo que, o pensamento geométrico auxilia na compreensão de outros pensamentos.

Lorenzato (1995) argumenta também a necessidade de aprender Geometria baseado no fato de que sem ela as pessoas não podem pensar geometricamente ou raciocinar através da visualização, e por isso, não conseguem resolver situações geometrizadas se não desenvolverem essa habilidade. Além disso, a visão de mundo se torna incompleta, as ideias ficam limitadas e a visão da Matemática se distorce, quando não se conhece Geometria, que é uma excelente aliada na aprendizagem da criança, pois permite identificar seu nível de compreensão, raciocínio e dificuldades ou soluções, pois “a Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar.” (LORENZATO, 1995, p. 6)

Para isso, a Geometria deve ser ensinada nas escolas, valorizando sua importância e contribuição ao longo da história e na formação do cidadão, sendo apresentada de forma a envolver os conteúdos e desenvolver o pensamento geométrico de acordo com as tendências para cada nível de ensino.

Assim, o autor ressalta que, para que haja mudanças significativas no ensino de Geometria é necessário esforço e participação de outras áreas, não só da Matemática e não só da escola. Os currículos nos cursos de formação de professores, bem como as propostas curriculares e materiais pedagógicos devem também ser repensados e reformulados, além de formação continuada para os professores em exercício, a fim de que possam se aperfeiçoar, pois “a questão da renovação ou da ressureição do ensino da Geometria não é infelizmente apenas uma questão didático-pedagógica: é também social, epistemológica, envolvendo Universidades, Secretarias de Educação e Editoras...” (LORENZATO, 1995, p. 5)

Deve-se também enfatizar e estimular as pesquisas nessa área, além das “iniciativas de professores anônimos, que acreditam poder melhorar o ensino e a aprendizagem”. (LORENZATO, 1995, p. 12)

Evidencia-se, portanto, a necessidade de mudanças no ensino de Geometria, de forma que este seja valorizado e suas contribuições sejam reconhecidas, ficando clara a importância da formação inicial do professor de Matemática, como ponto de partida para que tais mudanças aconteçam, pois,

será ele o intermediador entre o aluno e o conhecimento geométrico, auxiliando-o na construção do seu próprio conhecimento e na sua formação enquanto cidadão. Entretanto, ressaltamos que, o fracasso ou sucesso no ensino de Geometria não depende somente do professor ou da escola, mas de todos os fatores externos que estão ligados direta ou indiretamente ao ensino dessa área.

A seguir, tratamos dos quadriláteros e suas propriedades, quanto à sua abordagem na Educação Básica e no Ensino Superior.

CAPÍTULO 2 – QUADRILÁTEROS E SUAS PROPRIEDADES

Esse capítulo apresenta algumas observações a respeito do ensino do conteúdo de quadriláteros e suas propriedades na Educação Básica e no Ensino Superior, relevantes para a elaboração do questionário e sua análise.

Como nosso objetivo é analisar estratégias utilizadas por estudantes de Licenciatura em Matemática na resolução de questões envolvendo quadriláteros, é interessante observar como se dá a abordagem desse conteúdo em livros didáticos.

2.1 Abordagem dos quadriláteros em livros didáticos da Educação Básica

Nessa seção tratamos da forma como é ensinado o conteúdo de quadriláteros e suas propriedades, na Educação Básica. Para tanto, analisaremos esse conteúdo, em específico, apresentado no 8° ano, em dois livros didáticos utilizados em duas escolas públicas de Vitória da Conquista, no ano de 2016, a saber, Souza e Pataro (2009) e Dante (2015). Não encontramos abordagem explícita do conteúdo de quadriláteros em livros didáticos do Ensino Médio, quais sejam, Iezzi et. al (2013) e Souza (2013).

Souza e Pataro (2009) apresentam o estudo sobre quadriláteros num dos capítulos finais do livro, que são destinados ao conteúdo de Geometria, fator apontado por Lorenzato (1995) como uma das causas para o não-ensino as Geometria, citadas anteriormente. Nesse livro, *Vontade de Saber Matemática*, os autores classificam quadriláteros como “polígonos que possuem 4 vértices, 4 ângulos internos, 4 ângulos externos e 2 diagonais”. (SOUZA; PATARO, 2009, p.231). Em seguida destacam paralelogramos e trapézios, bem como suas propriedades e classificações.

Para esses autores, paralelogramo é um quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos, tendo as seguintes propriedades: em um paralelogramo, dois lados opostos são congruentes; em um paralelogramo,

dois ângulos opostos são congruentes; em um paralelogramo, as diagonais cruzam-se no ponto médio. (SOUZA; PATARO, 2009, p.231).

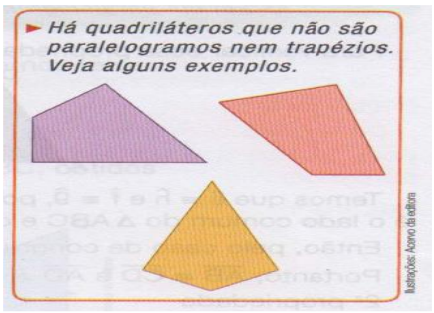
As classificações dos paralelogramos são feitas de acordo com a medida dos lados e dos ângulos internos, destacando também suas propriedades. Os autores classificam os paralelogramos em: retângulo, como um quadrilátero que possui os quatro ângulos retos (as diagonais de um retângulo são congruentes); losango como um quadrilátero que possui os quatro lados com medidas iguais. (As diagonais de um losango: são perpendiculares entre si; correspondem às bissetrizes dos ângulos internos); quadrado é um quadrilátero que possui os quatro ângulos internos retos e os quatro lados com medidas iguais. Por possuir essas características, ele é um caso particular de retângulo e de losango. (as diagonais de um quadrado: são congruentes; são perpendiculares entre si; correspondem as bissetrizes dos ângulos internos). (SOUZA; PATARO, 2009).

O trapézio é definido como um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos, chamados bases, e possui as seguintes classificações: trapézio retângulo, que tem um dos lados não paralelos perpendiculares às bases; trapézio escaleno, que tem os lados não paralelos com medidas diferentes; e trapézio isóscele, que tem os lados não paralelos com medidas iguais, sendo que, nesse trapézio: os ângulos internos da mesma base são congruentes; as diagonais são congruentes. (SOUZA; PATARO, 2009).

As propriedades desses quadriláteros são demonstradas pelos autores. Os exercícios que abrangem esse conteúdo não possuem questões contextualizadas ou relacionadas a alguma tendência matemática, havendo muitos exercícios de fixação, nos quais o nível de dificuldade aumenta no decorrer das atividades.

Os autores trazem também exemplos de quadriláteros que não são paralelogramos nem trapézios, destacando que há existem quadriláteros que podem não satisfazer as condições de existência dos paralelogramos e dos trapézios, como mostra a Figura 4 seguinte.

Figura 4 - exemplos de quadriláteros que não são trapézios nem paralelogramos



Fonte: (SOUZA; PATARO, 2009, p. 231)

Já Dante (2015) traz o conteúdo de quadriláteros no capítulo incluído na unidade que se destina ao estudo da Geometria e Álgebra, ou seja, diferente de Souza e Pataro (2009), os conteúdos de Geometria estão distribuídos por unidade, e não apenas no final do livro. O autor define quadrilátero como “todo polígono de quatro lados”. (DANTE, 2015, p. 109). Em seguida apresenta a definição de paralelogramo e suas propriedades, de forma semelhante às apresentadas por Souza e Pataro (2009), assim como suas demonstrações. O mesmo acontece para a definição e propriedades do trapézio, mas Dante (2015) fala ainda da base média de um trapézio, e sua medida, e apresenta um objeto do cotidiano cuja forma das faces se assemelha a de um trapézio, como apresentado na Figura 5.

Figura 5 - objeto cujas laterais se assemelham à forma de um trapézio

Fonte: (DANTE, 2015, p. 115).

É importante destacar que o autor, ao apresentar um ralador, como mostrado na Figura 5, se refere as laterais do objeto, que visualmente possui duas dimensões, como forma semelhante a de um trapézio, e não ao objeto como todo, que é tridimensional, não podendo ser comparado a um trapézio, que é uma figura bidimensional.

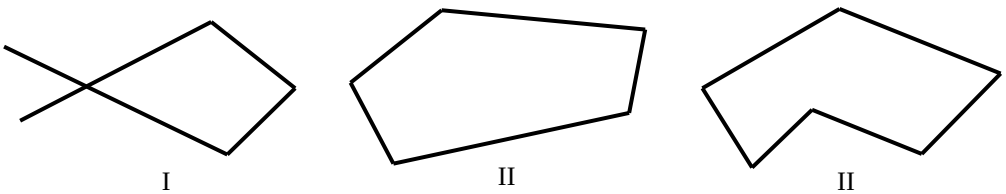
Os exercícios que englobam esse conteúdo também não apresentam questões contextualizadas ou que tenham relação com alguma tendência matemática.

2.2 Abordagem dos quadriláteros no Ensino Superior

Nessa seção, trataremos sobre os polígonos, especificamente os quadriláteros, nos pautando em Barbosa (1994), Rezende e Queiroz (2000) e Tinoco (2011), para as definições e propriedades apresentadas.

Em Barbosa (1994), os polígonos são definidos a partir do conceito de poligonal, que é uma figura formada por pontos A_1, A_2, . . . , A_n, sequencialmente, e pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, . . . , $A_{n-1}A_n$, na qual os pontos são os vértices e os segmentos são os lados da poligonal. A partir desse conceito, o autor define polígono como uma poligonal que satisfaz três condições: I) $A_n = A_1$; II) os lados da poligonal se interceptam apenas em suas extremidades; e III) dois lados de mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta. (BARBOSA, 1994). A Figura 6 ilustra casos de poligonais, em que I é uma poligonal aberta, II e III são poligonais fechadas.

Figura 6 - Exemplos de Linhas poligonais



Fonte: Elaborado pela autora com base em Barbosa (1994, p. 31)

Na Figura acima, notamos que II e III são poligonais que satisfazem a definição de polígono. O autor apresenta o conceito de polígono convexo: quando este está totalmente contido num dos semiplanos determinados pelas retas que contém os seus lados, se isso não acontecer, o polígono é dito não convexo. (BARBOSA, 1994). Logo, II e III são polígonos, convexo e não convexo, respectivamente. Em seguida, os polígonos convexos são classificados de acordo com o seu número de lados.

O polígono convexo que possui três lados é denominado triângulo, o que possui quatro lados é o quadrilátero, o de cinco lados é o pentágono, de seis lados o hexágono, de sete lados o heptágono, e assim sucessivamente, sendo que nosso foco são os quadriláteros. Traz ainda diagonal de um polígono como o segmento que une os vértices não consecutivos desse polígono. (BARBOSA, 1994).

O autor define paralelogramo como um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Em seguida, traz a definição de retângulo, losango, quadrado e trapézio. Define retângulo como um quadrilátero que possui todos os seus ângulos retos. Um losango é um paralelogramo que tem todos os seus lados congruentes. Um quadrado é um retângulo e também é um losango, ou seja, possui todos os seus ângulos retos e todos os seus lados congruentes. E um trapézio é um quadrilátero em que dois lados opostos são paralelos, esses lados são chamados bases e os lados não paralelos são as laterais do trapézio. Quando suas laterais são congruentes, o trapézio é dito isósceles. (BARBOSA, 1994).

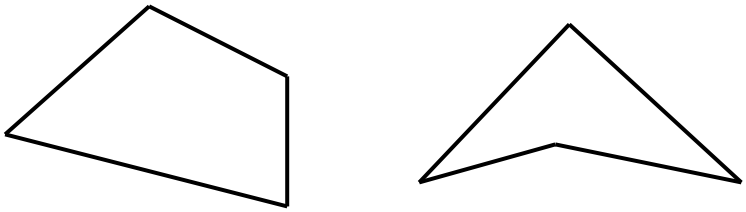
As propriedades e condições de existência desses quadriláteros são validadas a partir de demonstrações de teoremas e proposições, com algumas dessas demonstrações feitas pelo autor e outras deixadas como exercícios, a cargo do leitor, como veremos posteriormente.

A definição de quadrilátero apresentada por Rezende e Queiroz (2000) difere da definição de Barbosa (1994) no que diz respeito à convexidade do polígono, pois, na perspectiva das autoras, “um quadrilátero é um polígono de quatro lados”. (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 59), enquanto Barbosa (1994) define quadrilátero como um polígono convexo que possui quatro lados, ou

seja, a definição dada por Rezende e Queiroz (2000) abrange um campo maior de polígonos, enquanto a definição apresentada por Barbosa (1994) se restringe aos polígonos convexos.

A Figura 7 a seguir, apresenta em I, um exemplo de polígono que é considerado quadrilátero tanto para Barbosa (1994) quanto para Rezende e Queiroz (2000), pois se trata de um polígono convexo, e em II, um polígono não-convexo, sendo considerado um quadrilátero apenas segundo a definição de Rezende e Queiroz (2000).

Figura 7 - representação de quadriláteros



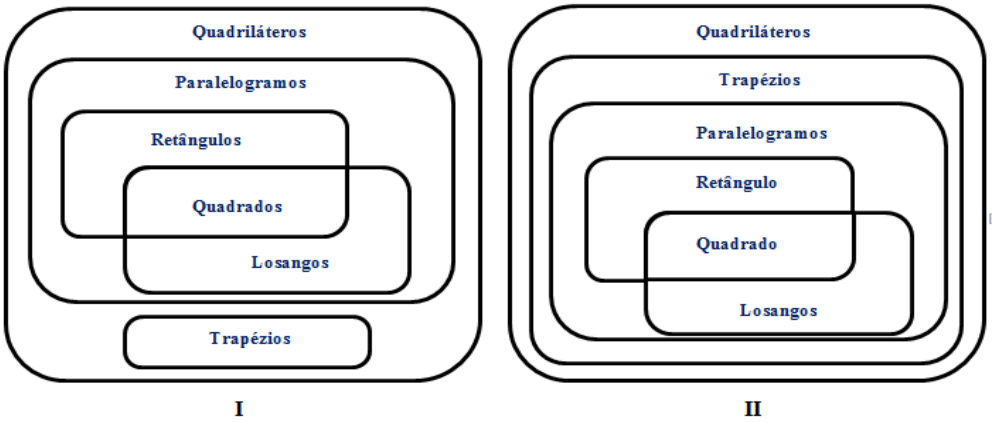
I II

Fonte: elaborada pela autora com base em Barbosa (1994) e Rezende e Queiroz (2000)

As propriedades e condições de existência dos quadriláteros são enunciadas por Rezende e Queiroz (2000) por meio de teoremas, demonstrados pelas autoras.

Tinoco (2011) traz as definições dos quadriláteros de forma semelhante às apresentadas por Barbosa (1994) e Rezende e Queiroz (2000). Além disso, Tinoco (2011) apresenta e discute duas definições usadas para trapézio: a definição inclusiva, na qual o trapézio é um quadrilátero que tem um par de lados paralelos, e a definição exclusiva, que trata do trapézio como um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos. A seguir, na Figura 8, temos os diagramas de acordo com essas definições.

Figura 8 - diagrama dos quadriláteros de acordo a definição de trapézio

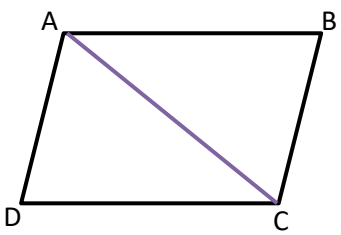


Fonte: adaptado de Tinoco (2011, p. 62)

O diagrama I expõe a definição exclusiva de trapézio, ou seja, considera-se trapézio um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos, o que faz com que o paralelogramo não seja considerado trapézio. Já o diagrama II apresenta a definição inclusiva de trapézio, ou seja, o trapézio é um quadrilátero que possui um par de lados paralelos, e dessa forma, todo paralelogramo é trapézio. Tinoco (2011) ressalta que vários autores utilizam uma ou outra, pelo fato de não haver vantagens ou desvantagens em ambas as definições. Neste trabalho, estamos considerando a definição exclusiva de trapézio.

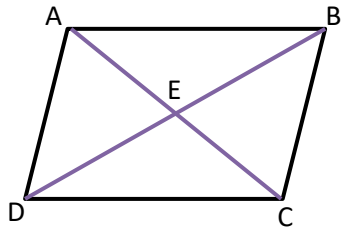
A seguir, demonstraremos as proposições apresentadas por Barbosa (1994), que validam as propriedades e condições de existência dos quadriláteros, e se assemelham às proposições apresentadas por Rezende e Queiroz (2000) e por Tinoco (2011), que, como dito anteriormente, deverão ser vistas pelos alunos da Educação Básica no 8° ano do Ensino Fundamental.

Proposição 1: Em um paralelogramo lados e ângulos opostos são congruentes.



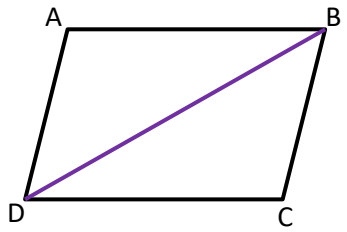
Demonstração: Considere *ABCD* um paralelogramo e trace sua diagonal *AC*. Como *AB* e *DC* são paralelos, temos $B\hat{A}C = A\hat{C}D$. Como *AD* e *BC* também são paralelos, $C\hat{A}D = A\hat{C}B$. Além disso, *AC* é um lado comum aos triângulos *ABC* e CDA, assim, estes triângulos são congruentes. Logo $\hat{B} = \hat{D}$. De maneira análoga, verificamos que $\hat{A} = \hat{C}$.

Proposição 2: As diagonais de um paralelogramo se interceptam em um ponto que é ponto médio das duas diagonais.



Demonstração: Seja *ABCD* um paralelogramo, *AC* e *BD* suas diagonais e *E* o ponto de intersecção entre elas. Devemos mostrar que *AE = EC DE = EB*. Sabemos que *AB = DC* e *BC = AD*. Note que os triângulos *ABC* e *CDA* são congruentes, pois *AB =CD*, *BC = DA*, *AC* é um lado comum aos dois triângulos e, além disso, $\hat{B} = \hat{D}$. Então, $B\hat{A}C = A\hat{C}D$, $B\hat{C}A = E\hat{A}D$. De maneira análoga, verificamos a congruência entre os triângulos *BCD* e *DAB*. Agora, os triângulos *AEB* e *CED* também são congruentes, pois $B\hat{A}E = E\hat{C}D$, *AB = DC* e $A\hat{B}E = E\hat{D}C$. assim, *AE = EC* e *BE = ED*. Logo, *E* é ponto médio de *AC* e *DB*.

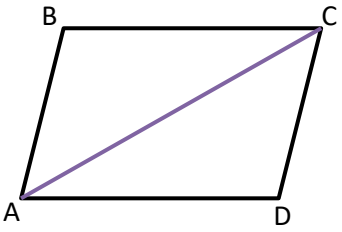
Proposição 3: Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.



Demonstração: Considere um quadrilátero *ABCD* em que *AB = DC* e *AD =BC* e trace a diagonal *BD*. Note que os triângulos *ADB* e *CBD* são congruentes, pois possuem os lados correspondentes congruentes. Logo, $C\hat{B}D = B\hat{D}A$ e

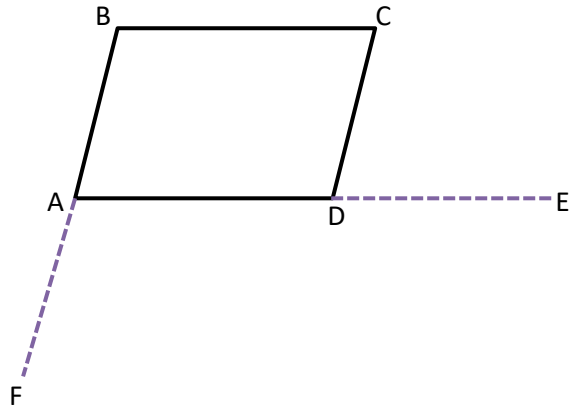
$C\hat{D}B = D\hat{B}A$. A primeira igualdade garante que *BC* e *AD* são paralelos, e a segunda igualdade garante que *CD* e *BA* são paralelos. Segue que *ABCD* é um paralelogramo.

Proposição 4: Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.



Demonstração: Seja *ABCD* um quadrilátero em que *BC* e *AD* são congruentes e paralelos. Trace a diagonal *AC*. O paralelismo entre *BC* e *AD* garante que $B\hat{C}A = D\hat{A}C$, além disso, *BC = AD* e *AC* é um lado comum aos dois triângulos, então os triângulos *ABC* e *CDA* são congruentes. Portanto, *AB = CD* e $C\hat{A}B = A\hat{C}D$, igualdade que garante que *AB* e *CD* são paralelos. Logo, *ABCD* é um paralelogramo.

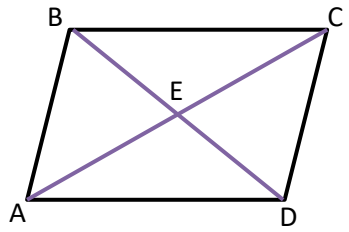
Proposição 5: Se os ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.



Demonstração: Seja *ABCD* um quadrilátero em que $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é igual à 360° e os ângulos opostos de *ABCD* são congruentes, concluímos que a soma de dois ângulos internos consecutivos desse quadrilátero é igual à 180°, então, $\hat{A} + A\hat{D}C = 180° \Rightarrow \hat{A} = 180° - A\hat{D}C$. Prolongando a reta que passa por *AD*,

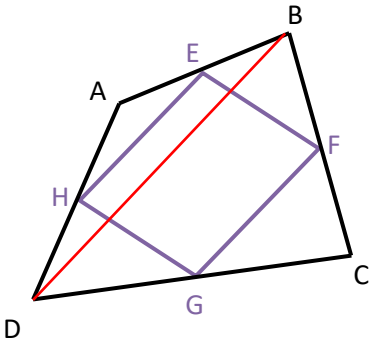
marque um ponto *E* tal que *D* esteja entre *A* e *E*, denotado por *A-D-E*. Note que os ângulos $A\hat{D}C$ e $C\hat{D}E$ são suplementares, assim, $A\hat{D}C + C\hat{D}E = 180° \Rightarrow C\hat{D}E = 180° - A\hat{D}C = \hat{A}$. Essa igualdade garante que *AB* e *CD* são paralelos. De maneira análoga, se prolongarmos a reta que passa por *AB,* marcando sobre ela um ponto *F* tal que *A-B-F*, verificamos que $\hat{B} = D\hat{A}F$, o que garante que *BC* e *AD* são paralelos. Logo *ABCD* é um paralelogramo.

Proposição 6: Se as diagonais de um quadrilátero se interceptam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um paralelogramo.



Demonstração: Seja *ABCD* um quadrilátero em que *E* é o ponto de intersecção e ponto médio suas diagonais *AC* e *BD*. Como *AE* = *CE*, $B\hat{E}C = D\hat{E}A$ (opostos pelo vértice) e *BE* = *DE*, então os triângulos *BEC* e *DEA* são congruentes. Logo *BC* = *AD* e $C\hat{B}E = E\hat{D}A$, essa última igualdade garante que *BC* e *AD* são paralelos. Analogamente, verificamos que os triângulos *BEA* e *DEC* também são congruentes, daí temos *AB* = *CD* e $A\hat{B}E = C\hat{D}E$, garantindo que *AB* e *CD* são paralelos. Portanto, *ABCD* é um paralelogramo.

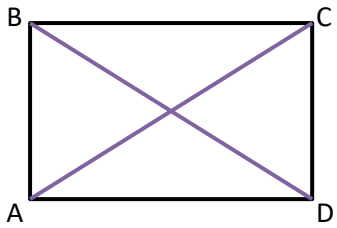
Proposição 7: Os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.



Demonstração: Considere *ABCD* um quadrilátero qualquer, no qual *E*, *F*, *G* e *H* são os pontos médios dos lados *AB*, *BC*, *CD* e *AD*, respectivamente.

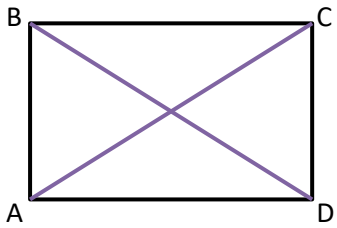
Devemos mostrar que *EFGH* é um paralelogramo. Trace a diagonal *DB*. Observe o triângulo *ADB*. Como *H* e *E* são, respectivamente, pontos médios dos lados *AD* e *AB*, segue que *HE* é paralelo à *DB*, e, além disso, *HE* = $\frac{DB}{2}$. Analogamente, verificamos que *FG* é paralelo à *DB* e, *FG* = $\frac{DB}{2}$. Com isso, temos *HE* e *FG* paralelos e *HE* = *FG*, portanto, pela proposição 4, *EFGH* é um paralelogramo.

Proposição 8: As diagonais de um retângulo são congruentes:



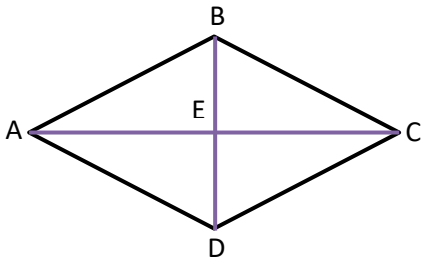
Demonstração: Considere o retângulo *ABCD* e suas diagonais *AC* e *DB*. Observe que os triângulos *ABC* e *DCB* são congruentes, pois *AB* = *CD*, $\hat{B} = \hat{C}$, e *BC* é um lado comum aos dois triângulos, logo, *AC* = *BD*.

Proposição 9: Se as diagonais de um paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é um retângulo.



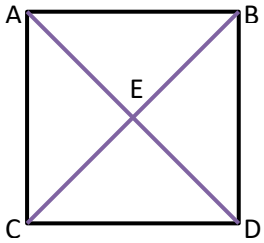
Demonstração: Seja *ABCD* um paralelogramo tal que suas diagonais *AC* e *BD* são congruentes. Os triângulos *ABC* e *DCB* são congruentes, pois possui os lados correspondentes congruentes, então, $\hat{B} = \hat{C}$. Como *ABCD* é paralelogramo, $\hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{A} = \hat{C}$, logo, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$. Segue que, *ABCD* é retângulo.

Proposição 10: As diagonais de um losango cortam-se em ângulo reto e são bissetrizes dos seus ângulos.



Demonstração: Considere *ABCD* um losango com diagonais *AC* e *BD* e *E* o ponto de intersecção entre elas. Como *BC* = *AB*, $\hat{C} = \hat{A}$ e *CD* =*AD*, então, os triângulos *BCD* e *BAD* são congruentes. Assim, $C\hat{B}D = D\hat{B}A$ e $C\hat{D}B = B\hat{D}A$. Logo, *BD* é bissetriz dos seus ângulos. De maneira análoga, verificamos que *AC* também é bissetriz dos seus ângulos. Agora, observe que os triângulos *BCE*, *DCE*, *BAE* e *DAE* são congruentes entre si, então, $B\hat{E}C = C\hat{E}D = B\hat{E}A = D\hat{E}A$, e como a soma desses ângulos é 360°, então cada ângulo mede 90°. Logo as diagonais de um losango se cortam em ângulo reto.

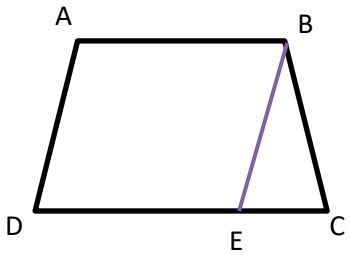
Proposição 11: Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e se cortam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um retângulo. Se, além disso, as diagonais são perpendiculares entre si, então o quadrilátero é um quadrado.



Demonstração: Considere o quadrilátero *ABDC* e suas diagonais *AD* e *CB*, que se interceptam no ponto *E*, que é também o ponto médio de ambas. Como *DE* = *AE*, $D\hat{E}C = A\hat{E}B$ e *DC* = *AB*, os triângulos *DEC* e *AEB* são congruentes, então *CD* = *AB*. De maneira análoga, verificamos que *AC* = *BD*. Note também que, os triângulos *ADC*, *BCD*, *CBA* e *DAB* são congruentes, pois possuem os lados correspondentes congruentes, logo $\hat{D} = \hat{C} = \hat{B} = \hat{A}$. Portanto, *ABCD* é

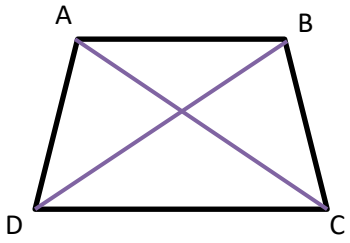
retângulo. Agora, suponha que *AD* e *BC* sejam perpendiculares entre si. Assim, os triângulos *DEC*, *CEA*, *AEB* e *BED* são congruentes entre si, logo, *DC* = *CB* = *AB* = *AD*. Nessas condições, *ABCD* é um quadrado.

Proposição 12: Se *ABCD* é um trapézio isósceles em que *AB* é uma base, então $\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{D}$.



Demonstração: Considere *ABCD* um trapézio isósceles, em que *AB* é uma base. Marque um ponto *E* sobre o segmento *DC* tal que *D – E – C* (*E* está entre *D* e *C*), de forma que o segmento *DE* seja congruente à *AB*. Como *AB* e *DE* são congruentes e paralelos, pela Proposição 4, *ABED* é um paralelogramo, logo, $A\hat{D}E = A\hat{B}E$. Note que, $A\hat{B}E = B\hat{E}C$, pois são alternos internos, já que *AB* e *DE* são paralelos. Como *BC* = *AD* = *BE*, segue que, o triângulo *BEC* é isósceles de base *EC*, logo, $B\hat{E}C = B\hat{C}E$. Como $A\hat{D}E = A\hat{B}E$, e $A\hat{B}E = B\hat{E}C = B\hat{C}E$, segue que, $A\hat{D}E = B\hat{C}E$, ou seja, $\hat{D} = \hat{C}$. De maneira análoga, verificamos que, $\hat{A} = \hat{B}$.

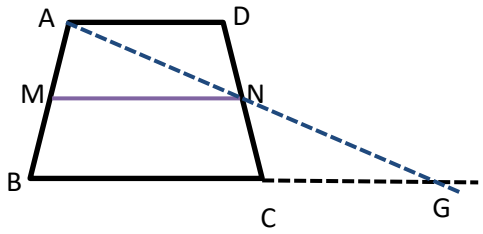
Proposição 13: As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.



Demonstração: Considere *ABCD* um trapézio isósceles, em que *AB* e *DC* são, respectivamente, base menor e base maior, tem-se $\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{D} = \hat{C}$, e sabemos que as laterais *AD* e *BC* são congruentes. Note que as diagonais *AC* e *BD* formam com o trapézio dois triângulos *ADB* e *BCA* congruentes, pois *AD* = BC, $\hat{A} = \hat{B}$ e *AB* é um lado comum, portanto, os lados correspondentes são

congruentes, isto significa que *AC* = *BD*. Dessa forma, as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Proposição 14: O segmento ligando os pontos médios das laterais de um trapézio isósceles é paralelo às bases e seu comprimento é a média aritmética das bases.



Demonstração: Considere *ABCD* um trapézio isósceles de bases *AD* e *BC*, no qual *M* e *N* são os pontos médios das laterais *AB* e *DC*, respectivamente. Prolongue a reta que passa pelo segmento *BC*. Agora trace o segmento que passa por *AN*, intersectando o segmento que passa por *BC* no ponto *G*. Note que os triângulos *ADN* e *GCN* são congruentes, pois *DN* = *CN*, $D\hat{N}A = C\hat{N}G$ (o.p.v) e $D\hat{A}N = C\hat{G}N$ *(*alternos internos). Logo, *AD* = *CG* e *AN* = *NG*, e, assim, *N* é ponto médio de *AG*. Agora, observe o triângulo *ABG*, *M* e *N* são pontos médios de *AB* e *AG*, respectivamente, portanto, o segmento *MN* é paralelo ao segmento *BG* e *MN* = $\frac{BG}{2}$. Como *BG* = *BC* + *CG* e *CG* = *AD*, temos que, *BG* = *BC* + *AD*. Se *MN* = $\frac{BG}{2}$, então, *MN* = $\frac{BC + AD}{2}$.

Conhecer e compreender as condições necessárias e suficientes para existência de determinados quadriláteros e de suas propriedades auxilia o desenvolvimento do pensamento geométrico e amplia a capacidade de raciocínio diante de situações ou problemas cujas resoluções requerem esses conhecimentos. Daí a necessidade e importância de trabalhar com os alunos, mesmo no Ensino Fundamental, essas proposições e suas validades, ainda que de maneira intuitiva e menos formal.

Descreveremos a seguir, os procedimentos metodológicos utilizados em nossa pesquisa.

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

Nesse capítulo tratamos dos procedimentos metodológicos utilizados em nossa pesquisa, que teve como objetivo analisar as estratégias utilizadas por estudantes de Licenciatura em Matemática na resolução de questões envolvendo quadriláteros.

Para tanto, realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa, que, de acordo com Ludke e André (1986), ao citarem Bogdan e Biklen (1982), “envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes.” (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p. 13). Consideramos que, a análise das estratégias utilizadas na resolução de questões envolvendo quadriláteros permitirá a obtenção de dados que exponham a concepção dos alunos em relação ao conteúdo abordado.

Esse estudo possui delineamento descritivo, pois, para Fiorentini e Lorenzato (2006), “Uma pesquisa é considerada *descritiva* quando o pesquisador deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema.” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 70), em nosso caso, evidenciar os procedimentos utilizados pelos sujeitos de nossa pesquisa, na resolução de questões que abrangem a temática envolvida.

O universo escolhido para a realização da pesquisa foi a turma dos estudantes de Licenciatura em Matemática, ingressantes no curso no ano de 2016, dos quais 23 alunos, com faixa etária média de 23 anos, participaram da pesquisa. Optamos por esses sujeitos, visto que, dentre os objetivos específicos, pretendemos identificar as concepções dos alunos, a respeito dos quadriláteros, trazidas da Educação Básica, por esses estudantes, por isso, a pesquisa foi realizada antes do contato dos alunos com o conteúdo de quadriláteros no Ensino Superior.

Utilizamos o questionário, (Apêndice 2, p.96), como instrumento de coleta de dados, pois, para compreender o pensamento, as estratégias utilizadas e as formas de representação dos quadriláteros, ponderamos que, a

resolução de questões, por meio dos registros escritos, fosse a ferramenta mais adequada para o alcance do nosso objetivo.

O questionário dispunha de perguntas abertas e fechadas, selecionadas a partir do conteúdo apresentado e do que se pretendia analisar, que eram a estratégias de resolução utilizadas, pois, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), “as perguntas são, de certa maneira, uma tradução das hipóteses da pesquisa.” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 117).

O questionário foi estruturado de acordo as categorias: Definições e propriedades; Ângulos; e Diagonais. O quadro a seguir apresenta essa estrutura.

Quadro 1 - Estrutura do questionário

Categoria	**Questão**	**Retirada ou adaptada de:**
DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES	**Q1**	DOLCE e POMPEO (1997).
	Q2	DOLCE e POMPEO (1997).
	Q3	DOLCE e POMPEO (1997).
	Q5	ELABORADA PELA AUTORA.
	Q6	ELABORADA PELA AUTORA.
	Q9	CENTURIÓN e JAKUBOVIC (2012).
ÂNGULOS	**Q4**	SOUZA e PATARO (2009).
	Q7	DOLCE e POMPEO (1997).
	Q10	DOLCE e POMPEO (1997).
DIAGONAIS	**Q8**	DOLCE e POMPEO (1997).
	Q11	BARBOSA (1994).
	Q12	BARBOSA (1994).

Fonte: elaborado pela autora

Posterior à aplicação do questionário, foi realizada uma oficina sobre quadriláteros e suas propriedades, com exposição do conteúdo por meio de slides, e utilização do Geoplano como recurso didático pelo fato de possibilitar os alunos a explorarem a visualização de uma figura, em diferentes posições e tamanhos, pois, de acordo com Amâncio (2013), no ensino de Geometria, são

utilizadas frequentemente figuras particulares para evocar um conceito, representadas de uma única maneira, enquanto um conceito geométrico pode ser representado por diversas formas de desenhos.

A análise dessa oficina foi feita através do registro com fotos e transcrição dos comentários feitos no desenvolvimento da atividade proposta.

3.1 Procedimentos

No primeiro contato com a turma, expomos nossa intenção de realizar a pesquisa com os ingressantes e explicamos o objetivo de nossa investigação. Informamos a necessidade da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), (apêndice 1, p. 94) confirmando a participação dos mesmos, e, caso o aluno fosse menor de idade, o TCLE deveria ser assinado pelos pais ou responsáveis pelo menor. No dia seguinte, entregamos os TCLE e agendamos a data para aplicação do questionário.

No dia marcado, agradecemos a participação dos alunos e informamos que eles não poderiam usar calculadora ou celular, e que deveriam responder às questões individualmente e sem qualquer intervenção. Solicitamos que os alunos representassem por meio de desenhos, e escrevessem as ideias que possuíam para responder às questões.

Destinamos duas horas para aplicação do questionário. No final da aplicação, alguns alunos relataram ter dificuldades para resolver as questões.

Os 23 alunos que participaram da pesquisa foram identificados como A01, A02, A03, ..., até o aluno A23.

Após a aplicação, marcamos uma data para que os alunos conferissem a correção dos questionários. No dia determinado, a maioria dos alunos compareceu, interessados em saber seu desempenho na resolução das questões.

Posteriormente, marcamos com os alunos um dia para a realização da oficina. No dia marcado, compareceram 11 alunos, dentre eles, um aluno que não participou do questionário, mas teve interesse em participar da oficina.

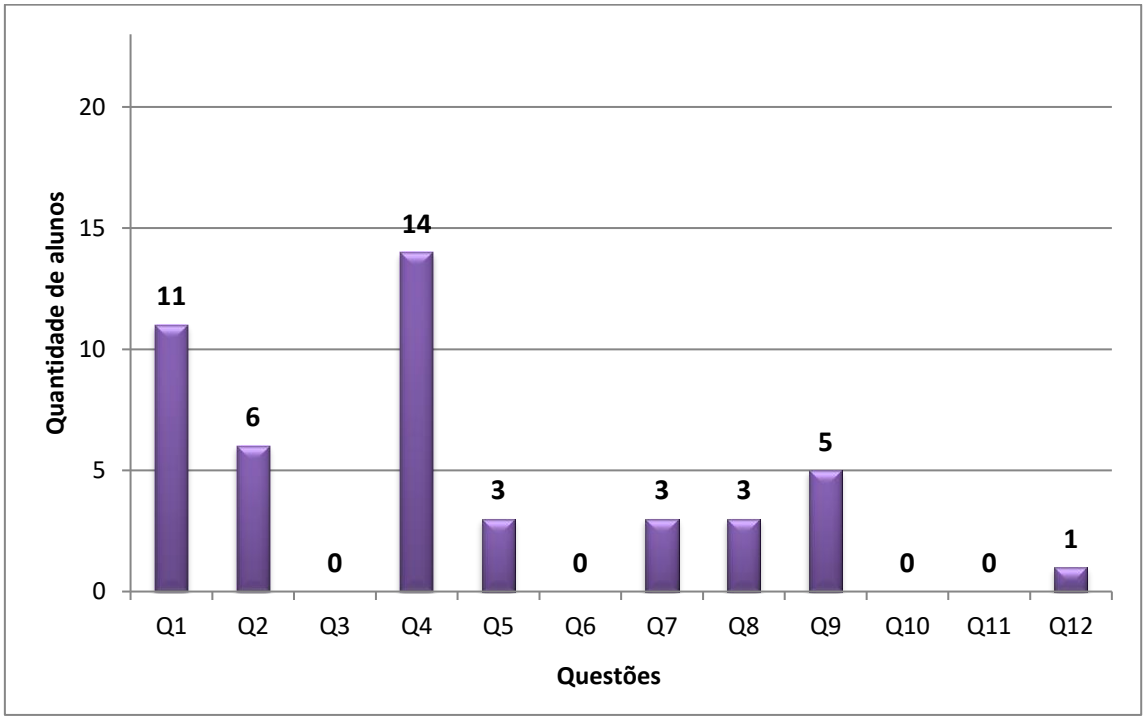
Passaremos, a partir de agora, a apresentar e analisar os dados coletados.

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE

Nessa seção descreveremos e analisaremos os dados obtidos no questionário e na oficina. Utilizamos categorias que se esboçaram em nossos momentos de análise das respostas dos alunos. Fiorentini e Lorenzato (2006) entendem a categorização como um processo de seleção ou de organização de informações em categorias estabelecidas, ou seja, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns. Dessa forma, estruturamos esse capítulo em quatro seções: Definições e propriedades; Ângulos; Diagonais; e Oficina.

O Gráfico 1 a seguir apresenta o desempenho geral dos alunos no questionário.

Gráfico 1 - Desempenho dos alunos no acerto total por questão



Fonte: Dados da Pesquisa

Pelos dados do Gráfico 1, percebemos o baixo índice de acerto nas questões, em geral. A questão 4 foi a que teve maior índice de acerto, 60,9%, seguida da questão 1, com 47,8% de acertos. As demais questões tiveram

índice de acerto inferior a 30%, sendo que em quatro questões não houve índice de acerto, ou seja, os alunos não responderam. A saber, das quatro questões sem resposta, duas eram questões de demonstração e as outras duas envolviam definições.

4.1 Definições e propriedades

Esta seção destina-se à descrição e análise das questões em que os alunos necessitaram ter conhecimento das definições e propriedades dos polígonos, especialmente quadriláteros. Nessa categoria estão as questões: Q1, Q2, Q3, Q5, Q6 e Q9, que passaremos a descrevê-las.

Questão 1

(UFAL-1996) Considere as propriedades de certos polígonos:

I – quatro lados;
II – somente um par de lados paralelos;
III – todos os ângulos retos;

Assinale a alternativa em que os polígonos citados satisfazem I, II e III, respectivamente:

a) Quadrado, paralelogramo e losango.
b) Retângulo, trapézio e triângulo.
c) Losango, trapézio e retângulo.
d) Triângulo, retângulo e quadrado.
e) Paralelogramo, trapézio e losango.

Fonte: retirada ou adaptada de: DOLCE e POMPEO (1997).

Na resolução dessa questão, o aluno deve ter conhecimento das definições e propriedades dos polígonos, especialmente dos quadriláteros. A resposta esperada é a alternativa c) Losango, trapézio e retângulo, pois são estes quadriláteros que satisfazem as condições: possuir quatro lados; ter somente um par de lados paralelos; e possuir todos os ângulos retos, respectivamente.

Houve 11 acertos e 12 erros nas resoluções. Dentre os erros, se destacaram a resposta de dois alunos, pelo fato de terem assinalado a alternativa b) como resposta, ou seja, consideraram o triângulo como um polígono que possui todos os ângulos retos, o que não é possível, pois o

triângulo é um polígono que possui três lados, podendo ter no máximo, um ângulo reto, caso contrário, a soma dos seus ângulos internos excederia 180°, o que não pode acontecer, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual à 180°.

As demais respostas erradas foram as alternativas a) Quadrado, paralelogramo e losango e e) Paralelogramo, trapézio e losango, e nenhum aluno assinalou a alternativa d), o que significa que, provavelmente, nenhum aluno considerou o triângulo como um quadrilátero, o que é verdade, pois o triângulo é um polígono que possui três lados.

Questão 2

Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*) as afirmações a seguir:

a) Todo paralelogramo é retângulo.
b) Todo quadrado é retângulo.
c) Todo paralelogramo é losango.
d) Todo retângulo é um paralelogramo.

Fonte: retirada ou adaptada de: DOLCE e POMPEO (1997).

Ao responder essa questão o aluno deve estar ciente das definições e propriedades dos quadriláteros para afirmar corretamente que: nem todo paralelogramo é retângulo, portanto, a alternativa a), que afirma que: todo paralelogramo é retângulo, é falsa; a afirmação da alternativa b): todo quadrado é retângulo, é verdadeira; é falsa a afirmação da alternativa c): todo paralelogramo é losango; e a afirmação da alternativa d): todo retângulo é paralelogramo, é verdadeira.

Seis alunos acertaram todas as alternativas, 17 acertaram pelo menos uma alternativa e não teve algum aluno que errou todas as alternativas.

Nessa questão o maior número de erros foi na alternativa b), que afirmava que todo quadrado é retângulo, 10 alunos que, possivelmente não reconheceram o quadrado como um retângulo, talvez por pensarem que, em um retângulo, as medidas dos lados não opostos devem ser diferentes, e por isso, indicaram ser falsa a afirmação de que todo quadrado é um retângulo.

As alternativas a), c) e d) tiveram seis erros cada uma. Na alternativa a), os que erraram consideraram verdadeiro que todo paralelogramo é retângulo, e

os que erraram a alternativa c), consideraram verdadeiro que todo paralelogramo é losango. Pensamos que os alunos que erraram a alternativa a) considerem verdadeiro que todo paralelogramo é um retângulo por pensarem que ambos devem ter os lados consecutivos com medidas diferentes, e os que erraram a alternativa c), possivelmente por pensarem que, tanto o paralelogramo quanto o losango devem possuir os ângulos opostos congruentes e diferentes de 90°.

Dentre esses erros apenas um aluno (A08), considerou que todo paralelogramo é retângulo e todo retângulo é paralelogramo, errando as alternativas a) e d) simultaneamente. E também apenas um aluno (A17), errou ao mesmo tempo as alternativas a) e c), ou seja, considerou que todo paralelogramo é retângulo e é também losango, o que é verdade apenas para o quadrado.

A partir das alternativas apresentadas pelos alunos, como falsas ou verdadeiras, observamos que, talvez tenham se atentado mais à visualização das figuras do que às suas definições e propriedades, possivelmente pelo fato de que:

> Um conceito geométrico pode ser representado por uma infinidade de desenhos, mas, na prática, há uma predominância de algumas figuras particulares, encontradas com frequência em livros, cadernos, ou desenhadas na lousa pelo professor. [...] (AMÂNCIO, 2013, p. 47).

Quando o aluno tem acesso à apenas um tipo de representação para determinado conceito geométrico, tem também seu conhecimento restrito a algumas formas de representação, e não às propriedades do objeto, como um todo. Um exemplo disso é mostrar um retângulo sempre com os lados consecutivos com medidas diferentes, daí o aluno se atenta mais ao desenho que as propriedades, e não reconhece o quadrado como um retângulo.

Questão 3

Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):

a) Se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
b) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
c) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.
d) As diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos seus ângulos.

Fonte: retirada ou adaptada de: DOLCE e POMPEO (1997).

Também nessa questão se faz necessário conhecer as definições e propriedades dos quadriláteros apresentados, e as condições necessárias e suficientes para sua existência, já descritas no capítulo 2.

Nessa questão, a alternativa b) foi a que teve maior número de erros na resposta, com 16 respostas erradas, ou seja, 16 alunos consideraram que dois lados opostos de um quadrilátero serem congruentes é condição necessária e suficiente para que o quadrilátero seja um paralelogramo, o que não é verdade, pois pode existir quadriláteros que tenham dois lados opostos congruentes e não ser um paralelogramo, por exemplo, um trapézio isósceles, que tem suas laterais congruentes, o que nos mostra que essa não é um característica exclusiva do paralelogramo.

15 alunos erraram alternativa d), o que significa que estes alunos consideraram que as diagonais de um paralelogramo são bissetrizes do seus ângulos, o que não vale para qualquer paralelogramo.

Na alternativa a) houve 10 erros, ou seja, esses alunos consideraram verdadeira a afirmação de que, se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo, sendo que existem outros quadriláteros que não são paralelogramos e que possuem dois lados congruentes, como os trapézios e outros quadriláteros.

E a alternativa c), que afirma corretamente que, se dois lados de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.

Nos chamou atenção, o fato de quatro alunos errarem a alternativa a) e acertarem a alternativa b), simultaneamente, ou seja, consideraram verdadeira a afirmação: se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então, ele é um

paralelogramo, e falsa, a afirmação: se dois lados opostos de um paralelogramo são congruentes, então, ele é um paralelogramo, sendo que esta afirmação é um complemento da afirmação da alternativa a). Então, pensamos que, ao errar a), o aluno também erraria b), ou seja, ao considerar a afirmação da alternativa a) como condição necessária e suficiente para a existência de um paralelogramo, a afirmação de b) também o seria, pois, a afirmação da alternativa a) trata da congruência entre dois lados de um quadrilátero, sem especificar quais, ou seja, congruência entre dois lados quaisquer, inclusive entre dois lados opostos, como é colocado na alternativa b). Logo, se a alternativa a) fosse verdadeira, a alternativa b) também seria.

Questão 5

Como você define quadrado?

Fonte: elaborada pela autora.

Uma possível solução a essa questão seria: quadrado é um quadrilátero que possui todos os lados iguais e todos os ângulos internos congruentes. O Quadro 2 a seguir, apresenta a distribuição das respostas nessa questão.

Quadro 2: Distribuição das respostas por classe na questão 5

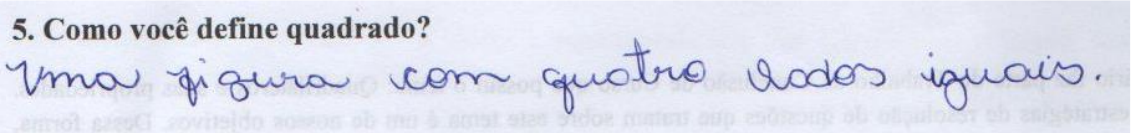
Classe	Nº Absoluto	%
Acertos	3	13
Erros	19	82,6
Em branco	1	4,4
Total	**23**	**100**

Fonte: dados da pesquisa

Dentre os erros, 15 respostas definiam quadrado como uma figura que possui quatro lados iguais, sem mencionar a congruência entre seus ângulos, ou seja, não levaram em conta que essa é uma condição também do losango,

logo não é suficiente para definir um quadrado. A Figura 9 apresenta uma resposta desse tipo.

Figura 9 - fragmento do questionário do aluno A10

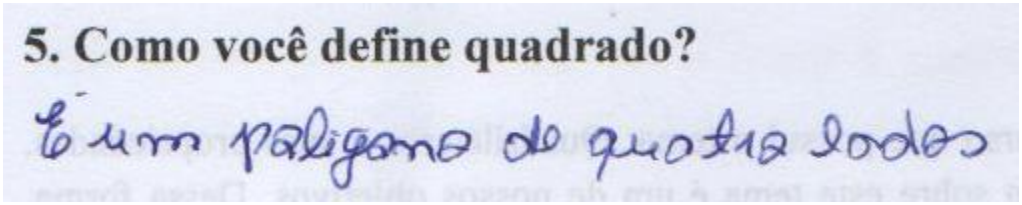


Fonte: dados da pesquisa

Em sua resposta o aluno A10, ao definir quadrado como uma figura que possui quatro lados iguais, não mencionando a congruência entre seus ângulos, inclui nessa definição o losango, logo, ter os quatro lados iguais é condição necessária, mas não suficiente para existência do quadrado.

Uma resposta apresentou o quadrado como um polígono que possui quatro lados, sem mencionar a congruência entre os mesmos, nem a congruência entre seus ângulos. Essa reposta é apresentada na Figura 9, a seguir:

Figura 10 - Fragmento do questionário do aluno A09

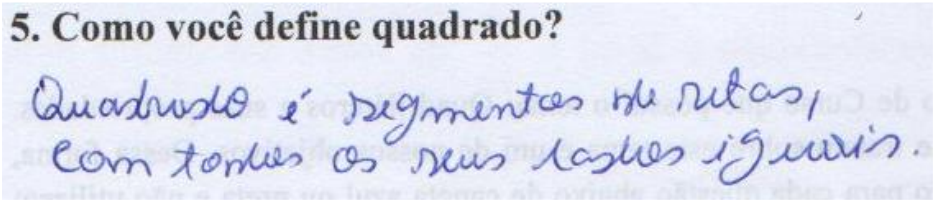


Fonte: dados da pesquisa

Ao definir quadrado como um polígono de quatro lados, o aluno A09 inclui todos os quadriláteros, ou seja, ter quatro lados não é característica exclusiva do quadrado, não sendo suficiente para defini-lo.

E nas outras três respostas erradas, os alunos escreveram de forma confusa a definição de quadrado. Por exemplo, na resposta do aluno A04, na Figura 11, ele se refere ao quadrado como segmentos de reta, não especificando se esses segmentos formam alguma figura, fechada ou aberta.

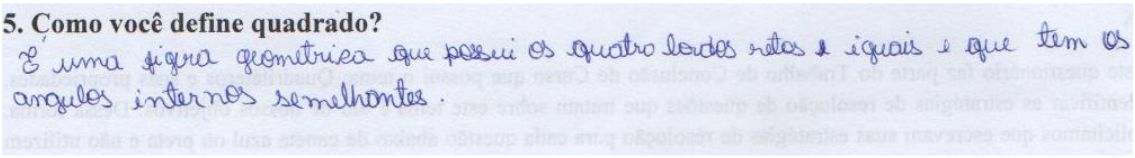
Figura 11 - fragmento do questionário do aluno A04



Fonte: dados da pesquisa

Outro exemplo de confusão aparece na resposta do aluno A14, na Figura 12 a seguir.

Figura 12 - fragmento do questionário do aluno A14

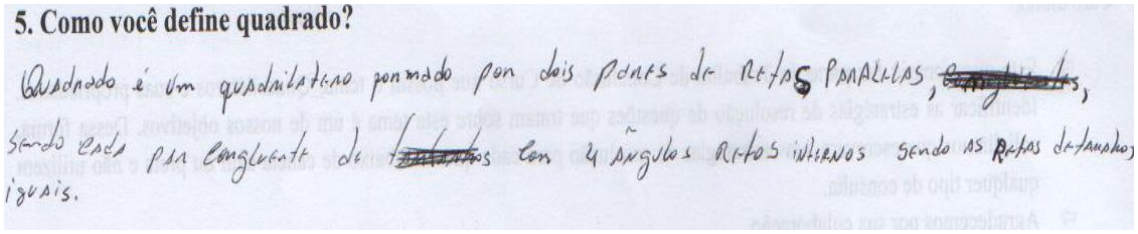


Fonte: dados da pesquisa

O aluno A14, como foi visto na Figura 12, fala dos lados retos, quando talvez quisesse dizer lados perpendiculares, ou seja, os ângulos internos retos. Percebemos que o aluno, possivelmente, entende semelhança como congruência entre ângulos.

E a resposta do aluno A11, mostrada na Figura 13.

Figura 13 - fragmento do questionário do aluno A11



Fonte: dados da pesquisa

Em sua resposta, observamos que esse aluno usa o termo “reta” para se referir ao “segmento de reta”, podendo não fazer distinção entre ambos.

Inferimos que esses alunos, possivelmente, possuem desequilíbrio entre componentes conceitual e figural, em relação à definição de quadrado, tal como foi identificado nos estudos de Gravina (1996), com alunos de um curso de Licenciatura, citado por Amâncio (2013). O equilíbrio entre a maneira como os alunos expressam as propriedades, de forma escrita ou falada, sobre determinado objeto (componente conceitual) e a imagem mental que possuem acerca desse objeto (componente figural) é que determina a noção correta do mesmo.

Entendemos que esse desequilíbrio deve ser trabalhado ao longo do curso, pois esses alunos se tornarão professores de Matemática, e de acordo com Menezes et. al (2013) é “pouco provável que os professores consigam que os seus alunos compreendam os conceitos matemáticos se eles próprios não os compreenderem”. (MENEZES et. al, 2013, p. 244)

Questão 6

Represente os quadriláteros segundo suas propriedades através do diagrama de Venn.

Fonte: elaborada pela autora.

Uma possível solução para essa questão está apresentada no capítulo 2, página 33. O Quadro 3 apresenta o desempenho dos alunos nessa questão.

Quadro 3: Distribuição das respostas por classe na questão 6

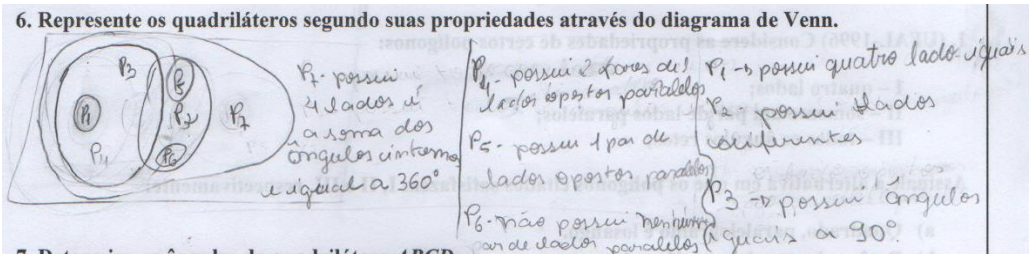
Classe	Nº Absoluto	%
Erros	10	43,5
Em branco	13	56,5
Total	**23**	**100**

Fonte: dados da pesquisa

Nessa questão não houve acertos, tendo 10 erros e 13 respostas em branco.

Dentre as respostas erradas, apenas uma apresentava, de fato, um diagrama de Venn, o aluno A05 tentou construir o diagrama a partir das propriedades dos quadriláteros, como mostra a Figura 14.

Figura 14 - fragmento do questionário do aluno A05

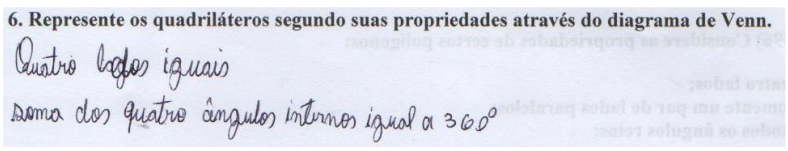


Fonte: dados da pesquisa

Em sua resposta, o aluno A05 utilizou propriedades dos quadriláteros para construir o diagrama, entretanto, o fez de forma desorganizada e não apresentou clareza no seu raciocínio.

Nas outras respostas, os alunos escreveram alguma informação que consideraram ser comum a todos os quadriláteros, como a resposta do aluno A12, na Figura 15.

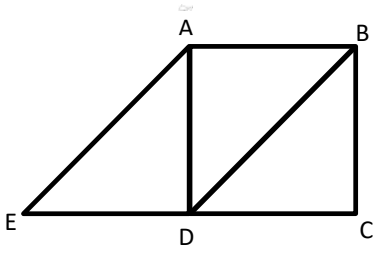
Figura 15 - fragmento do questionário do aluno A12



Fonte: dados da pesquisa

Questão 9

Observe a figura abaixo. Sabendo que ABDE e ABCD são paralelogramos, é correto afirmar que EC mede o dobro de AB? Justifique.



Fonte: CENTURIÓN e JAKUBOVIC (2012).

Nessa questão espera-se que o aluno utilize a definição de paralelogramo para resolvê-la. Uma possível solução será usar o fato de ABDE e ABCD serem paralelogramos, e, como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, verificar que AB = ED, em ABDE, e AB = DC, em ABCD, e observar que EC = ED + DC = AB + AB = 2AB, confirmando a afirmativa da questão. A distribuição das respostas dessa questão está apresentada no Quadro 4, a seguir:

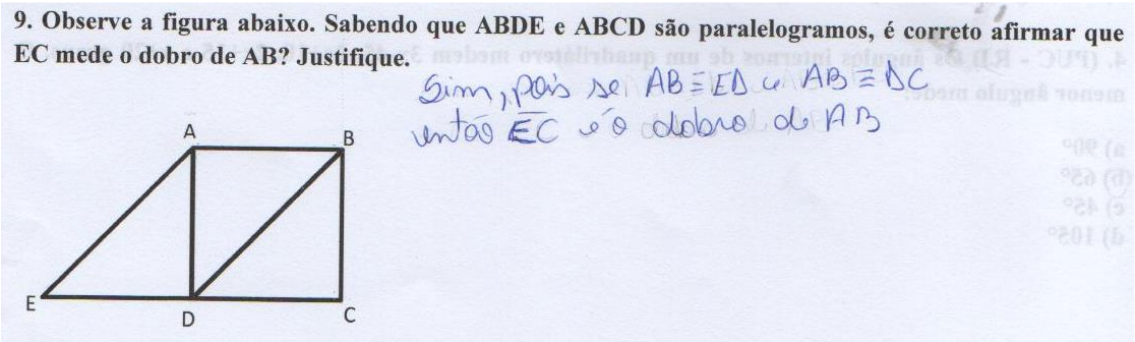
Quadro 4: Distribuição das respostas por classe na questão 9

Classe	Nº Absoluto	%
Acertos	5	21,7
Erros	14	60,9
Em branco	4	17,4
Total	**23**	**100**

Fonte: dados da pesquisa

Nas resoluções corretas dessa questão, os alunos utilizaram a estratégia de resolução sugerida neste trabalho como possível solução. Como por exemplo, a resposta do aluno A08, apresentada na Figura 16, a seguir.

Figura 16 - fragmento do questionário do aluno A08

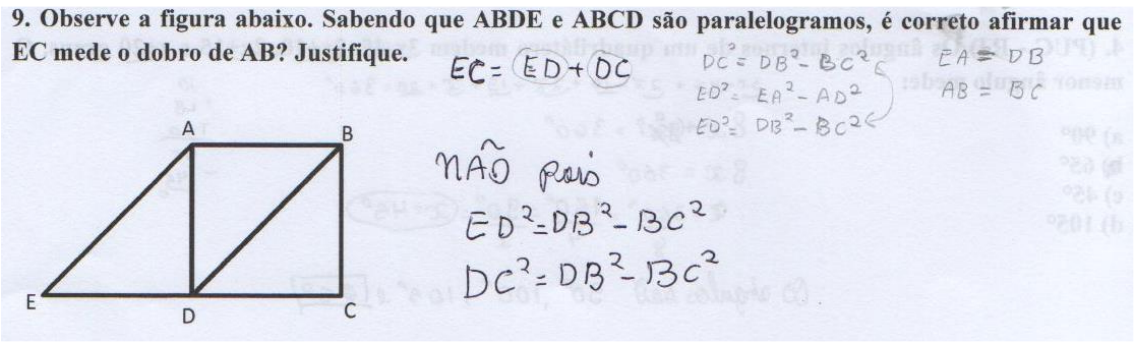


Fonte: dados da pesquisa

Nessa resolução, o aluno A08 usou o fato de AB = ED e AB = DC para concluir que EC = 2AB, pois EC = ED + DC = AB + AB.

Dentre os erros, três alunos responderam NÃO à pergunta, e 11 responderam SIM, no entanto, apresentaram justificativas erradas ou insuficientes, como nos mostra as Figuras 17 e 18, a seguir.

Figura 17 - fragmento do questionário do aluno A12

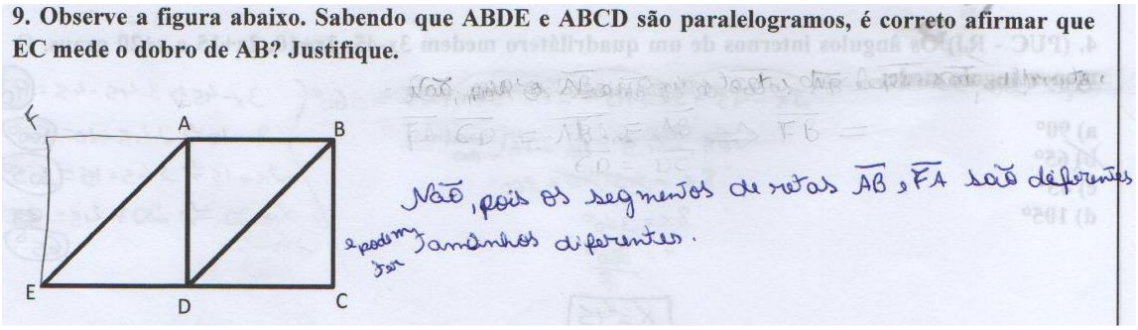


Fonte: dados da pesquisa

Em sua resolução, o aluno A12 justificou sua resposta usando o Teorema de Pitágoras, supondo que os triângulos formados eram retângulos, mas a questão não fornecia essa informação, logo, o aluno não poderia usar tal afirmação, pois, pelos dados da questão não daria pra chegar a esse resultado.

Em seguida, concluiu que o segmento EC não mede o dobro do segmento AB, o que não é verdade.

Figura 18 - fragmento do questionário do aluno A17



Fonte: dados da pesquisa

Já o aluno A17, como mostrado na Figura 17, afirmou que EC não mede o dobro de AB, a partir de uma construção feita por ele na figura, sem utilizar o fato de ABDE e ABCD serem paralelogramos para justificar sua resposta.

Nas resoluções das questões dessa categoria (definições e propriedades) percebemos que os alunos, em sua maioria, não possuem o conhecimento efetivado a respeito das definições e propriedades dos quadriláteros, e apresentam informações sem clareza e organização em suas estratégias de resolução.

4.2 Ângulos

Trataremos aqui das questões cuja resolução envolve alguns conceitos relacionados a ângulos, como: soma dos ângulos internos de um quadrilátero; soma dos ângulos internos de um triângulo; ângulos opostos pelo vértice e ângulos suplementares. A essa categoria estão destinadas as questões: Q4, Q7 e Q10.

Questão 4

(PUC - RJ) Os ângulos internos de um quadrilátero medem 3x-45, 2x+10, 2x+15 e x+20 graus. O menor ângulo mede:

a) 90°
b) 65°
c) 45°
d) 105°

Fonte: SOUZA e PATARO (2009).

Para resolver essa questão, é necessário saber que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é igual à 360°, e assim, o aluno poderá igualar 3x-45 + 2x+10 + 2x+15 + x+20 = 360. Resolvendo essa equação, encontrará x = 45°, e substituindo este valor na medida de cada ângulo, que está em função de x, terá que o menor ângulo mede 65°. O Quadro 5 apresenta a distribuição das respostas nessa questão.

Quadro 5 - Distribuição das respostas por classe na questão 4

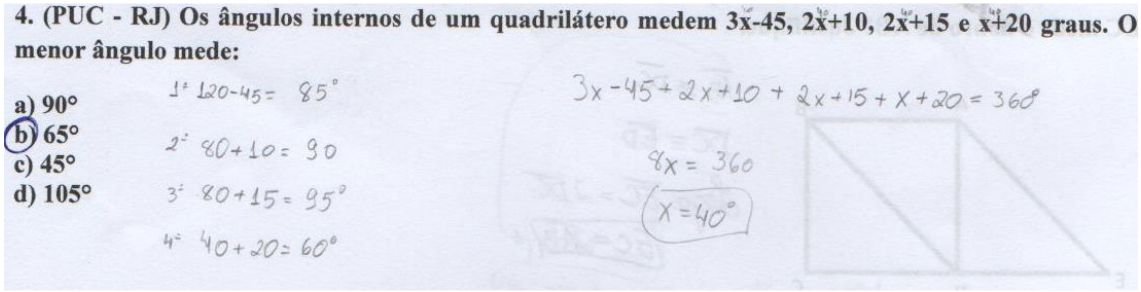
Classe	Nº Absoluto	%
Acertos	14	60,9
Acertos Parciais	3	13
Erros	6	26,1
Total	**23**	**100**

Fonte: dados da pesquisa

Nas respostas corretas, apenas um aluno assinalou a alternativa sem efetuar o cálculo, os demais utilizaram a estratégia sugerida na resolução dessa questão.

Consideramos as respostas parcialmente corretas aquelas em que o aluno igualou a soma dos ângulos internos do quadrilátero 360°, mas errou na resolução. Na Figura 19 temos um exemplo dessa situação, a resposta do aluno A18.

Figura 19 - fragmento do questionário do aluno A18

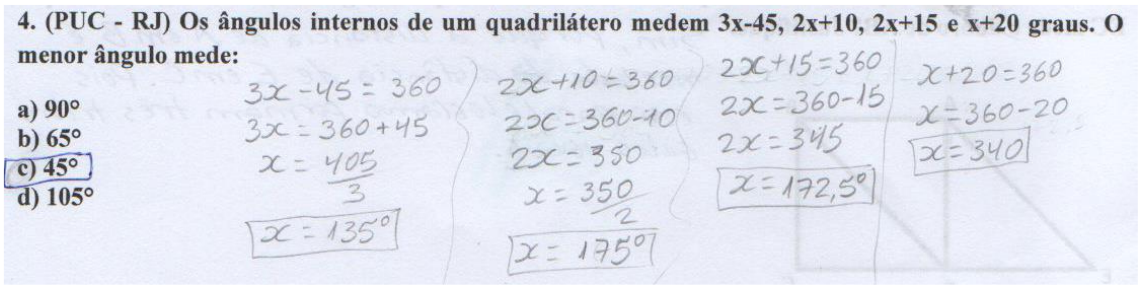


Fonte: dados da pesquisa

Notamos que esse aluno armou corretamente a equação, mas errou na sua resolução, quando resolve a equação 8x = 360, encontrando x = 40°, sendo que o valor de x nessa equação é 45°, e, substituindo o valor de x = 40° encontrado, encontrou a medida do menor ângulo, que foi 60°, e marcou a alternativa com valor mais próximo do que foi encontrado.

Dentre os erros, tivemos duas respostas em que os alunos armaram a equação de forma incorreta, e quatro respostas nas quais não conseguimos compreender a estratégia de resolução utilizada. A seguir, as figuras 20 e 21 apresentam respostas com essas características.

Figura 20 - fragmento do questionário do aluno A21

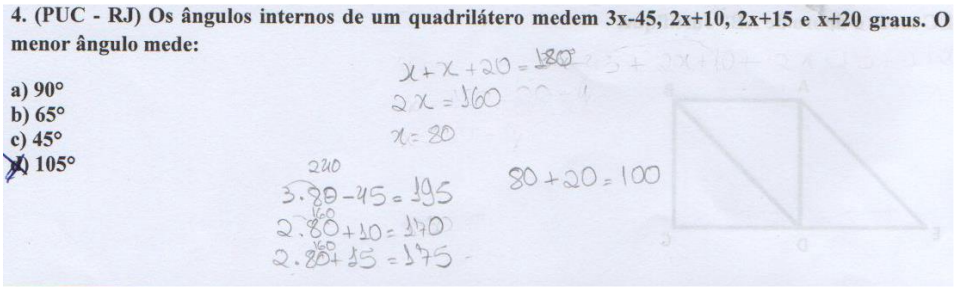


Fonte: dados da pesquisa

O aluno A21 igualou o valor de cada ângulo, separadamente, a 360°, e não a soma dos ângulos. Ponderamos que esse aluno não compreendeu o enunciado da questão, uma vez que cada valor dado em função da incógnita *x*

corresponde a um ângulo do quadrilátero, e não a soma dos ângulos do quadrilátero.

Figura 21 - fragmento do questionário do aluno A14

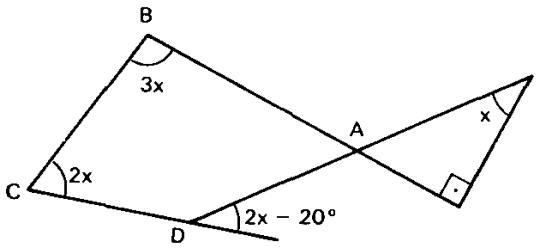


Fonte: dados da pesquisa

Já na resolução da questão feita pelo aluno A14, não conseguimos compreender a estratégia utilizada por esse aluno para encontrar a equação x + x + 20 = 180°, achando x = 80° como solução da equação. Notamos que o aluno resolveu corretamente essa equação, mas não compreendemos quais informações foram utilizadas para montar tal equação.

Questão 7

Determine os ângulos internos do quadrilátero *ABCD*:



Fonte: DOLCE e POMPEO (1997).

Para resolução dessa questão, é esperado que o aluno, saiba que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é 360°, e que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, além de ter conhecimento das noções de ângulos suplementares e ângulos opostos pelo

vértice, para resolver essa questão. Como os valores dos ângulos B e C estão em função de x, é considerável colocar o valor dos ângulos A e D também em função de x. O aluno deve observar que o ângulo suplementar ao ângulo D mede (2x – 20°), logo D tem medida igual à (180° - (2x – 20°)), e que o ângulo C é oposto pelo vértice ao ângulo do triângulo retângulo que também pode ser escrito em função de x, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à 180°, então C terá medida igual à (180° - (90° + x)). Igualando a soma dos ângulos A, B, C e D à 360° temos:

$$2x + 3x + (180° - (2x – 20°)) + (180° - (90° + x)) = 360°$$

Resolvendo a equação, encontramos x = 35°, e substituindo nos valores de cada ângulo terá A = 55°, B = 105°, C = 70° e D = 130°. As respostas dessa questão estão distribuídas no Quadro 6 seguinte.

Quadro 6 - Distribuição das respostas por classe na questão 7

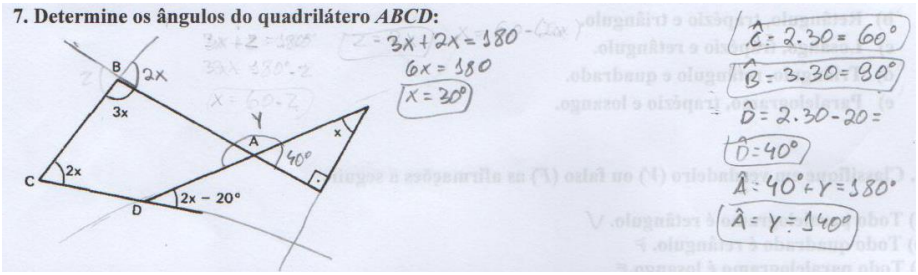
Classe	**Nº Absoluto**	**%**
Acertos	3	13
Erros	17	74
Em branco	3	13
Total	**23**	**100**

Fonte: dados da pesquisa

Os alunos que acertaram essa questão utilizaram a estratégia sugerida para sua resolução.

Dentre as respostas erradas, 3 alunos colocaram os ângulos consecutivos como sendo suplementares, para encontrar o valor de x, o que não é válido para qualquer quadrilátero, e não temos dados a respeito da definição do quadrilátero em questão. Apresentamos um exemplo dessa estratégia na Figura 22 a seguir:

Figura 22 - fragmento do questionário do aluno A09

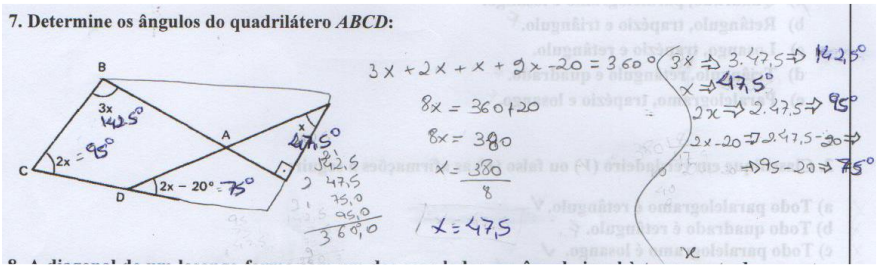


Fonte: dados da pesquisa

O aluno A09 considerou os ângulos C e B que são consecutivos, como ângulos suplementares, cuja soma é 180°, o que só é verdade se as retas que passam pelos segmentos BA e AD forem paralelas, e não temos dados na questão que validem essa afirmação. Supondo verdade que a soma dos ângulos C e B é 180°, o aluno resolve a equação 3x + 2x = 180, encontrando x = 30º. Em seguida, substituiu esse valor para encontrar o valor dos ângulos do quadrilátero. Além disso, considerou, por exemplo, a medida do ângulo interno ao quadrilátero, relativo ao vértice D, como a medida do ângulo externo a este, que é dada na questão, em função de x, e procedeu de forma semelhante para encontrar o valor do ângulo interno relativo ao vértice A.

Dois alunos resolveram essa questão igualando a soma dos ângulos dados em função de x a 360° para encontrar o valor de x, o que não podemos afirmar ser verdadeiro, pois a questão não apresenta dados a respeito. O que se tem é que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é igual a 360°, mas os ângulos dados em função de x na questão, não são todos ângulos internos ao quadrilátero. A Figura 23 ilustra essa estratégia.

Figura 23 - fragmento do questionário do aluno A17

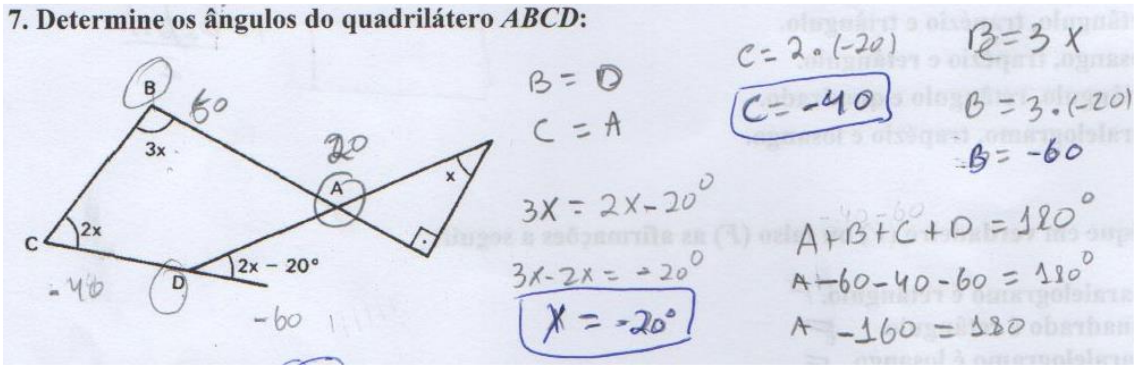


Fonte: dados da pesquisa

O aluno A17 considerou como os ângulos internos do quadrilátero, os ângulos dados na questão, em função de x. Possivelmente, tenha considerado como quadrilátero a figura toda, e não de fato, o quadrilátero ABCD, o que pode ter acontecido pela falta de visualização, que de acordo com Leivas (2012) vai além de “ver com os olhos”, necessita da formação de imagens mentais para construção de determinado conceito matemático, podendo auxiliar na resolução de problemas geométricos.

Houve ainda algumas respostas nas quais os ângulos considerados opostos foram tomados como de mesma medida. A Figura 24 apresenta a estratégia utilizada pelo aluno A04.

Figura 24 - fragmento do questionário do aluno A04

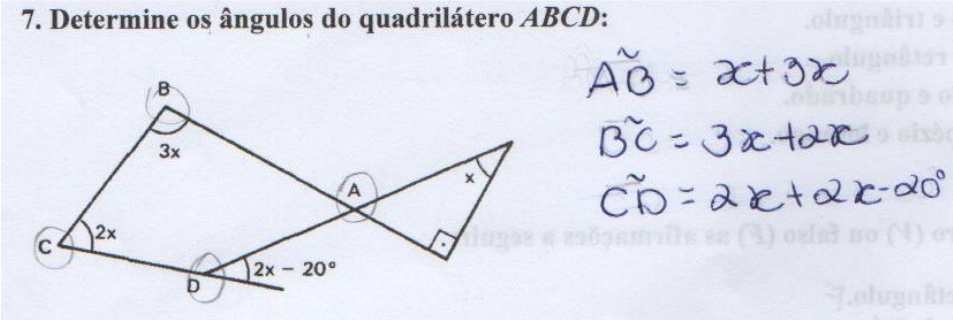


Fonte: dados da pesquisa

O aluno A04 considerou os ângulos opostos do quadrilátero congruentes, como B = D, o que não vale para um quadrilátero qualquer, pois essa propriedade diz respeito aos paralelogramos, e a questão não o tipo do quadrilátero dado. Tomou ainda, como medida do ângulo D, a medida do seu ângulo suplementar, que é dado não questão, não se atentando que esse ângulo é externo ao quadrilátero.

Houve também questões nas quais não conseguimos identificar a estratégia utilizada pelo aluno, como por exemplo, a resposta do aluno A10, apresentada na Figura 25, a seguir:

Figura 25 - fragmento do questionário do aluno A10



Fonte: dados da pesquisa

Nessa resolução, o aluno utiliza uma notação desconhecida para se referir ao ângulo, não sendo possível saber a qual ângulo estar se referindo, e coloca como resultado a soma dos ângulos cujos vértices são representados por eles. Por exemplo, quando coloca BC = 3x + 2x, não sabemos se ele está se referindo ao lado BC ou a algum ângulo, então, não conseguimos identificar sua estratégia de resolução.

Questão 10

A soma de dois ângulos opostos de um paralelogramo é igual a $\frac{5}{13}$ da soma dos outros dois ângulos opostos. Determine-os.

Fonte: DOLCE e POMPEO (1997).

Nessa questão, espera-se que o aluno utilize o fato de os ângulos opostos de um paralelogramo serem congruentes e que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360°, para resolvê-la. O aluno poderá resolver essa questão considerando x, y, x e y os ângulos do paralelogramo. Pelo enunciado, tomamos uma das somas dos ângulos opostos como referência. Assim, $2x = \frac{5}{13} 2y$. Como a soma dos ângulos internos é 360°, então

2x + 2y = 360°, substituindo o valor de 2x pelo valor acima, que está em função de y, temos: $\frac{5}{13}$2y + 2y = 360°. Resolvendo essa equação, encontraremos y = 130°, e substituindo esse valor em 2x = $\frac{5}{13}$2y ou em 2x + 2y = 360°, teremos x = 50°. Portanto, os Ângulos desse paralelogramo medem 130°, 50°, 130° e 50°. No Quadro 7 temos a distribuição das respostas dadas a essa questão.

Quadro 7: Distribuição das respostas por classe na questão 10

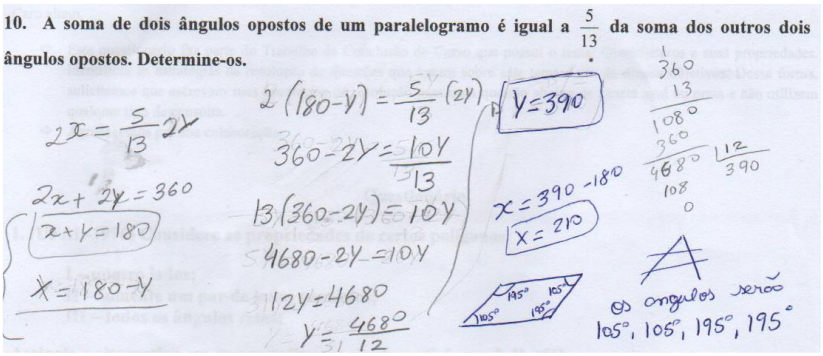
Classe	**Nº Absoluto**	**%**
Acerto Parcial	1	4,4
Erros	12	52,2
Em branco	10	43,4
Total	**23**	**100**

Fonte: dados da pesquisa

Na resposta parcialmente correta, o aluno organizou a equação de forma correta, mas não conseguimos compreender sua resolução, pois não conseguimos identificar os passos utilizados para resolver a equação, mesmo que tenha chegado ao resultado esperado.

Dentre as respostas erradas, quatro apresentavam cálculo com erro na organização da equação ou na resolução, e as demais, traziam apenas desenhos ou justificativas incompletas, que não apresentavam os valores solicitados na questão. As Figuras 26 e 27 seguir apresentam exemplos das estratégias mais utilizadas.

Figura 26 - fragmento do questionário do aluno A22

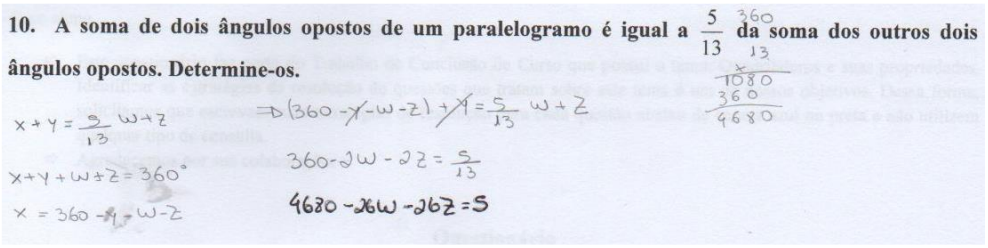


Fonte: dados da pesquisa

Na Figura 26 temos a estratégia utilizada pelo aluno A22, na sua resolução. Considerando x, y, x e y os ângulos do paralelogramo, esse aluno arma corretamente a equação. Depois de encontrar o valor de x em função y, na equação 2x + 2y = 360, que corresponde à soma dos ângulos internos do paralelogramo, o aluno substitui esse valor na soma 2x = $\frac{5}{13}$2y, mas erra ao não realizar a propriedade distributiva de forma correta, encontrando valores errados para x e y, quais sejam, x = 210° e y = 390°. Além disso, ele considera os ângulos como metade do valor encontrado, ou seja, 105°, 195°, 105° e 195°. Nas duas situações, é possível verificar que a soma dos ângulos excede à 360°, o que contradiz a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero ser igual à 360°.

A Figura 27 traz a resolução do aluno A15.

Figura 27 - fragmento do questionário do aluno A15



Fonte: dados da pesquisa

Em sua resolução, o aluno A15 estrutura a equação da soma de acordo com o enunciado, no entanto, não consegue resolver o sistema por não usar o fato de que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Dentre as questões destinadas a categoria desta seção, a questão 4 foi a que teve maior índice de acerto, 14 respostas corretas, seguida da questão 7, com três respostas corretas, e da questão 10, que não teve nenhuma resposta considerada correta. Isso se deve ao fato de que, na questões 7 e 10, os valores dos ângulos internos do quadrilátero não aparecem de forma explícita, como na questão 4. Como evidencia Amâncio (2013), que trabalhar de uma maneira apenas limita o desenvolvimento do pensamento geométrico e restringe um conceito à casos particulares, e não à generalização.

4.3 Diagonais

Nessa seção descreveremos e analisaremos as questões cujas soluções dependiam das propriedades das diagonais de determinados quadriláteros, quais sejam: Q8, Q11 e Q12

Questão 8

A diagonal de um losango forma com um dos seus lados um ângulo igual à terça parte de um ângulo reto. Determine os quatro ângulos do losango.

Fonte: DOLCE e POMPEO (1997).

Na resolução dessa questão, o aluno deve saber que as diagonais de um losango são bissetrizes dos seus ângulos internos e que os ângulos opostos são congruentes. Uma possível solução seria: se a diagonal forma um terço de um ângulo reto com um dos lados do losango, então forma com os outros lados também um terço de um ângulo reto, que é 30°, pois a diagonal é bissetriz. Assim, dois lados opostos do losango vai medir dois terços de um ângulo reto cada um, que corresponde à 60°. Como os ângulos opostos são

congruentes, então os outros dois ângulos terão a mesma medida. Chamando essa medida de x e igualando a soma dos ângulos à 360°, temos:

$$60° + 60° + x + x = 360° \Rightarrow x = 120°.$$

Logo as medidas dos ângulos desse losango são 60°, 120°, 60° e 120°. As respostas dos alunos a essa questão estão distribuídas no Quadro 8 a seguir.

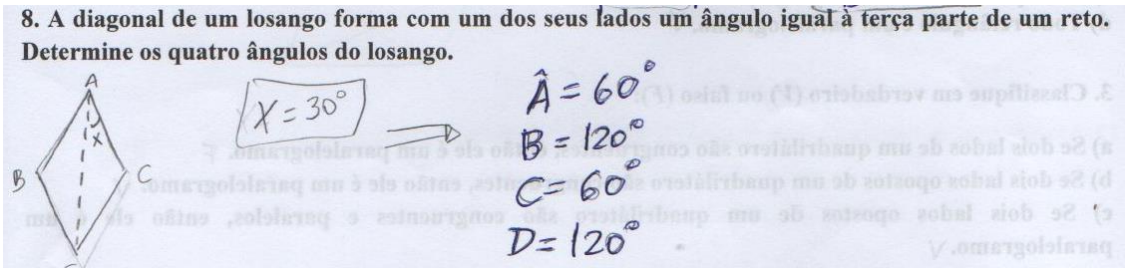
Quadro 8: Distribuição das respostas por classe na questão 8

Classe	Nº Absoluto	%
Acertos	3	13
Erros	13	56,5
Em branco	7	30,5
Total	**23**	**100**

Fonte: dados da pesquisa

Dos alunos que acertaram apenas um deu resposta final sem apresentar o cálculo, ponderamos que tenha feito mentalmente. A Figura 28 mostra a resposta desse aluno, o A22.

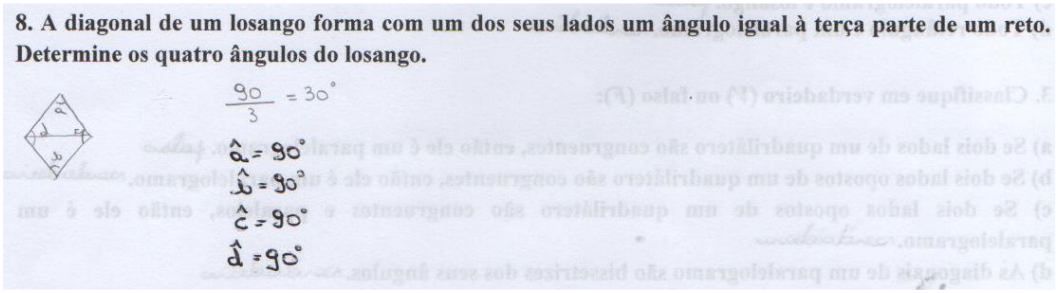
Figura 28 - fragmento do questionário do aluno A22



Fonte: dados da pesquisa

Dentre as respostas erradas, houve uma em que o aluno assinalou que cada ângulo medindo 90º, como apresentado na Figura 29. Possivelmente, esse aluno compreende o losango como quadrilátero que possui todos os ângulos retos, o que não é verdade para qualquer losango.

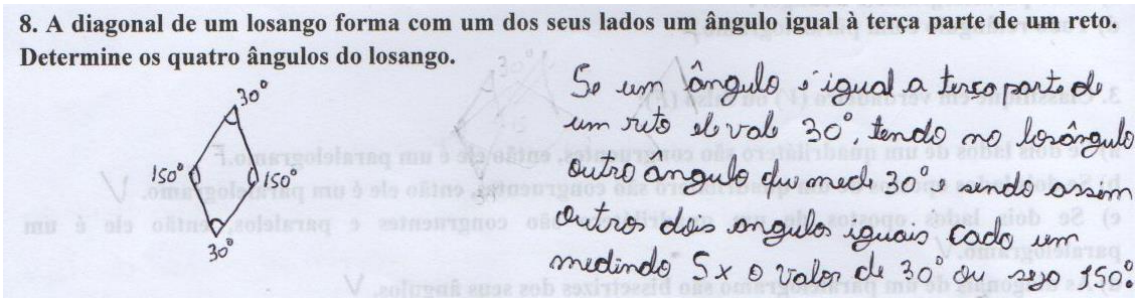
Figura 29 - fragmento do questionário do aluno A15



Fonte: dados da pesquisa

Nas demais respostas erradas, os alunos utilizaram a mesma estratégia, consideraram a informação dada na questão como sendo a medida de um ângulo, sendo que essa medida seria da metade do ângulo, como no exemplo da Figura 30 a seguir.

Figura 30 - fragmento do questionário do aluno A23



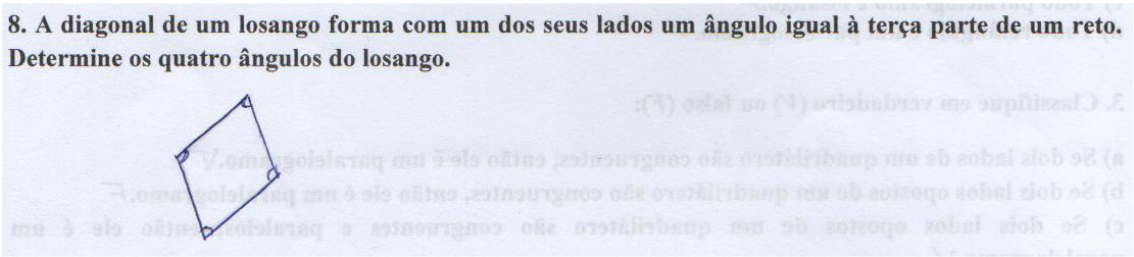
Fonte: dados da pesquisa

O aluno A23 considerou a informação dada na questão como sendo a medida de um ângulo, entretanto, o ângulo dado na questão é formado pela diagonal e um dos lados do losango, como as diagonais de um losango são também bissetrizes dos seus ângulos, o valor dado na questão se refere à metade do ângulo. Ao supor que 30°, que corresponde à terça parte de um ângulo reto, fosse o valor de um dos ângulos do losango, o aluno encontrou os valores dos demais ângulos, considerando que em um losango os ângulos

opostos são congruentes e a soma dos ângulos internos é igual a 360°, o que é verdade para qualquer losango.

Nas demais respostas erradas foram colocadas apenas desenhos, sem qualquer estratégia de resolução e sem resposta final, como na resolução do aluno A21, na Figura 31.

Figura 31 - fragmento do questionário do aluno A21



Fonte: dados da pesquisa

O aluno A21 apenas representou, possivelmente, um losango, por meio de desenho, sem acrescentar indícios de resolução.

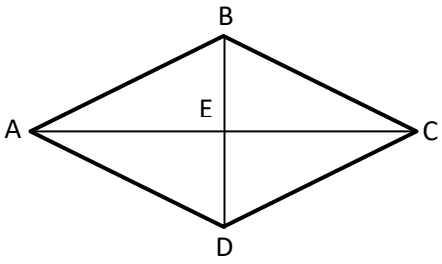
Questão 11

Mostre que as diagonais de um losango cortam-se em ângulo reto e são bissetrizes dos seus ângulos.

Fonte: BARBOSA (1994).

Uma possível solução dessa questão é a seguinte: Considere *ABCD* um losango com diagonais *AC* e *BD* e *E* o ponto de intersecção entre elas. Como *BC* = *AB*, $\hat{C}$ = $\hat{A}$ e *CD* =*AD*, então, os triângulos *BCD* e *BAD* são congruentes. Assim, $C\hat{B}D$ = $D\hat{B}A$ e $C\hat{D}B$ = $B\hat{D}A$. Logo, *BD* é bissetriz dos seus ângulos. De maneira análoga, verificamos que *AC* também é bissetriz dos seus ângulos. Agora, observe que os triângulos *BCE*, *DCE*, *BAE* e *DAE* são congruentes entre si, então, $B\hat{E}C$ = $C\hat{E}D = B\hat{E}A$ = $D\hat{E}A$, e como a soma desses ângulos é

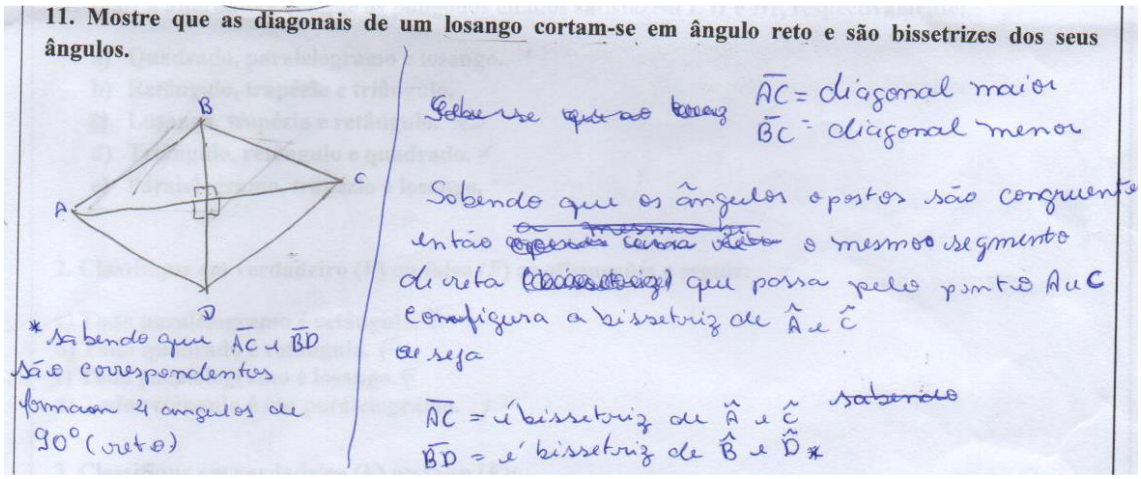
360°, então cada ângulo mede 90°. Logo as diagonais de um losango se cortam em ângulo reto.



Nas resoluções dessa questão não houve acertos, tiveram quatro respostas inconsistentes, cinco respostas em branco e 14 respostas nas quais havia apenas representação por meio de desenho, sem qualquer justificativa que validasse o resultado da questão, não podendo ser classificadas em certas ou erradas.

As respostas consideradas inconsistentes são aquelas em que as justificativas apresentadas pelos alunos não condizem com os dados da questão ou com elementos possíveis de ser usados para chegar ao resultado. A seguir, apresentamos alguns exemplos de respostas presentes nessa categoria.

Figura 32 - fragmento do questionário do aluno A05

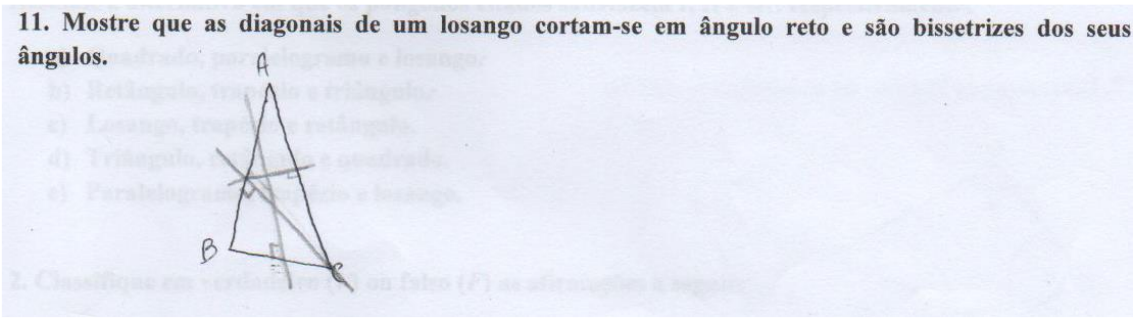


Fonte: dados da pesquisa

Em sua resposta, o aluno A05 descreve corretamente, de acordo com o seu desenho, o que é diagonal maior e diagonal menor, utiliza a notação de segmento e de ângulo. No entanto, não apresenta argumentos suficientes para validar o resultado, e, em alguns momentos, apresenta expressões de forma confusa, por exemplo, ao escrever “sabendo AC e BD são correspondentes formam 4 ângulos de 90°”, possivelmente o aluno tenha se referido ao fato de as diagonais de que as diagonais de um losango são perpendiculares.

Nas respostas em que houve apenas representação por meio de desenho, uma se destacou entre as demais. Veja na Figura 33 a seguir.

Figura 33 - fragmento do questionário do aluno A06



Fonte: dados da pesquisa

O aluno A06 desenhou o losango como um polígono de três lados, isto é, um triângulo, o que nos diz que, provavelmente, esse aluno não compreenda o losango como um quadrilátero.

Questão 12

Mostre que, as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Fonte: BARBOSA (1994).

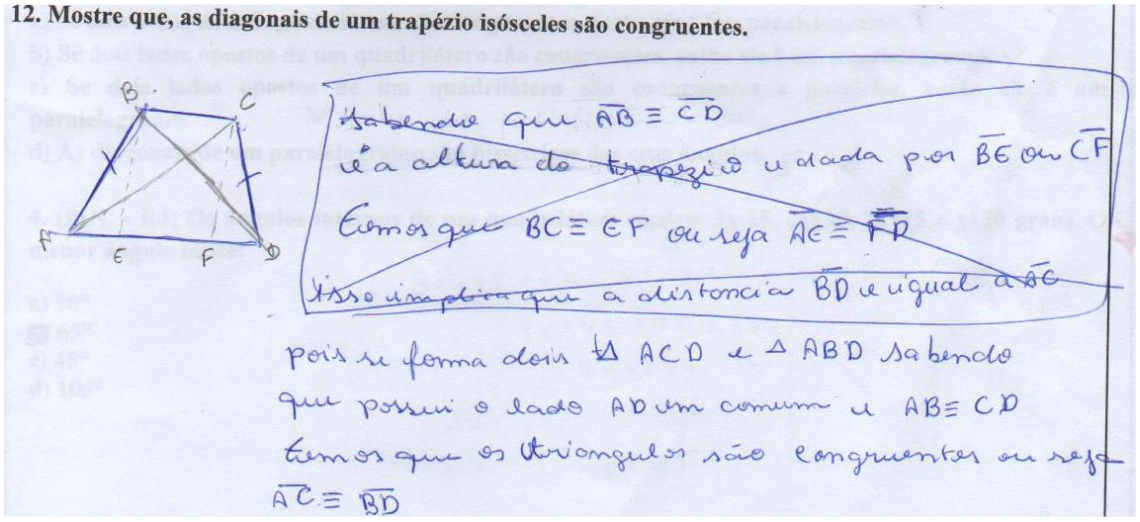
Para resolver essa questão, o aluno precisa saber que, num trapézio isósceles as laterais são congruentes, e os ângulos de cada base são também

congruentes, podendo demonstrar o resultado da seguinte maneira: considerando ABCD um trapézio isósceles, em BC e AD são, respectivamente, base menor e base maior, temos que: os ângulos B e C são congruentes, assim como A e D são, além disso as laterais AB e CD também são congruentes. Logo as diagonais AC e BD formam com o trapézio dois triângulos ABC e DCB congruentes, portanto, os lados correspondentes são congruentes, isto significa que AC = BD. Dessa forma, as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes. De maneira análoga, esse resultado poderia ser demonstrado pela congruência entre os triângulos ACD e BDA.

Nas resoluções dessa questão houve um acerto parcial, dois erros, nove respostas que tiveram apenas representações por meio de desenho e 11 respostas em branco.

A Figura 34 a seguir, apresenta a estratégia de resolução do aluno A05, considerada parcialmente correta.

Figura 34 - fragmento do questionário do aluno A05



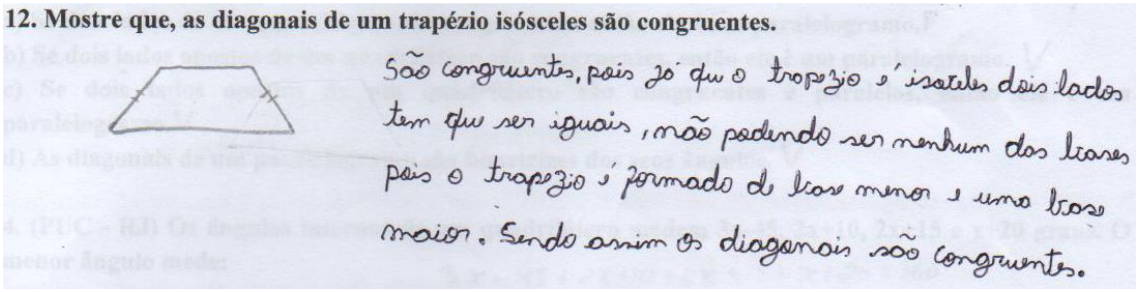
Fonte: dados da pesquisa

Em sua resolução, o aluno A05 utiliza a estratégia proposta para resolução dessa questão, por meio da congruência entre dois triângulos, no entanto, não estabelece correspondência entre os lados e ângulos dos

triângulos, por exemplo, afirma que os triângulos ACD e ABD são congruentes, quando na verdade, se estabelecido uma correspondência, temos os triângulos ACD e BDA congruentes.

A Figura 35 apresenta a resposta do aluno A23.

Figura 35 - fragmento do questionário do aluno A23



Fonte: dados da pesquisa

Na resolução do aluno A23, ele possivelmente, considerou como diagonais, as laterais do trapézio isósceles, ao justificar que as bases não poderiam ser congruentes, pois, no trapézio há uma base maior e outra menor, logo a diagonais seriam congruentes.

As questões envolvendo conhecimento a respeito das diagonais de determinados quadriláteros tiveram baixo índice de acerto. Na questão 8 tivemos três respostas certas, na questão 11 nenhum acerto e na questão 12 apenas uma resposta correta, o que nos mostra que os alunos possuíam pouco conhecimento sobre as diagonais dos quadriláteros, e dificuldade em aplicar esse conhecimento na resolução das questões.

CONCLUSÃO

Nessa seção traremos as conclusões obtidas no trabalho, por meio da análise dos dados.

O interesse dessa pesquisa foi analisar as estratégias utilizadas por estudantes de Licenciatura em Matemática na resolução de questões envolvendo quadriláteros. Para tanto, tal pesquisa foi desenvolvida a fim de identificar e classificar essas estratégias, pois desejamos observar qual a concepção dos alunos acerca do tema abordado nessa pesquisa, pois Amâncio (2013) afirma que para desenvolver o pensamento geométrico é necessário que se vivencie diversas e ricas experiências, com diferentes objetos e desenhos que possibilite a construção de imagens mentais que abarquem todos os aspectos presentes na definição.

Assim, pretendeu-se verificar se os estudantes utilizaram as propriedades referentes aos quadriláteros, em suas estratégias de resolução, para, possivelmente, compreender sua percepção a respeito da temática envolvida, e analisar as estratégias de erros mais utilizadas nas resoluções, caso haja. Estudamos essas estratégias por meio da questão norteadora de nossa pesquisa: Quais estratégias são utilizadas por estudantes de Licenciatura em Matemática na resolução de questões envolvendo quadriláteros?

Dessa forma, a pesquisa foi realizada com 23 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, recém-ingressados em 2016, com propósito de analisar o conhecimento trazido por esses estudantes da Educação Básica, sobre os quadriláteros e suas propriedades.

Na aplicação do questionário, instrumento de coleta de dados de nossa pesquisa, muitos alunos comentaram que não se lembravam do conteúdo ou que o mesmo não tinha sido estudado por eles na Educação Básica, confirmando a quase ausência do ensino de Geometria na sala de aula, destacada por Lorenzato (1995).

Esse fato foi notório na análise dos dados coletados no questionário, na qual o índice de acertos foi baixo.

Percebemos em nossa análise, que os estudantes utilizam muito em suas estratégias, a visualização, não se atentando as definições ou propriedades, sendo essa visualização restrita a formas particulares de determinadas figuras, como é apresentada, na maioria das vezes, nos livros didáticos. Observamos isso na fala dos alunos, durante a realização da oficina, quando um aluno afirmou que "*o losango é o que tem forma de balão"* , e outro aluno disse, nas construções das figuras que "*o retângulo está em pé*", fato que restringe também o conhecimento e capacidade de raciocínio do aluno, uma vez que tem seu pensamento limitado às formas que as figuras são apresentadas.

Dentre as estratégias utilizadas pelos alunos, notamos a forma mecânica com que estão acostumados a resolver questões, pois, muitas vezes, tiveram mais dificuldade em organizar uma equação, por exemplo, do que em resolvê-la.

As questões que tiveram maior índice de erro em suas resoluções foram as que abrangiam aspectos relativos às definições e propriedades dos quadriláteros.

Após observarmos o resultado do questionário, ponderamos realizar uma oficina trabalhando os conteúdos do mesmo, qual seja, quadriláteros e suas propriedades. A seguir descreveremos essa atividade.

A oficina foi realizada no dia 03 de agosto de 2016, com onze alunos dos quais um não respondeu ao questionário, mas teve interesse em participar da oficina, que foi desenvolvida em 2 aulas. O desenvolvimento da atividade contou com o apoio de dois outros colaboradores, além da autora deste trabalho, a saber, a orientadora da autora e outro orientando que trabalhava com os mesmo sujeitos dessa pesquisa.

Escolhemos utilizar o Geoplano como recurso didático para o desenvolvimento das atividades da oficina pelo fato de possibilitar os alunos a explorarem a visualização de uma figura, em diferentes posições e tamanhos,

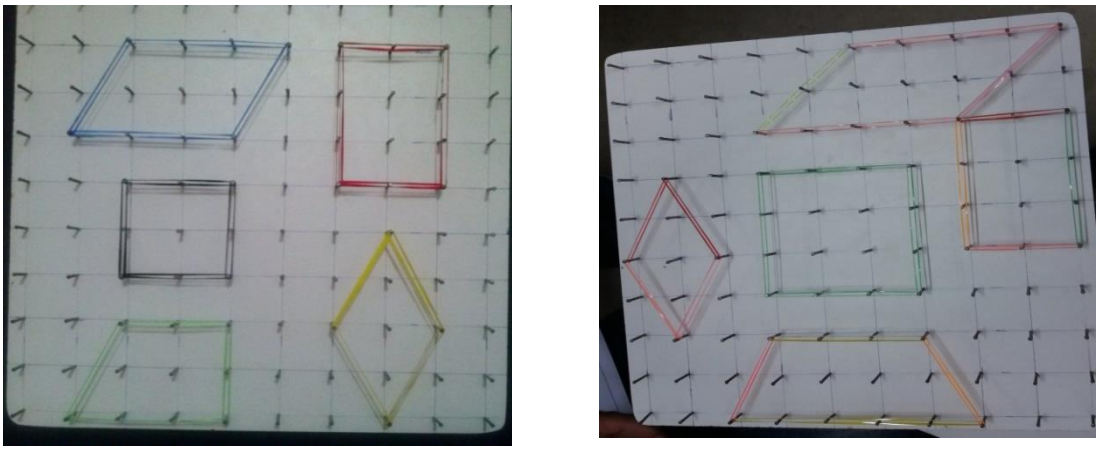
pois, de acordo com Amâncio (2013), se encontra frequentemente figuras particulares, representadas de uma maneira apenas, quando um conceito geométrico pode ser representado por diversas formas de desenhos, assim, ponderamos que o Geoplano pudesse proporcionar maior possibilidade de representações dos quadriláteros. Para isso, inicialmente, contamos uma breve história sobre o surgimento do Geoplano e sua utilização como recurso para aulas de matemática. Apresentamos, fundamentadas em Barbosa (1994), as definições de: poligonal, polígono e polígonos convexos e não convexos. Tais definições foram apresentadas no capítulo 2.

Após apresentar essas definições, solicitamos que os alunos representassem no Geoplano algumas construções dos quadriláteros, de acordo com suas definições, essas construções serão apresentadas a seguir. Ponderamos que essas construções permitiriam a visualização de propriedades dos quadriláteros, auxiliando na construção do seu conceito imagem (AMÂNCIO, 2013).

Solicitamos que os alunos construíssem no Geoplano os quadriláteros, de acordo com suas definições.

A Figura 36 a seguir apresenta, à esquerda, a construção elaborada pela autora para discussão, e à direita, uma das construções feitas pelos alunos.

Figura 36 - representação dos quadriláteros no Geoplano

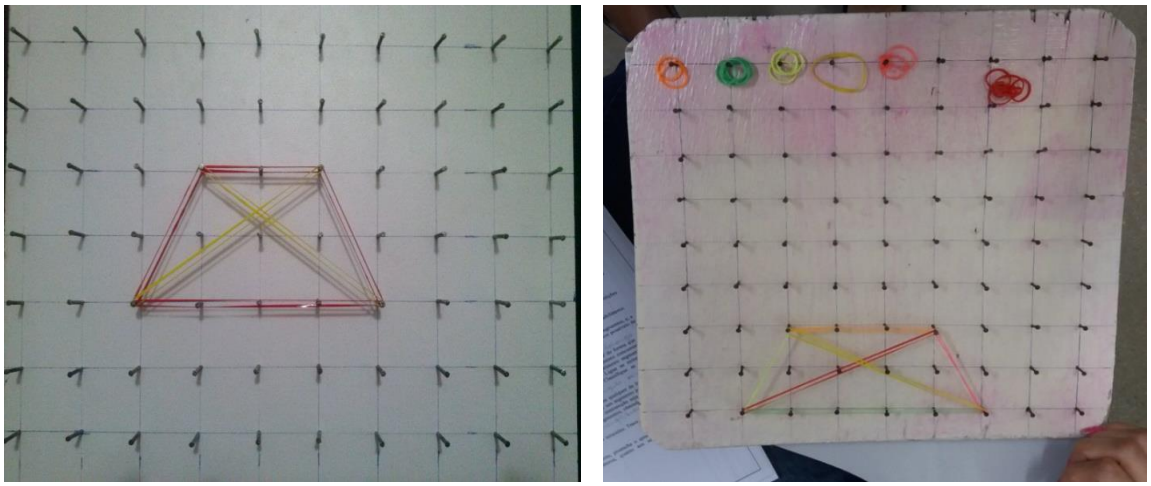


Fonte: dados da pesquisa

Durante as construções, os alunos começaram a questionar o fato de que algumas propriedades valiam para mais de um quadrilátero, como por exemplo, um losango seria também um paralelogramo, e um quadrado seria um losango e também um retângulo. Percebemos que essas observações foram feitas a partir das construções, mas que, aparentemente, os alunos não tinham, de maneira formal e organizada, essas ideias a respeito das propriedades dos quadriláteros, pois, como afirma Tinoco (2011), apesar de os quadriláteros serem, possivelmente, o conteúdo mais conhecido dos alunos do Ensino Fundamental e Médio, eles ingressam no Ensino Superior com muitas informações sobre esse conteúdo, mas que estão desorganizadas e sem conexões entre si.

Em seguida, foi solicitado que representassem no geoplano um trapézio isósceles e suas diagonais, respondendo a pergunta: O que é possível dizer a respeito delas? Na Figura 37 está representada à esquerda, uma das possíveis construções, elaborada pela autora, e à direita, um dos resultados construídos pelos alunos.

Figura 37 - Representação de um trapézio isósceles



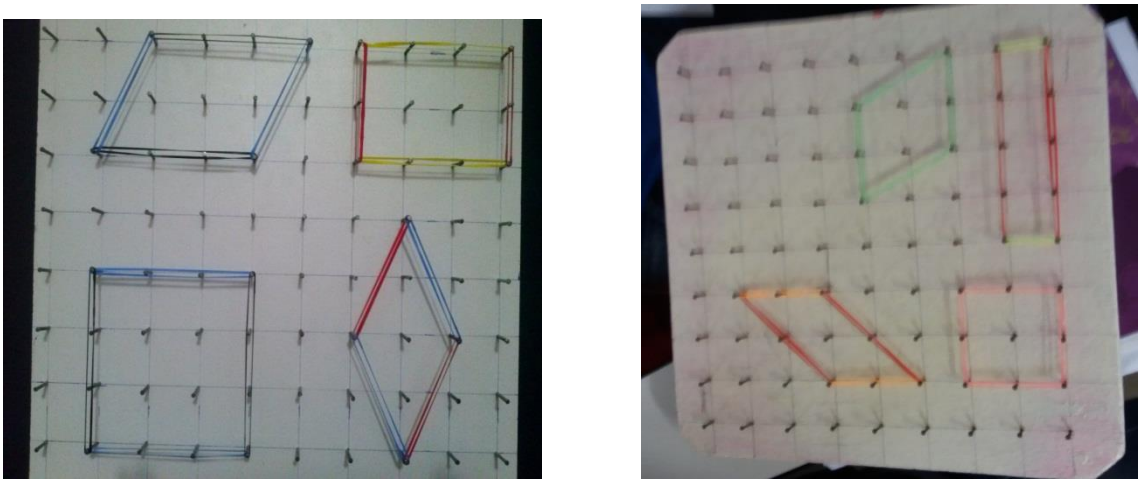
Fonte: dados da pesquisa

Durante essa construção, um dos alunos comentou que os lados não paralelos do trapézio eram segmentos paralelos, pois não se encontravam.

Notamos que este aluno analisou apenas os segmentos de reta, e não as retas que os continham, e provavelmente, possuía um conceito equivocado sobre paralelismo, tendo seu conhecimento restrito aos segmentos e não a reta como um todo. Nesse momento, um dos colaboradores da oficina interviu e mostrou para o aluno, com as borrachas utilizadas nas construções, que se prolongados, aqueles segmentos se interceptariam, ou seja, não eram paralelos, isso nos mostra que o uso do Geoplano como recurso didático auxiliou na compreensão do conteúdo, e na ampliação do conhecimento do aluno.

Após as construções do trapézio isósceles, solicitamos aos alunos que construíssem no Geoplano dois segmentos de retas paralelos e congruentes, e, a partir desses segmentos, determine as formas de quadriláteros possíveis de se obter. Em seguida, classifique essas formas. A Figura 38 mostra essa construção feita pela autora, à esquerda, e uma das construções feita pelos alunos, à direita.

Figura 38 - Quadriláteros que possuem lados opostos paralelos e congruentes



Fonte: dados da pesquisa

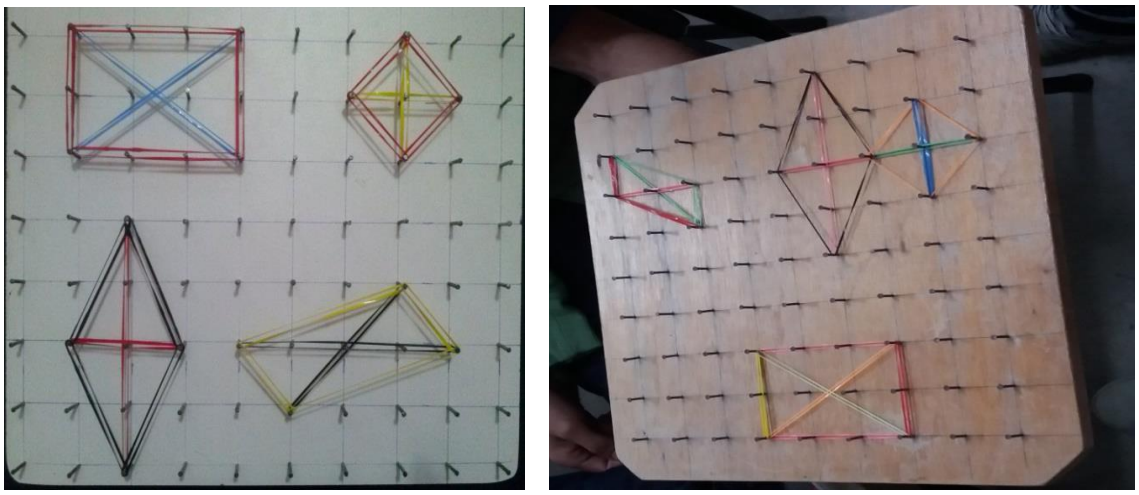
Ao responder essa atividade os alunos construíram segmentos perpendiculares aos lados do geoplano, formando apenas retângulos e quadrados. Não observamos a construção de paralelogramos ou losangos por parte dos alunos. Então, mostramos as possíveis soluções. Alguns alunos comentaram que não tinham pensado ser possível formar também

paralelogramos e losangos, isso significa que a atividade auxiliou na ampliação do repertório de imagens, no caso quadriláteros, com essas características.

Depois dos resultados apresentados e discussões, foi solicitado aos alunos que representassem no geoplano um segmento de reta qualquer de forma que fosse possível determinar seu ponto médio. Traçar um segmento concorrente ao segmento dado de forma que o ponto médio do primeiro segmento seja também ponto médio desse segundo segmento e ligar as extremidades desses segmentos, obtendo um polígono, classificando as possíveis soluções.

Essas soluções estão representadas na Figura 39, à direita, elaborada pela autora e uma das construções feitas pelos alunos.

Figura 39 - Quadriláteros cujas diagonais se interceptam no ponto médio



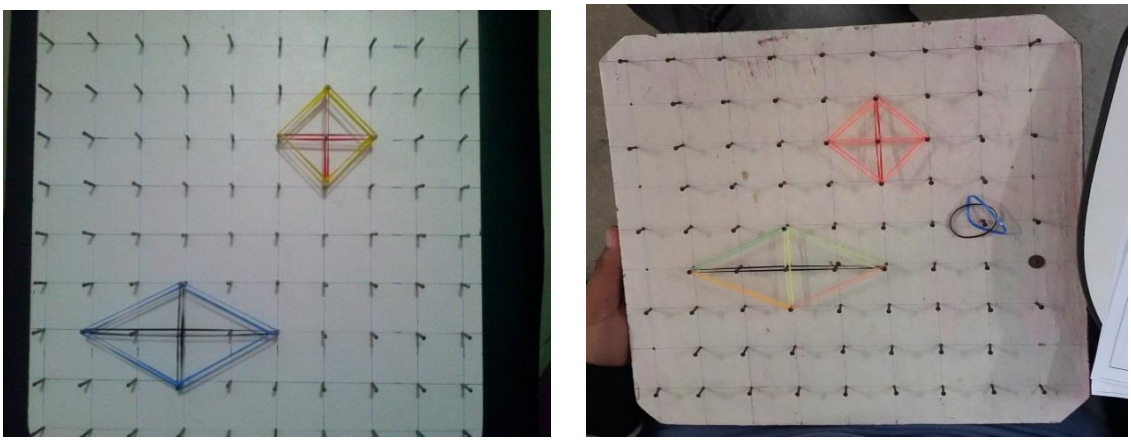
Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos teve dificuldade nessas construções, em perceber que, para que as diagonais se interceptassem no ponto médio de ambas, não precisariam ser congruentes ou perpendiculares. Os colaboradores da oficina auxiliaram os alunos nas construções, mostrando que diagonais concorrentes ou com medidas diferentes poderiam sim, se interceptar no ponto médio. Na sequência, discutimos essas questões com alunos, que, por meio das construções, compreenderam melhor esses resultados.

E por fim, solicitamos que os alunos representassem no geoplano um segmento de reta qualquer de forma que fosse possível determinar seu ponto médio. Em seguida, traçar um segmento perpendicular ao segmento dado passando pelo seu ponto médio, ligar as extremidades desses segmentos, obtendo um polígono, e classificando as possíveis soluções.

Temos uma das possíveis soluções na Figura 40, à esquerda, numa construção feita pela autora, e à direita a construção de um dos alunos.

Figura 40 - Quadriláteros cujas diagonais se interceptam no ponto médio e são perpendiculares



Fonte: dados da pesquisa

Não identificamos dificuldades por parte dos alunos durante a construção desta resposta, ponderamos que devido a atividade 4, houve melhor desempenho nas construções feitas pelos alunos e compreensão dos resultados.

A partir das construções e discussões, esperamos que os alunos já tivessem compreendido as definições e observado algumas propriedades dos quadriláteros. Foram discutidas algumas questões relacionadas às construções da atividade anterior. Os alunos, a partir de suas anotações, destacaram alguns pontos relevantes, quanto aos lados, aos ângulos e às diagonais dos quadriláteros, o que foi solicitado no decorrer da atividade.

Após essas questões, entregamos um quadro para que eles preenchessem destacando aspectos relevantes dos quadriláteros, quanto aos seus lados, ângulos e diagonais.

Uma solução esperada está apresentada no Quadro 9:

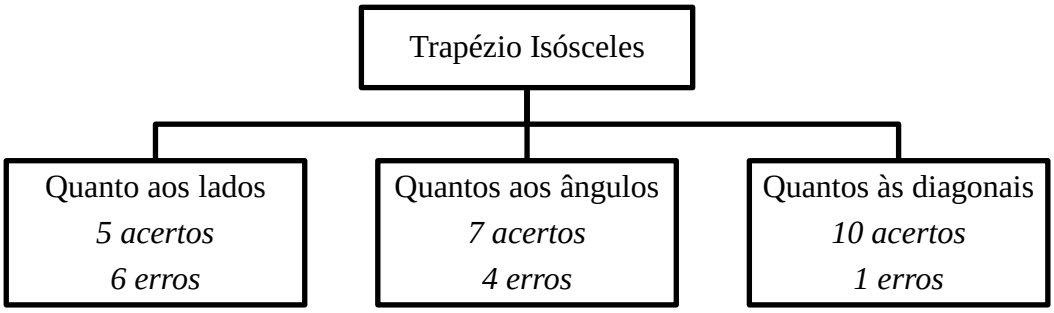
Quadro 9 - aspectos relevantes dos quadriláteros

Características / **Figuras**	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos	Quanto às diagonais
Trapézios Isósceles	*Lados não paralelos congruentes.*	*Os ângulos de cada base são congruentes.*	*As diagonais são congruentes.*
Paralelogramo	*Lados opostos congruentes.*	*Ângulos opostos congruentes.*	*As diagonais cortam-se ao meio.*
Retângulo	*Lados opostos congruentes.*	*Todos os ângulos congruentes.*	*As diagonais cortam-se ao meio e são congruentes.*
Losango	*Todos os lados congruentes.*	*Ângulos opostos congruentes.*	*As diagonais cortam-se ao meio e são perpendiculares.*
Quadrado	*Todos os lados congruentes.*	*Todos os ângulos congruentes.*	*As diagonais cortam-se ao meio, são congruentes e são perpendiculares.*

Fonte: elaborado pela autora.

Analisando os quadros preenchidos, notamos que ainda havia dificuldades por parte dos alunos quanto às definições e propriedades dos quadriláteros. Essa análise está representada nos esquemas a seguir.

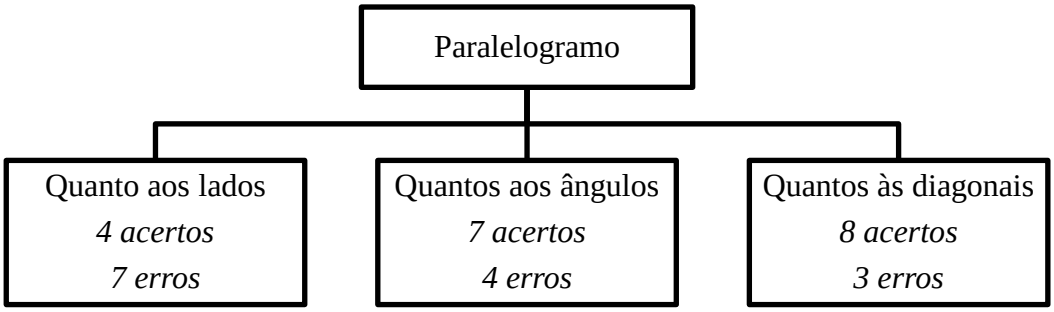
Esquema 1: sobre as propriedades do trapézio isósceles



Fonte: elaborado pela autora

No que diz respeito às propriedades do trapézio isósceles, a maioria dos alunos se atentou ao fato das diagonais serem congruentes, e os ângulos de cada base também congruentes, no entanto, apenas cinco dos onze alunos colocaram que os lados não paralelos são congruentes, fato que parte da definição de trapézio isósceles.

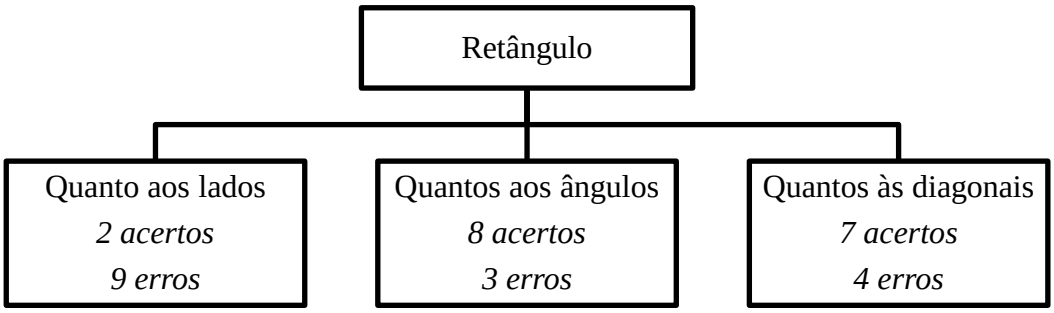
Esquema 2: sobre as propriedades do paralelogramo



Fonte: elaborado pela autora

Quanto ao paralelogramo, o menor índice de acertos foi quanto aos lados, muitos colocaram que os lados opostos são paralelos, como da definição, mas não que são congruentes, fato que seria observado nas construções no geoplano.

Esquema 3: sobre as propriedades do retângulo

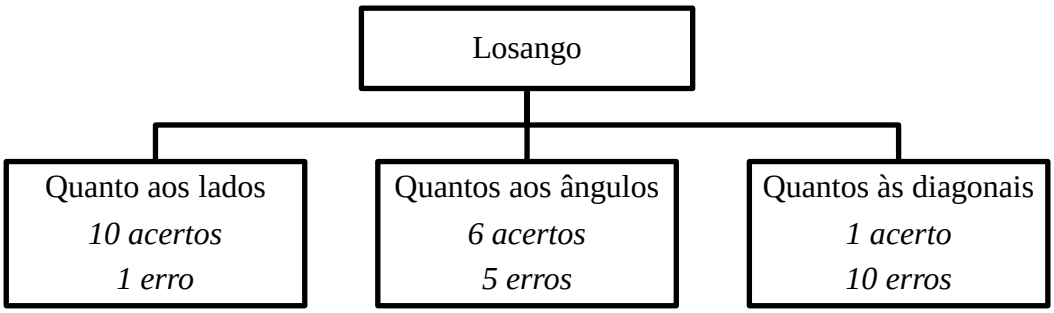


Fonte: elaborado pela autora

Da mesma forma que no paralelogramo, a maioria dos alunos observou os lados opostos do retângulo paralelos, mas não congruentes. Nas diagonais, os alunos que erraram, colocaram apenas que são congruentes ou que se

interceptam no ponto médio, quando no retângulo acontece as duas coisas, ou seja, as diagoanis são congruentes e se interceptam no ponto médio.

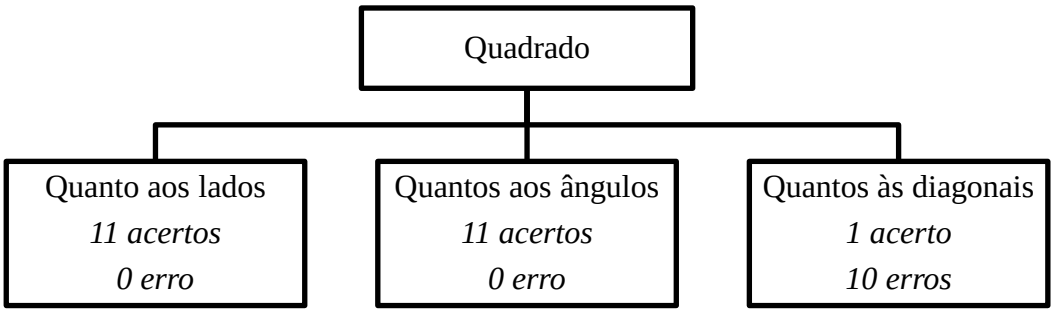
Esquema 4: sobre as propriedades do losango



Fonte: elaborado pela autora

O maior número de acertos quantos aos lados, foi no losango, dez alunos colocaram os lados do losango congruentes, e apenas um aluno errou, quando colocou que os lados do losango são congruentes e paralelos, quando na verdade, apenas os lados opostos é que são paralelos. Quanto aos ângulos, os alunos que erraram, colocaram que os ângulos do losango são congruentes, o que não vale para um losngo qualquer. E nas diagonais, que teve o maior número de erros, a maioria destacou que se interceptam no ponto médio, um aluno observou que são apenas perpendiculares, mas não se interceptam no ponto médio, e apenas um aluno respondeu corretamente.

Esquema 5: sobre as propriedades do quadrado



Fonte: elaborado pela autora

No quadrado, todos os alunos responderam corretamente as observações quanto aos lados e aos ângulos, no entanto, a maioria errou quando colocou informações não erradas, mas incompletas a respeito das diagonais do quadrado, e dentre eles, nenhum colocou que as diagonais do quadrado são perpendiculares entre si, alguns colocaram que são congruentes e/ou se interceptam no ponto médio.

Percebemos que a utilização do Geoplano auxiliou a aprendizagem, mas que os alunos ainda possuíam dúvidas, e às vezes, quando apresentavam suas ideias, por meio de comentários ou construções, não o fazia com clareza e organização, como ressalta Tinoco (2011), que os alunos chegam ao Ensino Superior com suas ideias desorganizadas e sem conexões entre si, a respeito dos quadriláteros, que por sua vez, é possivelmente, o conteúdo mais visto pelos alunos na Educação Básica.

A partir do Quadro preenchido os alunos responderam a seguinte questão: o que se pode afirmar quanto às definições dos quadriláteros? Solução esperada:

> *Todo quadrado, retângulo e losango são paralelogramos, e todo quadrado é losango e também é retângulo.*

Discutimos esse resultado com os alunos, pois como vimos na análise do quadro, nem todos responderam corretamente a todas as questões, dificultando a compreensão dessa solução.

Como finalização da oficina, apresentamos aos alunos os diagramas, vistos no capítulo 2, representando os quadriláteros de acordo com suas propriedades, considerando suas semelhanças e diferenças.

Dessa forma, consideramos que vivenciar diferentes experiências com objetos, desenhos e recursos diversos, auxiliam a construção de elementos que abrangem todos os aspectos inerentes ao conceito de um objetos matemático é mais amplo do que sua definição. (RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012).

Respondendo a nossa questão norteadora, notamos que os alunos utilizam frequentemente o desenho em suas resoluções. No entanto, a vivência com objetos pouco variados reduz sua capacidade de desenvolvimento do pensamento geométrico. Pois, “A pouca experiência com manipulação de

objetos e os desenhos esteriotipados, contribuem para que os alunos tenham imagens mentais reduzidas dos objetos geométricos.” (AMÂNCIO, 2013, p. 47).

Assim, se faz necessário que o aluno tenha contato com objetos e desenhos diversificados, para melhor desenvolver o pensamento geométrico e ter a formação da imagem mental mais próxima da definição.

É importante destacar a necessidade de modificações no ensino de Geometria, pois aqueles que hoje são alunos, poderão vir a ser professores, e correrão o risco de terem as mesmas dificuldades dos seus alunos quanto ao conteúdo. Para isso, necessita-se de esforços e participação de outras áreas, além da Matemática e da escola, para que essas mudanças sejam significativas.

Enfatizamos também as pesquisas nessa área, que busquem melhorias para o ensino e a aprendizagem. Além da valorização do ensino de Geometria a fim de que suas contribuições sejam reconhecidas, evidenciando a importância da formação inicial do professor de Matemática, como ponto de partida para que tais mudanças aconteçam.

REFERÊNCIAS

AMÂNCIO, Roselene Alves. **O desenvolvimento do pensamento geométrico**: Trabalhando polígonos, especialmente quadriláteros. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 1.ed. SBM, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. Projeto Teláris: **matemática: ensino fundamental**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. **Investigações em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos – Campinas, SP: Autores Associados, 2006 – Coleção formação de professores.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática: ciências e aplicações**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. (Coleção Ensino Médio).

LEIVAS, José Carlos Pinto. **Geometria com tecnologia na formação inicial e continuada do professor de matemática**. In: Formação do Professor de Matemática: reflexões e propostas. Editora IPR, Santa Cruz do Sul, 2012.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática. em: Revista - Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBM, ano 3 ,nº. 4, p. 3-13, 1°sem. 1995.

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006. Coleção Formação de Professores.

LORENZATO, S. **Como aprendemos e ensinamos geometria**. In: LORENZATO, S. Aprender e ensinar geometria. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2015. Série Educação Matemática.

GAZIRE, Eliane Scheid. **O não resgate da Geometria**. Tese de Doutorado (Educação). Campinas. SP. 2000.

MENEZES, L. M; SERRAZINA, L; FONSECA, L.; RIBEIRO, A.; RODRIGUES, M.; VALE, I.; BARBOSA, A.; CASEIRO, A.; MARTINS, A.; LOUREIRO, C.; FERNANDES, F.; VELOSO, G.; GOMES, H.; BRUNHEIRA, L.; ALMEIDA, P.; TEMPERA, T. **Conhecimento de Geometria de estudantes da Licenciatura em Educação Básica. In.** Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., (2014). pp. 243–260.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do; VIEIRA, K. M. **Laboratório de ensino de Geometria**. Campinas, SP: Autores Associados, 2012 – Coleção formação de professores.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 1.ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2000.

SOUZA, J.; PATARO, P. **Vontade de saber Matemática**. São Paulo: FTD, 2009.

SOUZA, Joamir. **Novo Olhar Matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

TINOCO, Lucia A. de. **A Geometria Euclidiana**: resolução de problemas. 2.ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, Projeto Fundão, 2011.

APÊNDICES

Apêndice 1 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa “Um olhar para o conhecimento de estudantes de Licenciatura em Matemática sobre Quadriláteros e suas propriedades”. Neste estudo pretendemos analisar o conhecimento geométrico, especificamente sobre quadriláteros e suas propriedades, que os estudantes de Licenciatura em Matemática trazem consigo da Educação Básica. O motivo que nos leva a estudar esse assunto é o fato de a Geometria estar pouco presente ou ausente da sala de aula, e por que os professores tendem a priorizar outros conteúdos matemáticos, desconsiderando o conhecimento geométrico e sua importância na formação do futuro cidadão. Dada a importância da Geometria, surgiu o interesse em analisar o conhecimento geométrico de futuros professores de matemática. Assim, você responderá um questionário com questões envolvendo quadriláteros e suas propriedades, no qual serão analisadas as estratégias de resolução utilizadas, bem como o seu desempenho nas resoluções. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em todas as formas que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não causará qualquer punição ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Os resultados estarão à sua disposição quando finalizados. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a sua permissão. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, _____fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e posso modificar a decisão de participar se assim o desejar. Declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Vitória da Conquista, ____ de _____ de 2016.

_____

Assinatura do(a) participante

_____

Assinatura do(a) pesquisador(a)

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

PESQUISADOR RESPONSÁVEL: Amanda Chaves Santos

ENDEREÇO: Estrada do Bem-Querer, km 4. Caixa Postal 95. CEP 45083-900. Vitória da Conquista – BA

FONE: (77) 3424-8600 / E-MAIL: amandasantos-0929@hotmail.com

Apêndice 2 – Questionário

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Caro aluno,

- ⇨ Este questionário faz parte do Trabalho de Conclusão de Curso que possui o tema: Quadriláteros e suas propriedades. Identificar as estratégias de resolução de questões que tratam sobre este tema é um de nossos objetivos. Dessa forma, solicitamos que escrevam suas estratégias de resolução para cada questão abaixo de caneta azul ou preta e não utilizem qualquer tipo de consulta.
- ⇨ Agradecemos por sua colaboração.

Questionário

1. (UFAL-1996) Considere as propriedades de certos polígonos:

I – quatro lados;
II – somente um par de lados paralelos;
III – todos os ângulos retos;

Assinale a alternativa em que os polígonos citados satisfazem I, II e III, respectivamente:

a) **Quadrado, paralelogramo e losango.**
b) **Retângulo, trapézio e triângulo.**
c) **Losango, trapézio e retângulo.**
d) **Triângulo, retângulo e quadrado.**
e) **Paralelogramo, trapézio e losango.**

2. Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*) as afirmações a seguir:

a) Todo paralelogramo é retângulo.
b) Todo quadrado é retângulo.
c) Todo paralelogramo é losango.
d) Todo retângulo é um paralelogramo.

3. Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):

a) Se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

b) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
c) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.
d) As diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos seus ângulos.

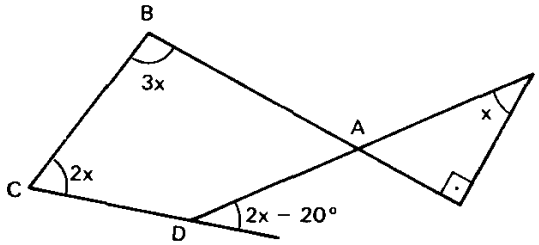
4. (PUC - RJ) Os ângulos internos de um quadrilátero medem 3x-45, 2x+10, 2x+15 e x+20 graus. O menor ângulo mede:

a) 90°
b) 65°
c) 45°
d) 105°

5. Como você define quadrado?

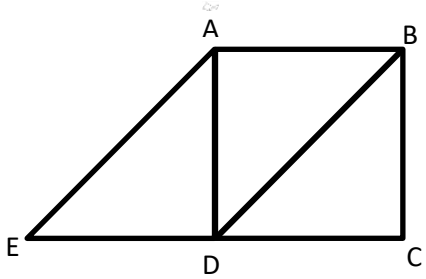
6. Represente os quadriláteros segundo suas propriedades através do diagrama de Venn.

7. Determine os ângulos do quadrilátero *ABCD*:



8. A diagonal de um losango forma com um dos seus lados um ângulo igual à terça parte de um reto. Determine os quatro ângulos do losango.

9. Observe a figura abaixo. Sabendo que ABDE e ABCD são paralelogramos, é correto afirmar que EC mede o dobro de AB? Justifique.



10. A soma de dois ângulos opostos de um paralelogramo é igual a $\frac{5}{13}$ da soma dos outros dois ângulos opostos. Determine-os.

11. Mostre que as diagonais de um losango cortam-se em ângulo reto e são bissetrizes dos seus ângulos.

12. Mostre que, as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.