UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BIANCA NOGUEIRA SILVA PRADO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA
2017

BIANCA NOGUEIRA SILVA PRADO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB / Campus de Vitória da Conquista - BA, para obtenção do título de Licenciada em Matemática sob orientação do Professor Dr. André Nagamine.

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA

2017

FOLHA DE APROVAÇÃO

BIANCA NOGUEIRA SILVA PRADO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB.

Aprovada em _____de _____de_____

Componentes da banca examinadora:

_____

Prof. Dr. André Nagamine
Orientador

_____

Prof. Ms. Antônio Augusto Oliveira Lima

_____

Prof. Ms. Altemar Brito Lima

A maioria das ideias fundamentais da ciência são essencialmente sensíveis e, regra geral, podem ser expressas linguagem compreensível para todos.

Albert Einstein.

Agradecimentos

Ao meu filho, por me mostrar que eu não poderia almejar maior recompensa nesta vida do que ser mãe e à minha mãe e meus avós maternos por terem me dado força e apoio em alguns momentos difíceis e por sempre se mostrarem satisfeitos e preparados para auxiliar em minhas escolhas.

Ao meu professor orientador Dr. André Nagamine, pelo apoio, pela paciência e por sempre se mostrar disponível e disposto em sanar minhas dúvidas a qualquer momento.

Aos meus amigos Aldo Brito e Ícaro Tavares e aos professores Altemar Brito e Ana Paula Perovano, pelas palavras de motivação, por acreditarem que eu seria capaz de fazer um bom trabalho mesmo com alguns empecilhos que apareceram e por estarem sempre dispostos a ajudar, tirar dúvidas e dar conselhos.

Aos docentes da Uesb, por todos os ensinamentos e aos alunos dos estágios por terem me feito perceber que a relação professor-aluno vai muito além do conteúdo, da sala e, acima de tudo, da escola, que esta relação pode ser construída com muito carinho e admiração, onde as duas partes se completam, tornando possível uma troca de conhecimento mais satisfatória.

E, por fim, aos familiares e amigos, em especial Alessandra Reis, Darlan Libarino, João Neto e Lucas Botelho, que puderam acompanhar meu desenvolvimento, minhas aflições, anseios e que, de maneira particular, puderam dar sua contribuição e ajuda na construção desse caminho.

Resumo

As equações diferenciais se constituem em um dos temas da Matemática de maior importância, seja pela sua natureza intrínseca que abrange uma grade de assuntos, ou seja, pela sua vasta aplicabilidade nas mais diferentes áreas do conhecimento. Com isso, o presente trabalho tem como objetivo fazer uma abordagem introdutória acerca das equações diferenciais e, em particular às equações diferenciais ordinárias. Inicialmente, com o objetivo de situar o leitor sobre os principais nomes que contribuíram para o desenvolvimento da teoria, fazemos um breve apanhado histórico. Em seguida, o estudo será limitado às equações diferenciais de primeira e segunda ordem onde serão abordados os principais métodos de resolução de tais equações. Por fim, apresentaremos algumas aplicações das equações diferenciais ordinárias lineares e não-lineares de primeira e lineares de segunda ordem, em outros campos das ciências.

Palavras chaves: Equações diferenciais ordinárias. Equações diferenciais aplicadas. Equações diferenciais lineares e não-lineares.

Abstract

Differential equations are one of the most important Mathematics themes, either because of their intrinsic nature, which covers a grid of subjects or because of their wide applicability in the most different areas of knowledge. So, this work aims to make an introductory approach on the differential equations, and in particular the ordinary differential equations. Initially, in order to situate the reader, we present the main names that contributed to the development of the theory, we make a brief history. Then, the study will be limited to the first and second order differential equations where the main methods of solving such equations will be addressed. Finally, we will present some applications of linear and nonlinear differential equations of first and second order linear, in other fields of science.

Key-words: Ordinary differential equations. Applied differential equations. Linear and non-linear differential equations.

Sumário

Introdução 8

Capítulo 1 – Aspectos Históricos 9

Capítulo 2 – Introdução às Equações Diferenciais 12

2.1. Classificação de equações diferenciais 12

2.1.1. Quanto ao tipo 12

2.1.2. Quanto à ordem 13

2.1.3. Quanto à linearidade 13

2.2. Solução de uma equação diferencial 15

Capítulo 3 – Equações Diferenciais e suas soluções 16

3.1. Equações de Primeira Ordem 16

3.1.1. Equações Lineares 16

3.1.2. Equações Separáveis 18

3.1.3. Equações Exatas 19

3.1.4. Existência e Unicidade de Soluções 20

3.2. Equações de Segunda Ordem 22

3.2.1. Equações homogêneas com coeficientes constantes 23

3.2.2. Dependência e independência linear 25

3.2.3. Redução de ordem 25

3.2.4. Equações não-homogêneas 26

Capítulo 4 – Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias 30

4.1. Aplicações de Equações de Primeira Ordem 30

4.1.1. Equações Lineares: Resfriamento 30

4.1.2. Não-Lineares: Reações Químicas 32

4.2. Aplicações de Equações de Segunda Ordem 35

4.2.1. Equações Lineares: Circuitos Elétricos 35

Considerações Finais 39

Referências Bibliográficas 40

Introdução

As equações diferenciais servem de apoio matemático para inúmeras áreas da ciência e da engenharia. Segundo Boyce e Diprima (2010, p. 1), durante os três últimos séculos o estudo dessas equações prendeu a atenção dos maiores matemáticos do mundo e, mesmo assim, continua sendo uma área de estudo viva, com muitas indagações pertinentes em aberto.

A motivação pelo tema surgiu com a aparente afinidade demonstrada com os cálculos durante o curso e, a fim de escolher uma área que contemplasse esses conteúdos, foi feita a proposta, por parte do orientador, para que estudássemos as equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações, mesmo ainda sem ter cursado a matéria. Iniciamos o projeto de trabalho e após cursar a disciplina o interesse se mostrou evidente.

Esse trabalho tem como objetivo principal mostrar que problemas de campos como física, química e biologia podem ser resolvidos através de equações diferenciais e, para isso, faremos antes um estudo dos tópicos dessas equações.

O presente trabalho foi organizado em quatro capítulos. O primeiro capítulo descreve o surgimento e amadurecimento das equações diferenciais, o segundo faz uma breve introdução sobre essas equações, apresentando alguns exemplos para melhor fixação, o terceiro capítulo traz diversos modelos de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem e como encontrar as soluções correspondentes e o quarto capítulo mostra três problemas que podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias. Por fim, no último capítulo, tecemos nossas considerações finais.

Capítulo 1

Aspectos Históricos

A modelagem matemática é uma importante ferramenta utilizada para o estudo de fenômenos e para avanço da ciência. Em diversas áreas de pesquisa é possível encontrar a aplicação de conceitos matemáticos, dentre os quais se destacam as equações diferenciais. Este importante conceito tem destaque desde o início do estudo da Mecânica.

As equações diferenciais são a mais importante aplicação do Cálculo Diferencial e Integral. Os cientistas das mais variadas áreas do conhecimento utilizam tais equações para modelar os diversos fenômenos que são o seu objeto de estudo. Porém, os estudos desenvolvidos passaram por um grande percurso histórico até chegar a atual teoria sobre essas equações.

Segundo Boyce (2010, p. 20-22) os principais momentos históricos sobre os estudos das equações diferenciais tiveram inicio, durante o século XVII, através do estudo do Cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Podemos citar Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss e Lipschitz por serem alguns dos matemáticos que mostraram suma importância no desenvolvimento das equações diferenciais.

Mesmo com pouca atuação em equações diferenciais, através do desenvolvimento do Cálculo e dos esclarecimentos básicos da mecânica, Newton, no século XVIII, proporcionou a base para a aplicação de equações diferenciais. As equações diferenciais de primeira ordem foram classificadas das seguintes formas $\frac{\partial y}{\partial x} = f(y)$, $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x)$, $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x,y)$ e criou um método resolutivo, utilizando séries infinitas, para quando $f(x,y)$ for um polinômio em x e y.

Pouco depois de Newton, Leibniz, basicamente autodidata em matemática, chegou de modo independente aos resultados fundamentais do Cálculo e, no ano

de 1684, fora o primeiro a publicá-los. Ele criou a notação de derivada $\frac{\partial y}{\partial x}$, em 1691 o método de separação de variáveis e a redução de equações homogêneas em separáveis e em 1694 desenvolveu o método de resolução de equações lineares de primeira ordem.

Leibniz, mantendo contato através de correspondências com alguns matemáticos, em especial com os irmãos Jakob Bernoulli (1654 - 1705) e Johann Bernoulli (1667 -1748) que puderam colaborar expressivamente no avanço de métodos resolutivos de equações diferenciais e difusão no campo de suas aplicações, no final século XVII pôde resolver vários problemas em equações diferenciais.

Os irmãos Bernoulli solucionaram problemas em mecânica formulando-os como equações diferenciais, através do Cálculo. Em 1690, Jakob solucionou a equação diferencial $y' = \sqrt{\frac{a^3}{b^2 y - a^3}}$ e, no mesmo artigo, escreveu a palavra "integral" pela primeira vez no sentido moderno e Johann, em 1694, resolveu a equação $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{ax}$.

O filho de Johann, Daniel Bernoulli (1700-1782), que possui seu nome atrelado à equação de Bernoulli em Mecânica dos Fluídos, demonstrava maior interesse em equações diferenciais parciais e suas aplicações e foi o primeiro a descobrir as funções conhecidas como funções de Bessel.

Leonhard Euler (1707-1783), considerado o maior matemático do século XVIII, aluno de Johann e amigo de Daniel, entre 1734 e 1735 encontrou a condição para que as equações diferenciais de primeira ordem tornem-se exatas, em 1743 provou a teoria dos fatores integrantes e identificou a solução geral das equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, no mesmo artigo. Entre 1750 e 1751, expandiu esse último resultado para equações não homogêneas. Euler fez uso frequente de série de potências para solucionar equações diferenciais, propôs um procedimento numérico, nas equações diferenciais parciais pôde deixar importantes contribuições e foi o primeiro a dar tratamento sistemático do cálculo de variações.

Sucessor de Euler na cadeira de Matemática na Academia de Berlin em 1766 e também conhecido por seu trabalho fundamental em equações parciais e cálculo de variações, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) mostrou que a solução geral de uma equação homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes.

A equação de Laplace, criada por Pierre-Simon Laplace (1749-1827), é de suma importância em muitos ramos da física matemática e Laplace a estudou amplamente em conexão com a atração gravitacional. Embora reconhecida mais tarde, a transformada de Laplace, homenageada com seu nome, permite que seja solucionada uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes através da solução de uma equação algébrica.

Vários métodos elementares que solucionam equações diferenciais ordinárias já haviam sido encontrados no final do século XVIII. As equações diferenciais parciais também começaram, demasiadamente, a serem estudadas à medida que sua importância em física matemática transparecia e as inúmeras equações diferenciais que persistiam aos métodos analíticos direcionaram a investigar métodos através de aproximação numérica. A invenção de métodos geométricos ou topológicos especialmente para equações não lineares, no século XX, foi outra peculiaridade das equações diferenciais.

As equações diferenciais no século XXI continuam sendo uma origem abundante de problemas impressionantes e importantes ainda não resolvidos, ainda que seja uma temática antiga sobre a qual muito se sabe.

Capítulo 2

Introdução às Equações Diferenciais

Durante esse capítulo será feita uma introdução sobre equações diferenciais, apresentando conceitos que serão utilizados nos próximos capítulos.

Equações diferenciais (EDs) são expressões que envolvem as derivadas de uma função desconhecida, com uma ou mais variáveis independentes, e as relacionam com a própria função incógnita.

2.1. CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais podem ser classificadas quanto ao tipo, ordem e linearidade.

2.1.1. QUANTO AO TIPO

Nesse caso a classificação pode se dá de duas maneiras: ordinárias ou parciais.

Definição: As equações diferenciais em que aparecem apenas derivadas simples, de uma única variável independente, são ditas **equações diferenciais ordinárias** (EDOs). Enquanto as que apresentam diversas variáveis independentes são chamadas de **equações diferenciais parciais** (EDPs).

Exemplos:

i. $\dfrac{dy}{dt} = k \cdot y(t)$; $k \in \mathbb{R}$ é uma EDO pois apresenta uma variável dependente (y) e uma variável independente (t);

ii. $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx} = x$ também é uma EDO pois, apesar de apresentar duas variáveis dependentes (u e v) apresenta uma única variável independente (x);

iii. $\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} = \mu(x,y)$ é uma EDP pois apresenta uma única variável dependente (μ) e duas variáveis independentes (x e y), o que satisfaz a definição acima;

iv. $\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = x$ também é uma EDP apresentando duas variáveis dependentes (u e v) e duas independentes (x e y) e por esse último fato possui tal classificação.

2.1.2. QUANTO À ORDEM

Definição: A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.

Exemplos:

i. A equação diferencial ordinária mais geral pode ser escrita como $F\left(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)\right) = 0$ e é classificada como uma equação de ordem n.

ii. Note que $y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4$ é uma equação diferencial ordinária de ordem 3 pois sua maior derivada é de 3ª ordem e possui uma única variável independente (t).

iii. A equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$ é uma equação diferencial parcial de ordem 2. É fácil notar que a derivada de maior ordem é de 2ª ordem e as variáveis independentes são x e t, tornando-a uma EDP.

2.1.3. QUANTO À LINEARIDADE

Nesse caso a classificação pode se dá de duas maneiras: linear ou não linear.

Definição: A equação diferencial ordinária da forma $a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = g(t)$ é dita **linear**. Qualquer outra EDO que não esteja nesta forma é dita **não linear.**

Neste trabalho iremos apresentar apenas as equações diferenciais de primeira e de segunda ordem e pelo fato das EDPs permitirem várias variáveis independentes, iremos usar uma equação diferencial parcial de 2ª ordem com duas variáveis, genérica, para definir equação diferencial parcial linear e não linear.

Definição: A equação diferencial parcial de 2ª ordem com duas variáveis da forma $a_0(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_4(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_5(x,y)u = a_6(x,y)$ é dita **linear**. Qualquer outra EDP de 2ª ordem com duas variáveis que não esteja nesta forma é dita **não linear**.

Exemplos:

i. A equação $t^3 y^{(4)} - t^2 y'' + 4ty' - 3y = 0$ é linear visto que os coeficientes da variável dependente y e de suas derivadas estão apenas em função da variável t.

ii. A equação $\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + tg(y) = 0$ é uma EDO não linear devido ao termo não linear *tg (y).*

iii. A equação $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ é uma EDP linear e também conhecida como equação da difusão linear.

iv. A equação $(1-u)\frac{\partial u}{\partial x} + 2u = e^y$ é uma EDP não linear devido ao termo não linear $(1-u)\frac{\partial u}{\partial x}$.

2.2. SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Definição: Seja ϕ uma função definida em algum intervalo I. Se ao substituirmos ϕ na equação diferencial dada obtivermos uma identidade, então ϕ é uma solução dessa equação no intervalo I.

Portanto, uma função ϕ, que pode ser delimitada num intervalo $\alpha < t < \beta$, e tal que $\phi, \phi', ..., \phi^{(n)}$ satisfazem $\phi^{(n)}(t) = f(t, \phi(t), \phi'(t), ..., \phi^{(n-1)}(t))$ é uma solução de uma equação diferencial ordinária.

Exemplo: Dada a equação diferencial $(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$ determine se as funções $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = e^{-x}$ são funções soluções.

Resolução:

1. Para $y_1(x) = x^2$ segue que $y_1'(x) = 2x$ e $y_1''(x) = 2$. Substituindo y_1, y_1' e y_1'' na equação, temos: $2(x+3) + 2x(x+2) - x^2 = x^2 + 6x + 6 \neq 0$, ou seja, $y_1(x) = x^2$ não é solução da equação dada.
2. Para $y_2(x) = e^{-x}$ segue que $y_2'(x) = -e^{-x}$ e $y_2''(x) = e^{-x}$. Substituindo y_2, y_2' e y_2'' na equação, temos: $(x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 3e^{-x} - 2e^{-x} - e^{-x} = 0$, ou seja, $y_2(x) = e^{-x}$ é solução da equação dada.

Após entender como classificar e o que é solução de uma equação diferencial, surgem alguns questionamentos. Toda equação diferencial tem solução? A solução, quando existe, é única? Como encontrar a solução?

No próximo capítulo serão apresentadas as equações diferenciais e, através de definições e exemplos, veremos que nem toda equação diferencial possui solução, que a solução pode não ser única e que não há um método geral de resolução de equações diferencias, sendo necessário fazer algumas restrições. Veremos também que sobre certas condições sobre a função, há resultados que garantem a existência e unicidade de solução.

Capítulo 3

Equações Diferenciais e suas soluções

Para estudar equações diferenciais parciais é necessário ter bom conhecimento em equações diferenciais ordinárias, por isso nosso estudo agora será limitado às EDOs.

3.1. EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção estaremos considerando a equação diferencial da forma $y' = f(t, y)$, onde f é uma função de duas variáveis dada.

3.1.1. EQUAÇÕES LINEARES

Dizemos que a equação da forma $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$, onde p e g são funções dadas da variável independente t, é uma **equação linear de primeira ordem**.

Considerando inicialmente as equações lineares com coeficientes constantes, ou seja, as equações da forma $\frac{dy}{dt} + ay = b$ onde a e b são constantes, podemos perceber que $y = \frac{b}{a}$ é uma solução dessa equação, onde $a \neq 0$. Mas, note que a equação pode ser reescrita como $\frac{dy}{dt} = -a(y - \frac{b}{a})$ ou $\frac{d(\ln\left|y - \frac{b}{a}\right|)}{dt} = -a$, se $a \neq 0$. Integrando ambos os lados em relação a t e aplicando a função exponencial temos $y - \frac{b}{a} = ce^{-at}$ ou $y = ce^{-at} + \frac{b}{a}$, que é a solução geral da equação $\frac{dy}{dt} + ay = b$.

Agora, voltando à equação geral $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$, vamos multiplicar a equação por uma função $\mu(t)$ (**fator integrante**) de modo que o lado esquerdo

possa ser escrito como $\frac{d[\mu(t)y]}{dt}$. Para isso, é necessário que $\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)p(t)$, ou seja, $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$. A partir daí, sabendo quem é a função $\mu(t)$, basta integrar ambos os lados em relação à t da equação $\frac{d(\mu(t)y)}{dt} = \mu(t)g(t)$ para encontrar a solução geral.

OBS 1: Nem sempre será possível encontrar a solução de forma explícita no método dos fatores integrantes por conta das integrais que são necessárias.

OBS 2: A constante que aparece nas soluções pode ser determinada por meio de uma **condição inicial**, uma informação da forma $y(t_0) = y_0$ onde t_0 e y_0 são dados. A ED acompanhada de uma condição inicial é chamada de **problema de valor inicial** (PVI).

Exemplo: Encontre a solução do problema de valor inicial $y' - y = 2te^{2t}; y(0) = 1$.

Resolução: Observe que temos uma equação linear de primeira ordem onde $p(t) = -1$ e $g(t) = 2te^{2t}$. Utilizando os conhecimentos vistos anteriormente, segue que $\mu(t) = e^{\int -dt}$, ou seja, $\mu(t) = e^{-t}$ e, substituindo $\mu(t)$ na equação $\frac{d(\mu(t)y)}{dt} = \mu(t)g(t)$, temos que $\frac{d(e^{-t}y)}{dt} = 2te^{t}$.

Integrando ambos os lados em relação a t obtêm-se a solução geral $y = 2te^{2t} - 2e^{2t} + ce^{t}$.

Agora, para encontrar a constante c devemos usar a condição inicial dada ($t = 0$ implica $y = 1$). Substituindo os valores de t e y na solução geral obtemos $c = 3$ e, portanto, temos que a solução do problema de valor inicial é dada por $y = 2te^{2t} - 2e^{2t} + 3e^{t}$.

3.1.2. EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Voltando à equação geral que vimos anteriormente e usando a variável x no lugar da variável t, obtemos $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Note que podemos reescrevê-la ainda, tendo $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$, como $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$.

Definição: Dizemos que a equação $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ é separável se M é uma função somente de x e N é uma função somente de y. Logo, podemos reescrevê-la na forma: $M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$.

Procedimento prático para resolver equações separáveis:

i. De um lado da igualdade, colocar toda a expressão que envolva apenas a varável x e, do outro lado, a expressão que envolva apenas a variável y.

ii. Integrar cada lado da equação de acordo com a variável em questão.

iii. Se houver condição inicial, encontrar a constante que aparece no processo *ii*.

Exemplo: Mostre que a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}$ é separável e encontre a solução do PVI: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Resolução: Note que podemos reescrever a equação como $-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$ mostrando ser uma equação separável.

Colocando de cada lado da equação as expressões que envolvem x e y, têm-se $(1 - y^2)dy = x^2 dx$. Agora, integrando o lado esquerdo em relação à y e o lado direito em relação à x, obtemos um conjunto de soluções implícitas que são

denominadas **curvas integrais**, a saber, $y^3 - 3y = -x^3 + c$ onde c é uma constante.

Para determinar c usamos a condição inicial $y(0) = 1$, ou seja, para $x = 0$ temos $y = 1$, isso implica que $c = -2$ e, portanto, $y^3 - 3y = -x^3 - 2$ é a solução procurada.

3.1.3. EQUAÇÕES EXATAS

Voltando à equação $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$, vista anteriormente, vamos considerar agora M e N como funções de x e y.

Definição: Se pudermos identificar uma função $\varphi(x,y)$ tal que $M(x,y) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ e $\varphi(x,y) = c$ define $y = \phi(x)$ implicitamente como diferenciável de x. Então $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}.\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial[\varphi(x,y)]}{\partial x}$ é dita **equação exata** e suas soluções são dadas implicitamente por $\varphi(x,y) = c$.

Exemplo: Resolva a ED $2x + y^2 + 2xyy' = 0$.

Resolução: Note que essa equação não é linear e nem separável. Vamos ver se é possível encontrar $\varphi(x,y)$ tal que: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x + y^2$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2xy$. É fácil notar que $\varphi(x,y) = x^2 + xy^2$.

Portanto $x^2 + xy^2 = c \rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{c}{x} - x}$ que é a solução procurada.

Teorema: Suponha que as funções M, N, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ sejam contínuas num retângulo $\alpha < x < \beta$ e $\gamma < y < \delta$. Então a equação $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ é uma equação exata se, e somente se, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

O teorema anterior está demonstrado em Boyce e Diprima (2010, p.73).

Quando a equação $M(x,y)+N(x,y)\dfrac{dy}{dx}=0$ não é exata, é possível multiplica-la por uma função $\mu(x,y)$ (fator integrante) tal que o resultado $\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y)\dfrac{dy}{dx}=0$ seja uma equação exata. Para que isso ocorra, basta ter $(\mu M)_y=(\mu N)_x$.

Exemplo: Determine se a equação $(3x^2-2xy+2)dx+(6y^2-x^2+3)dy=0$ é exata e encontre a solução.

Resolução: Note que a equação pode ser reescrita como $(3x^2-2xy+2)+(6y^2-x^2+3)\dfrac{dy}{dx}=0$ onde $M(x,y)=3x^2-2xy+2$ e $N(x,y)=6y^2-x^2+3$. Note também que $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-2x=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, ou seja, a equação dada é uma equação exata.

Como $M(x,y)=\dfrac{\partial[\varphi(x,y)]}{\partial x}=3x^2-2xy+2$, integrando ambos os lados em relação à *x*, segue que $\varphi(x,y)=x^3-x^2y+2x+h(y)$ onde *h(y)* é uma função constante em relação à *x*. Mas temos também que $N(x,y)=\dfrac{\partial[\varphi(x,y)]}{\partial y}\rightarrow 6y^2-x^2+3=-x^2+h'(y)$, ou seja, $h'(y)=6y^2+3$ e $h(y)=2y^3+3y$. Portanto $\varphi(x,y)=x^3-x^2y+2x+2y^3+3y=c$, ou seja, $2y^3+(3-x^2)y=c-x^3-2x$ é a solução procurada, na forma implícita.

3.1.4. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Vejamos agora algumas questões mais técnicas sobre a existência e a unicidade de soluções de equações diferenciais.

OBS: As condições dos teoremas a seguir são suficientes, porém não são necessárias, para garantir a existência e unicidade das soluções.

Teorema 1: Se as funções *p(t)* e *g(t)* são contínuas num intervalo aberto $\alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ satisfazendo o PVI $\begin{cases} y' + p(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ onde y_0 é um valor arbitrário dado.

O resultado acima é sobre equações lineares e sua demonstração está basicamente no método dos fatores integrantes e é garantido pelo fato de que *p* e *g* são funções contínuas em (α, β).

Teorema 2: Se as funções *f* e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta$ e $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_0, y_0). Então, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em (α, β) existe uma única solução $y = \phi(t)$ do PVI $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

O resultado anterior se refere ao PVI, sua demonstração é extremamente avançada e será omitida. Exigindo apenas a continuidade de *f*, não haverá mais a unicidade da solução.

Os teoremas acima estão demonstrados no livro de Boyce e Diprima, página 86.

Exemplo: Aplique os teoremas vistos anteriormente para analisar o PVI $\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Resolução: Observe que $f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ é contínua em toda parte. Observe também que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$ não é contínua em $y = 0$, ou seja, não é contínua em nenhum retângulo que contenha $(0,0)$.

Portanto, pelo Teorema 2 e OBS 2 da página 15, apenas a existência da solução é garantida.

3.2. EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

Nessa seção serão exploradas as equações diferenciais da forma $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt})$, onde f é uma função dada. Será ainda feita uma restrição nas equações de segunda ordem pelo fato de não haver um método geral de resolução. Assim, consideremos as equações lineares de segunda ordem que podem ser escritas como $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ ou $P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t)$. Equações de segunda ordem em outro formato são equações não lineares.

As condições iniciais de um problema de valor inicial de uma equação de segunda ordem são dadas da seguinte forma: $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$.

Teorema 1 (Existência e Unicidade de Solução): Se o PVI: $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$; $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$, onde p, q e g são contínuas num intervalo I contendo t_0, então existe uma única solução $y = \phi(t)$ e ela está definida em I.

Teorema 2 (Princípio da Superposição): Se y_1 e y_2 são soluções da equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, então $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução para quaisquer constantes c_1 e c_2.

Demonstração: Considerando $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ segue que $(c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(t)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1) + c_2(y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2)$. Mas, por hipótese, temos que y_1 e y_2 são soluções da equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, ou seja, $y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$ e $y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0$, portanto $c_1(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1) + c_2(y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2) = 0$ $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é solução da equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

A demonstração do Teorema 1 é extremamente avançada e foi omitida por Boyce e Diprima.

OBS 1: A solução $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ chama-se **solução geral.**

OBS 2: Se $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$ (Wronskiano), então y_1 e y_2 formam um **conjunto fundamental de soluções**.

3.2.1. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Definição: A equação diferencial $P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t)$ é dita **homogênea** se $G(t) = 0$, caso $G(t) \neq 0$ a equação é **não-homogênea**. Logo, a **equação homogênea com coeficientes constantes** é da forma $ay'' + by' + cy = 0$, onde *a*, *b* e *c* são números reais.

Note que a solução da equação $ay'' + by' + cy = 0$ deve ser uma função que se aproxima das suas derivadas pelo fato dela se anular com duas derivadas. Dessa forma, considerando a solução da forma $y(t) = e^{rt}$, onde r é constante, temos que $y'(t) = re^{rt}$ e $y''(t) = r^2 e^{rt}$. Substituindo na equação $ay'' + by' + cy = 0$ segue que $ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$, ou seja, $ar^2 + br + c = 0$, pois $e^{rt} > 0$.

Portanto, para resolver uma equação homogênea com coeficientes constantes, é necessário resolver a equação $ar^2 + br + c = 0$, também conhecida como **equação característica**.

Neste caso, surgem três possibilidades para as raízes da equação característica: raízes reais distintas, raízes reais iguais ou raízes complexas.

i. Raízes reais distintas

Considerando que a equação característica possua duas raízes distintas ($r_1 \neq r_2$), então $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ são soluções. Logo, a solução geral é dada por $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

Exemplo: Encontre a solução geral da equação diferencial $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Resolução: Note que a equação característica é dada por $r^2 + 2r - 3 = 0$ e suas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = -3$.

Como as raízes são reais e distintas, então a solução geral é $y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-3t}$.

ii. Raízes reais iguais

Caso a equação característica possua raízes reais iguais ($r_1 = r_2$), então a solução geral é da forma $y(t) = c_1 t e^{rt} + c_2 e^{rt}$.

Exemplo: Encontre a solução geral da equação diferencial $9y'' + 6y' + y = 0$

Resolução: A equação característica é dada por $9r^2 + 6r + 1 = 0$ e suas raízes são $r_1 = r_2 = -\frac{1}{3}$.

As raízes são reais e iguais, logo a solução geral é dada por $y(t) = c_1 t e^{-\frac{t}{3}} + c_2 e^{-\frac{t}{3}}$.

iii. Raízes complexas

Quando as raízes da equação característica forem complexas, ou seja, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$ onde μ e λ são números reais e $i^2 = -1$, então as soluções serão da forma $y_1 = e^{(\lambda + i\mu)t}$ e $y_2 = e^{(\lambda - i\mu)t}$.

Note que, formalmente, não há diferença para as soluções do caso *i*. Porém, como estamos trabalhando com funções reais, usando a fórmula de Euler $e^{it} = \cos(t) + isen(t)$ temos que as soluções serão da forma $y_1 = e^{\lambda t}(\cos \mu t + isen\mu t)$ e $y_2 = e^{\lambda t}(\cos \mu t - isen\mu t)$ e, portanto, a solução geral é dada por $y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} sen(\mu t)$.

Exemplo: Encontre a solução geral da equação diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Resolução: Note que $r^2 - 2r + 2 = 0$ é a equação característica e suas raízes são $r_1 = 1 + i$ e $r_2 = 1 - i$.

Pelo fato das raízes serem complexas, a solução geral da equação diferencial é da forma $y(t) = c_1 e^{t} \cos(t) + c_2 e^{t} sen(t)$.

3.2.2. DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição: Dizemos que as funções $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ são **linearmente dependentes** (LD) num intervalo I, se existirem constantes $c_1, c_2, ..., c_n$ não todas nulas tais que $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + ... + c_n f_n(t) = 0$, $\forall t \in I$. Caso, para algum $t \in I$, a única solução da equação anterior seja $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, então $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ são funções **linearmente independentes** (LI).

Teorema (Critério para independência linear de funções): Se as funções $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ forem diferenciáveis, pelo menos, $n-1$ vezes em um intervalo I e se $W(f_1, f_2, ..., f_n)(t_0) \neq 0$, então $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ serão LI em I. Além disso, se $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ forem LD em I, então $W(f_1, f_2, ..., f_n) = 0$, $\forall t \in I$.

O teorema anterior está demonstrado no livro de Zill e Cullen, página 150.

Exemplo: Determine se as funções $f(t) = sen(t)$ e $g(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2})$ são LD ou LI num certo intervalo I.

Resolução:

i. Note que $\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \cos(t)\cos(\frac{\pi}{2}) + sen(t)sen(\frac{\pi}{2}) = sen(t)$, $\forall t \in I$, então, para que a equação $c_1 sen(t) + c_2 sen(t) = 0$ seja satisfeita, $\forall t \in \mathbb{R}$, podemos tomar $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$.

Segue que as funções *f* e *g* são linearmente dependentes.

ii. Observe que $W(f,g) = \begin{vmatrix} sen(t) & sen(t) \\ \cos(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, portanto as funções *f* e *g* são linearmente dependentes.

3.2.3. REDUÇÃO DE ORDEM

Definição: Redução de ordem é um método usado para encontrar uma segunda solução para a equação homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ a partir de uma solução conhecida.

Seja $y_1(t)$ uma solução, não nula, da equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Definimos $y_2(t) = v(t)y_1(t)$ para determinar a outra solução. Ao substituir $y_2(t) = v(t)y_1(t)$ e suas derivadas na equação anterior, obtemos a equação $y_1(t)\mu'(t) + [2y_1'(t) + p(t)y_1(t)]\mu(t) = 0$, de primeira ordem onde $\mu(t) = v'(t)$, que pode ser resolvida pelos métodos vistos na seção 3.1.

Exemplo: Use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução para a equação diferencial $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0$; $t > 0$ e $y_1(t) = t$.

Resolução: Sendo $y_1(t) = t$ uma solução, considere então $y_2(t) = v(t)t$ uma segunda solução.

Para encontrar *v(t)* devemos, primeiramente, substituir $y_2(t) = v(t)t$ e suas derivadas na equação dada chegando a seguinte equação $t^3v''(t) + 4t^2v'(t) = 0$. Fazendo $\mu(t) = v'(t)$ temos $t^3\mu'(t) + 4t^2\mu(t) = 0$ ou $\mu'(t) + \frac{4}{t}\mu(t) = 0$. Resolvendo a equação linear $\mu'(t) + \frac{4}{t}\mu(t) = 0$, utilizando o fator integrante $\mu(t) = t^4$, obtemos $\mu(t) = ct^{-4}$ e, consequentemente, $v(t) = -\frac{c}{3t^3} + k$, onde c e k são constantes. Portanto, tomando $c = 3$ e $k = 0$ temos uma segunda solução $y_2(t) = t^{-2}$.

3.2.4. EQUAÇÕES NÃO-HOMOGÊNEAS

Como visto na seção 3.2.1., as equações diferenciais da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, com p, q e g contínuas em I, são ditas equações **não-homogêneas** sempre que $g(t) \neq 0$.

OBS: Nas equações não-homogêneas, chama-se a equação homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ de **equação homogênea associada**.

Teorema 1: Se y_1 e y_2 são soluções não-nulas da equação não-homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, então a diferença entre elas é uma solução da equação

$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Além disso, elas formam um conjunto fundamental de soluções para a equação anterior.

Demonstração: Se y_1 e y_2 são soluções não-nulas da equação não-homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ então temos que $y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = g(t)$ e $y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = g(t)$, ou seja, $y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2$. Simplificando equação anterior segue que $(y_1'' - y_2'') + p(t)(y_1' - y_2') + q(t)(y_1 - y_2) = 0$ e, portanto, $y_1 - y_2$ é solução de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

Teorema 2: A solução geral da equação não-homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ é da forma $\phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y(t)$, onde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada e $y(t)$ é uma solução particular de $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$.

O teorema 2 está demonstrado no livro de Boyce e Diprima na página 135.

OBS: Supondo que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sejam soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t)$ e $y'' + p(t)y' + q(t)y = g_2(t)$, respectivamente, então $y_1(t) + y_2(t)$ é solução de $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, onde $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$,

Na seção 3.2.1., vimos também como encontrar as soluções da equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, portanto, para encontrar a solução geral da equação não-homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ basta encontrar uma solução particular da mesma e somar com a solução geral da equação homogênea associada.

Vejamos agora, métodos utilizados na resolução dessas equações.

i. Método dos coeficientes indeterminados

O método consiste em substituir *y(t)* por uma função conhecida e próxima a *g(t)* e determinar apenas os seus coeficientes. Se for possível determinar o coeficiente então obtemos *y(t),* caso contrário devemos considerar outra possibilidade.

Porém, este é um método que está basicamente restrito a equações lineares não-homogêneas com os coeficientes constantes e que *g(t)* seja combinação linear de funções da forma: c (constante), x^n, $x^n e^{at}$, $x^n e^{at} sen(bt)$, $x^n e^{at} \cos(bt)$ tais que $n \in \mathbb{N}^*$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Encontre a solução particular de $y'' - 3y' - 4y = 2sen(t)$.

Resolução: Pelo formato sugerido na função *g(t),* se considerarmos $y(t) = Asen(t)$, após substituir y e suas derivadas na equação dada, segue que $-Asen(t) - 3A\cos(t) - 4Asen(t) = 2sen(t)$. Isso implica que $A = 0$ e $A = -\frac{2}{5}$, ou seja, chegamos a um absurdo e devemos então escolher outra possibilidade.

Considerando $y(t) = Asen(t) + B\cos(t)$ e substituindo y e suas derivadas na equação dada, obtemos $(-5A + 3B)sen(t) + (-3A - 5B)\cos(t) = 2sen(t)$ implicando que $A = -\frac{5}{17}$ e $B = \frac{3}{17}$.

Portanto, uma solução particular da equação dada é $y(t) = -\frac{5}{17}sen(t) + \frac{3}{17}\cos(t)$.

ii. Método da variação de parâmetros

O método da variação de parâmetros consiste em substituir as constantes c_1 e c_2 da solução geral da equação homogênea associada, por funções μ_1 e μ_2 de variável independente *t*.

Exemplo: Encontre uma solução particular de $y'' + 4y = 3\cos\sec(t)$.

Resolução: Resolvendo a equação característica temos que a solução da equação homogênea associada $y'' + 4y = 0$ é dada por $y_c(t) = c_1 c\text{os}(2t) + c_2 sen(2t)$. Trocando c_1 e c_2 por $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$, temos $y(t) = \mu_1(t)c\text{os}(2t) + \mu_2(t)sen(2t)$.

A fim de encontrar $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$, vamos exigir que $\mu_1'(t)c\text{os}(2t)+\mu_2'(t)sen(2t)=0$ para algum t, então $y'(t)=-2\mu_1(t)sen(2t)+2\mu_2(t)\cos(2t)$ e, consequentemente, $y''(t)=-4\mu_2(t)sen(2t)-4\mu_1(t)\cos(2t)-2\mu_1'(t)sen(2t)+2\mu_2'(t)\cos(2t)$. Ao substituir y'' e y na equação dada, obtemos o seguinte sistema de equações: $\begin{cases}\mu_1'(t)c\text{os}(2t)+\mu_2'(t)sen(2t)=0\\ -2\mu_1'(t)sen(2t)+2\mu_2'(t)c\,os(2t)=3\cos\sec(t)\end{cases}$ que, depois de resolvido, garante que $\mu_1'(t)=-3\cos(t)$ e $\mu_2'(t)=\frac{3}{2}\cos\sec(t)-3sen(t)$ ou ainda, $\mu_1(t)=-3sen(t)+k_1$ e $\mu_2(t)=\frac{3}{2}\ln\left|\cos\sec(t)-\cot g(t)\right|+3c\text{os}(t)+k_2$.

Por fim, substituindo $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$ em $y(t)=\mu_1(t)c\text{os}(2t)+\mu_2(t)sen(2t)$ temos a solução procurada.

Capítulo 4

Aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias

Nos capítulos anteriores pudemos conhecer um pouco da história, modelos de equações diferenciais e como resolvê-los.

Sabendo que as equações diferenciais são utilizadas na descrição do comportamento de problemas reais, nesse capítulo vamos apresentar algumas aplicações das equações diferenciais ordinárias lineares e não-lineares de primeira ordem e lineares de segunda ordem afim de mostrar problemas em áreas diversas que podem ser modelados por uma EDO.

4.1. APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Essa seção traz como representante das aplicações de equações lineares e equações não-lineares, a lei do resfriamento e a reação química, respectivamente.

4.1.1. EQUAÇÕES LINEARES: RESFRIAMENTO

A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto em resfriamento varia de forma proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura constante do meio ambiente, ou seja, $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$, onde T é a temperatura do objeto, T_m é a temperatura do ambiente, t o tempo, k uma constante de proporcionalidade e o sinal negativo que acompanha k indica que a temperatura do corpo diminui com o passar do tempo em relação à temperatura do meio ambiente. Essa fórmula também é válida quando o objeto absorve calor do meio ambiente.

Note que a equação anterior pode ser reescrita como $\frac{dT}{(T - T_m)} = -kdt$, uma equação separável, ou seja, para encontrar a solução geral basta integrar o lado

esquerdo em relação a T e o lado direito em relação a t obtendo $\ln(T-T_m)=-kt+k_0$. Para encontrar a solução geral da equação $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_m)$, podemos aplicar a exponencial em ambos os lados e isolar T e, consequentemente, teremos que $T(t)=ce^{-kt}+T_m$, onde $c=e^{k_0}$. De acordo visto no capítulo 3, para determinar a constante c é necessária uma condição inicial.

Para melhor entendimento, analisaremos o problema a seguir.

Problema: (Zill e Cullen, p. 114) Um termômetro é removido de uma sala, em que a temperatura é de 70^oF, e colocado do lado de fora, em que a temperatura é de 10^oF. Após 0,5 minutos, o termômetro marcava 50^oF. Qual será a temperatura marcada no termômetro no instante $t=1$ minuto? Quanto tempo levará para o termômetro marcar 15^oF?

Resolução: Primeiramente, vamos analisar os dados. Note que a temperatura do meio ambiente é $T_m=10$, no tempo inicial ($t=0$) a temperatura do termômetro é dada por $T(0)=70$ e que após *0,5* minutos temos $T(0,5)=50$. Com esses dados, observe que temos um problema de valor inicial $\frac{dT}{dt}=-k(T-10);T(0)=70$ que, depois de resolvido, determinará o valor de c e para determinar k será necessário utilizar a condição $T(0,5)=50$.

Ao substituir a condição inicial $T(0)=70$ na solução geral $T(t)=ce^{-kt}+10$ da equação $\frac{dT}{dt}=-k(T-10)$, temos: $70=ce^{-0t}+10\rightarrow c=60$, ou seja, $T(t)=60e^{-kt}+10$. Agora, substituindo $T(0,5)=50$ na equação anterior, segue que: $50=60e^{-0,5k}+10\rightarrow \ln(\frac{40}{60})=-0,5k\rightarrow k=0,8109302162$. Portanto, a solução, com condições iniciais $T(0)=70$ e $T(0,5)=50$, é dada por $T(t)=60e^{-0,8109302162t}+10$.

1. Qual será a temperatura marcada no termômetro no instante $t=1$ minuto?

Agora que já sabemos que $T(t) = 60e^{-0,8109302162t} + 10$, basta substituir t por 1, ou seja, $T(1) = 60e^{-0,8109302162} + 10 = 36,6666666671$. Portanto, a temperatura marcada no termômetro no instante $t = 1$ minuto será de aproximadamente 36,7^{o}F.

2. Quanto tempo levará para o termômetro marcar 15°F?

Utilizando a mesma equação, $T(t) = 60e^{-0,8109302162t} + 10$, e substituindo T por 15, temos: $15 = 60e^{-0,8109302162t} + 10 \rightarrow \ln(\frac{5}{60}) = -0,8109302162t \rightarrow t = 3.0642669371$, ou seja, levará aproximadamente 3,06 minutos para o termômetro marcar 15°F.

4.1.2. NÃO-LINEARES: REAÇÕES QUÍMICAS

Quando certas substâncias sofrem transformações em relação ao seu estado original, ou seja, quando as ligações entre os átomos e as moléculas de uma substância se rompem e são estabelecidas de outra forma temos uma **reação química**. Portanto, se as moléculas de uma substância A se rompem em moléculas menores, supõe-se que há uma proporcionalidade entre a taxa em que acontece essa decomposição e a quantidade da substância inicial que não foi submetida à conversão, ou seja, $\frac{dX}{dt} = kX$ onde *X(t)* é a quantidade de substância A restante em qualquer tempo t e k é uma constante negativa por X ser decrescente. Chamamos esse tipo de reação de **reação de primeira ordem**.

Agora, se A e B são duas substâncias que formam um terceiro composto C e tais que haja uma proporcionalidade entre a taxa na qual a reação é executada e as quantidades restantes, $\alpha - X$ e $\beta - X$, dessas substâncias, então a taxa de formação do composto C é dada por $\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X)$, onde α e β representam as quantidades usadas dos compostos A e B, respectivamente. Essa reação é conhecida como **reação de segunda ordem**.

Note que a taxa de formação de certo composto em uma reação de primeira ordem é dada por uma equação linear e a de segunda ordem é não-linear, neste caso, estamos interessados em analisar o segundo tipo de reação.

Vejamos a seguir uma aplicação.

Problema: (Zill e Cullen, p. 129) Dois compostos químicos A e B são combinados para formar um terceiro composto C. A taxa ou velocidade da reação é proporcional à quantidade instantânea de A e B não convertida em C. Inicialmente, há 40 gramas de A e 50 gramas de B, e para cada grama de B, 2 gramas de A são usados. É observado que 10 gramas de C são formados em 5 minutos. Quanto é formado em 20 minutos? Qual é a quantidade limite de C após um longo período de tempo? Qual a quantidade remanescente de A e B depois de um longo período de tempo?

Resolução: Vamos organizar os dados. Sabemos que X(t) será a quantidade em gramas do composto C em qualquer instante *t*, logo $X(0)=0$ e $X(5)=10$. Seja α a quantidade em gramas de A e β a quantidade em gramas de B, segue que $\alpha+\beta=X$ e, como para cada grama de B são usados 2 gramas de A, então $\alpha=2\beta$, lembrando que temos ao todo 40 gramas de A e 50 gramas de B.

Resolvendo o sistema $\begin{cases}\alpha+\beta=X\\ \alpha=2\beta\end{cases}$ obtemos $\beta=\frac{1}{3}X$ e $\alpha=\frac{2}{3}X$, ou seja, para X gramas de C serão usados $\frac{1}{3}X$ gramas de B e $\frac{2}{3}X$ gramas de A e, portanto, as quantidades restantes de A e B serão, respectivamente, $40-\frac{2}{3}X$ e $50-\frac{1}{3}X$. Segue também que a taxa na qual o composto C é formado, satisfaz $\frac{dX}{dt}=k(40-\frac{2}{3}X)(50-\frac{1}{3}X)$, ou ainda, $\frac{dX}{dt}=k\frac{2}{9}(60-X)(150-X)$.

Tomando $c=\frac{2}{9}k$ e separando as variáveis podemos escrever $\frac{dX}{(60-X)(150-X)}=cdt$, onde o lado esquerdo será integrado em reação à X e o lado direito em relação à *t*. Observe que, para integrar o lado esquerdo, será necessário o uso do método de frações parciais, ou seja,

$$\frac{dX}{(60-X)(150-X)}=\frac{AdX}{(60-X)}+\frac{BdX}{(150-X)}=\frac{(150-X)AdX+(60-X)BdX}{(60-X)(150-X)}$$

implicando que $dX=(150-X)AdX+(60-X)BdX$. Note que para $X=150$ e

$X = 60$ temos, respectivamente, $B = -\frac{1}{90}$ e $A = \frac{1}{90}$, assim, $\int \frac{dX}{(60-X)(150-X)} = \frac{1}{90}\int \frac{1}{(60-X)} - \frac{1}{(150-X)} dX = \int c dt$.

Resolvendo as integrais, obtemos $\frac{1}{90}(-\ln|60-X| + \ln|150-X|) = ct + c_0$ que, após aplicar a propriedade logarítmica de divisão e em seguida a exponencial, pode ser reescrita como $\frac{(150-X)}{(60-X)} = c_1 e^{90ct}$, onde $c_1 = e^{90c_0}$.

Para encontrar as constantes c e c_1 usaremos as condições $X(0) = 0$ e $X(5) = 10$. Como $X(0) = 0$, então $\frac{(150-0)}{(60-0)} = c_1 e^0 \to c_1 = \frac{5}{2}$ e a equação torna-se $\frac{(150-X)}{(60-X)} = \frac{5}{2} e^{90ct}$. Agora, utilizando a segunda condição $X(5) = 10$, temos $\frac{(150-10)}{(60-10)} = \frac{5}{2} e^{90c5} \to \frac{28}{25} = e^{90c5} \to 90c = \frac{\ln\left|\frac{28}{25}\right|}{5} = 0.0226657371$ e, portanto, segue que $\frac{(150-X)}{(60-X)} = \frac{5}{2} e^{0.0226657371t} \to X(t) = \frac{300e^{0.0226657371t} - 300}{5e^{0.0226657371t} - 2}$, em qualquer instante de tempo *t*.

1. Quanto é formado em 20 minutos?

A fim de saber quanto do composto C é produzido em 20 minutos, vamos substituir *t* por 20 na equação $X(t) = \frac{300e^{0.0226657371t} - 300}{5e^{0.0226657371t} - 2}$. Assim, $X(20) = \frac{300e^{0.453314742} - 300}{5e^{0.453314742} - 2} = 29{,}3230455416$, ou seja, em 20 minutos serão produzidas aproximadamente 29 gramas do composto C.

2. Qual é a quantidade limite de C após um longo período de tempo?

Para isso, devemos calcular o limite, quanto *t* tende ao infinito, de *X(t)*.

Logo, $\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{300e^{0.0226657371t} - 300}{5e^{0.0226657371t} - 2} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-0.0226657371t}}{e^{-0.0226657371t}} (\frac{300e^{0.0226657371t} - 300}{5e^{0.0226657371t} - 2})$ e, fazendo a distributividade, temos $\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} (\frac{300 - 300e^{-0.0226657371t}}{5 - 2e^{-0.0226657371t}})$. Como $t \to \infty$, então $e^{-0.0226657371t} \to 0$ e $\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{300}{5} = 60$.

Portanto, após um longo período de tempo a quantidade limite de C é de 60 gramas.

3. Qual a quantidade remanescente de A e B depois de um longo período de tempo?

Vimos que a quantidade remanescente de A e B são, nessa ordem, $40 - \frac{2}{3}X$ e $50 - \frac{1}{3}X$. Como a quantidade limite de C após um longo período de tempo é de 60 gramas, então $\alpha = 40 - \frac{2}{3}.60 = 0$ e $\beta = 50 - \frac{1}{3}.60 = 30$, ou seja, 0 e 30 são as quantidades remanescentes em gramas de A e B, respectivamente.

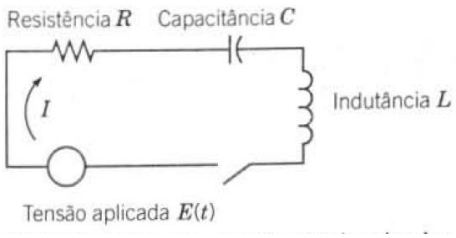
4.2. APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

A equação de segunda ordem $ay'' + by' + cy = g(t)$ surge no estudo de problemas em física, química, biologia e engenharia.

Nessa seção, a fim de abordar as aplicações de equações lineares de segunda ordem, usaremos como objeto de estudo os circuitos elétricos.

4.2.1. EQUAÇÕES LINEARES: CIRCUITOS ELÉTRICOS

Figura 1: Circuito Elétrico Simples



Fonte: Boyce e Diprima (2010)

Seja *I(t)* a corrente de um circuito elétrico em amperes (A), então a queda de voltagem pelo indutor *L*, pelo resistor *R* e pelo capacitor *C* são, respectivamente, $L\frac{dI}{dt}$, IR e $\frac{1}{C}Q$. Portanto, pela segunda lei de Kirchoff, a soma dessas voltagens é igual à voltagem *E(t)* medida em volts (V), ou seja, $L\frac{dI}{dt}+IR+\frac{1}{C}Q=E(t)$ onde *Q* é a carga total no capacitor em um instante de tempo *t*, medida em coulombs (C).

Consequentemente, como $I=\frac{dQ}{dt}$ é a ralação entre a carga total e a corrente, a equação anterior torna-se $LQ''+RQ'+\frac{1}{C}Q=E(t)$ ou, diferenciando $I=\frac{dQ}{dt}$ em relação a Q, $LI''+RI'+\frac{1}{C}I=E'(t)$.

OBS 1: *R*, *L* e *C* são consideradas constantes conhecidas e são medidas em ohms (Ω), henrys (H) e farads (F), respectivamente.

OBS 2: Quando $E(t)=0$ as vibrações elétricas são ditas livres.

Relembrando o estudo de equação característica, quando $Lr^2+Rr+\frac{1}{C}=0$ teremos três possibilidades: $R^2-4\frac{L}{C}>0$ que implica em um circuito superamortecido, $R^2-4\frac{L}{C}=0$ circuito criticamente amortecido ou $R^2-4\frac{L}{C}<0$ circuito subamortecido. Em cada caso $Q(t)\to 0$ quando $t\to\infty$, no caso subamortecido que $Q(0)=Q_0$ o capacitor recebe carga e descarga se $t\to\infty$, se $E(t)=0$ e $R=0$ o circuito é dito não-amortecido quando e quando $t\to\infty$ e as vibrações elétricas não tende a zero.

Problema: (Zill e Cullen, p. 265) Encontre a carga no capacitor em um circuito em série *L-R-C* no instante $t=0{,}01$ segundo quando $L=0{,}05$ henry,

$R = 2$ ohms, $C = 0{,}01$ farad, $E(t) = 0$ volt, $Q(0) = 5$ coulombs e $I(0) = 0$ ampere. Determine o primeiro instante no qual a carga do capacitor é zero.

Resolução: Como $L = 0{,}05$, $R = 2$, $C = 0{,}01$ e $E(t) = 0$ a equação diferencial desse problema é dada por $0{,}05Q'' + 2Q' + 100Q = 0$ de equação característica $0{,}05r^2 + 2r + 100 = 0$. Resolvendo a equação característica temos $r_1 = -20 + 40i$ e $r_2 = -20 - 40i$ logo, a solução geral é dada por $Q(t) = e^{-20t}(c_1 \cos(40t) + c_2 sen(40t))$.

Note que as condições iniciais são $Q(0) = 5$ e $I(0) = 0 = Q'(0)$. Substituindo a primeira condição na equação encontrada temos $5 = e^0(c_1 \cos(0) + c_2 sen(0)) \to c_1 = 5$, a equação torna-se $Q(t) = e^{-20t}(5\cos(40t) + c_2 sen(40t))$ e, consequentemente, $Q'(t) = e^{-20t}[(40c_2 - 100)\cos(40t) + (-20c_2 - 200)sen(40t)]$. Agora, substituindo a segunda condição $I(0) = 0 = Q'(0)$ na equação anterior, segue que $0 = e^0[(40c_2 - 100)\cos(0) + (-20c_2 - 200)sen(0)] \to 40c_2 - 100 = 0 \to c_2 = \frac{5}{2}$ e, portanto, a solução é da forma $Q(t) = e^{-20t}(5\cos(40t) + \frac{5}{2}sen(40t))$.

1. Encontre a carga no capacitor em um circuito em série *L-R-C* no instante $t = 0{,}01$ segundo.

Para isso, basta substituir $t = 0{,}01$ na equação encontrada, ou seja, $Q(0{,}01) = e^{-0{,}2}(5\cos(0{,}4) + \frac{5}{2}sen(0{,}4)) = 4{,}567576738$.

Portanto, a carga no capacitor no instante $t = 0{,}01$ segundo é de, aproximadamente, 4,568 coulombs.

2. Determine o primeiro instante no qual a carga do capacitor é zero.

Nesse caso, temos que substituir Q por zero para encontrar t, ou seja, $0 = e^{-20t}(5\cos(40t) + \frac{5}{2}sen(40t))$. Note que temos duas possibilidades $e^{-20t} = 0$ ou

$5\cos(40t)+\frac{5}{2}sen(40t)=0$, mas $e^{-20t}\neq 0$ para todo t e, portanto, a segunda possibilidade é verdadeira.

Agora, temos que $5\cos(40t)+\frac{5}{2}sen(40t)=0 \rightarrow 5\cos(40t)=-\frac{5}{2}sen(40t) \rightarrow tg(40t)=-2$ e que aplicando $arctg$ dos dois lados da equação $40t=arctg(-2)=-1{,}107148718+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

Como estamos procurando o primeiro instante em que $Q=0$, então devemos escolher o menor valor para t e consequentemente para k, tal que $t>0$. Logo, tomando $k=1$ segue que $40t=-1{,}107148718+\pi \rightarrow t=0{,}050861098$, ou seja, no instante $t\cong 0{,}0509$ segundos a carga no capacitor será, pela primeira vez, nula.

Considerações Finais

A matemática é vista por muitos como a mãe das ciências, pois contém aplicações em várias áreas de diversas maneiras de aplicação. Ela está presente no nosso cotidiano desde cálculos simples como o troco do leite ou do pão, a cálculos complexos como a construção de um edifício.

Vimos que um exemplo de conteúdo matemático que contribui no progresso dos estudos em diversos ramos são as equações diferenciais, que podem ter aplicações fáceis do dia-a-dia, como o cálculo de juros compostos, ou mais difíceis como o cálculo de crescimento e decrescimento populacional.

Esse trabalho trouxe como principal objetivo aprimorar os conhecimentos sobre as equações diferenciais e mostrar que, mesmo não estando explícitas, elas se encontram em problemas que podem ser percebidos na vida real. Esse estudo foi apresentado da seguinte forma: contexto histórico, definições, teoremas, exemplos e aplicações nas áreas de química, física e biologia limitadas às equações ordinárias lineares de segunda ordem e lineares e não lineares de primeira ordem.

A pesquisa em questão pode auxiliar nas pesquisas de muitos ramos das ciências, além de despertar no leitor o interesse pelo conteúdo apresentado.

Referências Bibliográficas

[1] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010;

[2] NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. Caicó: UFRN, 2016;

[3] ZILL, Dennis G., **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 3 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

[4] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R., **Equações Diferenciais**. Vol 1. 3 ed. São Paulo: Pearson 2007.