Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Resolução de algumas questões do Exame Nacional para Ingresso na Pós-Graduação em Computação (PosComp) entre os anos de 2002 e 2013

Vitória da Conquista - Bahia
2015

Murilo Machado Cerqueira

Resolução de algumas questões do Exame Nacional para Ingresso na Pós-Graduação em Computação (Poscomp) entre os anos de 2002 e 2013

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Júlio César dos Reis.

Vitória da Conquista - Bahia
2015

Agradecimentos

Primeiramente sou grato a Deus, e em seguida à minha família por ter sido fundamental durante todo este período.

Também desejo expressar minha gratidão ao Professor Dr. Júlio César dos Reis, pela muito boa orientação e por sua grande prestatividade.

Deixo aqui também meus agradecimentos ao colega de curso Pedro S. Fagundes, que muito me ajudou na escrita deste trabalho.

Fico muito feliz pelos colegas que conheci durante esta graduação, cuja convivência me proporcionou um grande enriquecimento pessoal, não citando nomes por receio de esquecer alguém.

Além do orientador Dr. Júlio César, todos os outros professores que tive nesta licenciatura foram importantes, tendo um carinho especial por alguns destes.

Sumário

1 Sistemas Lineares e Matrizes **1**

1.1 Matrizes . . . 1

1.1.1 Alguns tipos de matrizes . . . 1

1.1.2 Operações com Matrizes . . . 3

1.1.3 Transposição de matrizes . . . 4

1.2 Determinantes . . . 5

1.2.1 Propriedades dos determinantes . . . 5

1.2.2 Desenvolvimento de Laplace . . . 6

1.3 Sistemas Lineares e Matrizes . . . 7

1.3.1 Operações Elementares . . . 8

1.3.2 Forma Escada . . . 9

1.3.3 Soluções de um Sistema de Equações Lineares . . . 10

1.4 Teorema de Cramer . . . 12

1.4.1 Teorema de Cramer e escalonamento . . . 12

1.5 Um processo para cálculo da inversa de uma matriz . . . 13

1.6 Questões . . . 14

2 Espaços Vetoriais **22**

2.1 Vetores . . . 22

2.1.1 Algumas características dos Vetores . . . 23

2.2 Subespaços Vetoriais . . . 24

2.3 Combinação Linear . . . 24

2.4 Dependência e Independência Linear . . . 25

2.5 Base de um Espaço Vetorial . . . 26

2.6 Alguns Teoremas . . . 26

2.7 Produto Vetorial . . . 27

2.7.1 Algumas Propriedades do Produto Vetorial . . . 27

2.8 Questões . . . 28

3 Transformações Lineares **34**

3.1 Transformações do Plano no Plano . . . 34

3.1.1 Expansão (ou Contração) Uniforme. . . . 34

3.1.2 Reflexão em torno do Eixo-x. . . . 34

3.1.3 Reflexão na Origem 35
3.1.4 Rotação de um Ângulo b: (no sentido horário) 35
3.1.5 Cisalhamento Horizontal 35
3.1.6 Translação 35
3.2 Propriedades de uma transformação linear 36
3.3 Transformações Lineares e Matrizes 38
3.4 Questões 40

4 Autovalores e Autovetores **47**
4.1 Autovalores e Autovetores de uma Matriz 49
4.2 Polinômio Característico 50
4.3 Polinômio Minimal 52
4.4 Questões 53

5 Produto Interno **56**
5.1 Norma 57
5.2 Questões 58

Introdução

Neste trabalho propomos analisar o Exame Nacional para Ingresso na Pós-Graduação em Computação (Poscomp), entre os anos de 2002 e 2013. Este exame é organizado pela SBC (Sociedade Brasileira de Computação). Na prova objetiva são cobrados Fundamentos da computação, Tecnologia da computação e Matemática. Nesta última disciplina normalmente temos Cálculo, Álgebra Linear e Probabilidade. Entre os assuntos que estão presentes nestas avaliações, as questões de Álgebra Linear foram o nosso foco. Para isto, foi escrita toda a teoria considerada necessária para servir de ferramenta para a resolução das questões encontradas nas provas. O trabalho foi dividido em 5 capítulos, foram eles: matrizes e sistemas lineares; espaços vetoriais; transformações lineares; autovalores e autovetores e produto interno. Todos os capítulos contem as suas respectivas questões. Por fim, todas as questões foram resolvidas e as soluções também foram apresentadas.

A álgebra linear é o ramo da matemática que estuda os espaços vetoriais, e consequentemente também as funções lineares entre estes espaços. Os espaços vetoriais são conjuntos munidos com duas operações, que satisfazem algumas condições, uma soma entre elementos do conjunto (os vetores) e uma multiplicação entre os vetores e escalares (os membros do corpo sobre o qual está definido o espaço vetorial).

O campo de aplicação da Álgebra Linear é muito vasto. A computação gráfica, por exemplo, a manipulação de imagens, rotação, redimensionamento, a alteração de cores são operações lineares. Por outro lado, evidentemente nem todos os processos da natureza podem ser descritos por meio de sistemas ou equações lineares. No entanto muitos sistemas e aplicações importantes são lineares, o que por si já justificaria seu estudo.

Capítulo 1

Sistemas Lineares e Matrizes

Neste capítulo iremos apresentar os conhecimentos necessários sobre Matrizes e Sistemas Lineares para a resolução das questões sobre estes dois temas.

1.1 Matrizes

Definição 1 *Chamamos de matriz uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.*

Representaremos uma matriz de m linhas e n colunas por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.1.1 Alguns tipos de matrizes

1. Matriz Quadrada.

É aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).

Exemplo 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$.

2. Matriz Nula.

É aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Exemplo 3 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Matriz Coluna.

É aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).

Exemplo 4 : $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Matriz Linha.

É aquela onde $m = 1$, ou seja, possui uma única linha.

Exemplo 5 : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Matriz Diagonal.

É uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal"são nulos.

Exemplo 6 : $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Matriz Identidade Quadrada

É aquela em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplo 7 : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Matriz Triangular Superior

É uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplo 8 : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Matriz Triangular Inferior

É aquela em que $a_{ij} = 0$, para $i < j$, ou seja, os elementos que estão acima da diagonal são nulos.

Exemplo 9 : $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Matriz Simétrica

É aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 10 : $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & h & m \\ c & m & g \end{pmatrix}$.

1.1.2 Operações com Matrizes

Adição: A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, é uma matriz $m \times n$, que denotaremos por $A + B$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B, isto é,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Exemplo 11 : $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriedades da Adição de matrizes

Dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem $m \times n$, temos:

i) $A + B = B + A$ (Comutatividade)

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associatividade)

iii) $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$.

Multiplicação por Escalar: Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número, então definimos uma nova matriz, $k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplo 12 : $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \\ 6 & 3 & 18 \end{pmatrix}$.

Propriedades da Multiplicação por Escalar

Dadas as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e números k, q, temos:

i) $k(A + B) = kA + kB$

ii) $(k + q)A = kA + qA$

iii) $0 \cdot A = 0$, ou seja, o número zero multiplicado por qualquer matriz A, resulta na matriz nula

iv) $k(qA) = (kq)A$.

Multiplicação de matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n\times p}$. Definimos $AB = [c_{hd}]_{m\times p}$ onde

$$c_{hd} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}b_{kd} = a_{h1}b_{1d} + \cdots + a_{hn}b_{nd}.$$

Observação: Só podemos efetuar o produto AB de duas matrizes se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Exemplo 13 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4\cdot(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5\cdot(-1) + 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$

Observe que a primeira matriz é de ordem 3×2 enquanto a segunda é 2×2, desta forma a multiplicação pode ser efetuada. Mas se trocarmos a posição das matrizes o produto não pode ser realizado, pois o número de colunas da primeira passará a ser diferente do número de linhas da segunda.

Propriedades da multiplicação de matrizes

i) $AI = IA = A$

ii) $A(B + C) = AB + AC$

iii) $(A + B)C = AC + BC$

iv) $(AB)C = A(BC)$

v) $0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$

vi) Normalmente AB é diferente de BA. De fato, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, é fácil notar que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.3 Transposição de matrizes

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, podemos obter uma outra matriz $A' = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ij}$. A' é denominada transposta de A.

Exemplo 14 : $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ *logo* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 9 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Propriedades da Transposição

i) Uma matriz é dita simétrica quando ela é igual a sua transposta, ou seja, $A = A'$.

ii) $A" = A$, isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

iii) $(A + B)' = A' + B'$

iv) $(kA)' = kA'$, k é um escalar qualquer.

1.2 Determinantes

Determinante é um número associado a matrizes quadradas. Para uma dada matriz A, denotamos o determinante de A por,

$$\det A \text{ ou } |A| \text{ ou } \det[a_{ij}]$$

Para o caso de determinantes de matrizes de ordem $n = 1, 2$ e 3 podemos escrever,

$$\det(a) = a,$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ e}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

1.2.1 Propriedades dos determinantes

1. Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz A são nulos, então $\det A = 0$.
2. $\det A = \det A'$.
3. Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.
4. Se trocarmos a posição de duas linhas (ou colunas), o determinante troca de sinal.
5. O determinante de uma matriz que tem duas linhas ou duas colunas iguais, é zero.
6. O determinante não se altera se somarmos a uma linha, outra linha multiplicada por uma constante.
7. $\det(A.B) = \det A. \det B$
8. Uma matriz é inversível quando seu determinante é não nulo.

1.2.2 Desenvolvimento de Laplace

Vimos anteriormente que

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Também podemos escrever esta soma da seguinte forma:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ou ainda,

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Note que o determinante da matriz inicial 3×3 pode ser calculado em função dos determinantes de submatrizes 2×2, isto é,

$$\det A = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

onde A_{ij} é a submatriz da inicial, de onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas. Além disso, se chamarmos

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

obtemos a expressão,

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

Esta propriedade continua sendo válida para matrizes quadradas de qualquer ordem. Ao número C_{ij} chamamos COFATOR ou COMPLEMENTO ALGÉBRICO do elemento a_{ij}. Observe que desenvolvemos o determinante pela i-ésima linha, poderíamos tê-lo feito a partir de uma coluna qualquer da matriz.

Exemplo 15 *: Seja* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculemos* $|A|$ *a partir da 2ª coluna. Assim,*

$$|A| = (-2)C_{12} + 1C_{22} + (-1)C_{32} \text{ com } C_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$C_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \text{ e } C_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Logo $|A| = (-2)(-2) + 1 \cdot 8 + (-1) \cdot 7 = 5$

1.3 Sistemas Lineares e Matrizes

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

com a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, números reais.

Uma solução do sistema (1.1) é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

Podemos escrever o sistema (1.1) numa forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ou $AX = B$ onde

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

que chamamos matriz ampliada do sistema.

Podemos escrever o sistema abaixo da seguinte forma:

$$\begin{cases} x + 4t + 3w = 1 \\ 2x + 5t + 4w = 4 \\ x - 3t - 2w = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Em termos de matrizes ampliadas, na resolução do sistema, partimos da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

e chegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que é correspondente ao sistema

$$\begin{cases} x = 3 \\ t = -2 \\ w = 2 \end{cases}$$

1.3.1 Operações Elementares

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

i) Permuta das i-ésima e j-ésima linhas. $(L_i \to L_j)$

Exemplo 16 : $L_2 \to L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

ii) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. $(L_i \to kL_i)$.

Exemplo 17 : $L_2 \to -3L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima mais k vezes a j-ésima linha. $(L_i \to L_i + kL_j)$.

Exemplo 18 : $L_3 \to L_3 + 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha equivalente a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

Notação: $A \sim B$.

Exemplo 19 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ *é linha equivalente a* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *pois*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} (L_2 \to L_2 - 4L_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} (L_3 \to L_3 + 3L_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} (L_2 \to -1L_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} (L_3 \to L_3 - 4L_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Forma Escada

Definição 20 *Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida a forma escada se:*

i) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

ii) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

iv) Se as linhas $1, \cdots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna K_i, então $K_1 < K_2 < \cdots < K_r$, isto é, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

Exemplo 21 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *não é a forma escada pois a segunda condição não acontece.*

Exemplo 22 : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *não é a forma escada pois não satisfaz a primeira e a quarta condições.*

Exemplo 23 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *não satisfaz a primeira nem a terceira condição.*

Exemplo 24 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *é a forma escada pois todas as condições estão satisfeitas.*

Teorema 25 *Toda matriz $A_{m\times n}$ é linha equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada. (ver [1], pg. 60 e 61).*

Definição 26 *Dada uma matriz $H_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a H. O posto de H, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de H é o número $n-p$.*

Exemplo 27 *Vamos encontrar o posto e a nulidade de* $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Efetuamos as seguintes operações com matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix}$$

Assim, o posto de H é 3 e a nulidade de H é $4-3=1$.

1.3.3 Soluções de um Sistema de Equações Lineares

Se tivermos um sistema de uma equação e uma incógnita

$$ax = b$$

então temos três possibilidades:

i) $a \neq 0$. Neste caso a equação tem uma única solução

$$x = b/a.$$

ii) $a = 0$ e $b = 0$. Então temos $0x = 0$ e qualquer número real será solução da equação.

iii) $a = 0$ e $b \neq 0$. Temos $0x = b$. Não existe solução para esta equação.

Exemplo 28 : $\begin{cases} 2x + z = 5 \\ x - 3z = 6 \end{cases}$. *A matriz ampliada do sistema é* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$. *Transformando-a em matriz-linha reduzida à forma escada, achamos* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *que é matriz ampliada do sistema, e assim temos* $\begin{cases} x = 3 \\ z = -1 \end{cases}$. *Este sistema é equivalente ao inicial. O sistema tem uma única solução, que é* $x = 3$ *e* $z = -1$. *Podemos observar que o posto da matriz dos coeficientres e o da matriz ampliada é 2.*

Análise de um caso geral

Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, \cdots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cujos coeficientes a_{ij} e termos b_i são números reais. Podemos ter:

i) $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = k_n \end{cases}$. Assim temos uma única solução.

ii) Infinitas soluções.

iii) Nenhuma solução.

No primeiro caso, dizemos que o sistema é possível e determinado. No segundo caso, dizemos que o sistema é possível e indeterminado. E no terceiro caso dizemos que o sistema é impossível.

Teorema 29 *i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.*

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, então a solução será única.

iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

(ver [1], pg. 61, 62 e 63).

1.4 Teorema de Cramer

Consideremos um sistema linear onde o número de equações é igual ao número de incógnitas (isto é $m = n$). Nestas condições, A é uma matriz quadrada; seja $D = det(A)$.

Teorema 30 *Seja S um sistema linear com o número de equações igual ao de incógnitas. Se $D \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, tal que*

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

em que D_i é o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a i-ésima coluna dos termos independentes das equações do sistema. (ver [5], pg. 122 e 123).

Exemplo 31 *Seja o sistema* $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

Temos que $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$

Logo o sistema tem solução única. Determinemos esta solução.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Logo,

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-4} = 1, y = \frac{D_2}{D} = \frac{-12}{-4} = 3 \text{ e } z = \frac{D_3}{D} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

Portanto a solução única do sistema é $(1, 3, 2)$.

1.4.1 Teorema de Cramer e escalonamento

Usando o teorema de Cramer e a técnica do escalonamento podemos "potencializar" a resolução de sistemas lineares.

Exemplo 32 *Vamos discutir o sistema abaixo*

$$\begin{cases} ax + 3ay = 0 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$$

I. Sabemos que se $D = \begin{vmatrix} a & 3a \\ 2 & a \end{vmatrix} \neq 0$, *o sistema tem solução única (teorema de Cramer). Assim, os valores de a para os quais $D \neq 0$ são os que tornam o sistema indeterminado ou impossível.*

Examinemos este caso:

$$D = \begin{vmatrix} a & 3a \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 6a = a(a-6) = 0$$

o que implica $a = 0$ *ou* $a = 6$.

II. Se $a = 0$, *o sistema fica:*

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 2x + 0y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y \text{ é qualquer.}$$

Assim, o sistema é indeterminado.

III. Se $a = 6$, *o sistema fica:*

$$\begin{cases} 6x + 18y = 0 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Escalonando vem,

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases} \text{ o sistema é impossível.}$$

Resumindo, temos:

$$\begin{cases} a \neq 0 \text{ e } a \neq 6 & \rightarrow & \text{sistema possível determinado} \\ a = 0 & \rightarrow & \text{sistema indeterminado} \\ a = 6 & \rightarrow & \text{sistema impossível} \end{cases}.$$

1.5 Um processo para cálculo da inversa de uma matriz

Dizemos que uma matriz H é inversível quando existe uma matriz M tal que $HM = MH = I$, onde I é a matriz identidade. O procedimento seguinte é baseado nas operações elementares sobre as linhas de uma matriz, normalmente chamado de escalonamento. A explicação do mesmo vai ser feita através do exemplo abaixo.

Exemplo 33 : *Seja* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Coloquemos a matriz junto com a matriz identidade e apliquemos as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corrresponde a matriz A) à forma escada linha reduzida, lembrando que cada operação deve ser efetuada simultaneamente na parte direita.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Trocando a primeira e segunda linhas, obtemos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Agora, somamos à quarta a primeira e à segunda, a primeira linha multiplicada por -2.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Subtraímos a segunda linha da terceira, obtendo

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Trocamos o sinal da terceira linha e, subsequentemente, anulamos o resto da terceira coluna.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Finalmente, obtemos a identidade à esquerda e a inversa de A à direita.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

E assim, a inversa de A é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.6 Questões

1.(3ª questão do ano de 2013). Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ 5x + 3y + 2z = 5 \\ 7x + 7y + 8z = 15 \end{cases}$$

A solução deste sistema é interpretada geometricamente por

a) Dois planos paralelos e um plano cruzando-os.

b) Três planos paralelos coincidentes.

c) Três planos paralelos, sendo dois coincidentes e um concorrente.

d) Três planos distintos cruzando-se em uma única reta.

e) Três planos distintos cruzando-se em um único ponto.

Resolução: Escalonando o sistema linear acima encontramos,

$$\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ \quad + 4y + z = 5 \\ \quad + \quad + 81z = 81 \end{cases}$$

Logo, $z = 1, y = 1$ e $x = 0$, e a solução do sistema é $(0, 1, 1)$.

Analisando as opções, as alternativas b), c) e d) significam que os 3 planos teriam mais de um ponto em comum. Na alternativa a), se os planos paralelos forem coincidentes, teremos mais de um ponto comum para os três planos. Caso sejam paralelos não coincidentes, não existirá nenhum ponto comum para os 3 planos. Portanto, a resposta correta é a alternativa e).

2.(1ª questão do ano de 2012). Com base no sistema de equações de variáveis x, y e z dada por

$$\begin{cases} xy - 2\sqrt{y} + 3yz = 8 \\ 2xy - 3\sqrt{y} + 2yz = 7 \\ -xy + \sqrt{y} + 2yz = 4 \end{cases}$$

considere as afirmativas a seguir.

I. O sistema é possível e determinado.

II. O posto da matriz ampliada do sistema é igual a 2.

III. Na matriz transposta dos coeficientes associadas ao sistema $a_{12} = -3$.

IV. A matriz dos coeficientes associada ao sistema é inversível.

Assinale a alternativa correta

a) Apenas as alternativas I e II estão corretas

b) Apenas as alternativas I e IV estão corretas

c) Apenas as alternativas III e IV estão corretas

d) Apenas as alternativas I, II e III estão corretas

e) Apenas as alternativas II, III e IV estão corretas

Resolução: Podemos proceder como num sistema convencional. Façamos o escalonamento:

$$\begin{cases} xy - 2\sqrt{y} + 3yz = 8 \\ 2xy - 3\sqrt{y} + 2yz = 7 \\ -xy + \sqrt{y} + 2yz = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy - 2\sqrt{y} + 3yz = 8 \\ 0 + \sqrt{y} - 4yz = -9 \\ 0 - \sqrt{y} + 5yz = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} L_2 \to L_2 - 2L_1 & \\ L_3 \to L_3 + L_1 & \qquad L_3 \to L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} xy - 2\sqrt{y} + 3yz = 8 \\ 0 + \sqrt{y} - 4yz = -9 \\ 0 + 0 + yz = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy - 2\sqrt{y} + 0 = -1 \\ 0 + \sqrt{y} + 0 = 3 \\ 0 - 0 + yz = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} L_1 \to L_1 - 3L_3 & \\ L_2 \to L_2 + 4L_3 & \qquad L_1 \to L_1 + 2L_2 \end{array}$$

e assim chegamos a

$$\begin{cases} xy - 0 + 0 = 5 \\ 0 + \sqrt{y} + 0 = 3 \\ 0 + 0 + yz = 3 \end{cases}.$$

Logo $y = 9, z = \dfrac{1}{3}$ e $x = \dfrac{5}{9}$.

Assim, a alternativa I é verdade. A alternativa II é falsa, pois o posto da matriz ampliada é 3. A alternativa III também é falsa, pois neste caso $a_{12} = 0$. A alternativa IV é verdade, pois o determinante desta matriz é diferente de zero, trata-se de I_3, e sabemos que $det(I_3) = 1$. Logo a resposta é a opção b).

3.(1ª questão do ano de 2011). Considere a matriz a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

No método da eliminação de Gauss, foram efetuados os seguintes passos para se obter uma matriz na forma degrau:

I. Subtraiu-se a metade da primeira linha da segunda

II. Subtraiu-se o dobro da primeira linha da terceira

III. Adicionou-se o triplo da segunda linha à terceira

Em termos matriciais, o processo corresponde a:

a) Adicionar à A a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Multiplicar A, à esquerda, por $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

c) Multiplicar A, à direita, por $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Multiplicar A, à esquerda, por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -7/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

e) Subtrair de A a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Resolução: Falando de um modo simples, fazer operações sobre as linhas da matriz A é o mesmo que fazer as mesmas operações sobre as linhas de I_3 (matriz identidade de ordem 3) e depois multiplicá-la por A. Desta forma vamos escrever I_3 ao lado de A, e operá-las simultaneamente.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ e depois de efetuarmos os passos I, II e III chegamos a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -7/2 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Logo a resposta é a alternativa d).

4.(3ª questão do ano de 2010). Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Então A^7 vale:

a) $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2^7 & -2^7 & 1 \\ 2^7 & -2^7 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 16 & -21 & 1 \\ 34 & -64 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Resolução: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. É fácil notar que teremos $A^4 = A^2$, pois $A^3 = A$. Desta forma, podemos perceber que $A^7 = A$. Resposta, alternativa e).

5.(2ª questão do ano de 2009). Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, o reultado de $A \times B + C^T$ é:

a) $\begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 48 & 52 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 20 & 27 \\ 46 & 52 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 24 & 39 \\ 34 & 48 \end{pmatrix}$ e) Nenhuma das respostas anteriores

Resolução: $AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ e $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Logo $A \times B + C^T = \begin{pmatrix} 20 & 27 \\ 46 & 52 \end{pmatrix}$. Resposta,

opção c).

6.(2ª questão do ano de 2006). Seja o sistema de equações lineares nas variáveis x, y e z.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Assim, a alternativa com os valores de a para os quais o sistema possui respectivamente:

(i) nenhuma solução, (ii) mais de uma solução, (iii) uma única solução

a) (i) $a = -3$; (ii) $a = 2$; (iii) $a \neq 2$ e $a \neq -3$

b) (i) $a \neq 2$ e $a \neq -3$; (ii) $a = 2$; (iii) $a = -3$

c) (i) $a = 2$; (ii) $a \neq 2$ e $a \neq 3$; (iii) $a = -3$

d) (i) $a = -3$; (ii) $a \neq 2$ e $a \neq -3$; (iii) $a = 2$

e) (i) $a = -3$; (ii) $a = 2$; (iii) $a = 2$ ou $a = -3$

Resolução: Seja B a matriz dos coeficientes associada ao sistema acima. Então,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow det(B) = -a^2 - a + 6.$$

Se $det(B) \neq 0$, então o sistema é possível e determinado, ou seja, tem uma única solução. Como $-a^2 - a + 6 = -(a+3)(a-2)$, então se $a \neq -3$ e $a \neq 2$, temos $det(B) \neq 0$. Logo, a resposta é a alternativa a).

7.(18ª questão do ano de 2004). O valor do parâmetro m, para que o sistema

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = 0 \\ x + (m-1)y - z = 0 \\ x + my + z = 0 \end{cases}$$

admita soluções distintas de $(0, 0, 0)$ é:

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2 e) 3

Resolução: Podemos pensar do mesmo modo como na questão anterior. Escrevamos a matriz

dos coeficientes, e denotemos por B esta matriz. Segue que,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1 & m-1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det(B) = m-2.$$

Como trata-se de um sistema homogêneo, só temos duas opções, ou o sistema é possível e determinado ou é possível e indeterminado. Se $det(B) = 0$, o sistema é possível e indeterminado, ou seja, temos soluções diferentes da trivial $(0,0,0)$. Logo, façamos $det(B) = 0 \Rightarrow m = 2$. Resposta, opção d).

8.(18ª questão do ano de 2003). O sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ 4x + y + (a^2-14)z = a+2 \end{cases}$$

tem uma única solução (x, y, z). Então

a) $a = -4$ b) $a = 4$ c) $a \neq 4$ e $a \neq -4$ d) $a = 4$ ou $a = -4$ e) $a = -1$

Resolução: Escalonemos o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ 4x + y + (a^2-14)z = a+2 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 0 - 7y + 6z = -10 \\ 0 - 7y + (a^2-10)z = a-14 \end{cases} \quad L_3 \to L_3 - L_2$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 0 - 7y + 6z = -10 \\ 0 + 0 + (a^2-16)z = a-4 \end{cases}$$

É fácil notar que se $a = -4$ ou $a = 4$, o sistema terá solução única. Logo a resposta é a alternativa d).

9.(19ª questão do ano de 2003). Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 - A + I = 0$, onde I é a matriz identidade. É correto afirmar que:

a) a matriz inversa de A é I

b) a matriz inversa de A é $A - I$

c) a matriz inversa de A é $A - A^2$

d) a matriz inversa de A é $I - A$

e) a matriz A não possui matriz inversa

Resolução: Podemos escrever $A^2 - A + I = A(A - I) + I = 0$. Assim, temos que

$$A(A - I) = -I \Rightarrow A(I - A) = I \Rightarrow A^{-1} = I - A.$$

Logo, a resposta é a opção d).

10.(18ª questão do ano de 2002). O determinante da matriz dada abaixo é

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) 96

b)-96

c) 86

d)-86

e) 46

Resolução: Se trocarmos de posição as colunas 1 e 5, a matriz irá se tornar uma matriz triangular. Note,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, por ser triangular, o determinante da matriz é o produto dos elementos da diagonal principal. Logo, $det(M) = 1 \cdot 8 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 3 = -96$. Como trocamos a posição de duas colunas, o determinante muda de sinal. Portanto a resposta é 96, alternativa a).

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

Definição 34 *Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \to V$, e uma multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \to V$, tais que , para quaisquer u, v pertencentes a V e a, b pertencentes a $\mathbb{R}$, as propriedades de i) a viii) são satisfeitas.*

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$

ii) $u + v = v + u$

iii) Existe 0 *pertencente a* V *tal que* $u + 0 = u$. *(*0 *é dito vetor nulo)*

iv) Existe $-u$ *pertencente a* V *tal que* $u + (-u) = 0$

v) $a(u + v) = au + av$

vi) $(a + b)v = av + bv$

vii) $(ab)v = a(bv)$

viii) $1u = u$

Exemplo 35 : *O conjunto dos vetores no espaço, denotado por* $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}\}$ *é um espaço vetorial.*

Exemplo 36 : *O conjunto* $W = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$ *também é um espaço vetorial.*

Exemplo 37 : $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *o conjunto das matrizes de ordem* $m \times n$ *com a soma e produto por escalar usuais.*

Exemplo 38 : *O conjunto* $P_n(\mathbb{R})$ *dos polinômios de grau no máximo* n.

2.1 Vetores

Um elemento de um Espaço Vetorial é chamado de vetor. Os tipos mais comuns de vetores são os vetores de espaços do tipo $\mathbb{R}^n$, os quais são denotados por $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Os polinômios nos espaços do tipo P_n são também chamados de vetores, assim como as matrizes em Espaços Vetoriais de matrizes, e assim por diante.

2.1.1 Algumas características dos Vetores

Vamos ilustrar os casos de vetores em $\mathbb{R}^2$.

i) Multiplicação de um vetor por um número.

Multiplicar um vetor v por um número $k > 0$ é considerar um novo vetor $w = kv$ que possui a mesma direção de v e tem como comprimento k vezes o comprimento de v. Se $k < 0$, o vetor $w = kv$ será igual ao oposto do vetor $|k|v$. Se $k = 0$, $w = kv$ será o vetor nulo.

Seja $v = (a, b)$, então $w = kv = (ka, kb)$. Se tivermos, por exemplo, $v = (1, 2)$ e $k = 3$, teremos $w = kv = (3, 6)$. De um modo geral, sendo $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, teremos $w = (kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)$.

ii) Adição de dois vetores

Sejam $u = (h, m)$ e $v = (a, b)$. Então $u + v = (h + a, m + b)$. Se tivermos, $u = (2, 3)$ e $v = (5, 1)$, obteremos $u + v = (7, 4)$. De um modo geral, sejam $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $v = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$. Teremos, $u + v = (x_1 + z_1, x_2 + z_2, \cdots, x_n + z_n)$.

iii) "Produto Escalar"entre dois vetores

Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$. Então o chamado produto escalar entre u e v será, $uv = (ac) + (bd)$. O produto escalar é um número.

Tomemos $u = (1, 2)$ e $v = (3, 4)$ e teremos $uv = 3 + 8 = 11$. De um modo geral, sejam $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $v = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$. Teremos, $uv = x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n$.

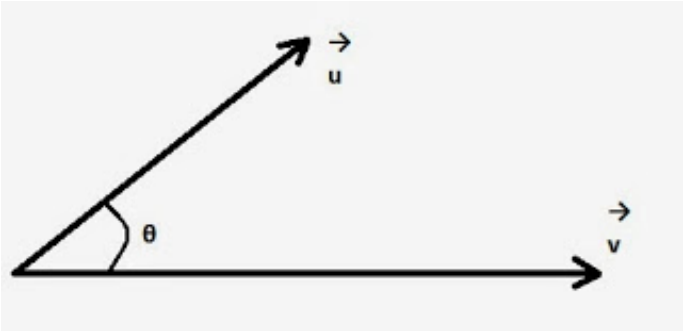
Uma propriedade importante do produto escalar é que se $uv = 0$, significa que estes vetores são perpendiculares entre si.

iv) Módulo de um vetor

Seja $v = (a, b)$. O módulo de v, denotado por $|v|$, será $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$. De um modo geral, sendo $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, teremos, $|v| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

v) Ângulo entre dois vetores

O ângulo entre dois vetores não nulos u e v é o ângulo (θ) formado por duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de mesma origem O. Onde $u = \overrightarrow{OA}$ e $v = \overrightarrow{OB}$ e $(0 \leq \theta \leq \pi)$ com θ em radianos.



Se $u//v$ e os dois vetores tem o mesmo sentido, então $\theta = 0$.

O ângulo entre os vetores pode ser calculado pela seguinte fórmula, $uv = |u||v|cos(\theta)$, ou seja, calculamos o ângulo entre dois vetores através da fórmula do produto escalar.

2.2 Subespaços Vetoriais

Muitas vezes, dentro dos espaços vetoriais, temos conjuntos que também são espaços vetoriais. Estes recebem o nome de Subespaços Vetoriais.

Definição 39 *Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:*

i) Para quaisquer u, v em W tivermos que $u + v$ pertence a W.

ii) Para quaisquer a em $\mathbb{R}$, u em W tivermos que au pertence a W.

Observação: Basta que estes dois itens sejam satisfeitos para que um subconjunto de um espaço vetorial seja um subespaço, sem a necessidade de verificação das propriedades i) a viii) listadas anteriormente. Uma característica que também deve ser dita é que todo Espaço Vetorial admite pelo menos dois subespaços, que são, o conjunto formado somente pelo vetor nulo e o próprio Espaço Vetorial.

Exemplo 40 *Os planos e as retas que passam pela origem são subespaços de $V = \mathbb{R}^3$.*

Exemplo 41 $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5); x_i \in \mathbb{R}\}$ *é subespaço de $V = \mathbb{R}^5$.*

Exemplo 42 *$V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e W sendo o subconjunto das matrizes triangulares superiores. Desta forma W é um subespaço de V.*

2.3 Combinação Linear

Definição 43 *Seja V um Espaço Vetorial real. Dados $v_1, v_2, \cdots, v_n$ em V e $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reais. Então o vetor,*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

é um elemento de V ao que chamamos combinação linear de $v_1, \cdots, v_n$.

Uma vez fixados os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores que são combinação linear destes, é um subespaço vetorial. W é chamado subespaço gerado por $v_1, \cdots, v_n$ e usamos a notação

$$W = [v_1, \cdots, v_n].$$

Observe que, formalmente, podemos escrever

$$W = [v_1, \cdots, v_n] = \{v \text{ em } V; v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n, a_i \text{ em } \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

Exemplo 44 : $V = \mathbb{R}^3, v \in V, v \neq 0$. *Então* $[v] = \{av : a \in \mathbb{R}\}$, *isto é,* $[v]$ *é a reta que contém o vetor* v.

Exemplo 45 : $V = \mathbb{R}^2, v_1 = (1,0)$ *e* $v_2 = (0,1)$. *Logo* $V = [v_1, v_2]$, *pois dado* $v = (x,y) \in V$, *temos* $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, *ou seja,* $v = xv_1 + yv_2$.

2.4 Dependência e Independência Linear

Definição 46 *Sejam* V *um espaço vetorial e* $v_1, \cdots, v_n$ *em* V. *Dizemos que o conjunto* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é linearmente independente (L.I), ou que os vetores* $v_1, \cdots, v_n$ *são LI, se a equação*

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. *No caso em que algum* $a_i \neq 0$ *dizemos que* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é linearmente dependente (L.D.), ou que os vetores* $v_1, \cdots, v_n$ *são LD.*

Vetores linearmente dependentes podem ser caracterizados de uma outra maneira. Através do seguinte teorema:

Teorema 47 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é LD se, e somente se um deles for combinação linear dos outros. (ver [1], pg. 114 e 115).*

Exemplo 48 : *O conjunto* $\{v_1, v_2\}$ *é LD se e somente se* v_1 *e* v_2 *estiverem na mesma reta, que passa pela origem.*

Exemplo 49 : *Sejam* $v_1, v_2, v_3 \in V$. $\{v_1, v_2, v_3\}$ *é LD se estes três vetores estiverem no mesmo plano, que passa pela origem.*

Exemplo 50 : $V = \mathbb{R}^2, e_1 = (1,0)$ *e* $e_2 = (0,1)$. *Note que* e_1 *e* e_2 *são LI, pois*

$$a_1e_1 + a_2e_2 = 0 \Rightarrow a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow (a_1, a_2) = (0,0) \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

2.5 Base de um Espaço Vetorial

Definição 51 *Um conjunto* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *de vetores de* V *será uma base de* V *se:*

i) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é LI*

ii) $[v_1, \cdots, v_n] = V$. *Ou seja, o conjunto deve gerar* V.

Exemplo 52 : $V = \mathbb{R}^2, e_1 = (1,0)$ *e* $e_2 = (0,1)$. *O conjunto* $\{e_1, e_2\}$ *é uma base de* V, *mais comumente chamada de base canônica de* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 53 : *O conjunto* $\{(1,1),(0,1)\}$ *é também uma base de* $V = \mathbb{R}^2$. *Pois,* $a(1,1) + b(0,1) = (0,0) \Rightarrow a = b = 0$. *Assim o conjunto é LI.* $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$, *ou seja, todo vetor de* $\mathbb{R}^2$ *é uma combinação linear dos vetores* $(1,1)$ *e* $(0,1)$. *Desta forma temos que* $V = [(1,1),(0,1)]$.

Exemplo 54 : *O conjunto* $\{(0,1),(0,2)\}$ *não é uma base de* $\mathbb{R}^2$, *pois o conjunto é LD. Vemos fácilmente que* $(0,2) = 2(0,1)$.

Definição 55 *Seja o conjunto* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *uma base de um espaço vetorial* V. *Dizemos que esta é uma base ortogonal quando todos os seus vetores são dois a dois ortogonais. Quando além de ortogonal, tivermos que todos os vetores tem módulo igual a 1, dizemos que* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é uma base Ortonormal.*

2.6 Alguns Teoremas

Obs: Os teoremas que seguem não serão demonstrados.

Teorema 56 *Seja um Espaço Vetorial* V *gerado por um conjunto finito de vetores* $v_1, v_2, \cdots, v_n$. *Então, qualquer conjunto com mais de* n *vetores é necessariamente LD. Assim qualquer conjunto LI tem no máximo* n *vetores. (ver [1], pg. 118 e 119).*

Corolário 57 *Qualquer base de um Espaço Vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado DIMENSÃO de* V, *e denotado por dim* V. *(ver [1], pg. 119).*

Corolário 58 *Se dim* $V = n$, *então qualquer conjunto de* n *vetores LI formará uma base de V. (ver [1], pg. 120)*

Teorema 59 *Se* U *e* W *são subespaços de um espaço vetorial* V *que tem dimensão finita, então dim* $U \leq$ *dim* V. *Além disso, dim* $(U + W) =$ *dim* $U +$ *dim* $W -$ *dim* $(U \cap W)$. *(ver [1], pg. 120).*

Teorema 60 *Dada uma base* $H = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *de* V, *cada vetor de* V *é escrito de maneira única como combinação linear de* $v_1, v_2, \cdots, v_n$. *(ver [1], pg. 120).*

Definição 61 *Sejam $H = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de V, e $v \in V$ onde $v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_n$. Chamamos estes números $a_1, \cdots, a_n$ de coordenadas de v em relação à base H e denotamos por*

$$[v]_H = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Exemplo 62 : $V = \mathbb{R}^2, H = \{(1,0),(0,1)\}, (4,3) = 4(1,0) + 3(0,1)$. *Portanto as coordenadas do vetor $(4,3)$ na base H são 4 e 3.* $[(4,3)]_H = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.7 Produto Vetorial

O produto vetorial é um vetor, diferente do produto escalar $u \cdot v$ que é um número real. Para simplificar o cálculo do produto vetorial, faremos uso de determinantes.

Definição 63 *Chama-se produto vetorial de dois vetores $u = x_1i + y_1j + z_1k$ e $v = x_2i + y_2j + z_2k$, com $i = (1,0,0), j = (0,1,0)$ e $k = (0,0,1)$, tomados nesta ordem, o vetor*

$$u \times v = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k,$$

ou também, escrevemos

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Apesar desta última notação não ser exatamente um determinante, ela é usada devido a sua fácil memorização e agilidade nos cálculos.

Exemplo 64 *Sejam $u = 5i + 4j + 3k$ e $v = i + k$ calculemos $u \times v$,*

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} k = 4i - 2j - 4k = (4, -2, -4).$$

2.7.1 Algumas Propriedades do Produto Vetorial

1. $v \times u = -(u \times v)$, ou seja, o produto vetorial não é comutativo;

2. $u \times v = 0$ se, e somente se, $u//v$;

3. $u \times u = 0$;

4. $u \times 0 = 0$;

5. o vetor $u \times v$ é simultaneamente ortogonal a u e v, sendo u e v não nulos e não paralelos;

6. o produto vetorial não é associativo, isto é, em geral, $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$;

7. para quaisquer vetores u, v, w e o escalar α, são válidos os itens abaixo,

   [I] $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ e $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$;

   [II] $\alpha \cdot (u \times v) = (\alpha u) \times v = u \times (\alpha v)$;

   [III] $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$.

2.8 Questões

11.(6ª questão do ano de 2013). Com relação ao produto vetorial no $\mathbb{R}^3$, assinale a alternativa correta.

a) Vale a lei do cancelamento para produtos vetoriais

b) Vale a propriedade associativa

c) Vale a propriedade comutativa

d) Vale a propriedade distributiva com relação a adição de vetores

e) Se o produto vetorial entre dois vetores é nulo, então esses vetores são nulos.

Resolução: Observando as propriedades do produto vetorial descritas em 2.7.1 perceberemos facilmente que a alternativa correta é d).

12.(8ª questão do ano de 2013). Com relação ao conjunto $B = \{(1, 2), (3, 4)\}$ do plano cartesiano e ao produto interno usual do plano, considere as afirmativas a seguir.

I. B é uma base do plano cartesiano

II. Bases têm apenas coordenadas 0 ou 1.

III. B é uma base ortogonal do plano

IV. Uma base ortonormal ao conjunto B é $\{(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})\}$

Assinale a alternativa correta

a) Somente as alternativas I e II estão corretas

b) Somente as alternativas I e IV estão corretas

c) Somente as alternativas III e IV estão corretas

d) Somente as alternativas I, II e III estão corretas

e) Somente as alternativas II, III e IV estão corretas

Resolução: Analisemos as alternativas.

Podemos perceber facilmente que o conjunto $B = \{(1,2),(3,4)\}$ é L.I. Como qualquer conjunto L.I. formado por dois vetores em $\mathbb{R}^2$ é uma base, segue $B = \{(1,2),(3,4)\}$ é uma base do plano cartesiano. Logo, I é verdade.

A alternativa II é falsa, o conjunto B serve de contra-exemplo.

A alternativa III também é falsa. Para que B fosse uma base ortogonal deveríamos ter $u \cdot v = 0$, e isto não acontece pois $u \cdot v = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$.

IV é verdade, pois cada vetor tem norma igual a $1u.c.$ e a multiplicação entre eles resulta em zero.

Logo a resposta é a opção b).

13.(2ª questão do ano de 2012). Seja o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$. Com relação a este espaço assinale a alternativa correta.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x - 1\}$ é um subespaço vetorial de V.

b) O conjunto $\{(1,2),(2,4)\}$ é base de V.

c) Existem vetores u e v em V tais que $u + v \neq v + u$.

d) Se S_1 e S_2 são dois subespaços quaisquer de V, então vale a relação: $(dim\ S_1 + dim\ S_2 - (dim\ S_1 \cap dim\ S_2)) > 2$.

e) V é soma direta de $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) = (x,0)\}$ e $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) = (0,y)\}$.

Resolução: A alternativa a) é falsa. É fácil ver que o conjunto S não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, pois $(0,0) \notin S$.

b) É falsa, pois o conjunto $\{(1,2),(2,4)\}$ é L.D.

c) É falsa, pois para quaisquer vetores $u, v \in V = \mathbb{R}^2$, temos $u + v = v + u$.

d) É falsa, basta tomarmos como subespaços de $V = \mathbb{R}^2$ $S_1 = \{0\}$ e $S_2 = \mathbb{R}$.

Logo a resposta correta é a alternativa e).

14.(8ª questão do ano de 2012). Considere u e v dois vetores em $\mathbb{R}^2$. Com relação a esses vetores, assinale a alternativa correta.

a) O vetor $b.u$, com b em $\mathbb{R}$, é um vetor que tem o mesmo sentido do vetor u.

b) Se $u = (2, 3)$ e $v = (1, 5)$ então o produto escalar $u.v = 15$.

c) Os vetores u e v são perpendiculares se e somente se, seu produto escalar $u.v = 0$.

d) Se $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ então $|u + v| < |u|$.

e) Se $u = (-2, -2)$ e $v = (0, -2)$ então o ângulo entre u e v é $\pi/6$.

Resolução: a) É falsa, pois a depender do sinal de b, podemos ter o vetor bu com sentido oposto a u.
b) É falsa, pois $u \cdot v = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 17$.
c) É a resposta correta.
d) É falsa. Basta tomar $u = (1, 0)$ e $v = (2, 0)$. Assim, $|u + v| = 3$ e $|u| = 1$.
e) É falsa. Basta usar a regra $u \cdot v = |u||v|cos(\theta)$.
Resposta certa, opção c).

15.(3ª questão do ano de 2011). Suponha que, em vez de usar a base padrão $\{e_1, e_2\}$ para $\mathbb{R}^2$, onde $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ deseja-se utilizar a base $\{u_1, u_2\}$, com $u_1 = (3, 2)$ e $u_2 = (1, 1)$. As coordenadas do vetor $x = [7, 4]$ em relação a u_1 e u_2 são:

a) $[0, 1]$

b) $[1, -2]$

c) $[3, -2]$

d) $[4, 3]$

e) $[15, 18]$

Resolução: Basta fazermos $(7, 4) = a(3, 2) + b(1, 1)$. Assim,

$$\begin{cases} 3a + b = 7 \\ 2a + b = 4 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema encontramos $a = 3$ e $b = -2$. Logo, alternativa c) é a resposta.

16.(5ª questão do ano de 2007). Dados dois vetores u e v em $\mathbb{R}^2$, o vetor u tem origem em $(-1,4)$ e extremidade em $(3,5)$ e o vetor v é igual a $(-10,7)$. Considere w o vetor em $\mathbb{R}^2$ que apresenta comprimento igual 5 e é perpendicular à soma dos vetores u e v. Neste caso, o vetor w pode ser expresso por:

a) $(3,4)$

b) $(3,-4)$

c) $(-4,3)$

d) $(4,3)$

e) $(-3,-4)$

Resolução: O vetor u é escrito da seguinte forma,

$$u = (3,5) - (-1,4) = (4,1).$$

Sabemos que $|w| = 5$ e que $v = (-10,7)$, e assim $u + v = (-6,8)$. Seja $w = (x,y)$. Logo, devemos ter $(-6,8)\cdot(x,y) = 0 \Rightarrow -6x + 8y = 0$ (I). Como $|w| = 5$, temos $\sqrt{x^2+y^2} = 5$ (II). Com (I) e (II) montamos o sistema

$$\begin{cases} -6x & + & 8y & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & = & 25 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 3 \ e \ x = \pm 4.$$

Desta forma, nos sobram como alternativas as letras c) e d). Observe que x e y devem ter o mesmo sinal, pois do contrário a equação (I) não é satisfeita. Portanto, a resposta é d) $(4,3)$.

17.(13ª questão do ano de 2006). Dados dois vetores no espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$, $u = (1,3,-2,7)$ e $v = (0,7,2,2)$ pode-se afirmar que:

a) O quadrado da norma de u é igual a 58

b) O quadrado da distância entre u e v é dada por 63

c) O quadrado da norma de v é igual a 57

d) Os vetores u e v são ortogonais

e) nenhuma das anteriores

Resolução: $u = (1, 3, -2, 7)$ e $v = (0, 7, 2, 2) \Rightarrow |u| = \sqrt{63}$ e $|v| = \sqrt{57}$. Portanto, a resposta é a opção c).

18.(15ª questão do ano de 2006). Não é correto afirmar que:

a) Se as colunas de uma matriz são vetores dois a dois ortogonais, então sua inversa é sua transposta

b) Se a inversa de uma matriz é ela própria, então toda potência dessa matriz é ela própria ou a identidade

c) Se uma matriz singular é produto de duas outras matrizes quadradas, então uma destas é também singular

d) Se três matrizes quadradas A, B e C satisfazem $A(B - C) = 0$, então $A = 0$ ou $B = C$.

e) Se A e B são matrizes triangulares inferiores então AB também é triangular inferior

Resolução: A alternativa d) é falsa, pois se fizermos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ então}$$

$$A \cdot (B - C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e no entanto, $A \neq 0$ e $B \neq C$. Resposta, opção d).

19.(5ª questão do ano de 2004). No $\mathbb{R}^3$ com o produto escalar usual, tome $v = (1, -1, 0)$ e o subespaço S gerado por $\{(1, 2, 1), (-1, 1, -1)\}$. O vetor de S mais próximo de v é

a) $(1/2, -1, 1/2)$

b) $(1, -1, 1)$

c) $(2/3, -1, 1/3)$

d) $(1/100, -1, 1/100)$

e) $(2, -1, 2)$

Resolução: Entre as alternativas, é fácil notar que o vetor mais "parecido"com $v = (1, -1, 0)$, é

o da alternativa b) $(1, -1, 1)$, pois diferem apenas na 3ª coordenada. Além disso, este vetor pertence a S, pois $(1, -1, 1) = 0 \cdot (1, 2, 1) - 1 \cdot (-1, 1, -1)$. Logo, a resposta é b) $(1, -1, 1)$.

20.(7ª questão do ano de 2004). Se A é uma matriz $n \times n$ de entradas reais, cujas linhas são linearmente independentes, então não se pode afirmar que:

a) A é inversível

b) $A \cdot X = B$ tem solução única X para todo $B \in \mathbb{R}^n$

c) As colunas de A são linearmente independentes

d) $\det(A) = 1$

e) O posto de A é n

Resolução: Tomemos a matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que as linhas de A são vetores linearmente independentes. Como A é uma matriz diagonal, então $det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$. Logo, a resposta é a alternativa d).

Capítulo 3

Transformações Lineares

Definição 65 *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (Aplicação Linear) é uma função de V em W, $T : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*

i) Quaisquer que sejam u e v em V, temos $T(u+v) = T(u) + T(v)$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, temos $T(kv) = kT(v)$

Exemplo 66 : *$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(u) = au$. É fácil verificar que esta é uma transformação linear, pois $T(u+v) = a(u+v) = au + av = T(u) + T(v)$ e $T(kv) = a(kv) = k(av) = kT(v)$.*

Exemplo 67 : *$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(u) = u^2$. Neste caso não temos uma transformação linear, pois $T(u+v) = (u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$ e $T(u) + T(v) = u^2 + v^2$. Logo $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$.*

Exemplo 68 : *$V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$. $T : V \to W$ definida por $T(x, y) = (2x, 0, x + y)$. Facilmente podemos perceber que T é uma transformação linear.*

3.1 Transformações do Plano no Plano

3.1.1 Expansão (ou Contração) Uniforme.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}$ definida por $T(v) = av$. Como exemplo temos, $T(x, y) = 2(x, y)$. Esta função leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de v, mas de módulo maior. Se tomássemos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = 1/2(x, y)$, teríamos que T seria uma contração.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.1.2 Reflexão em torno do Eixo-x.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, -y)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.1.3 Reflexão na Origem

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-x, -y)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.1.4 Rotação de um Ângulo b: (no sentido horário)

$x' = rcos(a + b) = rcos(a)cos(b) - rsen(a)sen(b)$. Mas $rcos(b) = x$ e $rsen(b) = y$. Então $x' = xcos(b) - ysen(b)$.

Analogamente, $y' = rsen(a + b) = r(sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)) = ycos(b) + xsen(b)$. Assim, $T_b(x, y) = (xcos(b) - ysen(b), ycos(b) + xsen(b))$ ou na forma coluna,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} xcos(b) & -ysen(b) \\ ycos(b) & xsen(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & cos(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Consideremos o caso particular onde $b = \pi/2$. Neste caso, $cos(b) = 0$ e $sen(b) = 1$. Então,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3.1.5 Cisalhamento Horizontal

$T(x, y) = (x + ay, y), a \in \mathbb{R}$. Por exemplo,

$T(x, y) = (x + 2y, y)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Obs: As transformações do Plano no plano apresentadas são lineares. Agora veremos uma aplicação não linear.

3.1.6 Translação

$T(x, y) = (x + a, y + c)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Esta transformação só será linear se $a = c = 0$.

3.2 Propriedades de uma transformação linear

Definição 69 *Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. A imagem de T é o conjunto dos vetores w em W tais que existe um vetor v em V, que satisfaz $T(v) = w$, ou seja,*

$$Im(T) = \{w \in W; T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$

Observe que $Im(T)$ é um subconjunto de W e, além disso, é um subespaço vetorial de W. As vezes escrevemos $Im(T)$ como $T(V)$.

Definição 70 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores v em V tais que $T(v) = 0$ é chamado núcleo de T, sendo denotado por $\ker(T)$, isto é,*

$$\ker(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$$

Note que $\ker(T) \subset V$ é um subconjunto de V e, ainda mais, é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 71 : *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$. Neste caso temos $\ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$, isto é, $\ker(T)$ é a reta $y = -x$. Podemos dizer ainda que $\ker(T) = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$. $Im(T) = \mathbb{R}$, pois dado $w \in \mathbb{R}$, $w = T(w, 0)$.*

Exemplo 72 : *$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$. A imagem de T será,*

$$Im(T) = \{(x, 2y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0), (0, 2, 0)]$$

Note que dim $Im(T) = 2$.

O núcleo de T é dado por:

$$\ker(T) = \{(x, y, z) : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) : (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0, Z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1)$$

Observe que dim $\ker(T) = 1$.

Definição 73 *Dada uma transformação linear $T : V \to W$, diremos que T é injetora se dados u e v em V com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$. Ou equivalentemente, T é injetora se dados u, v em V com $u \neq v$, tivermos $T(u) \neq T(v)$. Em outras palavras, T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.*

Definição 74 *A transformação linear $T : V \to W$ será sobrejetora se a imagem de T coincidir com W, ou seja $T(V) = W$. Em outras palavras, será sobrejetora se dado $w \in W$, existir $v \in V$ tal que $T(v) = w$.*

Exemplo 75 : *$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = (x, 0)$. É fácil ver que T é injetora, mas que não é sobrejetora.*

Exemplo 76 *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = x + y$. Nota-se facilmente que T é sobrejetora e não é injetora.*

Exemplo 77 *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, y)$. Facilmente percebemos que T é injetora e sobrejetora.*

Teorema 78 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear. Então $\ker(T) = \{0\}$, se e somente se T é injetora. (ver [1], pg. 154).*

Teorema 79 *Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então dim $\ker(T)$ + dim $Im(T)$ = dim V. (ver [1], pg. 154 e 155).*

Corolário 80 *Se dim V = dim W, então T linear é injetora se e somente se T é sobrejetora. (ver [1], pg. 155).*

Corolário 81 *Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear injetora. Se dim V = dim W, então T leva base em base. (ver [1], pg. 155 e 156).*

Definição 82 *Uma transformação linear $T : V \to W$ que é injetora e sobrejetora, ao mesmo tempo, recebe o nome de Isomorfismo. Quando há uma transformação assim entre dois espaços vetoriais dizemos que os dois espaços são isomorfos. A transformação linear do* **Exemplo** *77, citado anteriormente, é um exemplo.*

Um isomorfismo $T : V \to W$ tem uma aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$ que também é linear e isomorfismo.

Exemplo 83 : *$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$. T é um isomorfismo. Para calcular a sua inversa T^{-1}, façamos:*

Tomemos a base canônica de $\mathbb{R}^3$, sua imagem pela T é $\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ que ainda é uma base de $\mathbb{R}^3$. Como $T(1, 0, 0) = (1, 0, 1), T(0, 1, 0) = (-2, 0, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$, temos que $T^{-1}(1, 0, 1) = (1, 0, 0), T^{-1}(-2, 0, 1) = (0, 1, 0)$ e $T^{-1}(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$. Queremos calcular $T^{-1}(x, y, z)$. Para isto escrevemos (x, y, z) em relação a base $\{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, obtendo:

$$(x, y, z) = (x + 2z)/3(1, 0, 1) + (z - x)/3(-2, 0, 1) + y(0, 1, 0).$$

Então $T^{-1}(x, y, z) = (x + 2z)/3T^{-1}(1, 0, 1) + (z - x)/3T^{-1}(-2, 0, 1) + yT^{-1}(0, 1, 0)$. E obtemos, $T^{-1}(x, y, z) = ((x + 2z)/3, (z - x)/3, y)$

3.3 Transformações Lineares e Matrizes

A qualquer transformação linear podemos associar uma matriz, ou seja, toda transformação linear pode ser representada por uma matriz. Veremos inicialmente como, dados dois espaços vetoriais V e W com bases B e B' e uma matriz A, podemos obter uma transformação linear.

Consideremos $\mathbb{R}^2$ e as bases $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B' = \{(1,1),(-1,1)\}$ e a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Queremos associar a esta matriz A uma aplicação linear que dependa de A e das bases dadas B e B', isto é,

$$\begin{array}{rccc} T_a: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & v & \mapsto & T_a(v) \end{array}$$

Considere $v = (x,y)$. Seja $X = [v]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} = [T_a(v)]_{B'}$$

Então $T_a(v) = 2x(1,1) + y(-1,1) = (2x-y, 2x+y)$.

Em geral, dada uma matriz $A_{m\times n}$, ela é encarada como uma aplicação linear $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 84 : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. *Encontremos esta transformação linear.*

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, AX = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y+5z \\ 2x+4y-z \end{pmatrix} = [T_a(v)]_{B'}$$

Então $T_a(x,y,z) = (x-3y+5z)(1,0) + (2x+4y-z)(0,1) = (x-3y+5z, 2x+4y-z)$.

Agora iremos encontrar a matriz associada a uma transformação linear. Seja $T : V \to W$ linear, $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V e $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de W. Então $T(v_1), \cdots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{array}{rcccccc} T(v_1) & = & a_{11}w_1 & + & \cdots & + & a_{m1}w_m \\ & & & & \vdots & & \\ T(v_n) & = & a_{1n}w_1 & + & \cdots & + & a_{mn}w_m \end{array}$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema, anotada por $[T]_{B'}^{B}$ é chamada matriz de T em relação às bases B e B'.

$$A = [T]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Observe que T passa a ser a aplicação linear associada a matriz A e bases B e B', isto é $T_A = T$.

Exemplo 85 : *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. *Sejam* $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ *e* $B' = \{(1, 3), (1, 4)\}$. *Procuremos* $[T]_{B'}^{B}$.

Calculemos T *nos elementos da base* B, *temos:*

$$T(1, 1, 1) = (2, 5) = 3(1, 3) - 1(1, 4)$$

$$T(1, 1, 0) = (3, 1) = 11(1, 3) - 8(1, 4)$$

$$T(1, 0, 0) = (2, 3) = 5(1, 3) - 3(1, 4)$$

Assim,

$$[T]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Observe que se fixarmos outras bases B *e* B', *teremos uma outra matriz para a transformação* T.

Exemplo 86 : *Seja* T *a transformação linear do* **Exemplo** *85 e sejam* $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *e* $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Calculemos $[T]_{B'}^{B}$.

$$T(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, -2) = 1(1, 0) - 2(0, 1)$$

$$T(0, 0, 1) = (-1, 4) = -1(1, 0) + 4(0, 1)$$

$$[T]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 87 *Dadas as bases* $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *e* $B' = \{(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ *de* R^3, *encontremos a transformação linear* $T : R^2 \to \mathbb{R}^3$ *cuja matriz é*

$$[T]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Interpretando a matriz, temos:

$$T(1, 1) = 0(0, 3, 0) - 1(-1, 0, 0) - 1(0, 1, 1) = (1, -1, -1)$$

$$T(0,1) = 2(0,3,0) + 0(-1,0,0) + 3(0,1,1) = (0,9,3)$$

Devemos encontrar agora $T(x,y)$. Para isto escrevemos (x,y) em relação à base B:

$$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1) \Rightarrow T(x,y) = xT(1,1) + (y-x)T(0,1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T(x,y) = x(1,-1,-1) + (y-x)(0,9,3) \Rightarrow T(x,y) = (x, 9y-10x, 3y-4x)$$

3.4 Questões

21.(5ª questão do ano de 2013). Considerando a transformação linear do plano $T(x,y) = (15x+y, 34x+27y)$, assinale a alternativa correta.

a) A dimensão do núcleo de T é igual a 1

b) Existem (a,b) e (c,d) distintos tais que $T(a,b) = T(c,d)$

c) A imagem de T é diferente de $\mathbb{R}^2$

d) O núcleo de T é diferente de 0

e) T é inversível

Resolução: Analisemos as alternativas.

Para o $ker(T)$ façamos, $(15x+y, 34x+27y) = (0,0)$. Assim temos que $x = y = 0$, e portanto $ker(T) = \{0\}$. Logo, a) é falsa.

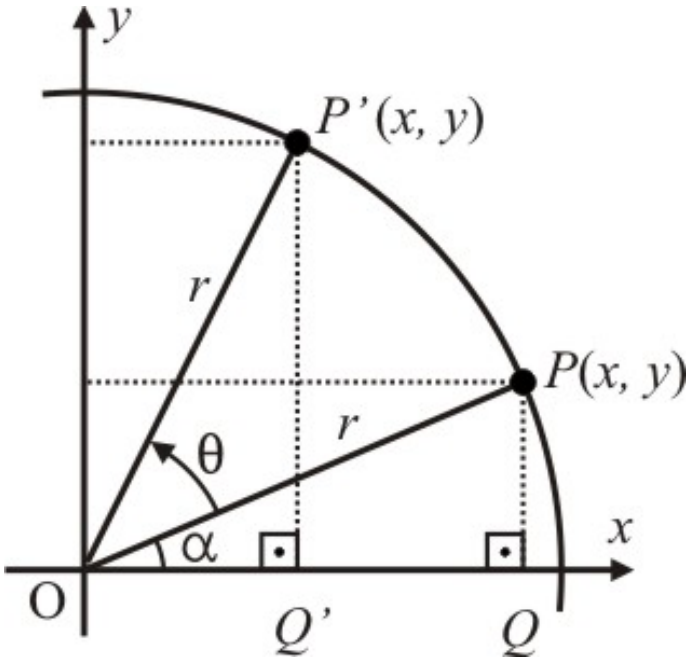
Como $ker(T) = \{0\}$, T é injetora, o que torna falsa a alternativa b).

Para achar a $Im(T)$ façamos, $(15x+y, 34x+27y) = x(15,34) + y(1,27)$ e assim $Im(T) = [(15,34),(1,27)]$, ou seja, $Im(T) = \mathbb{R}^2$. Alternativa c) é falsa.

Devido a alternativa a), a alternativa d) é falsa.

Como $Im(T) = \mathbb{R}^2$, T é sobrejetora, e sendo injetora e sobrejetora, T é inversível. Logo, a resposta é a alternativa e).

22.(5ª questão do ano de 2012). Uma rotação que gira cada vetor em $\mathbb{R}^2$ por um ângulo fixado, no sentido anti-horário, é uma transformação linear, conforme ilustra a figura a seguir.



Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação. Se $T(4,2) = (-2,4)$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor do ângulo procurado.

a) $\pi/6$

b) $\pi/4$

c) $\pi/3$

d) $\pi/2$

e) π

Resolução: Esta rotação pode ser representada da seguinte forma,

$$T(x,y) = (xcos(\alpha) - ysen(\alpha), ycos(\alpha) + xsen(\alpha)).$$

Como $T(4,2) = (-2,4)$, podemos escrever $T(4,2) = (4cos(\alpha) - 2sen(\alpha), 2cos(\alpha) + 4sen(\alpha)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4cos(\alpha) & - & 2sen(\alpha) & = & -2 \\ 2cos(\alpha) & + & 4sen(\alpha) & = & 4 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema encontramos $sen(\alpha) = 1$ e $cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Opção d) é a resposta.

23.(1ª questão do ano de 2009). Seja F uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que transforma o vetor genérico (x,y) em (y,x). Seja A a matriz associada a F e seja B a matriz associada a F^{-1}, a transformação inversa de F.

Considere as seguintes afirmativas:

I. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

II. $A = -B$

III. A transformação linear G que transforma o vetor genérico (x, y) em $(0, y)$ não possui transformação inversa.

Assinale a alternativa correta:

a) Apenas a afirmativa I é correta

b) Apenas a afirmativa II é falsa

c) Apenas a afirmativa III é correta

d) Todas as afirmativas são corretas

e) Todas as afirmativas são falsas

Resolução: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $F(x, y) = (y, x)$.

A pode ser calculada facilmente, basta colocar os coeficientes de x e y, respectivamente, como colunas da matriz A,

$$F(x, y) = (0 \cdot x + 1 \cdot y, 0 \cdot y + 1 \cdot x) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinemos F^{-1} e em seguida B. Logo, $F(x, y) = (y, x)$. Usamos a base canônica de $\mathbb{R}^2$ em F.

$F(1, 0) = (0, 1)$ e $F(0, 1) = (1, 0)$, e assim $F^{-1}(0, 1) = (1, 0)$ e $F^{-1}(1, 0) = (0, 1)$. Sabemos que, $(x, y) = y(0, 1) + x(1, 0)$, e portanto

$$F^{-1}(x, y) = yF^{-1}(0, 1) + xF^{-1}(1, 0) \Rightarrow F^{-1}(x, y) = (y, x),$$

ou seja, $F = F^{-1}$, e portanto $A = B$. Assim I é verdade e II é falsa.

Analisemos agora III. Para que $G(x, y) = (0, y)$ possua transformação inversa, G deve ser injetora e sobrejetora. É fácil notar que G não é injetora, tomemos os vetores $(1, 5)$ e $(2, 5)$. Então $T(1, 5) = (0, 5)$ e $T(2, 5) = (0, 5)$, i.e., $(1, 5) \neq (2, 5)$ e $T(1, 5) = T(2, 5)$. Logo, III é verdade. Resposta, alternativa b).

24.(1ª questão do ano de 2006). Seja T o operador linear definido em $\mathbb{R}^3$ por: $T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$. Assinale a afirmação verdadeira.

a) A dimensão da imagem de T é 1 e a dimensão do núcleo de T é 2

b) A dimensão da imagem de T é 3 e a dimensão do núcleo de T é 0

c) A dimensão da imagem de T é 2 e a dimensão do núcleo de T é 1

d) A dimensão da imagem de T é 0 e a dimensão do núcleo de T é 3

e) A dimensão da imagem de T é 2 e a dimensão do núcleo de T é 2

Resolução: Calculemos o núcleo e a imagem de T:
$T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$ e fazendo $(2y+z, x-4y, 3x) = (0,0,0)$ temos

$$\begin{cases} & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & & = & 0 \\ 3x & & & & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Logo, $ker(T) = \{0\}$ e $dim(ker(T)) = 0$.

Para o cálculo da imagem façamos, $(2y+z, x-4y, 3x) = x(0,1,3) + y(2,-4,0) + z(1,0,0)$ e daí $Im(T) = [(0,1,3),(2,-4,0),(1,0,0)]$. Assim, $dim(Im(T)) = 3$, e a resposta é a alternativa b).

25.(3ª questão do ano de 2005). Considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

O posto de A, as dimensões dos dois subespaços: a imagem de A e o núcleo de A, e uma base para a imagem de A são, respectivamente:

a) 3,3,2, $\{(1,-2,1),(1,0,2),(1,4,3)\}$

b) 3,3,2, $\{(1,-2,1),(1,0,2),(5,-2,9)\}$

c) 3,2,3, $\{(1,-2,1),(1,0,2)\}$

d) 2,3,2, $\{(1,-2,1),(1,0,2),(5,-2,9)\}$

e) 2,3,2, $\{(1,-2,1),(1,0,2)\}$

Resolução: Procuremos primeiramente a transformação linear associada a matriz A. Basta que multipliquemos a matriz A pela matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ w \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y+t+w+5z \\ -2x-6y+4w-2z \\ x+3y+2t+3w+9z \end{pmatrix},$$

correspondente a $T(x,y,t,w,z) = (x+3y+t+w+5z, -2x-6y+4w-2z, x+3y+2t+3w+9z)$.

Para o $ker(T)$ façamos $(x+3y+t+w+5z, -2x-6y+4w-2z, x+3y+2t+3w+9z) = (0,0,0)$. Então,

$$\begin{cases} x+3y+t+w+5z=0 \\ -2x-6y+4w-2z=0 \\ x+3y+2t+3w+9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ t + 4z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Assim $t=-4z$ e $x=-z-3y$ e

$$(x,y,t,w,z) = (-z-3z, y, -4z, 0, z) = z(-1,0,-4,0,1) + y(-3,1,0,0,0).$$

Logo $dim(ker(T)) = 2$. Sabemos que $5 = dim(\mathbb{R}^5) = dim(Im(T)) + dim(ker(T)) = dim(Im(T)) + 2$. Logo, $dim(Im(T)) = 3$.

Agora vamos determinar o posto de A. Reduzindo a matriz para a forma escada temos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo o posto de A é 3. Assim nos restam as opções a) e b).

Observe que na alternativa b), o conjunto $\{(1,-2,1),(1,0,2),(5,-2,9)\}$ é L.D., pois $-1\cdot(1,-2,1) - 4\cdot(1,0,2) = -1\cdot(5,-2,9)$. Assim não pode ser uma base para a $Im(T)$. Logo a opção a) é a resposta.

26.(4ª questão do ano de 2005). Dada a matriz de transformação linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

pode-se afirmar que:

a) o vetor $(1,0,0)$ é mapeado para $(1,3,2)$

b) o vetor $(1,0,1)$ é mapeado para $(3,0,2)$

c) o vetor $(0,1,0)$ é mapeado para $(3,1,2)$

d) o vetor $(0,0,1)$ é mapeado para $(3,2,3)$

e) o vetor $(1,1,0)$ é mapeado para $(3,2,3)$

Resolução: Denotemos por B a matriz em questão. Fazendo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y+2z \\ 2x+y+z \\ 3x+2y+3z \end{pmatrix}$$

achamos a transformação linear, que é $T(x,y,z) = (x+3y+2z, 2x+y+z, 3x+2y+3z)$. Agora, analisamos as alternativas

$$T(1,0,0) = (1,2,3)$$

$$T(1,0,1) = (3,3,6)$$

$$T(0,1,0) = (3,1,2)$$

$$T(0,0,1) = (2,1,3)$$

$$T(1,1,0) = (4,3,5).$$

Logo, c) é a alternativa correta.

27.(3ª questão do ano de 2004). Sobre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ podemos dizer que

a) a imagem é a reta $y = x$ e o núcleo é $\{(0,0)\}$.

b) a imagem é a reta $x = 0$ e o núcleo é a reta $y = -x$.

c) a imagem é a reta $y = x$e o núcleo é o $\mathbb{R}^2$.

d) a imagem é a reta $y = -x$ e o núcleo é a reta $x = 0$.

e) a imagem é o $\mathbb{R}^2$ e o núcleo é a reta $y = x$.

Resolução: Denotemos por B a matriz de T. Do mesmo modo como foi feito em questões anteriores, podemos determinar T facilmente.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \Rightarrow T(x, y) = (x, -x).$$

Para o $ker(T)$ façamos, $(x, -x) = (0, 0) \Rightarrow x = 0$. Logo $ker(T) = [(0, 1)]$. Assim fica fácil notar que a alternativa correta é d).

Capítulo 4

Autovalores e Autovetores

Dada uma transformação linear de um Espaço Vetorial nele mesmo, $T : V \to V$, gostaríamos de saber que vetores seriam levados neles mesmos por esta transformação. Isto é, dada $T : V \to V$, quais são os vetores v em V tal que $T(v) = v$? (v é chamado vetor fixo). Trataremos desta questão a seguir.

Exemplo 88 $I: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y) \end{array}$

(Aplicação Identidade). Neste caso, todo $\mathbb{R}^2$ é fixo uma vez que $I(x,y) = (x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 89 $R: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,-y) \end{array}$ *(Reflexão no eixo-x)*

Exemplo 90 $N: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (0,0) \end{array}$

(Aplicação Nula). Neste caso o único vetor que é fixo pela aplicação dada é o vetor nulo, $N(0,0) = (0,0)$.

Passaremos agora para o seguinte problema: Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $T : V \to V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor v em V e um escalar k em $\mathbb{R}$ tais que

$$T(v) = kv.$$

Neste caso $T(v)$ será um vetor de mesma direção que v. Dizemos que vetores tem a mesma direção, quando estiverem sobre a mesma reta suporte.

Como $v = 0$ satisfaz a equação para todo k, estaremos interessados em determinar vetores $v \neq 0$ satisfazendo a condição acima. O escalar k será chamado autovalor ou valor característico de T e o vetor v um autovetor ou vetor característico de T.

Definição 91 *Uma transformação linear entre espaços vetoriais iguais recebe o nome de Operador Linear, isto é, $T : V \to V$.*

Definição 92 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existirem v em V, $v \neq 0$, e k em $\mathbb{R}$ tais que $T(v) = kv$, k é um autovalor de T e v um autovetor de T associado a k.*

Observe que k pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo. Daremos a seguir exemplos de como calcular autovetores e autovalores usando a definição.

Exemplo 93 $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ v & \mapsto & 2v \end{array}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Neste caso, 2 é um autovalor de T e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2.

Podemos escrever, de um modo geral

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ v & \mapsto & kv \end{array}, k \neq 0$$

tem k como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção que v. Podemos falar ainda mais, se:

i) $k < 0$, T inverte o sentido do vetor

ii) $|k| > 1$, T dilata o vetor

iii) $|k| < 1$, T contrai o vetor

iv) $k = 1$, é a identidade

Exemplo 94 $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, -y) \end{array}$ *(Reflexão no eixo-x).*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Os vetores da forma $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ *são tais que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Assim todo vetor $(0, y) \neq 0$, *é autovetor de* T *com autovalor* $k = -1$.

Exemplo 95 $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-y,x) \end{array}$ *(Rotação de 90º em torno da origem).*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Note que nenhum vetor diferente de zero é levado por T *num mútiplo de si mesmo. Logo,* T *não tem nem autovalores nem autovetores. Este é um exemplo de que nem todo operador linear possui autovalores e autovetores.*

Teorema 96 *Dada uma transformação* $T : V \to V$ *e um autovetor* v *associado a um autovalor* k, *qualquer vetor* $w = cv (c \neq 0)$ *também é autovetor de* T *associado a* k. *(ver [1], pg. 183).*

Também, o conjunto formado pelos autovetores associados a um autovalor k e o vetor nulo é um subespaço vetorial de V, isto é, $V_k = \{v \in V : T(v) = kv\}$ é subespaço de V. Este subespaço é chamado subespaço associado ao autovalor k.

4.1 Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada, A, de ordem n, estaremos entendendo por autovalor e autovetor de A, autovalor e autovetor da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada à matriz A em relação à base canônica, isto é, $T(v) = Av$ (na forma coluna). Assim, um autovalor k em $\mathbb{R}$ de A, e um autovetor v em $\mathbb{R}^n$, são soluções da equação $Av = kv, k \neq 0$.

Exemplo 97 *Dada a matriz diagonal*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e dados os vetores $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$, *temos*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}e_1 \text{ e em geral,}$$

$A.e_i = a_{ii}e_i$. Então, esses vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são autovetores para A, e o autovetor e_i é associado ao autovalor a_{ii}.

4.2 Polinômio Característico

Em alguns casos calcular os autovalores e autovetores a partir da definição é complicado, por isso apresentaremos um método mais prático de achar autovalores e autovetores de uma matriz real A de ordem n. Faremos um caso para $n = 3$ e em seguida generalizaremos para um n qualquer.

Exemplo 98

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procuramos vetores em $\mathbb{R}^3$ e escalares k em $\mathbb{R}$ tais que $Av = kv$. Note que se I for a matriz identidade de ordem 3, então a equação acima pode ser escrita na forma $Av = (kI)v = 0$, ou ainda, $(A - kI)v = 0$. Escrevendo explicitamente,

$$\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desta forma temos a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 4-k & 2 & 0 \\ -1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equações lineares equivalentes a esta equação matricial, iremos obter um sistema de três equações e três incógnitas. Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, saberemos que este sistema tem uma única solução, que é a solução nula, ou seja $x = y = z = 0$. Mas estamos interessados em calcular os autovetores de A, isto é, vetores $v \neq 0$, tais que $(A - kI)v = 0$. Neste caso $\det(A - kI)$ deve ser zero, ou seja

$$\begin{vmatrix} 4-k & 2 & 0 \\ -1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0.$$

E portanto $-k^3 + 7k^2 - 16k + 2 = 0$.

Vemos que $det(A-kI)$ é um polinômio em k. Este polinômio é chamado o polinômio característico de A. Continuando a resolução temos

$$(k-2)^2.(k-3) = 0.$$

Logo $k = 2$ e $k = 3$ são as raízes do polinômio característico de A, e portanto os autovalores da matriz A são 2 e 3. Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes. Resolvendo a equação $Av = kv$, para os casos:

i) $k = 2$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ implicando em} \begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos $(x, y, z) = (0, 0, z)$. E desta forma, os autovetores associados a $k = 2$ são da forma $(0, 0, z)$, assim pertencem ao subespaço $[(0, 0, 1)]$.

ii) $k = 3$

Resolvendo a equação $Av = 3v$, temos

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \\ y + 2z = 3z \end{cases}.$$

E resolvendo, percebemos que os autovetores são do tipo $(-2y, y, y)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(-2, 1, 1)]$.

De modo semelhante podemos generalizar este processo de achar autovalores e autovetores, para uma matriz real A de ordem n. Seja A uma matriz real de ordem n. Os autovalores e autovetores de A são os que satisfazem a equação $Av = kv$ ou $Av = (kI)v$ ou ainda $(A - kI)v = 0$. Escrevendo esta equação explicitamente, temos

$$\begin{pmatrix} a_{11-k} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chamemos de B a primeira matriz acima. Então $Bv = 0$. Se $\det \neq 0$, sabemos que o posto da matriz B é n e portanto o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem uma única solução. Como $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ou $(v = 0)$ sempre é solução de um sistema homogêneo, então esta única solução seria a nula. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores v (soluções não nulas da equação acima) é termos $\det B = 0$, ou seja,

$$\det(A - kI) = 0.$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores k que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Observamos que

$$p(k) = \det(A - kI) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} \text{ é um polinômio em k de grau n.}$$

$p(k) = (a_{11} - k) \cdots (a_{nn} - k) +$ termos de grau $< n$, e os autovalores procurados são raízes deste polinômio. $p(k)$ é chamado Polinômio Característico da matriz A.

Exemplo 99

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - kI) = \begin{vmatrix} -3-k & 4 \\ -1 & 2-k \end{vmatrix} = (-3-k)(2-k) + 4 = k^2 + k - 2 = p(k).$$

$p(k) = 0$ implica em $k = 1$ ou $k = -2$. Assim os autovalores de A são 1 e -2. Determinemos agora os autovetores associados.

i) $k = 1$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Assim temos, $\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

Logo, $x = y$. E os autovetores são do tipo (x, x), com $x \neq 0$.

ii) $k = -2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Assim temos, $\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$

Logo $x = 4y$. E os autovalores são da forma $(4y, y)$, com $y \neq 0$.

4.3 Polinômio Minimal

Vamos introduzir a noção de polinômios calculados em matrizes.

Definição 100 *Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada. Então $p(A)$ é a matriz*

$$p(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Quando $p(A) = 0$, dizemos que o polinômio anula a matriz A.

Exemplo 101 *Sejam* $p(x) = x^2 - 9$ *e* $q(x) = 2x + 3$.

Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$p(A) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e\ q(A) = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Então, $p(x)$ *anula* A *e* $q(x)$ *não anula* A.

Definição 102 *Seja* A *uma matriz quadrada. O polinômio minimal de* A *é um polinômio*

$$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0 \text{ tal que}$$

i) $m(A) = 0$, *isto é,* $m(x)$ *anula a matriz* A

ii) $m(x)$ *é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam* A.

Note que o coeficiente do termo x^k do polinômio minimal é 1. ($a_k = 1$).

4.4 Questões

28.(2ª questão do ano de 2013). Com relação à matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, considere as afirmativas a seguir.

I. Um autovetor associado à A é $v = (x, 2x, -x)$, com $x \neq 0$

II. Os autovalores de A são 1,-3 e -1

III. A matriz inversa de A é $\begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & -2/9 \\ 1/9 & -2/9 & 4/9 \\ -2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$

IV. Os polinômios característico e minimal associados à A são iguais

Assinale a alternativa correta

a) Somente as alternativas I e II são corretas

b) Somente as alternativas I e IV são corretas

c) Somente as alternativas III e IV são corretas

d) Somente as alternativas I, II e III são corretas

e) Somente as alternativas II, III e IV são corretas

Resolução: Seja A a matriz em questão. Determinemos os autovalores de A.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-k & 1 & 0 \\ 1 & -k & 2 \\ 0 & 2 & 1-k \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante da última matriz, temos $p(k) = -k^3+3k^2+3k-9 = (k-3)(3-k)(3+k)$. Este é o polinômio característico. Logo os autovalores de A são $k=-3$ e $k=3$. Assim, II é falsa.

Procuremos agora os autovetores.

Para $k = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Logo $x = y = z$, e $x(1,1,1)$ é um autovetor.

Para $k = -3$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

Logo $x = -\dfrac{y}{5}$ e $z = -\dfrac{y}{2} \Rightarrow y(-\dfrac{1}{5}, 1, -\dfrac{1}{2})$ é autovetor.

Assim I é falsa.

Para determinar A^{-1} poderíamos fazer o precesso escrito anteriormente que se dá através do escalonamento. No entanto, é menos trabalhoso fazer a simples verficação, basta multiplicar a matriz de III a esquerda e a direita, por A. Fazendo isto temos como resultado a matriz identidade. Assim III é verdade.

Como o polinômio característico é da forma $(k-3)(3-k)(3+k)$, ele também é o polinômio minimal. Assim, IV é verdade. Resposta, opção c).

29.(1ª questão do ano de 2010). Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Os autovalores da matriz A são:

a) 0,1,4

b) 0,2,3

c) 1,2,2

d) 1,1,3

e) 2,3,-1

Resolução: Calculemos o polinômio característico,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-k & -3 & 1 \\ 2 & -1-k & 1 \\ 0 & 0 & 2-k \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é o determinante da última matriz, $p(k) = -k^3 + 5k^2 - 8k + 4 = (-k+1)(k-2)^2$. Logo os autovalores são 1,2,2. Resposta, alternativa c).

Capítulo 5

Produto Interno

Seja V um espaço vetorial real. Um Produto Interno sobre V é uma função que a cada par de vetores, v_1 e v_2, associa um número real, denotado por $\langle v_1, v_2 \rangle$, satisfazendo as propriedades:

$$\langle \cdot, \cdots \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

1) Simetria $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$; Para todo $u, v \in V$

2) Positividade $\langle u, u \rangle \geq 0$; Para todo $u, v \in V$. Com $\langle u, u \rangle = 0$ se e só se $u = 0$.

3) Distributividade $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$; Para todo $u, v, w \in V$

4) Homogeneidade $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$; Para todo $u, v \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 103 : *O produto escalar usual de vetores do espaço* $\mathbb{R}^3$. *Para* $v = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $w = (z_1, z_2, z_3)$

$$\langle v, w \rangle = x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3$$

De um modo análogo, se define o que chamamos produto interno para o espaço $\mathbb{R}^n$. *Dados* $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *e* $w = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$

$$\langle v, w \rangle = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n$$

Exemplo 104 *Se* V *é o espaço de funções contínuas no intervalo* $[0, 1]$, *dadas* f_1 *e* f_2 *em* V, *definimos*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^1 f_1(t) f_2(t) dt.$$

Definição 105 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno. Diz-se que dois vetores* v *e* w *de* V *são ortogonais (em relação a este produto interno) se* $\langle v, w \rangle = 0$. *No caso em que* v *e* w *são ortogonais, escrevemos* $v \perp w$.

Propriedades

i) $0 \perp v$ para todo $v \in V$

ii) $v \perp w$ implica que $w \perp v$

iii) Se $v \perp w$ para todo $w \in V$, então $v = 0$.

iv) Se $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$, então $(v_1 + v_2) \perp w$.

v) Se $v \perp w$ e k é um escalar, $kv \perp w$.

5.1 Norma

Definição 106 *Seja V um espaço vetorial real. Uma norma, ou comprimento, em V, é uma aplicação $\| \cdot \|$ que para cada elemento $u \in V$ associa um número real $\| u \|$, que possui as seguintes propriedades:*

a) Positividade: $\| u \| > 0$, com $\| u \| = 0$ se, e só se $u = 0$.

b) Homogeneidade: $\| au \| = |a| \cdot \| u \|$ para todo $u \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

c) Desigualdade Triangular: $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$ para todos $u, v \in V$.

Um espaço vetorial munido de uma norma $\| \cdot \|$ é denominado um espaço normado, que denotamos por $(V, \| \cdot \|)$.

Exemplo 107 : *Norma do Máximo:* $\| x \| = max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}$

Exemplo 108 : *Norma-1 ou Norma do Táxi:* $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Podemos perceber facilmente que as aplicações dos **Exemplos** 107 e 108 satisfazem as propriedades de norma utilizando as propriedades de módulo de um número real.

Exemplo 109

$$\| A \|_1 = max\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|; 1 \leq j \leq n\}$$

Teorema 110 *Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então a aplicação $q(\cdot) : V \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:*

$$q(u) = \sqrt{\langle u, u \rangle}; \textit{para todo } u \in V,$$

satisfaz as propriedades de norma:

a) Positividade: $q(u) > 0$ *, com* $q(u) = 0$ *se, e só se* $u = 0$.

b) Homogeneidade: $q(au) = |a|.q(u)$ *para todo* $u \in V$ *e* $a \in \mathbb{R}$

c) Desigualdade Triangular: $q(u+v) \leq q(u) + q(v)$ *para todos* $u, v \in V$
(ver [2], pg. 300 e 301).

5.2 Questões

30.(5ª questão do ano de 2010). Considere os conjuntos de polinômios $A = \{1, x, 3x^2-1, 5x^3-3\}$ e $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ e o produto interno $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Com base no enunciado considere as afirmativas a seguir.

I) A é um conjunto linearmente independente

II) B é um conjunto linearmente independente

III) A é a base ortogonal do conjunto dos polinômios de grau até 3

IV) B é a base ortogonal do conjunto dos polinômios de grau até 3

Assinale a alternativa.

a) Somente as alternativas I e II são corretas

b) Somente as alternativas I e IV são corretas

c) Somente as alternativas III e IV são corretas

d) Somente as alternativas I, II e III são corretas

e) Somente as alternativas II, III e IV são corretas

Resolução: De modo fácil podemos perceber que o conjunto A é L.I. O conjunto B é a base canônica de P_3. Logo I e II estão corretas.

Para que o conjunto A seja uma base ortogonal para P_3, basta que $\langle p, q\rangle = 0, \forall p, q \in A$, pois A já é uma base para P_3.

Tomemos $p = 1$ e $q = 5x^3 - 3$. Logo, $\langle 1, 5x^3 - 3\rangle = \int_{-1}^{1} (5x^3 - 3)dx = -6 \neq 0$. Logo, III é falsa.

De modo análogo, fazemos para o conjunto B escolhendo $p = 1$ e $q = x^2$, temos $\langle 1, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \neq 0$.

IV é falsa. Logo, a resposta é a opção a).

31.(2ª questão do ano de 2004). Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Para x e y vetores quaisquer de V, a igualdade

$$\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$$

é verdadeira se, e somente se

a) $x \neq 0$ e $y = kx$, para todo número real k

b) $x = 0$, ou $y = 0$, ou ($x \neq 0$ e $y = kx$) onde k é um número real não-negativo

c) $x = 0$ ou $y = 0$

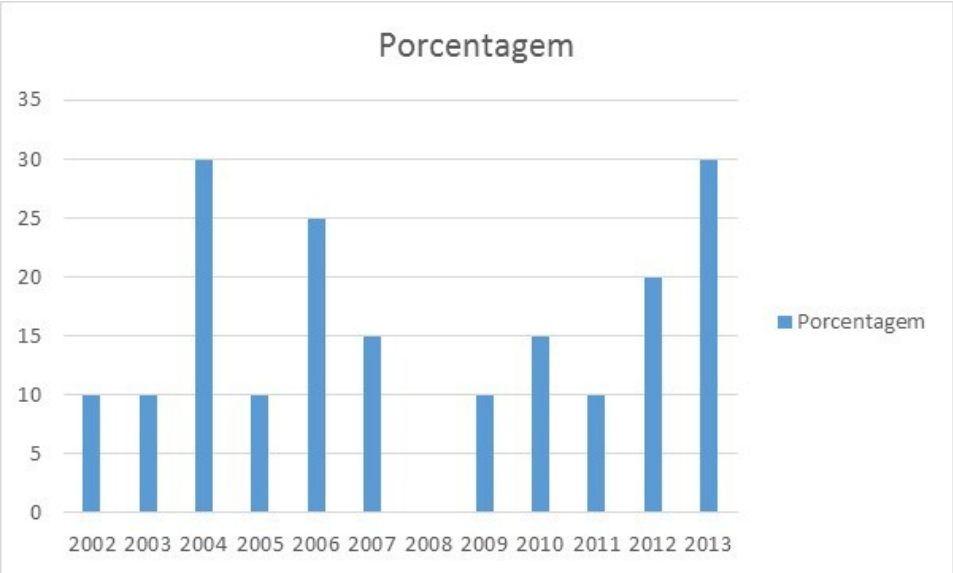
d) $x = 0$ ou $y = 0$, ou ($x \neq 0$ e x, y são linearmente dependentes)

e) $x = 0$ ou $y = 0$, ou ($x \neq 0$ e x, y são linearmente dependentes).

Resolução: Por definição de norma, temos como resposta a alternativa c).

Como foram resolvidas as questões entre os anos de 2002 e 2013, entendemos que é útil fazer uma relação dos conteúdos cobrados. Esta é feita através da tabela e do gráfico abaixo. A tabela mostra o número de questões que envolvem os temas que são os títulos de cada capítulo do trabalho, enquanto o gráfico ilustra a porcentagem das questões de álgebra linear nas provas de matemática em todos os anos citados.

Assunto	**Número de questões**
Sistemas Lineares e Matrizes	15
Espaços Vetoriais	10
Transformações Lineares	7
Autovalores e Autovetores	2
Produto Interno	2



Conclusão

Foi objetivo deste trabalho, resolver as questões de Álgebra Linear do Poscomp durante os anos de 2002 e 2013. Estas avaliações podem ser encontradas no site www.poscompbr.blogspot.com.br. Para a escolha do tema foi levado em consideração a importância da disciplina Álgebra Linear em estudos posteriores, numa possível pós graduação.

No estudo feito, o primeiro passo foi separar as questões pretendidas das demais. Em seguida, depois das trinta e uma questões apresentadas, fizemos uma divisão destas por temas, os quais foram os capítulos em que as questões estão inseridas. Posteriormente, foi feita a escrita de toda a teoria que julgávamos necessária para a resolução destas questões, juntamente com as respostas detalhadas das mesmas. Os exercícios foram resolvidos pelo grau de dificuldade de cada um, os considerados mais fáceis foram feitos primeiramente e os mais complicados ou trabalhosos iam sendo solucionados depois. No final da escrita do trabalho alguns detalhes precisaram ser modificados, o que foi realizado sem maiores problemas.

Ao final de tudo que foi feito para a produção desta monografia, considero que esta foi uma experiência muito importante.

Referências Bibliográficas

[1] Boldrini, J. L.; Costa, S. I. R.; Figueiredo, V. L.; Wetzler, H. G. *Álgebra Linear*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[2] Pulino, P. *Álgebra Linear e suas Aplicações: Notas de Aula*. São Paulo, 2012.

[3] Winterle, P. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

[4] Hoffman, K.; Kunze, R. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, Livros técnicos e científicos S.A..2 ed, 1979.

[5] Iezzi, G.; Hazzan, S. *Fundamentos de matemática elementar vol.4*. São Paulo. Atual Editora, 1977.

[6] PosComp, o "Agogê" da Ciência da Computação. Disponível em: <http://www.poscompbr.blogspot.com.br>. Acesso em 3 de outubro de 2015.