UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VERONICE MEIRA DA SILVA

UM OLHAR PARA A ANÁLISE DE ERROS EM EQUAÇÃO DO 2º GRAU

VITÓRIA DA CONQUISTA
MAIO DE 2016

S578o Silva, Veronice Meira da.
Um olhar para a análise de erros em equação do 2º grau. / Veronice Meira da Silva, 2016.
66f.
Orientador (a): Ms. Ana Paula Perovano dos Santos Silva.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2016.
Inclui referências. 60.
1. Equação do 2º grau. 2. Análise de erros. I. Silva, Ana Paula Perovano dos Santos. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. III. T

CDD: 510

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/54-P
UESB – Campus de Vitória da Conquista-BA

VERONICE MEIRA DA SILVA

UM OLHAR PARA A ANÁLISE DE ERROS EM EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática, sob a orientação da professora Ms. Ana Paula Perovano dos Santos Silva.

VITÓRIA DA CONQUISTA
MAIO DE 2016

VERONICE MEIRA DA SILVA

UM OLHAR PARA A ANÁLISE DE ERROS EM EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB/ Campus de Vitória da Conquista, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática, sob a orientação da Profª. Ms. Ana Paula Perovano dos Santos Silva.

Vitória da Conquista, 30 de Maio de 2016.

Componentes da Banca Examinadora:

Profª. Ms. Ana Paula Perovano dos Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Profº. Ms. Antônio Augusto Oliveira Lima
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Profº. Ms. Altemar Brito Lima
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

"Se A é o sucesso, então A é igual a X mais Y mais Z. O trabalho é X; Y é o lazer; e Z é manter a boca fechada." (Albert Einstein).

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço a Deus pelo dom da vida, por ser meu guia, minha proteção e luz do meu caminho.

A Nossa Senhora Aparecida, por está sempre intercedendo a meu favor e atendendo as minhas preces.

A minha família, de modo muito especial, a meu pai José e minha mãe Ana Bela, os responsáveis pela pessoa que eu me tornei e maiores contribuintes para eu ter chegado até aqui e para que eu vá muito mais além. Nenhuma palavra seria suficiente para expressar o tamanho da gratidão que tenho por esses dois, mas pelo menos aqui, me contento em dizer: Muito obrigada!

Agradeço a minha orientadora Ana Paula, por toda sua competência, pelo carinho e disponibilidade que sempre teve comigo. Por se comportar não apenas como minha orientadora, mas como uma pessoa que realmente se interessa e torce pelo meu sucesso.

Ao meu noivo Bruno, por ter me permitido compartilhar consigo os bons e turbulentos momentos dessa minha jornada e por ter me apoiado, incentivando a persistir.

Aos meus amigos, companheiros dessa caminhada, aqui representados carinhosamente pelos três que fazem meus dias mais felizes: Érica, Rebeca e Robson. Agradeço pelo carinho, compreensão e cumplicidade que sempre tiveram comigo.

Aos meus professores, por tudo que doaram de si que me fez crescer tanto como profissional quanto como pessoa, sobretudo aos professores Benedito Acioly e Antônio Augusto, os quais considero dois grandes exemplos de profissionais e de pessoas, que tanto contribuíram e contribuem para minha formação.

À banca examinadora, por ter atendido prontamente ao pedido de se fazer presente na defesa deste trabalho e contribuir para o enriquecimento do mesmo.

À escola, na qual esta pesquisa foi realizada, agradeço à professora, alunos, direção e comunidade escolar em geral, pelo acolhimento e contribuição.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram direto ou indiretamente durante essa minha trajetória, que torceram por mim, muito obrigada! Que Deus os recompense.

RESUMO

Este estudo tem por objetivo fazer uma análise dos erros cometidos por alunos do 1º ano do Ensino Médio no conteúdo Equação do 2º Grau. Buscando atingir esse objetivo, optamos por uma pesquisa qualitativa com uma turma de 20 estudantes de uma escola pública estadual da cidade de Vitória da Conquista. Utilizamos como instrumento de coleta de dados, um questionário. Para estruturar nosso trabalho, nos baseamos em Cury (2013) no que diz respeito à análise de erros como metodologia de ensino e em Ribeiro e Cury (2015) no que tratam da álgebra na formação do professor trazendo os conceitos de função e de equação. Para organizar os tipos de erros, estabelecemos quatro categorias: *reconhecimento da equação, resolução da operação, resolução do discriminante* e *identificação dos coeficientes*. Como resultado do nosso estudo, detectamos que a maior incidência de erros, se deu no *reconhecimento da equação,* o que consideramos uma questão preocupante.

Palavras – chave: Erros; Análise de Erros; Equação do 2º Grau.

ABSTRACT

This study aims to analyze the mistakes made by students of the 1st year of high school in the content of the 2nd Degree Equation. Seeking to achieve this goal, we chose a qualitative research with a group of 20 students from a public school in the city of Vitoria da Conquista. We used as data collection tool, a questionnaire. To endorse our work, we rely on Cury (2013) with regard to the mistake analysis as a teaching methodology and Ribeiro and Cury (2015) in dealing with algebra in teacher training bringing the concepts of function and equation. To organize the types of mistakes, we have established four categories: *recognition of the equation*, *the operation resolution*, *resolution of the discriminant* and *identification of coefficients*. As a result of our study, we found that the highest incidence of errors occurred in the *recognition of the equation*, what we consider a concern.

Keywords : Errors; Error Analysis; Equation of the 2nd Degree.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS 10
LISTA DE TABELAS 11
INTRODUÇÃO 12
MOTIVAÇÃO 12
DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA 13
OBJETIVO 13
DESCRIÇÃO DA MONOGRAFIA 13
CAPÍTULO 1: EQUAÇÃO DO 2º GRAU 15
CAPÍTULO 2: A ANÁLISE DE ERROS 24
2.1 OS GRANDES NOMES DA ANÁLISE DE ERROS SEGUNDO CURY 24
2.2 A ANÁLISE DE ERROS COMO METODOLOGIA DE ENSINO 27
2.3 A ANÁLISE DE ERROS COMO METODOLOGIA DE PESQUISA 30
CAPÍTULO 3: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 32
3.1 QUESTIONÁRIO 33
CAPÍTULO 4: ANÁLISE DOS DADOS 37
4.1 PERFIL DOS SUJEITOS DA PESQUISA 37
4.2 EQUAÇÃO DO 2º GRAU: ANÁLISE DAS QUESTÕES 40
4.3 ANÁLISE DOS ERROS 41
CAPÍTULO 5: CONCLUSÃO 58
REFERÊNCIAS 61
ANEXOS 62
I - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 62
II - QUESTIONÁRIO 64

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Atividade sugerida para o trabalho com equações e funções..... 23
Figura 2: Taxinomia de Borasi para o uso dos erros 27
Figura 3: Resposta do aluno A10 42
Figura 4: Resposta do aluno A4 43
Figura 5: Resposta do aluno A11 43
Figura 6:Resposta do aluno A1 44
Figura 7:Resposta do aluno A4 45
Figura 8:Resposta do aluno A20 46
Figura 9:Resposta do aluno A3 46
Figura 10:Resposta do aluno A4 47
Figura 11:Resposta do aluno A12 48
Figura 12:Resposta do aluno A4 48
Figura 13:Resposta do aluno A11 49
Figura 14:Resposta do aluno A3 49
Figura 15:Resposta do aluno A5 50
Figura 16:Resposta do aluno A3 51
Figura 17:Resposta do aluno A12 51
Figura 18: Resposta do aluno A19 52
Figura 19:Resposta do aluno A4 53
Figura 20: Resposta do aluno A5 53
Figura 21:Resposta do aluno A4 54
Figura 22:Resposta do aluno A7 55
Figura 23:Resposta do aluno A11 55
Figura 24:Resposta do aluno A7 56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Faixa etária dos alunos 37
Tabela 2: Etapa em que repetiram algum ano 37
Tabela 3: Disciplinas que os alunos mais gostam 38
Tabela 4: Disciplinas que os alunos menos gostam 38
Tabela 5:Motivo pelo qual em professor de Matemática tenha marcado os alunos..... 39
Tabela 6: Dificuldades dos alunos com Equação do 2º Grau..... 40

INTRODUÇÃO

Motivação

Minha visão a cerca do conteúdo Equação do 2º Grau enquanto aluna do ensino básico, é de que foi o conteúdo matemático que eu mais tinha prazer em estudar. Resolver as equações, prestando atenção em cada detalhe, era mais uma diversão do que uma obrigação de cumprir com as tarefas da escola. Desenvolvi esse gosto pelo conteúdo, desde a 8ª série (atualmente 9º ano), Ensino Fundamental. A partir daí, já no Ensino Médio, isso se acentuou ainda mais com o estudo de Função Quadrática, que envolve Equação do 2º Grau. Sempre observava os meus colegas, muitos deles apresentavam dificuldades com o conteúdo, os mais próximos me pediam ajuda e a gente se reunia semanalmente para estudar. Com esse estudo em grupo, eu observava os erros cometidos pelos meus colegas, percebia que eles tinham dificuldades em coisas que para mim era bem tranquilo, ainda era uma adolescente e por isso não entendia a complexidade que envolve o processo de aprendizagem, achava que era falta de dedicação por parte deles.

Como estudante do curso de Licenciatura em Matemática, ao iniciar o curso, meu modo de ver o referido conteúdo permanecia o mesmo, mas fui adquirindo maturidade no que remete ao conteúdo e à Matemática em si, e hoje, já posso lançar um olhar diferente sobre os erros mais frequentes cometidos pelos alunos.

Minha visão enquanto profissional, levando em conta a experiência adquirida nos períodos de estágio e como bolsista do PIBID – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência é ainda mais satisfatória. Pois esse foi o momento em que pude compreender o que é uma Equação do 2º Grau, suas aplicações e resolução, ocupando o posto de mediadora do conhecimento a respeito daquele conteúdo.

Levando em conta minha satisfação em trabalhar com Equação do 2º Grau e o interesse pela análise de erros, decidi realizar com o auxílio da minha orientadora, este estudo voltado para esta problemática.

Delimitação do problema

A escolha da turma se deu, pelo fato de que, supomos que já estejam familiarizados com o conteúdo, pois de acordo ao currículo do Ensino Fundamental, esse conteúdo deve ter sido trabalhado no 9º ano, portanto, esperamos que estejam vendo pela segunda vez em Função Quadrática, apresentando assim, teoricamente, maiores condições de aprendizagem. O que permite diagnosticar com mais clareza, se ocorrem erros nesse processo e quais são.

A Matemática está inserida no universo dos alunos desde os anos iniciais e está relacionada a diversas situações do dia a dia, no entanto conteúdos como o que está em questão neste trabalho exige um pouco mais de conhecimento matemático se comparado às operações básicas a que estamos acostumados desde as séries iniciais, o que talvez, induza ao erro, pois pode ser que nem todos os alunos tenham esse conhecimento prévio necessário. Diante disso, delimitamos o objetivo do nosso estudo.

Objetivo

Identificar e analisar os principais erros cometidos por alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública de Vitória da Conquista, no conteúdo Equação de 2º Grau.

Descrição da monografia

Na introdução apresentamos o que nos motivou para realizar este estudo, bem como a delimitação do problema e o objetivo que almejamos.

No Capítulo 1 traremos o conceito de Equação do 2º Grau e uma abordagem histórica a cerca do conteúdo. Baseamo-nos em Ribeiro e Cury (2015) para apresentarmos as contribuições de diversos povos para a Matemática ao longo da história.

No Capítulo 2 apresentaremos a análise de erros como metodologia de ensino, pautando nossos estudos em Cury (2013), que traz uma abordagem sobre os maiores precursores da análise de erros no mundo.

A metodologia apresenta os sujeitos da nossa pesquisa, bem como o instrumento de coleta de dados, compondo o Capítulo 3. No Capítulo 4, apresentaremos as categorias que estabelecemos para direcionar nosso estudo e os resultados da análise dos dados, contendo fragmentos das respostas dos alunos, gráficos e tabelas que ilustram o resultado da nossa pesquisa.

Por fim, no Capítulo 5 estão as conclusões do nosso estudo.

CAPÍTULO 1: Equação do 2º Grau

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem histórica sobre o desenvolvimento da Equação do 2º Grau, com o objetivo de propiciar uma reflexão a respeito do tema e poder contribuir, de modo especial, com aqueles que ensinam ou ensinarão Matemática na Educação Básica.

De acordo com Castrucci Giovanni e Giovanni Júnior (2007), na obra *A conquista da Matemática*, é denominada equação do 2º grau na incógnita x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b, c são números reais e $a \neq 0$. Sendo que a é sempre o coeficiente do termo em x^2; b é sempre o coeficiente do termo x; c é o coeficiente sem variável ou termo independente de x.

O conceito de equação ao longo da história da Matemática é também apresentado por Ribeiro e Cury (2015), em sua obra *Álgebra para a formação do professor: Explorando os conceitos de equação e de função*, discutindo inicialmente a Matemática dos babilônios, dos egípcios e dos gregos. Trazendo na sequência, as descobertas dos árabes e dos hindus, e por último, as contribuições que os europeus renascentistas trouxeram para a Matemática.

Os autores se fundamentam nas ideias de Eves (2004), para destacarem a presença bastante forte dos babilônios na Matemática, referindo-se a uma geometria de caráter algébrico, pois segundo o referido autor, estes povos eram mais fortes em álgebra do que em geometria. A cerca de 2000 a. C., os babilônios já resolviam equações lineares e quadráticas com duas incógnitas, tanto pela substituição numa fórmula geral, quanto pelo método de completar quadrados. De acordo com o autor citado por Ribeiro e Cury (2015), naquela época já se utilizava a álgebra para resolver problemas através de equações que ainda hoje, requerem bastante habilidade numérica.

Discutindo sobre a Matemática dos egípcios, Ribeiro e Cury (2015) afirmam que através de problemas encontrados nos papiros de Rhind e de Moscou, foram detectadas situações problemas de origem prática, com questões sobre pão, cerveja, entre outras. Sendo esses problemas, em sua maioria, resolvidos por uma equação linear de uma incógnita, em que os egípcios utilizavam um método para a resolução, denominado de regra da falsa posição. Os problemas eram relativamente simples e não exigiam grandes métodos e raciocínios matemáticos para serem resolvidos.

A respeito da Matemática dos gregos, na Europa antiga, os autores ressaltam:

> Nesse período surgiram muitos relatos sobre um grande número de matemáticos preocupados com problemas que contribuíram com o desenvolvimento da Geometria, período esse que ficou conhecido como "Idade Heroica da Matemática. Nessa época, observa-se que a Álgebra aritmética passa a dar lugar a uma Álgebra geométrica, na qual os gregos, normalmente, utilizavam-se de dois métodos principais para a resolução de equações lineares e quadráticas - o método das proporções e o da aplicação de áreas, métodos esses que parecem ter suas origens na escola pitagórica. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 31).

De certa forma, a Matemática nas equações em que conhecemos hoje, sofreu grande influência do que estes povos desenvolveram ao longo da história.

Ribeiro e Cury (2015) se baseiam em Boyer (1978), para afirmarem que centenas de anos depois, surgiu aquele que foi considerado o maior algebrista grego: Diofanto de Alexandria. Diofanto trouxe grandes contribuições para o desenvolvimento da Álgebra, de modo especial, ao que se refere à simbologia e à notação da escrita matemática, além de passar a utilizar algumas técnicas de natureza algébrica, tais como, transformações de expressões, substituição, eliminação, entre outras.

Fazendo uma relação entre a Matemática dos babilônios, dos egípcios e dos gregos, pudemos perceber uma diferença significativa na concepção das equações por esses povos. Enquanto os babilônios e os egípcios se preocupavam com problemas de origem prática e eram adeptos da Álgebra aritmética, os gregos não apresentavam qualquer preocupação com esse tipo de problema, e baseavam suas resoluções em manipulações geométricas. Entretanto, há uma consonância entre esses três povos, no que diz respeito à busca pelas soluções, em que, para ambos ainda estavam relacionadas às equações particulares e não a métodos gerais.

De acordo com Ribeiro e Cury (2015), como perspectiva diferente na concepção e tratamento das equações, encontramos na Matemática árabe, uma forma de desenvolvimento que tinha como ponto de partida muitos problemas relacionados ao comércio, à arquitetura, à astronomia, à geografia e à ótica, uma vez que, era bastante comum encontrar na Matemática árabe, uma forte característica entre a solução de problemas e um intenso trabalho teórico.

Os autores se respaldam nos trabalhos de Puig (1998), para apresentarem a Álgebra de um dos maiores nomes da Matemática árabe: al-Khwarizmi, afirmando que:

> Todas as equações tratadas por ele podiam ser reduzidas a seis tipos, em sua forma canônica, aqui apresentadas na roupagem que hoje conhecemos:
>
> 1) $ax^2 = bx$
> 2) $ax^2 = c$
> 3) $bx = c$
> 4) $ax^2 + bx = c$
> 5) $ax^2 + c = bx$
> 6) $bx + c = ax^2$ (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 33).

Ressaltamos que a forma canônica $bx = c$ apresentada pelos autores, não se aplica à definição de Equação do 2º Grau que conhecemos atualmente, uma vez que, os livros didáticos já trazem na definição do conteúdo, a informação de que o coeficiente *a* deve ser diferente de zero.

Na visão de Ribeiro e Cury (2015), a Matemática hindu era descrita como uma Matemática intuitiva, pois os matemáticos indianos tinham predileção por trabalhar com números e com as operações aritméticas na resolução de equações, como exemplo disso, os autores citam a utilização com frequência, pelos indianos, do método da falsa posição ou da inversão, em que se trabalha "de trás para frente", a partir dos dados do problema. Os autores afirmam que além de Omar Khayyam, tivemos grandes contribuições dos hindus para a Álgebra, com os trabalhos de Brahmagupta e Bháskara.

Sendo assim, se fundamentam na obra de Bashmakova e Smirnova (2000), para afirmarem que Brahmagupta encontrou soluções gerais das equações quadráticas, determinando duas raízes, inclusive, uma raiz negativa. E que este matemático tem uma forte influência grega, uma vez que, que foi o primeiro a encontrar todas as soluções possíveis para a equação linear diofantina ax + by = c. Para os autores, muitos historiadores consideram Bháskara como o mais importante matemático hindu do século XII, pois ele conseguiu preencher lacunas do trabalho de Brahmagupta e representou em sua obra uma culminação das contribuições hindus de seus precursores. E acrescentam:

> Reconhecemos que, utilizando-se do conhecimento deixado por outros matemáticos hindus, principalmente Brahmagupta, Bháskara foi quem unificou a solução geral das equações quadráticas pelo método do completamento de quadrados, hoje em dia conhecido por método

> hindu. A importante fórmula geral para a resolução da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, é conhecida nos dias atuais, no Brasil, como fórmula de Bháskara. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 35).

Da citação acima, podemos refletir sobre as influências deixadas pelos hindus na nossa Matemática de hoje, sobretudo por Bháskara, um importante matemático, em que sua obra está inserida na nossa prática enquanto aluno ou professor da educação básica.

Seguindo um pouco mais adiante na trajetória da Matemática, chegamos ao Renascimento e, consequentemente às contribuições matemáticas dos europeus. Segundo Ribeiro e Cury (2015), foi nessa época em que se publicou na Itália a *Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita* de Luca Pacioli, a mais conhecida obra de Álgebra. A obra discutia na parte reservada à Álgebra, a resolução de equações lineares e quadráticas. Para os autores, outro importante matemático que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da história das equações, foi o francês René Descartes. E apresentam de forma resumida o método para resolução de equações, desenvolvido por Descartes:

> - Leitura analítica do enunciado do problema e a redução de uma lista de quantidades e relações entre essas quantidades;
> - escolha de uma quantidade que será representada por uma letra (ou de várias quantidades e várias letras);
> - representação de outras quantidades mediantes expressões algébricas que descrevam a relação (aritmética) entre essas quantidades e outras que tenham sido previamente representadas por uma letra ou por uma expressão algébrica;
> - estabelecimento de uma equação (ou várias, se for o caso) igualando-se as expressões obtidas anteriormente. (RIBEIRO; CURY, 2015, p.37-38).

A partir daí, houve o início de uma nova fase da Álgebra, em que possibilitou a construção das equações não mais como meio de organização de fenômenos, mas como um movimento de difusão da Matemática.

Ribeiro e Cury (2015) ressaltam que na visão dos europeus, as equações estavam dentro de um sistema estrutural com propriedades e características. Nessa época, a equação passa a ser considerada em si própria, operando em si mesma com a finalidade de obter soluções gerais.

Nesta obra, os autores vão mais adiante, apresentando como se deu o processo de resolução de equações de 3º e 4º graus, mas como o foco do nosso estudo é a equação do 2º grau, não nos deteremos a esse conteúdo.

Agora discutiremos a cerca do conhecimento do professor de Matemática, considerando suas necessidades e dificuldades. Ribeiro e Cury (2015) embasados por Ball, Thames e Phelps (2008), apontam uma subdivisão para o conhecimento matemático:

> O *conhecimento comum do conteúdo* é aquele que engloba conceitos, propriedades e exemplos, ou seja, é o conhecimento específico, aprendido em cursos de ciências exatas. O *conhecimento especializado do conteúdo* compreende os conhecimentos e habilidades matemáticas exclusivos do professor, como, por exemplo, distinguir entre as diferentes representações das funções e saber usá-las na modelagem de situações do cotidiano.
>
> O *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* combina o que é necessário saber sobre Matemática e sobre as dificuldades e o pensamento dos alunos nessa disciplina, para planejar tarefas que partam de suas dificuldades e possam ser discutidas com eles. A última categoria, *conhecimento do conteúdo e do ensino*, combina o conhecimento sobre a Matemática com o conhecimento sobre como ensinar tal conteúdo, como propor novas questões ou novas tarefas para os alunos. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 49-50).

A partir dessa subdivisão apresentada na citação, fica mais fácil fazer uma reflexão a respeito da prática do professor. Pois, ensinar Matemática não é simplesmente passar para os outros, aquilo que foi aprendido, de maneira mecânica, sem um posicionamento próprio do indivíduo que está ensinando. Existem diferentes formas de o conhecimento se manifestar, as quais devem se entrelaçar para formar essa corrente que permeia o processo de ensino aprendizagem.

Ainda tratando dessa temática, os autores ressaltam que o conhecimento matemático suficiente para o ensino, não é adquirido apenas em sala de aula nos cursos de licenciatura, tendo em vista que, os professores saem da graduação ainda com muita dificuldade em modelos matemáticos. E acrescentam:

> [...] os professores também encontram orientações nos documentos oficiais, que trazem sugestões de conteúdos e metodologia, nas avaliações de larga escala, que mostram o que é esperado dos

> estudantes nos diferentes níveis de ensino, bem como nas dissertações, teses e artigos que lhes são disponibilizados para leituras. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 50).

Ribeiro e Cury (2015) apontam que os professores de Matemática brasileiros, em sua maioria, se orientam pelos livros didáticos disponibilizados pelo Ministério da Educação, e este então, se baseia nas diretrizes dispostas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Os autores apontam que não existe uma rigidez na distribuição dos conteúdos programáticos nas redes pública e privada, e que por isso, a parte relacionada às equações pode ser encontrada tanto no Ensino Fundamental, quanto no Médio, a depender do nível de aprofundamento em que o conteúdo se apresenta.

De acordo com os autores citados anteriormente, em termos metodológicos, os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que a prática mais comum em sala de aula se baseia em ensinar um conceito e depois apresentar um problema, em que para solucioná-lo o aluno deverá utilizar o conceito aprendido. E que posicionando-se contrário a essa prática, os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam como abordagem preferencial para o ensino da Matemática, a resolução de problemas, considerando que se deve partir de um problema, para que, ao tentar resolvê-lo, se chegue a um conceito, que mais tarde, será sistematizado. Os autores afirmam que:

> [...] pela apresentação das dez coleções de livros aprovados para os anos finais do ensino fundamental, nota-se que os conteúdos "equações" e "funções" são distribuídos nos 7º, 8º e 9º anos. No entanto, nesse nível de ensino são enfocadas as funções lineares e quadráticas, ficando para o ensino médio o estudo mais aprofundado desse conteúdo. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 53).

Isso acontece na maioria das escolas que conhecemos, as Equações são vistas ainda no Ensino Fundamental, já as Funções, só são estudadas no Ensino Médio. São raras as escolas que conseguem trabalhar ao menos com o conceito e as aplicações de Função ainda no Ensino Fundamental.

Ribeiro e Cury (2015) questionam sobre o fato de que, em meio a tantos documentos oficiais disponibilizados aos professores de Matemática, ainda há tanta

dificuldade no ensino e na aprendizagem da disciplina e apontam para a maneira como os resultados das avaliações de grande escala são apresentados, em que são discutidos pela mídia por algum tempo, mas não fazem uma análise das questões apresentadas e as orientações contidas nos documentos oficiais.

Os autores apresentam também, exemplos de exames nacionais e internacionais que visam avaliar o conhecimento matemático dos alunos. Sendo que, os exames brasileiros aplicados tanto a alunos quanto a professores, têm apresentado resultados abaixo do esperado. Para os autores,

> [...] são necessárias pesquisas, com foco na produção do aluno ou nas concepções dos professores que ensinam esses tópicos na educação básica. Mas a divulgação das investigações que já foram feitas ainda não é uma ação encorajada pelas supervisões e direções escolares, em qualquer nível de ensino. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 68).

A partir desse pensamento, refletimos que ainda há muito o que fazer para tentar melhorar a relação dos alunos, professores e comunidade escolar em geral com a Matemática, pois o que tem sido feito, não é suficiente para obtermos resultados, no mínimo, satisfatórios.

Para Ribeiro e Cury (2015), não basta ao professor, apenas conhecer os conceitos que vai lecionar, é necessário que ele tenha uma visão das metodologias e de outras questões no que diz respeito ao ensino, de modo especial, aquelas referentes aos estudantes. Os autores se baseiam em Borasi (1996) para afirmarem que:

> A análise de soluções a questões de Matemática, elaboradas por estudantes de qualquer nível de ensino, deve também ser objeto de atenção de professores. Discussões acerca da forma como essas questões foram resolvidas, buscando entender as causas dos erros e dificuldades, podem levar os docentes a usar os erros como trampolins para a aprendizagem. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 73).

Isso nos remete à ideia defendida no capítulo anterior, em que apresentamos a análise de erros como uma metodologia que pode ser usada em sala de aula pelo professor, para auxiliar no processo de ensino aprendizagem dos alunos.

Ribeiro e Cury (2015) apontam que uma das dificuldades apresentadas em resoluções de equações está relacionada ao uso incorreto da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. E apresentam um exemplo disso:

> [...] Foi aplicado um teste com questões abertas, aqui exemplificando com a apresentação da análise das respostas à questão cujo enunciado é: *quantos pares (x,y) de números reais existem, tais que x + y = xy = x/y?*
> Mesmo sendo estudantes do curso de licenciatura em Matemática, os participantes encontraram muita dificuldade para chegar a uma resposta que satisfizesse o problema. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 74 - 75).

Os autores utilizam para a análise dos dados, uma sistemática descrita por Cury (2007), denominada "a análise de conteúdo dos erros", que consiste em três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. De acordo com os autores, na fase de pré-análise, as respostas de cada questão são separadas e organizadas, formando o *corpus*. Na fase de exploração do material, houve um processo de unitarização e classificação das respostas incorretas, sendo que a classificação foi feita com o agrupamento das respostas semelhantes. Na fase de tratamento dos resultados, foi elaborado um texto – síntese para cada classe de erros, utilizando exemplos do próprio *corpus*.

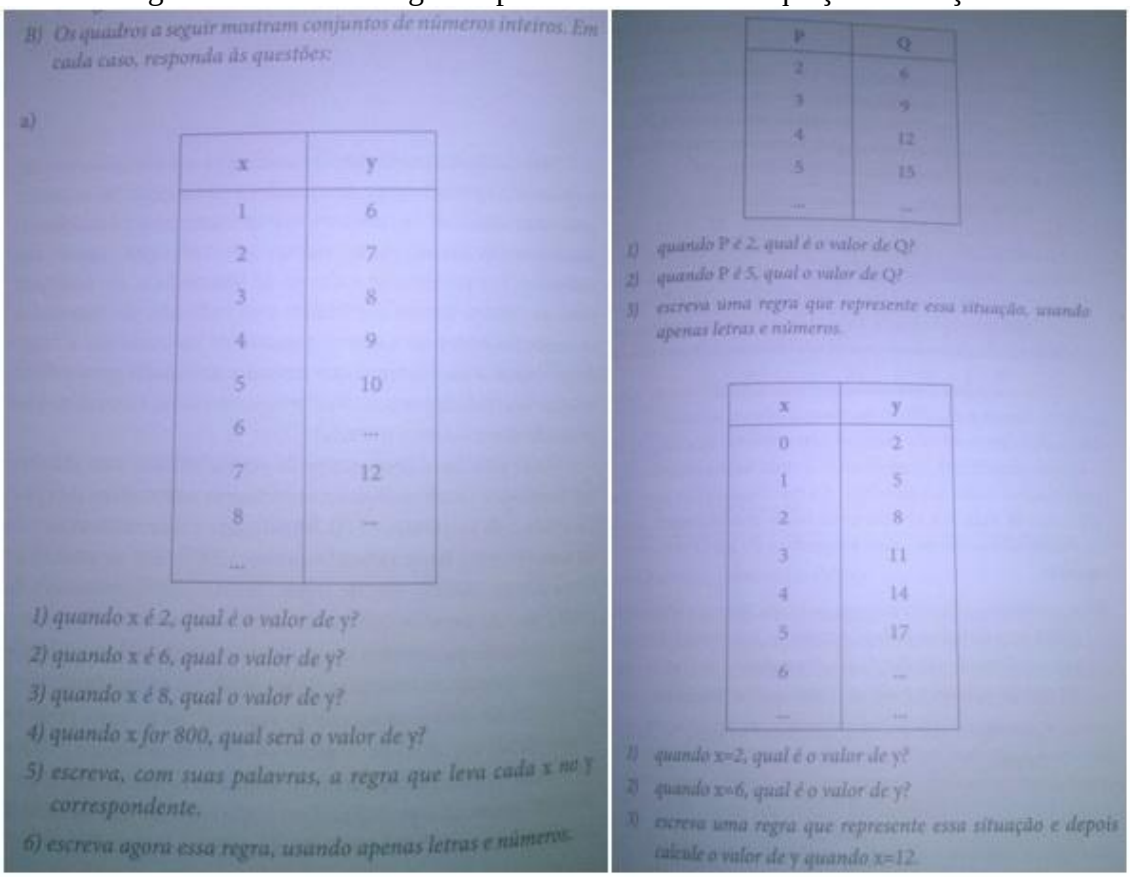
Ribeiro e Cury (2015) apresentam ainda, exemplos de testes relacionados a equações, aplicados por diversos outros estudiosos da análise de erros, bem como a análise realizada, porém, não nos aprofundaremos nesse aspecto.

Para os autores, "qualquer pessoa entende se e quando uma 'conta' ou um resultado estão errados, mas apenas os professores têm – ou deveriam ter – habilidades para o ensino e serem capazes de opinar sobre a origem dos erros." (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 82). Muitas vezes os professores não têm essa habilidade por fatores diversos, como por exemplo, tiveram uma formação inicial que não os subsidiaram o suficiente para compreenderem a forma de pensar dos seus alunos e suas necessidades de aprendizagem, dessa forma, para Ribeiro e Cury (2015), a prática de sala de aula, com conhecimento do conteúdo, dos estudantes e do ensino, pode desestabilizar concepções errôneas, de professores ou de alunos.

No penúltimo capítulo do livro *Álgebra para a formação do professor: Explorando os conceitos de equação e de função*, Ribeiro e Cury (2015) apresentam exemplos de atividades que podem ser usadas por professores e alunos de Matemática. Eles apontam em cada atividade, os conceitos presentes e a sugestão de como utilizá-las, mas salientam que o professor é quem deve analisar e fazer as devidas modificações adequando-as aos seus alunos.

Apresentamos a seguir, uma das atividades propostas por Ribeiro e Cury (2015), em que proporciona ao aluno, a construção do conceito inicial de função.

Figura 1: Atividade sugerida para o trabalho com equações e funções



B) Os quadros a seguir mostram conjuntos de números inteiros. Em cada caso, responda às questões:

a)

x	y
1	6
2	7
3	8
4	9
5	10
6	...
7	12
8	...
...	

1) quando x é 2, qual é o valor de y?
2) quando x é 6, qual o valor de y?
3) quando x é 8, qual o valor de y?
4) quando x for 800, qual será o valor de y?
5) escreva, com suas palavras, a regra que leva cada x no y correspondente.
6) escreva agora essa regra, usando apenas letras e números.

P	Q
2	6
3	9
4	12
5	15
...	...

1) quando P é 2, qual é o valor de Q?
2) quando P é 5, qual o valor de Q?
3) escreva uma regra que represente essa situação, usando apenas letras e números.

x	y
0	2
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	...
...	...

1) quando x=2, qual é o valor de y?
2) quando x=6, qual é o valor de y?
3) escreva uma regra que represente essa situação e depois calcule o valor de y quando x=12.

Fonte: Ribeiro e Cury (2015, p. 86 – 87)

Em nosso entendimento, com essa atividade é possível que o aluno compreenda melhor os conceitos mais abstratos da Matemática e adquiram habilidade em lidar com símbolos matemáticos, o que o auxiliará na compreensão da resolução Equações do 2º Grau e, posteriormente, Função Quadrática.

CAPÍTULO 2: A Análise de Erros

Neste capítulo apresentamos a análise de erros como metodologia tanto de ensino quanto de pesquisa, bem como nos baseamos em Cury (2013) para apresentar seus maiores precursores brasileiros e estrangeiros.

2.1 Os grandes nomes da Análise de Erros segundo Cury

Cury (2013), em seu livro *Análise de erros o que podemos aprender com as respostas dos alunos*, apresenta um capítulo inteiro ressaltando os grandes precursores da análise de erros: Thorndike, Hadamard, Krutetskii, Newell e Simon, Brousseau e Borasi.

De acordo com Cury (2013), Thorndike afirma que é preciso respeitar os interesses vitais do aluno e não cansá-lo com "dificuldades inúteis". A autora traz um exemplo citado pelo psicólogo, em que aponta que a cópia dos números numa soma, subtração ou multiplicação exige muito mais esforço do aluno do que a leitura. E que esse trabalho monótono e repetitivo o induz ao erro, uma vez que, vai se cansando à medida que, muitas vezes realiza as operações algébricas de forma correta mentalmente, mas erra ao escrever o resultado, em decorrência das regras que devem ser seguidas. Isso causa desânimo no aluno e ele acaba criando uma barreira contra a Matemática.

Se tratando de outro grande nome da análise de erros, Cury (2013) considera Hadamard um dos pioneiros, porque ele se baseou nas ideias de Henri Poincaré e de outros autores do início do século XX, para mostrar a importância da Psicologia para compreender o processo de criação e descobertas dos matemáticos. Segundo a autora, Hadamard defende a diferença entre Matemática e as outras ciências experimentais levando em conta que, os matemáticos, quando cometem erros, logo percebem e os corrigem. E traz uma citação em que ele diz cometer mais erros que seus estudantes, porém, sempre os corrige de forma que não permaneça nenhum traço ao final. Cury (2013) ressalta que essa ideia ainda é presente no trabalho dos matemáticos, que apresentam apenas o resultado final, sem deixar transparecer as dificuldades encontradas pelo caminho. Assim, essa concepção se espalha entre os alunos e os erros são eliminados e não aproveitados para compreender o porquê das dificuldades.

O psicólogo russo Krutetskii é citado por Cury (2013), por ter seu trabalho pautado na investigação das habilidades matemáticas dos estudantes, no qual ele deseja segundo a autora:

> Caracterizar a atividade mental dos alunos matematicamente talentosos ao resolverem problemas matemáticos; criar métodos experimentais para investigar o talento matemático; esclarecer as diferenças tipológicas na estrutura das habilidades e avaliar diferença de idade nas manifestações das habilidades matemáticas dos estudantes. (CURY, 2013, p.29).

O resultado desses objetivos almejados por Krutetskii nos permite compreender com mais clareza o que há por trás da habilidade ou dificuldade dos estudantes, em relação à Matemática. A autora afirma que ele enfatiza que devemos observar detalhadamente a resolução, tendo o cuidado de analisar como os alunos pensaram no momento em que resolveram as questões, para que, posteriormente possamos utilizar isto para auxiliar os alunos a identificar seus erros, analisá-los e corrigi-los.

Passaremos agora a discutir as ideias de Newell e Simon na visão de Cury (2013). Ela aponta uma obra escrita pelos autores e publicada em 1972, que se tornou um clássico do processamento da informação, focada na tentativa de se criar um programa de computador para simular o comportamento humano ao resolver um problema. Na opinião de Cury (2013), o segundo ponto de interesse do trabalho de Newell e Simon, é a flexibilidade que deve ser levada em conta numa teoria de resolução de problemas, pois cada indivíduo apresenta características específicas que podem levar a um comportamento não esperado.

Outro grande nome apresentado por Cury (2013) foi Brousseau. Segundo a autora, o autor francês, em sua obra como um precursor da análise de erros, introduziu a noção de obstáculo epistemológico na Didática da Matemática, isto é, ele chama a atenção para um mecanismo na aquisição do conhecimento que se aplica à aprendizagem e ao ensino. Embasada nessa ideia, Cury (2013) aborda um exemplo de erro que acontece com muita frequência, devido a um mecanismo criado pelos alunos em que insiste em considerar que a raiz quadrada de uma soma é a soma das raízes quadradas das parcelas. Isso acontece pelo fato de que, essa ideia se aplica à multiplicação. Para muitos alunos, se temos $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$, $\sqrt{a} \times b = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\cdot$, então, $\sqrt{a} + b = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Uma noção completamente distorcida do conceito da soma de raiz quadrada e que exige uma

atenção muito grande do professor no sentido de elaborar estratégias para ajudar o aluno a visualizar o erro e, posteriormente, trabalhar na correção.

Raffaella Borasi é apresentada por Cury (2013) entre os precursores da análise de erros, por ser uma das grandes referências em tratar os erros como construtores do conhecimento. Para Cury (2013), Borasi (1996) considera que, se os alunos são pressionados pelo sistema escolar, os erros por eles cometidos são frustrantes, porque os fazem perder tempo e despender esforços na tentativa de evitar a reprovação. No entanto, se a ênfase da avaliação dos estudantes se desloca do produto para o processo, há a possibilidade de que os erros cometidos venham a ser discutidos e possam ser fonte de novas aprendizagens.

Essa ideia chama a atenção para uma reflexão sobre como nos posicionamos diante do aluno. Se o pressionamos para se adequar a regras previamente estabelecidas ou o deixamos livre para pensar, criar estratégias de resolução, sem a pressão de ter que obter boa nota a qualquer custo para que não seja reprovado. Se dermos esse espaço para o aluno e acompanharmos o processo de aprendizagem dele, certamente os erros se portarão como uma fonte de conhecimento.

Cury (2013) traz em sua obra, uma importante contribuição de Borasi sobre a taxionomia dos erros, ou seja, uma classificação de níveis de pensamento e da ordem de aprendizagem. A Figura 2 apresenta os níveis de discurso matemático de acordo às fases descritas.

Figura 2: Taxinomia de Borasi para o uso dos erros

	Nível de discurso matemático		
Objetivo da aprendizagem	Realização de uma tarefa matemática específica	Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático	Compreensão sobre a natureza da Matemática
Remediação	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática ou de conteúdos específicos.
Descoberta	Uso cosntrutivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de álguem, para identificar potenciais enganos.	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc.	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.
Pesquisa	Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original.	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a *insights* e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.

Fonte: Cury, 2013, p. 39.

De acordo com Cury (2013), essas formas de usar os erros apresentadas no quadro, podem surgir juntas ou separadas, a depender da fase em que o professor esteja com os alunos.

2.2 A análise de erros como metodologia de ensino

Apresentamos a proposta de utilizar os erros dos alunos para contribuir no processo de construção da aprendizagem de tais indivíduos, pois “a análise de erros é uma metodologia de pesquisa e ensino que pode auxiliar professores e alunos a rever conteúdos nos quais surgem dificuldades” (CURY; KONZEN, 2007, p. 107). Neste tópico, nos ateremos à abordagem da análise de erros como metodologia de ensino, ou seja, quando a utilizamos como ferramenta para auxiliar na aprendizagem.

É extremamente comum depararmo-nos com pessoas que não gostam de Matemática, mas são obrigadas a suportá-la por vários anos de suas vidas durante a educação básica, e talvez, essa obrigação de estudar algo que não goste, torne a disciplina ainda mais entediante para essas pessoas. Mas, isso não é motivo que mereça ser apontado como causador dos erros, pois, existem alunos que apesar de não gostarem

da disciplina, se esforçam ao máximo e conseguem resultados, no mínimo, suficientes para avançar para a série seguinte.

Pode ser que haja professores, que considerem o erro apenas como um ponto negativo. Em muitos casos, isso pode acontecer pela falta de conhecimento de métodos que auxiliem num trabalho mais minucioso e produtivo com o erro, e também pelo fato de que durante o período escolar de tais professores, as avaliações tenham sido realizadas de uma forma classificatória e autoritária, não permitindo a análise e tratamento dos erros cometidos pelos alunos, pondo-o, até como uma punição, por o aluno supostamente não ter compreendido o conteúdo.

Os erros podem ser utilizados pelo professor, como um método eficaz de incentivo à aprendizagem. O erro precisa ser investigado, pois a maioria tem uma lógica por trás, o aluno tem uma explicação para ter respondido de uma maneira ou de outra, e isso deve ser levado em consideração. O diagnóstico, a investigação e, sobretudo, o tratamento do erro é que vai contribuir para a construção do conhecimento.

Brousseau (1983) citado por Cury e Konzen (2007) afirma:

> Um obstáculo se manifesta, pois, por erros, mas estes não são devidos ao acaso. […] Além disso, esses erros, em um mesmo sujeito, são ligados entre si por uma fonte comum: uma maneira de conhecer, uma concepção característica, coerente ainda que não seja correta, um "conhecimento" antigo e que é bem sucedido em todo um conjunto de ações. (p. 173-174).

Da citação acima entendemos que o erro pode se manifestar em uma ação ou conjunto de ações que eram válidos anteriormente e que neste novo momento já não possui mais tanta validade. Como exemplo disso, trazemos um episódio vivenciado ao dar aula de reforço para uma criança do 5º ano. Uma das questões da atividade de Matemática que a professora passou para casa pedia que construísse ângulos de acordo com as medidas (em graus), dadas na questão. Ao posicionar o transferidor construindo o ângulo voltado para a direita, a aluna ressaltou que estaria errado, ao questioná-la sobre o porquê desse pensamento, ela explicou que a professora havia feito voltado para a esquerda e que, portanto, assim deveria ser feito também. Houve ali um momento em que foi preciso explicar para essa criança, que não importava a direção em que ficaria a abertura do ângulo, mas a medida. Ela ainda resistiu em aceitar essa ideia, porque já tinha um pensamento formado sobre a construção de ângulo e não admitia outra maneira.

O pensamento dela não estava errado, mas estava limitado, o que, posteriormente, poderia induzi-la ao erro.

A utilização da análise de erros deve dá-se de maneira cautelosa e seguindo alguns preceitos, para um melhor aproveitamento do trabalho desenvolvido em sala de aula. De acordo com Cury (2004) citado por Cury e Silva:

> Independentemente da proposta de trabalho em sala de aula, tal como resolução de problemas, jogos, modelagem matemática ou uso de novas tecnologias, devem ser consideradas algumas premissas básicas para a análise das soluções, tais como: a) devolver ao aluno a análise feita e discutir os resultados, aproveitando a oportunidade de fazê-los pensar sobre seus próprios pensamentos; b) planejar estratégias para trabalhar com os tópicos em que houve maior incidência de erros; c) aproveitar os recursos disponíveis em sala de aula para retomar o conteúdo. (p. 88).

A partir dessa ideia, pudemos perceber que não importa a metodologia que esteja sendo utilizada pelo professor para levar o conteúdo aos alunos, o processo de análise das soluções e prováveis erros, deve ser estruturado seguindo determinadas regras, a fim de que, venha de fato, contribuir para o aprendizado.

Segundo Cury (2013), qualquer produção do aluno, seja aquela que simplesmente repete uma resolução modelo ou aquela que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como este indivíduo pensa, bem como, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, seja formal ou informal. Dessa maneira, “analisar as produções é uma atividade que traz, para o professor e para os alunos, a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes.” (CURY, 2013, p. 15).

Sobre a construção do conhecimento através do erro, Cury (2013) afirma que:

> Ao enfocar a noção de obstáculo e aproximá-la da ideia de erro, outro ponto importante a considerar é que o obstáculo é um conhecimento. Assim sendo, o aluno constrói esse conhecimento relacionando-o com outros, em diferentes contextos, tentando adaptá-los às novas situações e resistindo em abandoná-lo. É por esse motivo que se torna tão difícil superá-lo, já que, para isso, o aluno (e o professor, por suposto) terá de trabalhar da mesma forma que o faz quando da construção de um novo conhecimento, com o agravante de que o “falso” saber (aquele que funcionava bem no contexto anterior) estará, ainda, por trás da nova construção. (CURY, 2013, p. 36 - 37).

Dessa citação, podemos compreender que os obstáculos encontrados pelos alunos que dificultam a aprendizagem, precisam ser vistos como indícios de conhecimento, pois, isso ajuda esses indivíduos a construir um novo conhecimento aliado a este. Essa prática propicia ao aluno adaptar-se às novas situações e distinguir aquele conhecimento que tinha (que não é mais válido) do novo que está sendo construído a partir de outros conceitos.

A tarefa de auxiliar o aluno a construir seu conhecimento partindo de uma noção errada de determinado conceito, não é nada fácil. Pois a resistência que este aluno terá em desconstruir o que já foi aprendido e aceitar um conhecimento novo, será grande. Mas com esforço de ambas as partes, é possível obter sucesso.

2.3 A análise de erros como metodologia de pesquisa

No tópico anterior discutimos a análise de erros como metodologia de ensino. Neste tópico, discutiremos a análise de erros como metodologia de pesquisa, isto é, quando analisamos erros para obter resultados em determinado estudo, como é o nosso caso, neste trabalho. Cury (2013) coloca a análise de erros também como uma metodologia de pesquisa e apresenta nesta obra, várias atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, utilizando o erro como ponto de partida para a construção de novos conhecimentos. Algumas dessas atividades são provenientes de outros grandes autores que trabalham com a análise de erros, como alguns que já foram citados anteriormente, outras são resultados de sua prática docente. Um bom exemplo dessas atividades apresentado por Cury é descrita por Lopes (1988), em que o autor solicita a alunos de 12 ou 13 anos, que calculem 2^{-3}.

> Os estudantes apresentam respostas diversas: -8, 8, -6, -1, ½. Considerando que cada resposta indica uma hipótese feita a respeito da potência negativa, ele pergunta aos alunos qual seria o resultado de 3^2, para os que consideram 2^{-3} = -8, e alguém responde que seria -9. Lopes sugere, então, que descrevam o caso geral para cada hipótese. Por exemplo, para a solução citada, teriam a hipótese H1: $a^{-n} = - a^n$. (CURY, 2013, p. 84).

Após essa situação proposta, Cury (2013) descreve que houve um diálogo em que os alunos vão descartando as hipóteses que contradizem as operações já conhecidas e

verificando as propriedades da potenciação para cada resposta apresentada. Sendo assim, os erros aceitos por um tempo, até os alunos analisarem suas próprias respostas, participando ativamente desse processo de análise de erros.

Podemos observar que em nenhum momento foi dito aos alunos que aquelas respostas estavam erradas e que deveriam refazê-las. Cury (2013), afirma que o autor foi instigando os alunos a pensarem, analisarem suas respostas e tirarem suas próprias conclusões. Essa atitude é extremamente louvável no exercício da docência, pois, aí, talvez esteja o método mais eficaz para atingirmos sucesso no processo de ensino aprendizagem. Deixar que o aluno aprenda com seu erro, incentivá-lo a pensar em outras formas de resolução, induzindo-o, assim, a detectar a incoerência de sua resposta e, finalmente, chegar à resposta correta.

CAPÍTULO 3: Procedimentos Metodológicos

A pesquisa em que estamos realizando, apresenta-se como qualitativa, uma vez que, objetivamos identificar e analisar os principais erros cometidos por alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública de Vitória da Conquista, no conteúdo Equação de 2º Grau. Para Bicudo:

> O *qualitativo* engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências [...] (BICUDO, 2004, p. 104).

Dessa forma, nos atentaremos para essa ideia de perceber as diferenças e semelhanças entre os erros que venham a ser cometidos.

A pesquisa foi realizada numa escola pública de Vitória da Conquista, com alunos de uma turma de 1ª série do Ensino Médio. A escolha da turma se deu, pelo fato de que, supomos que já estejam familiarizados com o conteúdo, pois de acordo ao currículo do Ensino Fundamental, este conteúdo deve ter sido trabalhado no 9º ano, portanto, é esperado que uma turma de 1ª série do Ensino Médio já esteja vendo o conteúdo pela segunda vez, em Função Quadrática, apresentando assim, teoricamente, maiores condições de aprendizagem. O que permite diagnosticar com mais clareza, se ocorrem erros nesse processo e os motivos pelos quais ocorrem. Quanto à escolha da escola, foi por conta de já ter realizado estágio lá, o que trouxe certa proximidade e facilitou o contato com os alunos.

Utilizamos como instrumento de coleta de dados, um questionário que será composto de questões pessoais a cerca do desempenho estudantil dos sujeitos pesquisados e de questões em que terão de resolver Equações do 2º Grau, tanto de equações já prontas, quanto de situações problemas, em que terão que organizar as equações e, posteriormente, resolvê-las. A escolha do questionário se deu ao fato de ser, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), um dos instrumentos mais tradicionais de coleta de informações e consiste numa série de perguntas que podem ser abertas, fechadas ou mistas. Sendo que, no nosso caso, optamos por um questionário composto de questões abertas. De acordo com os autores, quando não apresentam alternativas para respostas, podendo o pesquisador captar alguma informação não prevista por ele ou pela literatura.

Para Fiorentini e Lorenzato (2006):

> Embora, atualmente, sejam pouco utilizados pelas pesquisas em abordagem qualitativa, os questionários podem servir como uma fonte complementar de informações, sobretudo na fase inicial e exploratória da pesquisa. Além disso, eles podem ajudar a caracterizar e a descrever os sujeitos do estudo, destacando algumas variáveis como idade, sexo, estado civil, nível de escolaridade, preferências, número de horas de estudo, número semanal de horas-aula do professor, matérias ou temas preferidos etc. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 117).

A partir das ideias dos autores, podemos perceber que o questionário se coloca como um importante instrumento de coleta e que tem muito a contribuir com o desenvolvimento da pesquisa.

As informações fornecidas pelos alunos no questionário serão tabuladas, e consequentemente, serão apontados, se existirem, os erros ali apresentados por eles. Esses erros serão agrupados de acordo às categorias que estabeleceremos mais adiante. Será realizada uma análise dos mesmos, procurando identificar a ideia do aluno para ter respondido de tal maneira.

3.1 Questionário

Qual a sua idade?

Pretendemos com isso, identificar a faixa etária dos sujeitos da pesquisa.

Você repetiu algum ano? Se sim, qual?

Com essa questão queremos identificar se o aluno repetente apresenta maior dificuldade ou se isso não interfere em nada atualmente.

Qual a disciplina que você mais gosta?

Essa questão vem com o intuito de diagnosticar se a Matemática está entre as preferências dos sujeitos da pesquisa.

E qual você menos gosta?

Já essa, vem o papel contrário à anterior. Queremos verificar aqui, se a disciplina faz parte do que os alunos menos gostam.

Você já fez dependência da disciplina Matemática? Em caso afirmativo, em qual série?

Queremos saber, com essa questão, se há uma relação entre o fato de o aluno ter feito dependência na disciplina e o aprendizado que este apresenta no conteúdo aqui especificado, Equação do 2º Grau.

Você teve algum professor de Matemática que lhe marcou por algum motivo? Se sim, qual o motivo?

Muitas vezes o aluno aprende a gostar ou a não gostar de determinada disciplina por conta da relação com algum professor que teve ao longo da vida estudantil, logo, almejamos com essa questão, identificar se isso ocorre com nossos sujeitos de pesquisa em relação á Matemática.

Você estuda em casa?

Com essa questão, pretendemos descobrir se o aluno restringe seu aprendizado ao que vê em sala de aula ou se realmente leva a sério o ato de estudar, complementando o que aprende na escola, estudando em casa.

Alguém o ajuda nas atividades da escola?

Essa questão nos remete à descoberta de que, o aluno conta com a participação da família ou amigos ativamente no que a escola propõe, ou se ele dá conta disso sozinho.

Sente dificuldades no conteúdo Equação do 2º Grau? Qual (is)?

Nosso objetivo com essa questão é identificar, caso ocorra, as dificuldades do aluno no conteúdo em questão. Para que nos possibilite a compreensão das respostas dadas às questões seguintes.

Resolva as seguintes Equações do 2º Grau:

a) $x^2 - 4x + 3=0$

b) $– x^2 + 6x – 5=0$

c) $x^2 - 1=0$

d) $x^2 + x=0$

e) $3x^2 + 12x - 63 = 0$

Nessas questões, esperamos que os sujeitos pesquisados resolvam as Equações utilizando como método de resolução a fórmula de Bháskara. Esperamos também que os alunos utilizem o método mais simples para resolver as equações incompletas, no caso dos itens (c) e (d), que podem ser resolvidas manipulando os coeficientes, realizando operações já conhecidas, a depender dos coeficientes presentes na equação, não necessitando usar a fórmula de Bháskara.

No item (c), há apenas os coeficientes *a* e *c*, logo, basta utilizar a propriedade aditiva em que soma um mesmo número aos dois membros da equação – nesse caso o número 1 – deixando assim, o número (coeficiente *c*) no segundo membro e permanecendo com a incógnita (coeficiente *a*) no primeiro. Como no primeiro membro há uma potência cujo expoente é 2, tendo usado a propriedade aditiva mencionada acima, no segundo membro pode-se aplicar a operação inversa, a raiz quadrada, neste caso. Feito isso, é só calcular a raiz, encontrando dois números opostos, que são as raízes da equação.

No item (d), estão presentes os coeficientes *a* e *b*, sendo assim, basta colocar a incógnita x em evidência, uma das raízes será zero e a outra será o resultado do cálculo da expressão que estará dentro do parêntese.

- O triplo do quadrado do número de filhos de Pedro é igual a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Quantos filhos Pedro têm?

O problema apresentado coincide com a equação da questão anterior. Acreditamos que isso sirva para despertar a atenção do aluno, pois quando ler a questão e começar a interpretá-la, esperamos que percebam que se trata da mesma equação que resolveram anteriormente.

- Há dois números cujo triplo do quadrado é a igual 15 vezes estes números. Quais números são estes?

- A diferença entre o quadrado e o triplo de um número é 10. Calcule esse número.

- O dobro do quadrado de um número é igual ao produto desse número por 7 menos 3. Qual é esse número?

- A diferença entre o quadrado e o dobro de um mesmo número é 80. Calcule esse número.

Com essas questões, pretendemos diagnosticar o nível de interpretação dos alunos, pois anteriormente as equações já estavam prontas para serem resolvidas, já agora, terão que interpretar os problemas e montar as equações, para só então, resolvê-las.

CAPÍTULO 4: Análise dos dados

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos através do questionário, que foi o instrumento de coleta de dados utilizado nessa pesquisa, como já foi mencionado no capítulo anterior.

4.1 Perfil dos sujeitos da pesquisa

Com o objetivo de identificar o perfil da turma, apresentamos nas tabelas um, dois, três, quatro e cinco, informações que julgamos importantes, a respeito da vida escolar dos alunos. Tais informações foram fornecidas pelos mesmos por meio do questionário.

Tabela 1: Faixa etária dos alunos

Idade	Quantidade de alunos
15	3
16	14
17	2
20	1

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme dados da Tabela 1, percebemos que a maior parte dos alunos pertence à faixa etária adequada para o ano escolar em questão, pois, consideramos que estes alunos ingressaram no Ensino Fundamental antes que o novo Ensino Fundamental de nove anos entrasse em vigor. O que nos chama atenção é o aluno com 20 anos, que já deveria ter concluído o Ensino Médio e ainda está cursando a 1ª série, é um sujeito que está fora da faixa etária designada, o que podemos denominar de defasagem idade/série.

Para observar se os alunos repetiram ou não algum ano, apresentamos na sequência, a Tabela 2, que mostra a relação dos alunos e a etapa em que alguns repetiram algum ano.

Tabela 2: Etapa em que repetiram algum ano

Etapa	Alunos
Ensino Fundamental I	6
Ensino Fundamental II	4
Ensino Médio	1
Nenhuma	6
Não responderam	3

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que 30% dos alunos afirmaram não ter repetido nenhum ano, um número razoável. Destacamos também o fato de apenas um aluno ter repetido a 1ª série do Ensino Médio.

Com o intuito de diagnosticar se a Matemática está entre as disciplinas preferidas dos sujeitos da pesquisa, a Tabela 3 exibe as disciplinas em que a turma mais gosta.

Tabela 3: Disciplinas que os alunos mais gostam

Disciplina que mais gostam	Alunos
Educação Física	5
Física	2
Filosofia	2
História	2
Inglês	2
Geografia	2
Língua Portuguesa	1
Artes	1
Biologia	1
Nenhuma	2

Fonte: Dados da pesquisa

Pelos dados da Tabela 3, percebemos que a disciplina em que a maior parte da turma prefere, é Educação Física, enquanto que Matemática não aparece entre a preferência dos alunos. Isso nos confirma de certa forma, a aversão que existe dos alunos em relação à Matemática. Em relação às disciplinas em que os alunos menos gostam, estão expostas na Tabela quatro, a seguir.

Tabela 4: Disciplinas que os alunos menos gostam

Disciplina que menos gostam	Alunos
Biologia	9
Matemática	3
Inglês	2
Química	3
Língua Portuguesa	2
Física	1

Fonte: Dados da pesquisa

Um fato inesperado nessa questão foi que, apesar de, na questão anterior a Biologia ter aparecido como disciplina preferida e a Matemática não, agora, Biologia apresenta uma rejeição maior que Matemática.

Foi questionado também aos alunos, se fizeram dependência em Matemática, queremos saber com essa questão, se há uma relação entre o fato de o aluno ter feito

dependência na disciplina e o aprendizado que este apresenta no conteúdo aqui especificado, Equação do 2º Grau. 1 aluno afirmou que fez na 6ª série, 1 aluno na 8ª, 16 alunos nunca fizeram e 2 não responderam. Concluímos então, que nessa turma não há um grande número de reprovações na disciplina.

Com o propósito de identificarmos se nossos sujeitos de pesquisa guardam lembranças marcantes de algum professor de Matemática, perguntamos a eles se tiveram um professor que os marcou por algum motivo e qual seria esse motivo. Perguntamos isso, porque muitas vezes o aluno aprende a gostar ou a não gostar de determinada disciplina por conta da relação com algum professor que teve ao longo da vida estudantil. A Tabela 5 ilustra o resultado dessa questão.

Tabela 5:Motivo pelo qual um professor de Matemática tenha marcado os alunos

Motivo pelo qual um (a) professor (a) de Matemática os marcou	**Alunos**
Porque os fez perder de ano	2
Porque implicava com ele	1
Porque não compreendia o conteúdo e a professora não explicava	1
Porque era divertida e legal	1
Porque era muito legal	1
Nenhum professor (a) os marcou	14

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos notar que 70% dos alunos não tiveram nenhum professor que os tenha marcado. Dentre os demais, a maioria apontou um professor que os marcou negativamente.

Com a pretensão de descobrir se os alunos restringem seu aprendizado ao que ver em sala de aula ou se complementam estudando em casa, perguntamos isso no questionário. 8 alunos afirmaram que sempre estudam em casa, 7 alunos disseram que não estudam e 5 estudam às vezes.

A fim de verificar se as famílias dos alunos participam ativamente do que a escola propõe ou se eles dão conta disso sozinhos, perguntamos se contam com a ajuda de alguém nas atividades da escola. 15 alunos declararam que não têm ajuda, 4 disseram ter ajuda de algum familiar e 1 aluno não respondeu. Concluímos então, que a grande maioria não conta com nenhuma ajuda.

4.2 Equação do 2º Grau: análise das questões

Passaremos a apresentar agora, os resultados obtidos especificamente sobre o conteúdo Equação do 2º Grau. A Tabela 6 mostra se os alunos apresentam dificuldades com o conteúdo em questão e quais são essas dificuldades.

Nossa intenção com essa questão é identificar, caso existam, as dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo, para que nos proporcione uma melhor compreensão das respostas dadas às questões posteriores.

Tabela 6: Dificuldades dos alunos com Equação do 2º Grau

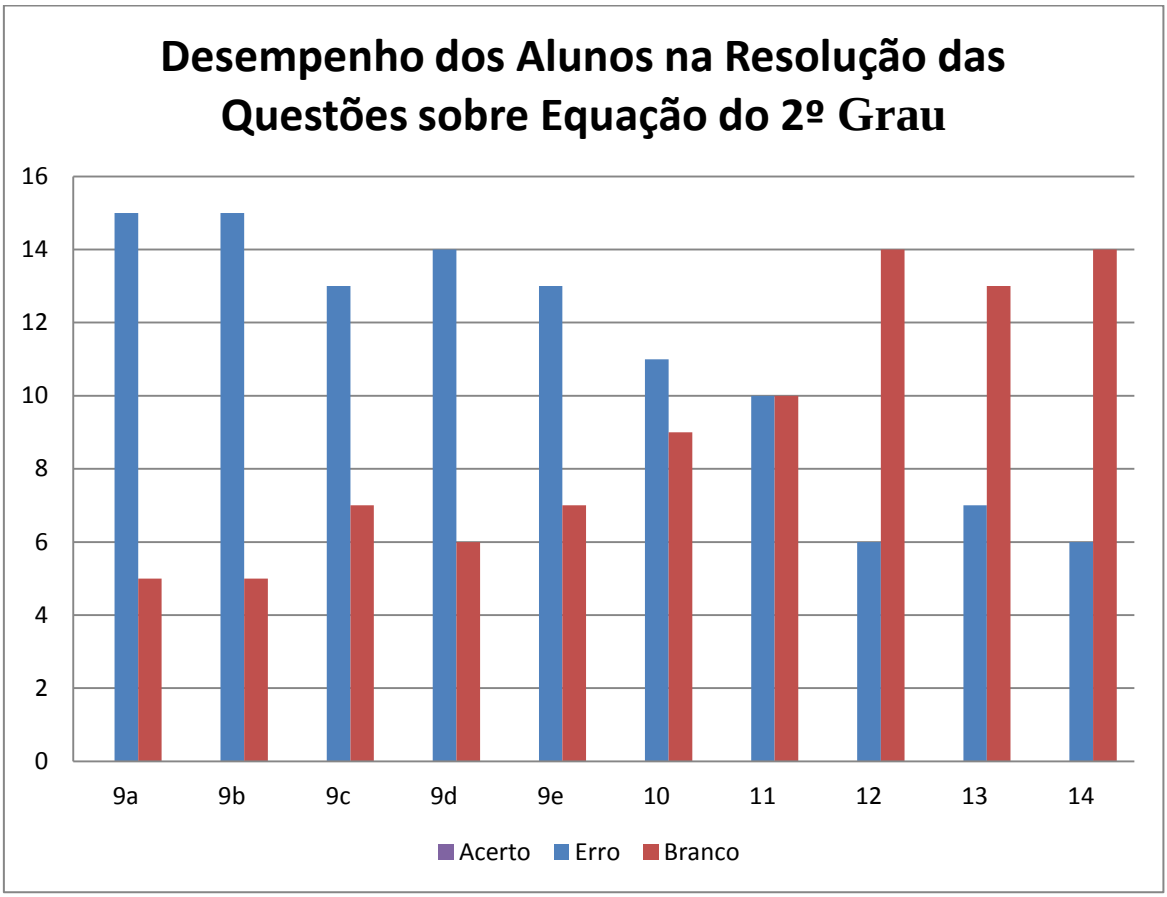
Dificuldades com Equação do 2º Grau	Alunos
Não	4
Sim, mas não especificaram.	7
Poucas, também não especificou	1
Lembrar como se resolve	2
Determinar as duas raízes	1
Com a Fórmula de Bháskara	1
Não responderam	4

Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos que 35% da turma afirmaram sentir dificuldades com Equação do 2º Grau, porém não especificaram quais são essas dificuldades. Apenas 20% afirma não sentir dificuldades, o que representa um número relativamente pequeno.

Com relação ao desempenho dos alunos na resolução das questões, em que foram induzidos a resolver tanto equações já prontas, quanto problemas que teriam de montar a equação e, posteriormente, resolvê-la, o gráfico a seguir ilustra a quantidade de erros, acertos e questões em branco.

Gráfico 1: Desempenho dos alunos na resolução das questões



Fonte: Dados da pesquisa

Pelos resultados expostos no Gráfico 1, constatamos que não houve acerto em nenhuma das 10 questões que compõem a parte específica do questionário que trata de Equação do 2º Grau. Houve uma grande incidência de questões em branco, porém a quantidade de erros ainda foi maior. No próximo item, passaremos a analisar esses erros.

4.3 Análise dos erros

Para analisarmos os erros apresentados pelos alunos nas respostas das questões apresentadas a seguir, elaboramos categorias, as quais serão descritas no decorrer da análise dos dados.

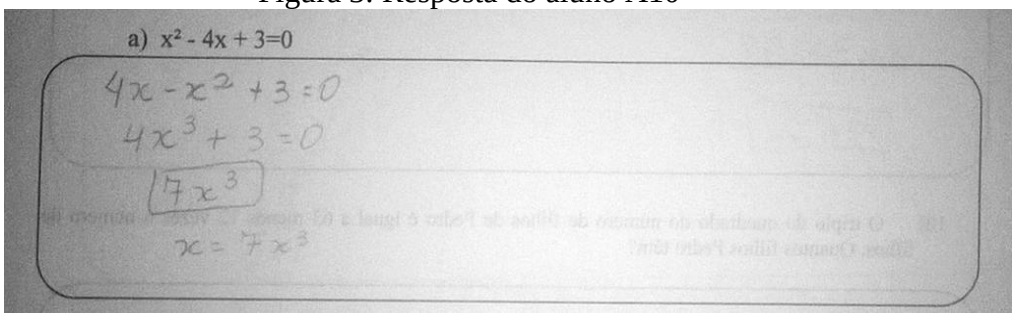
Para identificar os alunos, denominamos cada um, por A – relacionado a aluno - seguido da numeração de 1 a 20 – quantidade de sujeitos pesquisados.

9. a) $x^2 - 4x + 3=0$

Nenhum aluno acertou, 5 deixaram em branco e 15 erraram. Como o foco da nossa pesquisa são os erros, identificamos as seguintes categorias:

Nessa questão, 10 alunos erraram no *reconhecimento da equação* e 5 erraram na *resolução da operação*.

Figura 3: Resposta do aluno A10



Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos na Figura 3, o extrato da resposta de um aluno em que, de acordo com as categorias de erros em que elaboramos, aparece erro no *reconhecimento da equação*.

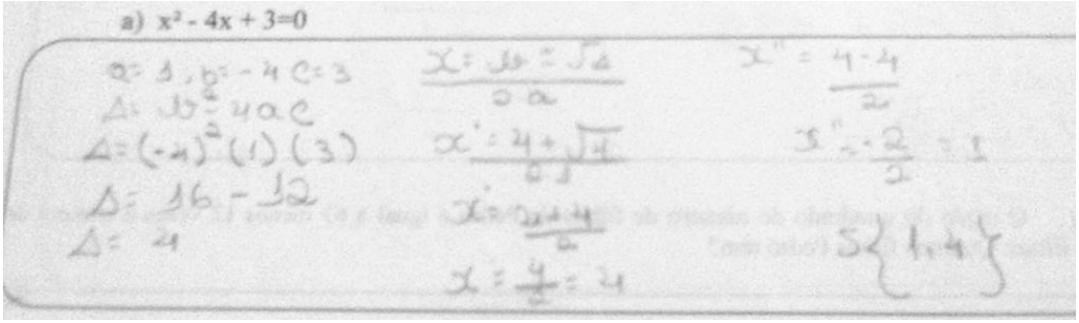
Reconhecimento da equação - classificamos como erro no *reconhecimento da equação*, quando a resposta que o aluno apresenta, não se comporta dentro do caminho que, normalmente, leva à resolução da equação do 2º grau, isto é, o aluno força a resposta da equação a sair por outros caminhos.

Observamos que esse aluno apresentou erro no *reconhecimento da equação*, pois aparentemente, ele não a reconhece como sendo uma equação do 2º grau. O aluno A10 força uma operação, fazendo com que a equação se transforme num polinômio de grau três e assume isso como solução. Como podemos perceber, o aluno trocou o - 4x (coeficiente b) de lugar com o x^2 (coeficiente a) e realizou uma soma dos expoentes obtendo $4x^3$, em seguida somou novamente o resultado com o 3 (coeficiente c), resultando em $7x^3$, um polinômio de grau 3, o que ele apresentou como resposta da equação.

A seguir, na Figura 4, apresentamos a resposta de um aluno que demonstrou erro na *resolução da operação*.

Resolução da operação – esse erro ocorre, quando o aluno troca um sinal ou uma operação no decorrer da resposta, o que influencia no resultado final.

Figura 4: Resposta do aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa

Concluímos que esse aluno errou na *resolução da operação*, uma vez que, assume que √4 = 4 e, posteriormente, efetua a soma 4 + 4, como sendo igual a 4 e ainda, divide 4 por 2, encontrando como resultado o número 4.

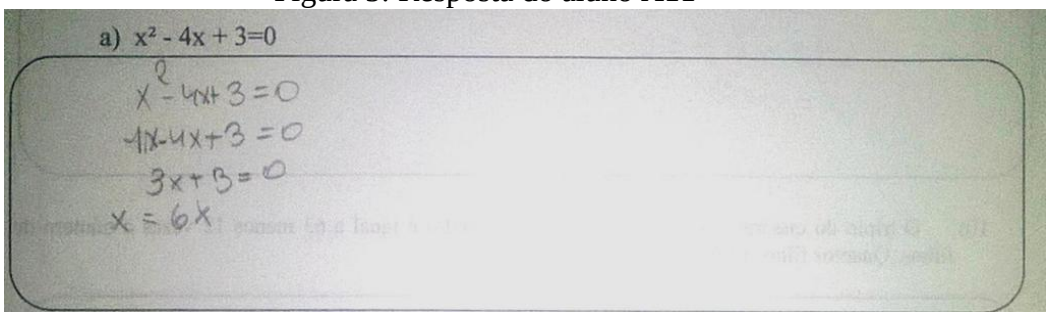
Um dos caminhos que levariam à solução dessa equação – o mais utilizado e que normalmente é apresentado nos livros e é trabalhado nas escolas - é a fórmula de Bháskara. O aluno A4 utilizou esse método de resolução, porém cometeu erros na manipulação das operações. Além de ter assumido um valor errado para a raiz quadrada de quatro, cometeu uma sucessão de erros na soma e divisão, o que influenciou no resultado da equação, que tem como conjunto solução 1 e 3.

9. b) $-x^2 + 6x - 5=0$

Nenhum aluno acertou, 5 deixaram em branco e 15 erraram. Dentre estes últimos, 9 apresentaram erro no *reconhecimento da equação*; 1 aluno errou na *identificação dos coeficientes* e 5, na *resolução da operação.*

A Figura 5 mostra um exemplo de resposta que apresenta erro no *reconhecimento da equação.*

Figura 5: Resposta do aluno A11



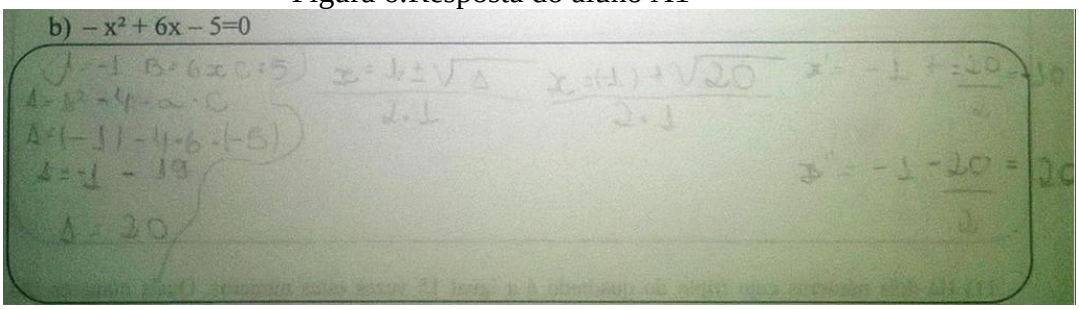
Fonte: Dados da pesquisa

Nessa questão, assumimos que o aluno A11 não reconheceu essa equação como sendo uma equação do 2º grau, uma vez que, desconsiderou o expoente da incógnita que acompanha o coeficiente *a* e força o cálculo de uma operação, transformando a equação num polinômio de grau um. O aluno não se aproximou do que, podemos considerar que seja um caminho para a resolução da equação dada.

Na sequência, apresentamos na Figura 6, a resposta de um aluno para a questão 9.b, em que detectamos a ocorrência de erro na *identificação dos coeficientes* da equação.

Identificação dos coeficientes – esse erro se dá, quando o aluno não identifica corretamente os coeficientes *a*, *b* e *c* na equação. Seja pelo valor numérico ou pelo sinal.

Figura 6:Resposta do aluno A1

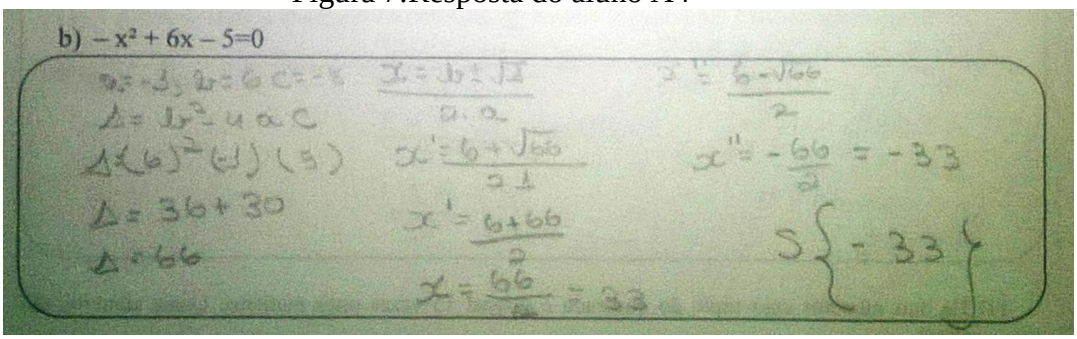


Fonte: Dados da pesquisa

Em nosso entendimento, o aluno ao identificar os coeficientes da equação não acerta os valores, pois assume que o coeficiente *b* é igual a 6x, porém o x é a incógnita, a qual se quer descobrir os valores, isto é, o coeficiente *b* é apenas o número 6. Além disso, ao aplicar os valores dos coeficientes para calcular o valor de Δ (delta), o aluno troca os termos *a* e *b*. O que influencia significativamente no valor de Δ (delta) e, consequentemente, em toda a equação.

A Figura 7, a seguir, mostra a resposta de um dos alunos que apresentaram erro na *resolução da operação*.

Figura 7:Resposta do aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa

Apontamos como erro na *resolução da operação* na resposta do aluno A4, o fato de, ao substituir os coeficientes na fórmula pelos seus devidos valores, ter deixado de lado o número 4 – que faz parte da fórmula para calcular Δ (delta) – e ter efetuado uma multiplicação errada, encontrando assim, um valor diferente do esperado para Δ (delta), que seria igual a 16. Posterior a isso, o aluno ainda admitiu que √66 = 66, o que seria impossível de acordo com as propriedades da radiação, já que a raiz quadrada de um número x é igual a um número y que multiplicado por si mesmo, o resultado seja igual a x.

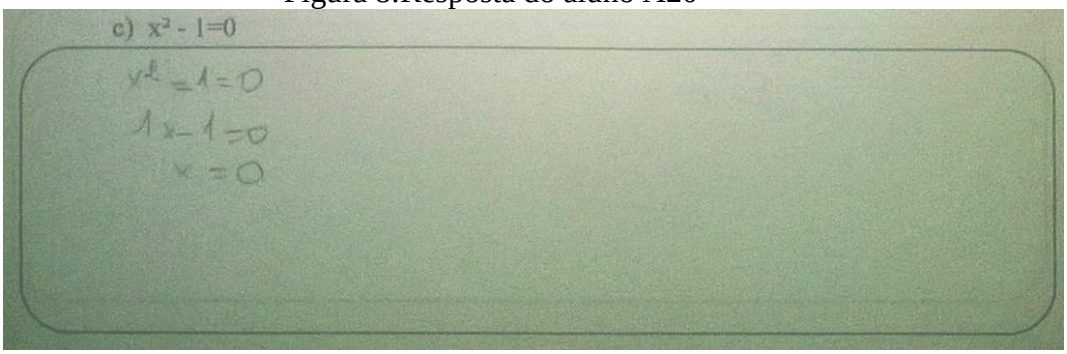
Passaremos agora, a fazer a análise da questão 9. c.

9. c) $x^2 - 1=0$

Nenhum aluno acertou, 7 deixaram em branco e 13 alunos erraram. Identificamos os seguintes erros, de acordo com as categorias em que estabelecemos: nove alunos erraram no *reconhecimento da equação*; dois alunos apresentaram erro na *resolução da operação* e dois, na *identificação dos coeficientes*.

A Figura 8 apresenta a resposta de um dos alunos que cometeram erro no *reconhecimento da equação*.

Figura 8:Resposta do aluno A20



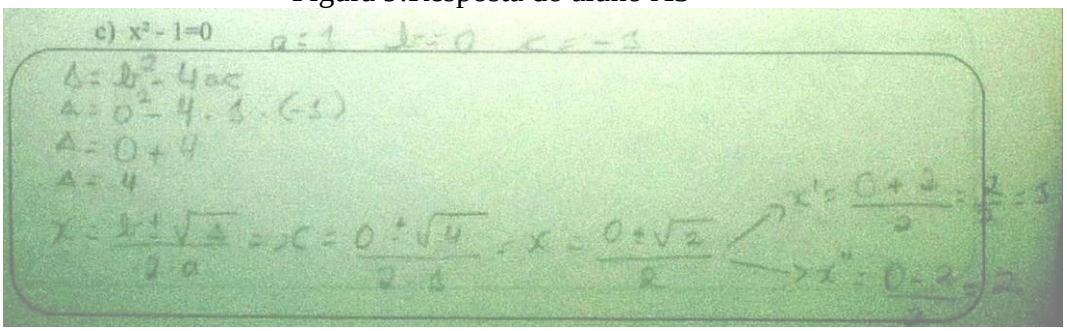
Fonte: Dados da pesquisa

Em nossa concepção, o aluno não reconheceu essa equação como de 2º grau, pois simplesmente despreza o expoente que caracteriza a equação como tal e efetua cálculos equivocados que levam a um resultado completamente diferente do que seria solução para essa equação.

Nessa questão, o aluno não precisaria utilizar a Fórmula de Bháskara para resolvê-la, uma vez que, trata-se de uma equação incompleta, em que constam apenas os valores dos coeficientes *a* e *c*. Logo, bastaria utilizar a propriedade aditiva em que soma um mesmo número aos dois membros da equação – nesse caso o número um – deixando assim, o número (coeficiente *c*) no segundo membro e permanecendo com a incógnita (coeficiente *a*) no primeiro. Como no primeiro membro há uma potência cujo expoente é dois, tendo usado a propriedade aditiva mencionada acima, no segundo membro pode-se aplicar a operação inversa, a raiz quadrada, neste caso. Feito isso, é só calcular a raiz, encontrando dois números opostos, que são as raízes da equação. Nessa questão, as raízes são – 1 e 1.

Analisaremos na sequência, a resposta do aluno A3, em que detectamos erro na *resolução da operação*.

Figura 9:Resposta do aluno A3



Fonte: Dados da pesquisa

Admitimos que esse aluno apresentou erro na *resolução da operação* quando assume que $\sqrt{4} = \sqrt{2}$, uma vez que, a resposta correta é igual a 2. Comete erro também ao efetuar a operação 0-2/2 e encontra como resultado o número 2, em que deveria encontrar -1.

Passaremos a analisar a resposta do aluno A4 para essa mesma questão, porém visualizando outro tipo de erro.

Figura 10:Resposta do aluno A4

Fonte: Dados da pesquisa

Assumimos que esse aluno comete erro na *identificação dos coeficientes*, pois troca os valores dos coeficientes *b* e *c*, nessa equação, *b* é igual a zero e *c* é igual a -1, porém o aluno aponta como *b* igual a -1 e *c* igual a zero. Com isso, obviamente qualquer cálculo que o aluno efetue, induzirá a uma solução errada para a equação. Ele ainda assume que se Δ (delta) é igual à zero, a equação tem como solução um conjunto vazio, o que não procede, pois ao aplicar a Fórmula de Bháskara, percebemos que esse valor para Δ (delta), não implica numa solução vazia.

A seguir, discutiremos sobre os erros identificados na questão 9.d..

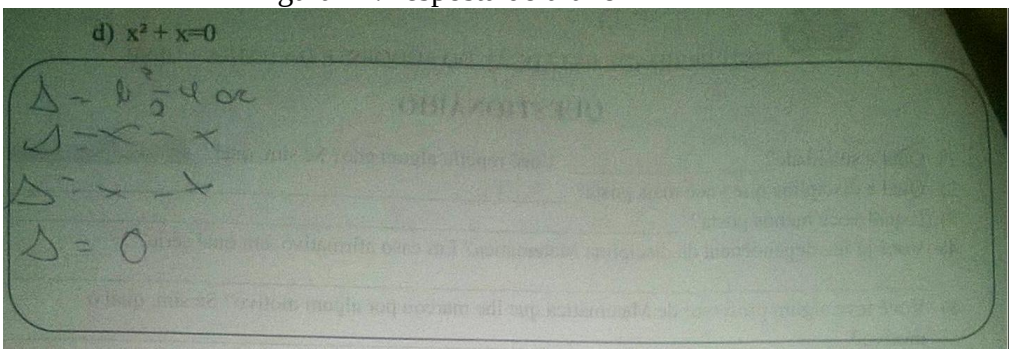
9. d) $x^2 + x=0$

Nenhum aluno acertou, 8 deixaram em branco e 12 erraram. Detectamos os seguintes erros nessa questão: um aluno errou na *resolução do discriminante*; dois erraram na *resolução da operação*; oito erraram no *reconhecimento da equação* e um aluno errou na *identificação dos coeficientes.*

Apresentamos agora, a análise da resposta do aluno A12, em que identificamos que houve erro na *resolução do discriminante*.

Resolução do discriminante – denominamos erro na resolução do discriminante, quando o aluno apresenta erro diretamente no resultado da equação.

Figura 11:Resposta do aluno A12

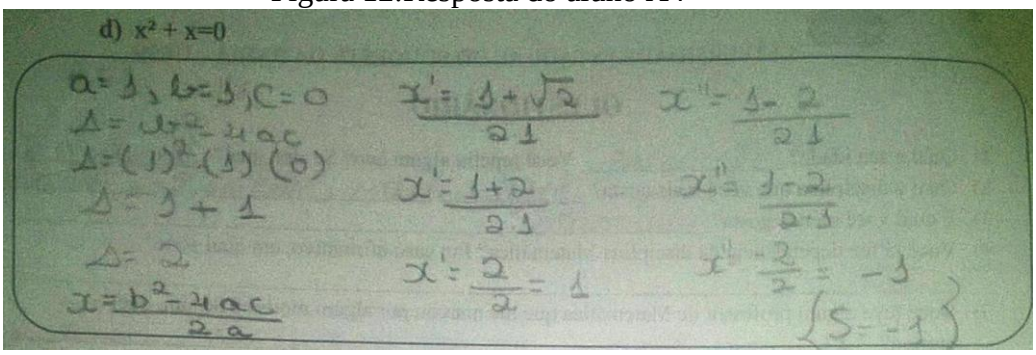


Fonte: Dados da pesquisa

Apontamos a resposta desse aluno como erro na *resolução do discriminante*, pelo fato de que, entendemos que ele reconheceu a questão como uma equação de 2º grau, pois determina a fórmula que utilizaria para resolvê-la, porém não a desenvolve. A exemplo da anterior, essa questão também não necessita da Fórmula de Bháskara para ser resolvida, mas nesse caso, temos os coeficientes *a* e *b*, enquanto o *c* é igual a 0. Sendo assim, para resolver basta colocar a incógnita x em evidência, uma das raízes será igual a zero e a outra, será igual ao resultado do cálculo da expressão que estará dentro do parêntese, nesse caso, será igual a 1. Ou seja, o conjunto solução dessa equação é igual a 0 e 1.

Analisaremos a seguir, a resposta do aluno A4 para essa mesma questão, um exemplo de resposta que apresenta erro na *resolução da operação*.

Figura 12:Resposta do aluno A4



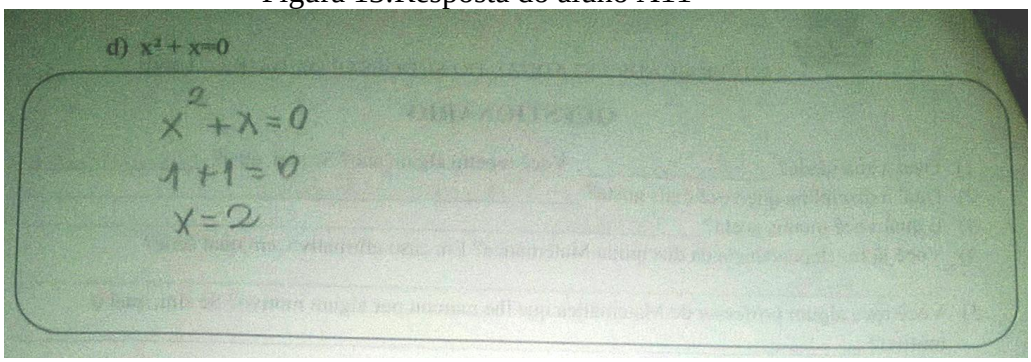
Fonte: Dados da pesquisa

Diagnosticamos que esse aluno cometeu erro na resolução de operação, pois efetua uma multiplicação entre os números 1 e 0, admitindo que o resultado é igual a 1,

porém, pela propriedade multiplicativa, temos que todo número multiplicado por zero será igual a zero, logo, podemos nos certificar de que esse resultado encontrado pelo aluno, está incorreto. Como já foi mencionado anteriormente, essa questão não necessita da Fórmula de Bháskara para ser resolvida, mas não há problema algum se o aluno utilizar, a outra forma de resolução é apenas para simplificar os cálculos.

A Figura 13 ilustra a resposta de um aluno dentre os quais, segundo nossa análise, cometeu erro no *reconhecimento da equação*.

Figura 13:Resposta do aluno A11

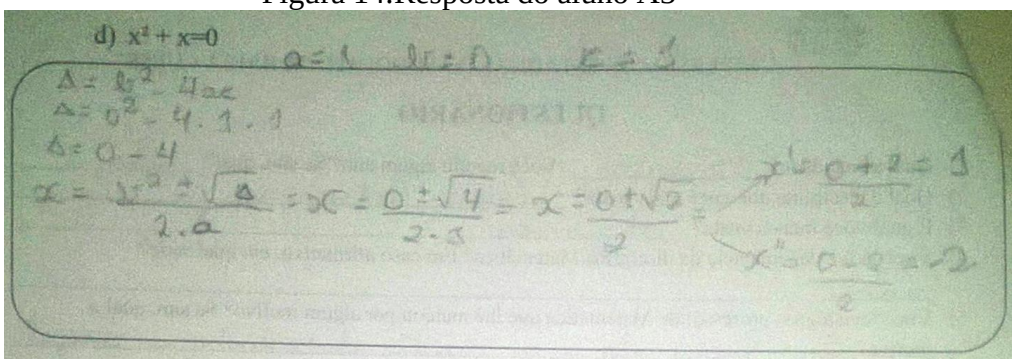


Fonte: Dados da pesquisa

Entendemos que esse aluno não reconheceu essa questão como uma equação do 2º grau, pois despreza o expoente que a caracteriza como tal e manipula a incógnita como se já fosse um número, atribuindo um valor a ela.

Vamos analisar na próxima figura, a resposta de um dos alunos que erraram na *identificação dos coeficientes*.

Figura 14:Resposta do aluno A3



Fonte: Dados da pesquisa

Nessa questão, o aluno A3 trocou os valores dos coeficientes *b* e *c*. Essa é uma equação incompleta, em que, consequentemente, um dos coeficientes é igual a zero.

Nesse caso, o coeficiente *c* é zero, logo, estão presentes na equação os coeficientes *a* e *b*. Assim, bastaria que o aluno colocasse a incógnita x em evidência, uma das raízes seria zero e a outra seria o resultado do cálculo da expressão que estará dentro do parêntese. Porém, o aluno A3 identificou *b* como sendo 0 e *c* igual a 1, o que comprometeu todo o restante do resultado da equação.

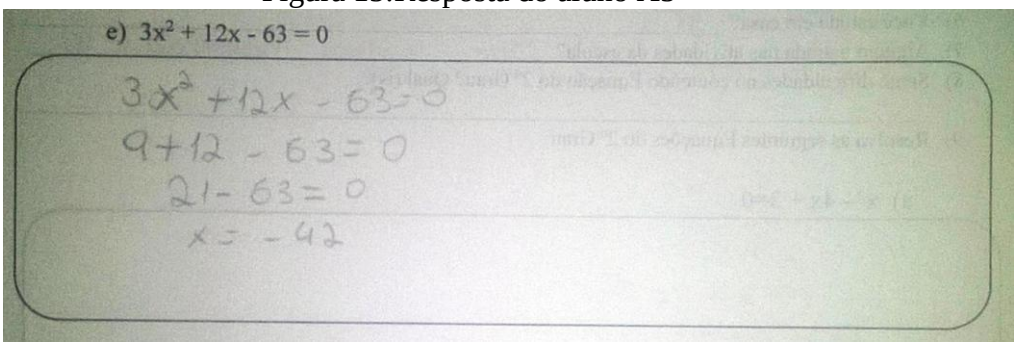
Faremos a seguir, a análise da questão 9.e.

9. e) $3x^2 + 12x - 63 = 0$

Nenhum aluno acertou, 8 deixaram em branco e 12 erraram. Nessa questão, foram cometidos os seguintes erros: 9 alunos apresentaram erro no *reconhecimento da equação*; 2 erraram na *resolução da operação* e 1 na *resolução do discriminante.*

Analisaremos a Figura 15, que mostra a resposta dada pelo aluno A5 para esta questão.

Figura 15:Resposta do aluno A5

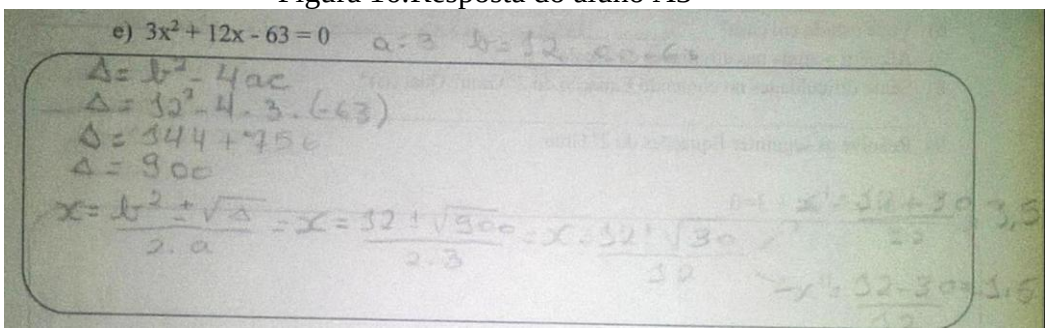


Fonte: Dados da pesquisa

Esse aluno não reconheceu a questão como uma equação do 2º grau, pois exclui a incógnita sem calcular seu valor, forçando uma solução que seria de uma equação do 1º grau. A forma mais conhecida para resolver a questão seria a utilização da Fórmula de Bháskara, em que, o aluno identificaria os coeficientes *a*, *b* e *c*, os substituiria na fórmula pelos seus respectivos valores e efetuaria os cálculos para encontrar as duas raízes da equação.

A seguir, discutiremos a resposta do aluno A3 para essa mesma questão, em que detectamos erro na *resolução da operação.*

Figura 16:Resposta do aluno A3



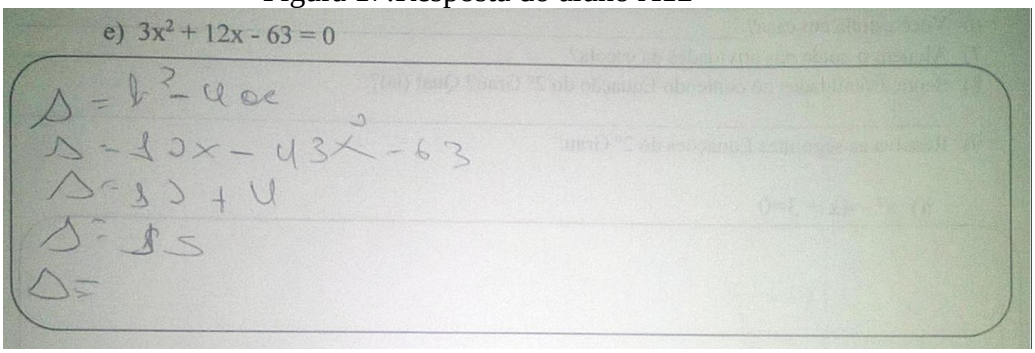
Fonte: Dados da pesquisa

Entendemos que esse aluno cometeu erro na *resolução da operação*, pois ele assume que √900 = √30, uma vez que, o resultado correto é igual a 30. Posterior a isso, errou novamente nas operações de adição e divisão, ao determinar as duas raízes da equação.

O aluno compreendeu que a questão trata-se de uma equação do 2º grau, utilizou a Fórmula de Bháskara corretamente, porém apresentou os erros descritos acima, na resolução das operações.

Na sequência, a Figura 17 mostra a forma em que o aluno A12 resolveu essa questão.

Figura 17:Resposta do aluno A12



Fonte: Dados da pesquisa

Admitimos que houve erro na *resolução do discriminante* dessa questão, porque o aluno reconheceu que se trata de uma equação do 2º grau, identificou que a Fórmula de Bháskara é o caminho mais utilizado para se chegar à solução. Porém, perdeu o foco da questão, descartando a incógnita e efetuando operações inadequadas, o que o levou a um valor incorreto de Δ (delta), pois substituindo os coeficientes da fórmula em que o próprio aluno coloca para determinar Δ (delta) e efetuando os cálculos, encontra-se que Δ (delta) é igual a 900, porém o aluno encontrou o número 15 como resultado.

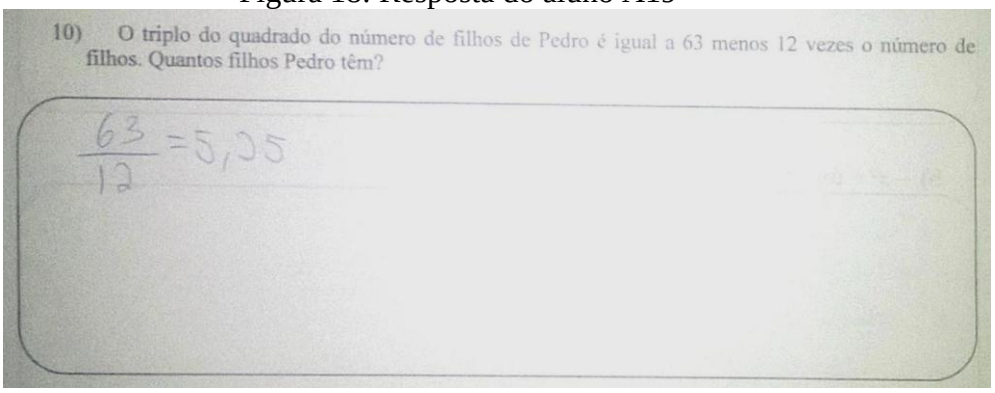
As questões em que analisaremos a seguir são um pouco diferentes das analisadas até aqui. Nas questões anteriores, os alunos só precisavam resolvê-las aplicando a Fórmula de Bháskara, já nas que apresentamos a seguir, exige que os alunos interpretem o problema, montem a equação e resolva-as. Passaremos à análise da questão 10.

10) O triplo do quadrado do número de filhos de Pedro é igual a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Quantos filhos Pedro têm?

Nenhum aluno acertou, 9 deixaram em branco e 11 erraram. Identificamos que 9 alunos erraram no *reconhecimento da equação* e 2 erraram na *resolução da operação.*

Verificaremos na sequência, a resposta do aluno A19.

Figura 18: Resposta do aluno A19



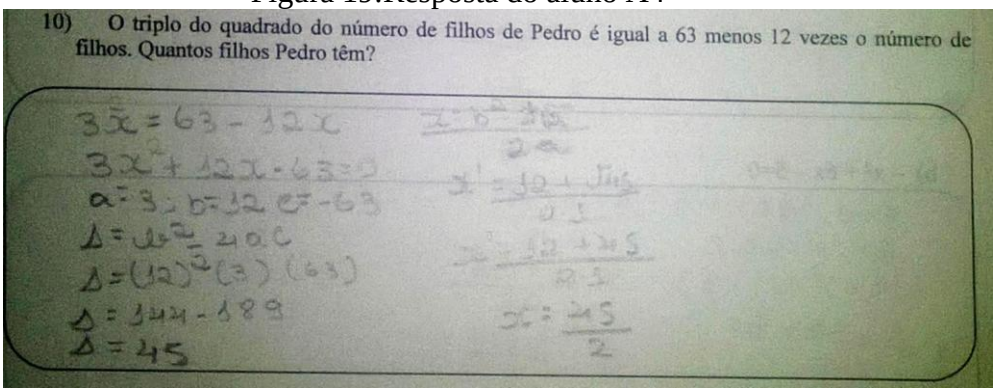
Fonte: Dados da pesquisa

Entendemos que esse aluno não reconhece que ao interpretar esse problema, encontraria uma equação do 2º grau igual à equação da questão 9.e., posta propositalmente, a fim de observarmos o desempenho dos alunos nas duas questões.

O caminho mais óbvio e que esperávamos que o aluno seguisse seria, de início interpretar o problema escrevendo matematicamente o está escrito, em seguida, organizar os termos obtendo uma equação do 2º grau. Posterior a isso, utilizar a Fórmula de Bháskara para resolver a equação e encontrar assim, as duas raízes. Como uma das raízes é negativa e o problema pede quantidade, consequentemente, a resposta seria a outra raiz. Porém, ele não faz nada disso, tenta manipular os números apresentados no problema efetuando uma divisão inadequada, o que o levou a um resultado incorreto.

Na sequência, analisaremos a resposta do aluno A4 para essa mesma equação.

Figura 19:Resposta do aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa

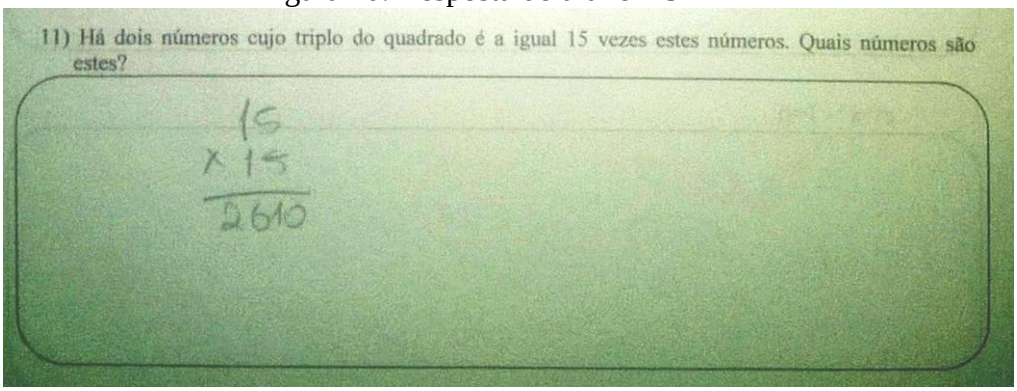
Esse aluno interpretou o problema, identificou que se trata de uma equação do 2º grau, a organizou para resolvê-la, utilizou a Fórmula de Bháskara, porém erra na *resolução da operação,* deixando de lado o número quatro, que faz parte da Fórmula para calcular Δ (delta), o que interferiu diretamente no resultado. Além disso, ainda admite que o resultado da subtração 144 – 189 = 45, uma vez que, é igual a – 45.

Passaremos a analisar agora, os erros detectados na questão 11.

11) Há dois números cujo triplo do quadrado é a igual 15 vezes estes números. Quais números são estes?

Nenhum aluno acertou, 11 deixaram em branco e 9 erraram. Destes 9 alunos que erraram essa questão, 7 foram no *reconhecimento da equação* e dois na *resolução de operação.*

Figura 20: Resposta do aluno A5

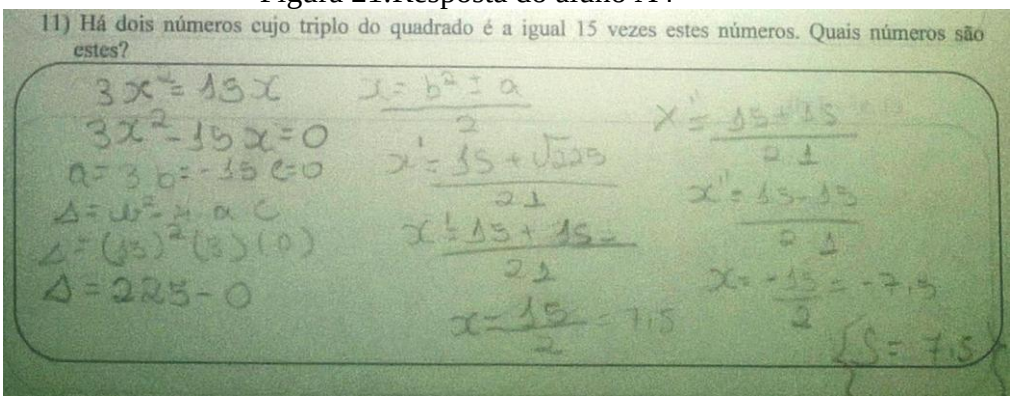


Fonte: Dados da pesquisa

O aluno A5 apresentou erro no *reconhecimento da equação*, pois não conseguiu interpretar o problema para retirar dali uma equação do 2º grau. Aparentemente associou o quadrado, ao qual o problema faz referência, ao número 15 também apresentado e efetua essa operação, mas ainda erra no cálculo, assumindo que $15 \times 15 = 2610$, porém, o resultado correto seria 225.

A seguir, faremos a análise dessa mesma questão, mas do ponto de vista do aluno A4.

Figura 21:Resposta do aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa

Esse aluno conseguiu interpretar o problema, identificou a equação do 2º grau presente ali, porém comete erro na *resolução da operação*, ao substituir na Fórmula de Bháskara o coeficiente *a*, pelo seu respectivo valor, o que já seria suficiente para alterar o resultado da equação, mas ele ainda comete outro erro ao somar 15 + 15 e encontrar 15 como resposta.

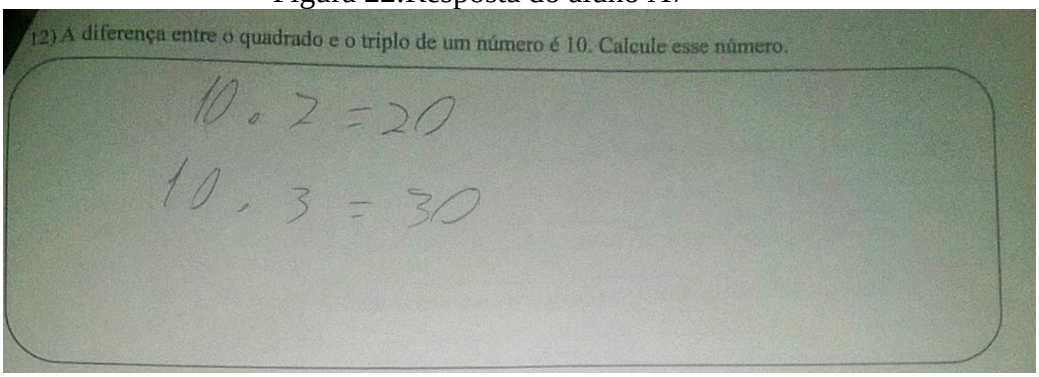
Como essa é uma equação incompleta, em que constam apenas os coeficientes *a* e *b*, não necessitaria do uso da Fórmula de Bháskara para resolvê-la, bastaria colocar a incógnita x em evidência, uma das raízes seria zero e a outra seria o resultado do cálculo da expressão que ficaria dentro do parêntese. Porém, o fato de o aluno ter resolvido dessa maneira não alteraria o resultado se ele tivesse realizado todas as operações corretamente.

Passaremos a analisar a seguir, os erros detectados na questão 12.

12) A diferença entre o quadrado e o triplo de um número é 10. Calcule esse número.

Nenhum aluno acertou, 14 deixaram em branco e 6 erraram. Todos apresentaram erro no *reconhecimento da equação.*

Figura 22:Resposta do aluno A7



Fonte: Dados da pesquisa

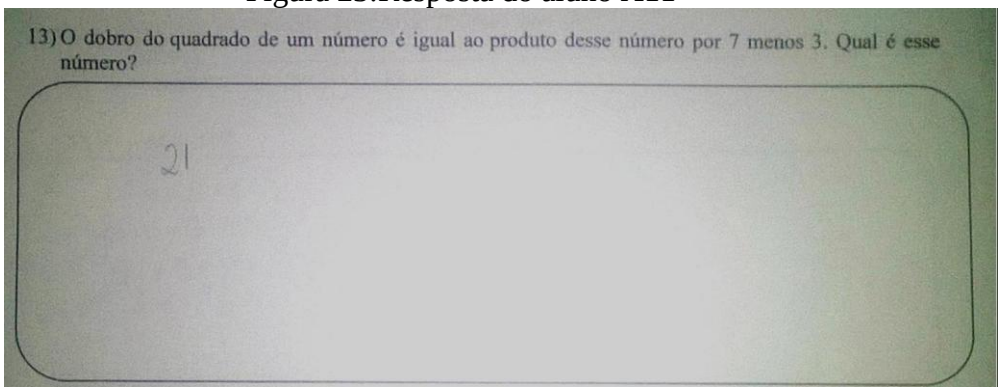
O aluno A7 apresentou erro no *reconhecimento da equação*, uma vez que, não compreendeu que o problema trata-se de uma equação do 2º grau e tenta resolvê-lo associando o número 10 presente no problema a uma multiplicação pelo quadrado e pelo triplo mencionados no problema, mas que se referem à incógnita e não ao número, que na equação, representa o coeficiente *c*.

Analisaremos agora, os erros da questão 13.

13) O dobro do quadrado de um número é igual ao produto desse número por 7 menos 3. Qual é esse número?

Nenhum aluno acertou, 13 deixaram em branco e 7 alunos erraram. Todos os erros foram no *reconhecimento da equação*.

Figura 23:Resposta do aluno A11



Fonte: Dados da pesquisa

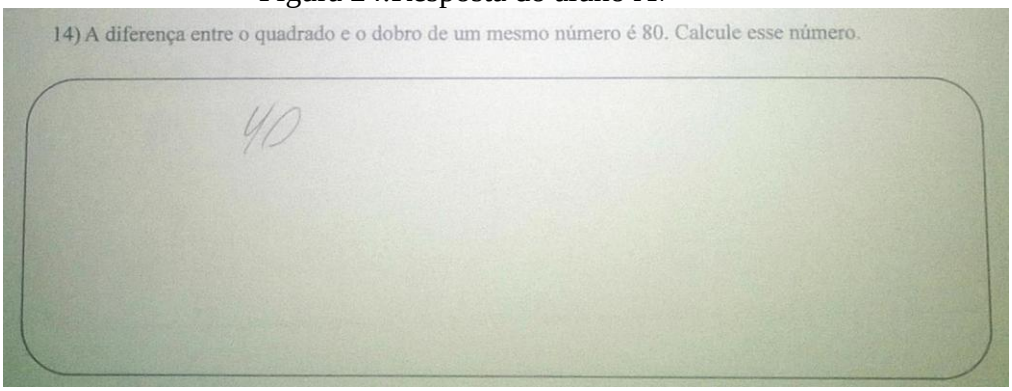
Assim como a resposta do aluno analisado na questão anterior, esse aluno também comete erro no *reconhecimento da equação*, pois não identifica que esse problema representa uma equação do 2º grau. Ele simplesmente interpreta que há um produto entre os dois números apresentados no problema e efetua esse produto, porém isso não resolve a equação e logicamente, o resultado apresentado pelo aluno, está incorreto.

A seguir, faremos a análise do erro presente na questão 14.

14) A diferença entre o quadrado e o dobro de um mesmo número é 80. Calcule esse número.

Nenhum aluno acertou, 14 deixaram em branco e 6 erraram. Todos que apresentaram erro foram no *reconhecimento da equação*.

Figura 24:Resposta do aluno A7



Fonte: Dados da pesquisa

Detectamos que esse aluno apresentou erro no *reconhecimento da equação*, pois assim como as respostas dos demais alunos apresentados nas três questões anteriores, esse aluno também não compreendeu que o problema trata-se de uma equação do 2º grau, pois ele aparentemente realiza uma divisão do número 80, apresentado no problema, pelo número dois, supostamente porque o problema faz referência ao quadrado e ao dobro, assumindo o resultado dessa divisão como solução para o problema.

Apresentamos a seguir, no Quadro 1, um panorama do resultado da análise em que realizamos.

Quadro 1: panorama da distribuição das estratégias de erros

Questão	**Reconhecimento da Equação**	**Resolução da Operação**	**Resolução do Discriminante**	**Identificação dos Coeficientes**	**Branco**
9.a	08	05	01	01	05
9.b	09	04	01	01	05
9.c	09	02	02	-	07
9.d	08	02	01	01	08
9.e	09	02	01	-	08
10	09	02	-	-	09
11	07	02	-	-	11
12	06	-	-	-	14
13	07	-	-	-	13
14	06	-	-	-	14
Total	78	19	06	03	94

Fonte: dados da pesquisa

Ressaltamos que não houve acertos, logo não sentimos a necessidade de acrescentar esse campo à tabela e que 5 alunos (25% da turma) devolveram o questionário totalmente em branco.

Podemos observar no Quadro 1 que a incidência maior de erro é no *reconhecimento da equação,* em seguida, ficou a incidência de erros na *resolução da operação,* a ocorrência de erros na *resolução do discriminante* veio na sequência, e por último, identificamos como de menor incidência, o erro na *identificação dos coeficientes.*

CAPÍTULO 5: Conclusão

Este capítulo apresenta as conclusões obtidas durante o processo de desenvolvimento dessa pesquisa, a partir da análise dos dados apresentados no capítulo anterior e do referencial teórico que embasou nosso trabalho. A seguir, descreveremos todo o caminho percorrido até concluirmos essa pesquisa.

A Análise de Erros nos chamou atenção por ser uma metodologia de ensino que pode auxiliar o aluno, pois pode ser uma boa ferramenta de trabalho para o professor. Equação do 2º Grau é um conteúdo que gostamos de trabalhar, logo, a possibilidade de fazer uma junção dos dois, despertou nosso interesse por realizar um trabalho dessa natureza, e assim o fizemos.

Para embasar nosso trabalho, nos baseamos em Cury (2013) no que diz respeito à análise de erros como metodologia de ensino e de pesquisa, a fim de enriquecer nosso estudo com as ideias suas e de seus precursores a respeito da análise de erros. Em Ribeiro e Cury (2015) em que tratam da álgebra na formação do professor trazendo os conceitos de função e de equação e apresentando a trajetória histórica da Matemática passando pelas contribuições de diferentes e épocas. Tomamos ainda, como referência, Bicudo (2004) e Fiorentini e Lorenzato (2006) para estruturar a parte metodológica da nossa pesquisa, determinando o tipo de pesquisa que faríamos, bem como o instrumento de coleta dos dados que utilizaríamos e como seria estruturado nosso estudo.

Cury (2013) nos diz que qualquer produção do aluno, seja aquela que simplesmente repete uma resolução modelo ou aquela que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como este indivíduo pensa, bem como, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, seja formal ou informal. Dessa maneira, “analisar as produções é uma atividade que traz, para o professor e para os alunos, a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes.” (CURY, 2013, p. 15). Isso reforça o nosso pensamento de que a resposta de um aluno ser simplesmente apontada como correta ou incorreta, sem que haja uma análise quanto ao fato de ele ter respondido de tal maneira, não trará nenhum avanço no aprendizado desse aluno.

Nossa pesquisa foi de cunho qualitativo, uma vez que, pretendíamos identificar e analisar os principais erros cometidos por alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública de Vitória da Conquista, no conteúdo Equação de 2º Grau, cujo instrumento de coleta foi um questionário elaborado pelas autoras da pesquisa. O questionário foi composto de questões pessoais a cerca do desempenho estudantil dos sujeitos pesquisados e de questões em que teriam que resolver Equações do 2º Grau, tanto equações já prontas, quanto situações problemas, em que teriam que organizar as equações e, posteriormente, resolvê-las. A investigação foi realizada numa turma de 1ª série do Ensino Médio, composta por alunos com faixa etária entre quinze e vinte anos em uma escola pública da cidade de Vitória da Conquista – Bahia.

Uma vez feita a coleta dos dados, fizemos a tabulação para identificar a quantidade de erros, acertos e brancos, em seguida, estabelecemos quatro categorias de erro: *reconhecimento da equação, resolução da operação, resolução do discriminante* e *identificação dos coeficientes*. Feito isso, iniciamos a análise dos erros que apresentamos aqui, selecionando em cada questão uma resposta que ocorre erro correspondente a cada categoria estabelecida.

Ressaltamos que não houve acerto em nenhuma das questões e que 25% dos alunos devolveram o questionário em branco.

Notamos que a incidência maior de erro é no *reconhecimento da equação*, o que significa que a maioria dos alunos não identificou as questões como se tratando de equações do 2º grau, pois as respostas apresentadas, não se comportam dentro do caminho que, normalmente, leva à resolução de uma equação do 2º grau, isto é, os alunos forçaram as respostas das equações a sair por outros caminhos, quase sempre as transformando em polinômios de grau diferente de dois.

Em seguida, ficou a incidência de erros na *resolução da operação*, esse erro ocorre, quando o aluno troca um sinal ou uma operação no decorrer da resposta, o que influencia no conjunto solução.

A ocorrência de erros na *resolução do discriminante* veio na sequência, isso ocorre quando o aluno apresenta erro diretamente no resultado da equação. E por último, identificamos como de menor incidência, o erro na *identificação dos*

coeficientes, isso se dá, quando o aluno não identifica corretamente os coeficientes *a*, *b* e *c* na equação. Seja pelo valor numérico ou pelo sinal.

Logo, podemos concluir com nossa pesquisa, que a maior incidência de erros em Equação do 2º Grau, está no *reconhecimento da equação*. Essa é uma questão preocupante, pois isso quer dizer que os alunos estão apresentando graves falhas de aprendizagem em um conteúdo que, supostamente já estão familiarizados, pois de acordo com o currículo do Ensino Fundamental, Equação do 2º Grau deve ser trabalhada no 9º, e ainda, suponhamos que o tenham visto novamente em Função Quadrática, já que está na grade de conteúdos da 1ª série do Ensino Médio e os dados da pesquisa foram coletados na penúltima semana de aula do ano letivo. Esse público foi escolhido para realizarmos nossa pesquisa, justamente porque, teoricamente, apresentariam maior conhecimento a cerca do conteúdo em questão.

Diante desse quadro, é importante que os professores façam uma investigação com seus alunos para tentar compreender o porquê dessa defasagem e o que pode ser feito para melhorar essa realidade.

Os resultados apontam dois fatos que merecem uma atenção especial: não houve acerto em nenhuma das questões e a maior incidência de erros foi no *reconhecimento da equação*. Isso pode significar que os alunos não compreenderam bem o conceito de Equação do 2º grau.

REFERÊNCIAS

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica**. In: Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática, 2004.

CASTRUCCI, Benedicto; GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática**. – Ed. renov. - São Paulo: FTD, 2007. – (Coleção A Conquista da Matemática)

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2 ed. Belo Horizonte : Autêntica, 2013.

CURY, Helena Noronha; KONZEN, Beatriz. **Uma aplicação de jogos na análise de erros em educação matemática.** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V 2. 6, p.107-117**,**UFSC: 2007.

CURY, Helena Noronha; SILVA, Priscila Nitibailoff da. **Análise de erros em resolução de problemas:** uma experiência de estágio em um curso de licenciatura em matemática. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/226. Acesso: 19/05/2016.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. – (Coleção formação de professores).

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor:** Explorando os conceitos de equação e de função. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. (Coleção Tendências em Educação matemática).

ANEXOS

I - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Você está sendo convidada (a) como voluntária (a) a participar da pesquisa "EQUAÇÃO DO 2º GRAU: UM OLHAR PARA A ANÁLISE DE ERROS". Neste estudo pretendemos identificar e analisar os principais erros cometidos por alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública de Vitória da Conquista, no conteúdo Equação de 2º Grau.

O motivo que nos leva a estudar esse assunto é a curiosidade que tivemos por descobrir quais são os erros mais frequentes cometidos pelos alunos no conteúdo Equação do 2º Grau e o porquê desses erros.

Para este estudo adotaremos o(s) seguinte(s) procedimento(s):

- A pesquisa será realizada através da aplicação de um questionário;

- As informações fornecidas pelos alunos no questionário serão tabuladas, e consequentemente, serão apontados, se existirem, os erros ali apresentados por eles;

- Os erros serão agrupados de acordo ao nível de semelhança;

- Será realizada uma análise desses erros procurando identificar a ideia do aluno por ter respondido de tal maneira.

Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido (a) em todas as formas que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não causará qualquer punição ou modificação na forma em que é atendido (a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Este estudo apresenta nenhum risco.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizados. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a sua permissão. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de

consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, _____fui informado (a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e posso modificar a decisão de participar se assim o desejar. Declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Vitória da Conquista, ____ de _____ de 2015.

_____ _____

Assinatura do (a) participante *Assinatura do (a) pesquisador (a)*

II - Questionário

1) Qual a sua idade? _____ Você repetiu algum ano? Se sim, qual? _____
2) Qual a disciplina que você mais gosta?_____
3) E qual você menos gosta? _____
4) Você já fez dependência da disciplina Matemática? Em caso afirmativo, em qual série?

   _____
5) Você teve algum professor de Matemática que lhe marcou por algum motivo? Se sim, qual o motivo?_____
6) Você estuda em casa? _____
7) Alguém o ajuda nas atividades da escola?_____
8) Sente dificuldades no conteúdo Equação do 2º Grau? Qual (is)?

   _____
9) Resolva as seguintes Equações do 2º Grau:

   a) $x^2 - 4x + 3=0$

   b) $-x^2 + 6x - 5=0$

   c) $x^2 - 1=0$

d) $x^2 + x=0$

e) $3x^2 + 12x - 63 = 0$

10) O triplo do quadrado do número de filhos de Pedro é igual a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Quantos filhos Pedro têm?

11) Há dois números cujo triplo do quadrado é a igual 15 vezes estes números. Quais números são estes?

12) A diferença entre o quadrado e o triplo de um número é 10. Calcule esse número.

13) O dobro do quadrado de um número é igual ao produto desse número por 7 menos 3. Qual é esse número?

14) A diferença entre o quadrado e o dobro de um mesmo número é 80. Calcule esse número.