Elvis Gonçalves Carvalho

Derivadas Parciais e Integral de Linha: uma breve revisão e aplicações

Elvis Gonçalves Carvalho

Derivadas Parciais e Integral de Linha: uma breve revisão e aplicações

Trabalho de Conclusão de curso apresentada ao colegiado do curso de graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Grau de licenciando em Matemática.

Universidade Estadual do Sudoeste Da Bahia – UESB

Orientador: Dr. André Nagamine – UESB

Vitória da Conquista 2017

Elvis Gonçalves Carvalho

Derivadas Parciais e Integral de Linha: uma breve revisão e aplicações

Trabalho de Conclusão de curso apresentada ao colegiado do curso de graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Grau de licenciando em Matemática.

Trabalho aprovado. Vitória da Conquista, 16 de Agosto de 2017:

Dr. André Nagamine – UESB Orientador

Ms. Antônio Augusto de Oliveira Lima – UESB Convidado 1

Dr. Júlio César dos Reis – UESB Convidado 2

> Vitória da Conquista 2017

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado saúde e força de vontade para superar as dificuldades encontradas durante o curso.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio a todos os momentos.

A Universidade Estadual Do Sudoeste da Bahia assim como seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a possibilidade que tive de completar o ensino superior. Ao meu orientador André Nagamine, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação acadêmica, o meu muito obrigado.



Resumo

O presente trabalho visa mostrar algumas das aplicações das Derivadas parciais e Integrais de Linha, mas para isso faz-se necessário a apresentação de assuntos que são fundamentais para a compreensão de tais aplicações. Inicialmente é feito uma revisão sobre a parte teórica de derivadas parciais e integrais de linha que servirão de base para a apresentação de algumas aplicações em algumas áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Prerrequisitos, Derivadas Parciais, Integrais de Linha, Aplicações.

Abstract

The present work aims to show some of the applications of partial Derivatives and the Integrals of the Line, but for this it is necessary to the presentation of subjects that are fundamental to the understanding of such applications. Initially it is done a review on the theoretical part of partial derivatives and the integral of line that will serve as the basis for the presentation of some applications in some areas of knowledge.

Keywords: Prerequisites, Partial Derivatives, Integrals of the Line, Applications.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Caixa Retangular	12
Figura 2 — Esboço do Domínio	13
Figura 3 – Curva Parametrizada	13
Figura 4 – Construção da Ciclóide	14
Figura 5 – Construção da Epiciclóide	15
Figura 6 – Figuras da Epiciclóide	17
Figura 7 – Construção da Hipocicloide	17
Figura 8 – Figuras da Hipocicloide	18
Figura 9 – Curva com poligonais	19
Figura 10 – Campo Vetorial de um Liquido escoando	20
Figura 11 – Campo Vetorial Plano	21
Figura 12 – Tangentes a superfície	24
Figura 13 – Superfície	25
Figura 14 – Representação das Equações de Laplace	32
Figura 15 – Representação da Equação da Onda	34
Figura 16 – Esquematização do Problema	36
Figura 17 – Gráfico da montanha de Acordo com as Considerações I $\ldots \ldots$	37
Figura 18 – Gráfico da montanha de Acordo com as Considerações II	38
Figura 19 — Representação da Curva Descrita	39
Figura 20 – Região Conexa e não Conexa	44
Figura 21 – Região D considerada	44
Figura 22 – Superfície Gaussiana	50
Figura 23 – Representação do Fio por Meio de um Bastão	51
Figura 24 — Bastão curvado AB	52
Figura 25 – Consideração Infinitesimal do bastão	53

Sumário

	Introdução
1	REQUISITOS NECESSÁRIOS
1.1	Funções de Várias Variáveis
1.2	Equações Parametrizadas
1.3	Comprimento de Arco
1.4	Função Vetorial
2	DERIVADAS PARCIAIS
2.1	Interpretação das Derivadas Parciais 24
2.2	Derivadas de Ordem Superior
2.3	Derivadas Direcionais
3	APLICAÇÕES DAS DERIVADAS PARCIAIS
3.1	Funções de Várias Variáveis e as Derivadas Parciais 29
3.2	Derivadas de Ordem Superior
3.3	Derivadas Direcionais
4	INTEGRAL DE LINHA
4.1	Integrais de Linha Sobre uma Função Escalar 39
4.2	Integrais de Linha Sobre uma Função Vetorial
4.3	Teorema de Green
5	APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS DE LINHA 46
5.1	Conservação de Energia
5.2	Lei de Gauss
5.3	Cálculo da massa de um Fio
6	CONCLUSÃO
	REFERÊNCIAS

Introdução

Desde o começo do curso até a última disciplina de Cálculo vi que os professores não davam muita importância para as aplicações desses conteúdos, o principal motivo se deve a carga horária que as disciplinas de cálculo tem para apresentar os conteúdos da ementa.

Sendo assim escolhi um tema que buscasse se aprofundar em partes do conteúdo contido na ementa dos cálculos que na maioria das vezes são vistos de maneira superfícial, focando assim em algumas aplicações das Derivadas Parciais e Integral de Linha. Meu interesse ficou mais claro no momento em que cursei disciplinas que utilizavam ferramentas matematicas para resolver problemas, no caso Física I e II. Com isso pude perceber que a Matemática está mais presente no dia a dia do que parece.

Assim como em outras áreas da Matemática o Cálculo Diferencial e Integral teve seu desenvolvimento ao longo dos anos, contando com vários Matemáticos não só com Leibniz e Isaac Newton, mas com outros como Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler que de certa forma já utilizavam alguns conceitos do cálculo em suas pesquisas, mesmo que não fossem teorias bem elaboradas.

As contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo são inúmeras. Muitos deles, mesmo que de forma imprecisa ou não rigorosa, já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas - por exemplo, Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler. Nesse tempo ainda não havia uma sistematização, no sentido de uma construção logicamente estruturada. A união das partes conhecidas e utilizadas até então, aliada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas, aconteceu com Newton e Leibniz que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as Derivadas e as Integrais.Barufi ()

Tanto Leibniz quanto Newton assim como os outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da teoria do Cálculo Diferencial e Integral, mas existia uma grande rivalidade entre os principais colaboradores do surgimento do cálculo Newton e Leibniz. Sabe-se que nenhum dos dois teve contato com o trabalho de um e de outro, mas de certa forma os dois partindo de bases diferentes chegaram a conclusões semelhantes.

O presente trabalho visa mostrar um pouco da teoria das derivadas parciais e de Integrais de linha e como resultado desse estudo algumas de suas aplicações. Mas para isso faz-se necessária a revisão de alguns assuntos que são ditos prerrequisitos para se iniciar.

Mesmo com as rivalidades que existiram ambas as teorias se complementavam e foram a base para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, fazendo com que novas teorias pudessem serem criadas.

O primeiro capítulo tráz conteúdos que serão importantes para a apresentação do

Introdução 10

tema principal servindo como base para o seu entendimento.

O capítulo de derivadas parciais aborda alguns tópicos do conteúdo que serão vistos de forma mais específica, e no capítulo posterior focaremos algumas de suas aplicações. Nos dois últimos capítulos seram apresentadas as partes teóricas da Integral de Linha e algumas de suas aplicações.

1 Requisitos Necessários

1.1 Funções de Várias Variáveis

Inicialmente iremos definir uma função de duas variáveis para podermos iniciar o estudo principal deste trabalho.

Definição 1.1: Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x,y) de um conjunto D um único valor real, denotado por f(x,y). O conjunto D é o domínio de f e sua imagem é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $D=\{f(x,y)|(x,y)\in D\}$.

Assim como em uma função de uma variável real, podemos definir a noção de variável independente e dependente, com isso teriamos que f(x,y) seria a variável dependente sendo que x e y seria as variáveis independentes. Frequentemente utilizamos z = f(x,y) para representar a função f.

Exemplo 1.1: Dada a função $f(x,y) = \frac{x-2}{\sqrt{\cos x - \sin y}}$, determine seu maior domínio possível em \mathbb{R}^2 .

Solução: A função que iremos analisar se trata de uma função que envolve um quociente, sendo assim seu denominador não pode se anular. Além disso no denominador temos também uma raiz quadrada, dessa forma concluimos.

$$\cos x - \sin y > 0$$

$$\cos x > \sin y$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \cos x > \sin y\}$$

Observação: Assim como definimos as funções de duas variáveis reais podemos definir funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, uma função de três variáveis é uma função do tipo w = f(x, y, z), de forma que a tripla ordenada $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$.

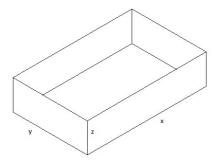
Definição 1.2: Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em \mathbb{R}^3 tal que z = f(x, y) e (x, y) pertença a D.

Assim como em uma função de duas váriaveis definimos o gráfico para as funções de três, porém já não é possível visualizar para funções de quatro ou mais variáveis, pois o mesmo se encontra em \mathbb{R}^4 .

Exemplo 1.2: Considere uma caixa retangular, cuja parte superior seja aberta e cujos lados tenham preços variados no custo de produção. Sabendo que o custo é de R3,00\ e\ R$5,00$ por unidade de área e de R\$10,00 por unidade de área para o fundo. Determina a função h que representa o custo de produção.

Solução:

Figura 1 – Caixa Retangular



Fonte: Construção Própria

Considere a seguinte figura para ilustrar as dimensões da caixa retangular. Sendo assim teremos que a função custo será dado pela soma de cada uma das partes que compõem a caixa :

$$h(x, y, z) = 2(3yz) + 2(5xz) + 10xy$$

Após as simplificações ficamos com:

$$h(x, y, z) = 6yz + 10xz + 10xy$$

Exemplo 1.3: Dada a função $g(x,y,z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$, determine para quais valores a função está definida e logo após esboçe a representação do seu domínio por meio do gráfico.

Solução:

Sabemos que a função g(x) = ln(x) só está definida para x > 0, com isso analisando a função f ela só estará definida se $16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2 > 0$, mas simplificando temos:

$$-4x^{2} - 4y^{2} - z^{2} > -16 \times (-1)$$

$$4x^{2} + 4y^{2} + z^{2} < 16 \times (\frac{1}{4})$$

$$x^{2} + y^{2} + \frac{1}{4}z^{2} < 4$$

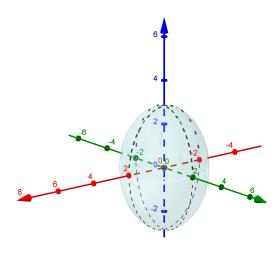
$$x^{2} + y^{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^{2} < 4$$

$$D_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 < 4\}$$

Agora esboçaremos a representação do domínio da função utilizando um software computacional.

Observe que a Figura 2 esboça uma representação do domínio onde os pontos interiores a um elipsóide, centrado na origem, não incluem a parte superficial.

Figura 2 – Esboço do Domínio



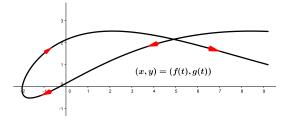
Fonte: Construção Própria

1.2 Equações Parametrizadas

Imagine uma partícula que descreve o comportamento da curva C representada na Figura 3. Note que o comportamento dessa partícula em termos de x e y não seria uma função, pois seria reprovada no teste da reta vertical, mas se fizermos (x,y)=(f(t),g(t)) podemos descrever o comportamento dela em função do parâmetro t.

$$x = f(y)$$
 e $y = g(t)$

Figura 3 – Curva Parametrizada



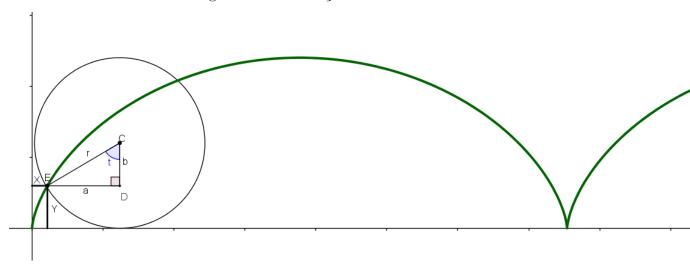
Fonte: Construção Própria

Exemplo 1.4: Considere um circulo de raio r rolando sobre o eixo x sem deslizamento.

Um ponto desta circunferência descreve uma ciclóide. Suponha que para o tempo t=0 o ponto da circunferência coincide com a origem do sistema de coordenadas, obtenha uma parametrização para a ciclóide.

Solução:

Figura 4 – Construção da Ciclóide



Fonte: Construção Própria

Em t = 0, temos:

$$E(0,0) \in C(0,r)$$

E se t for qualquer, teremos:

$$p(x,y) \in c(rt,r)$$

Observando o triângulo retângulo $E\widehat{C}D$, encontramos:

$$\begin{cases} a = r \sin t \\ b = r \cos t \end{cases}$$

Mas observando a Figura 4 podemos estabelecer a seguinte relação:

$$x + a = rt$$

$$\operatorname{Mas} a = r \operatorname{sen} t$$

Logo:

$$x = rt - r \operatorname{sen} t$$

Em relação a outra componente temos:

$$b + y = r$$

Mas $b = r \cos t$, sendo assim ficamos com:

$$y = r - r \cos t$$

Portanto a parametrização da ciclóide será dada por

$$h(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$$

Exemplo 1.5: Um círculo c de raio r, rola exatamente sobre um círculo fixo C, de raio R. Um ponto P da circunfenrêcia c descreve uma epiciclóide. Suponha que para o tempo t=0 o ponto P esteja em contato com a circunferência C no ponto A, obtenha uma parametrização para a epiciclóide.

Solução:

Inicialmente consideramos o raio da circunferência de maior raio igual a R e a de menor raio igual a r.

Observando a Figura 5 notamos que no triângulo retângulo PVS podemos encontrar a

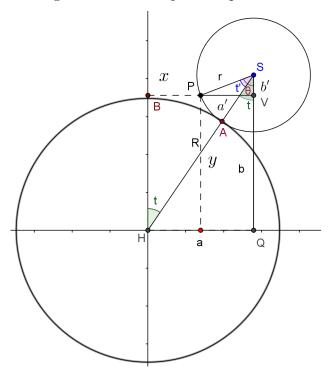


Figura 5 – Construção da Epiciclóide

Fonte: Construção Própria

seguinte relação:

$$\begin{cases} a' = r \sin \theta \\ b' = r \cos \theta \end{cases} \tag{1.1}$$

Mas como $\theta = t + t'$, ficamos com

$$\begin{cases} a' = r \operatorname{sen}(t + t') \\ b' = r \cos(t + t') \end{cases}$$
(1.2)

Agora analisando o triângulo retângulo HQS percebemos que,

$$\begin{cases} a = (R+r) \operatorname{sen} t \\ b = (R+r) \operatorname{cos} t \end{cases}$$
 (1.3)

Note que os arcos $\widehat{BA} = \widehat{AP}$, logo

$$t' = \frac{tR}{r}$$

Temos que

$$a = x + a' \Rightarrow x = a - a'$$

Utilizando o que temos em 1.3 e 1.2 ficamos com:

$$x = (R+r)\operatorname{sen} t - r\operatorname{sen}\left(t + \frac{tR}{r}\right)$$

Temos também que:

$$b = b' + y$$

y = b - b', observando novamente 1.3 e 1.2 teremos:

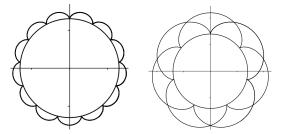
$$y = (R+r)\cos t - r\cos\left(t + \frac{tR}{r}\right)$$

Portanto a epiciclóide parametrizada é dada por:

$$h(t) = \langle (R+r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \left(t + \frac{tR}{r} \right), (R+r) \operatorname{cos} t - r \operatorname{cos} \left(t + \frac{tR}{r} \right) \rangle$$

Agora vejamos algumas figuras que são produzidas a depender da medida dos raios.

Figura 6 – Figuras da Epiciclóide



Fonte: Construção Própria

Exemplo 1.6: Um círculo c de raio r, rola exatamente dentro de um círculo fixo C, de raio R. Um ponto da circunfenrêcia C descreve uma hipocicloide. Suponha que para o tempo t=0 o ponto da circunferência c está em contato com a circunferência C, obtenha uma parametrização para a hipocicloide.

Solução:

Assim como fizemos no exemplo anterior inicialmente consideramos o raio da circunfência de maior raio igual a R e a de menor raio igual a r.

Observando a Figura 7 notamos que no triângulo retângulo DPE podemos encontrar a

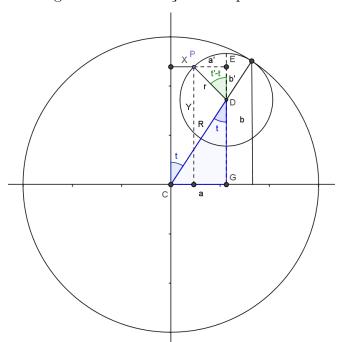


Figura 7 – Construção da Hipocicloide

Fonte: Construção Própria

seguinte relação:

$$\begin{cases} a' = r \operatorname{sen}(t' - t) \\ b' = r \cos(t' - t) \end{cases}$$
(1.4)

Agora analisando o triângulo retângulo CGD percebemos que,

$$\begin{cases} a = (R - r) \operatorname{sen} t \\ b = (R - r) \cos t \end{cases}$$
 (1.5)

Note que $tR = rt' \implies t' = \frac{tR}{r}$, pois subtendem o mesmo arco.

Como

$$\begin{cases} x = a - a' \\ y = b + b' \end{cases} \tag{1.6}$$

Utilizando o que temos em 1.4 e 1.5, ficamos com

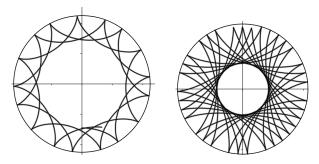
$$\begin{cases} x = (R - r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \left(\frac{tR}{r} - t\right) \\ y = (R - r) \operatorname{cos} t + R \operatorname{cos} \left(\frac{tR}{r} - t\right) \end{cases}$$
(1.7)

Portanto a parametrização da hipocicloide será dada por:

$$g(t) = \langle ((R-r) \sin t - r \sin \left(\frac{tR}{r} - t\right), (R-r) \cos t + R \cos \left(\frac{tR}{r} - t\right) \rangle$$

Agora vejamos algumas figuras que são produzidas a depender da medida dos raios.

Figura 8 – Figuras da Hipocicloide



Fonte: Construção Própria

1.3 Comprimento de Arco

Considere que já foi visto como calcular o comprimento L de uma curva C dada pelo gráfico de uma função na forma $y=F(x),\,a\leq x\leq b$. Sabendo que F' é continua,logo L é o comprimen então:

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{1.8}$$

Agora suponha que C também possa ser descrita pelas equações paramétricas da forma x=f(t) e $y=g(t),~a\leq t\leq b,$ sendo que $f'(t)=\frac{dx}{dt}>0.$ Isso significa que C é

percorrida uma vez, da esquerda para a direita, a medida que t aumenta de a até b e $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$. Substituindo em (2.7) ficamos com

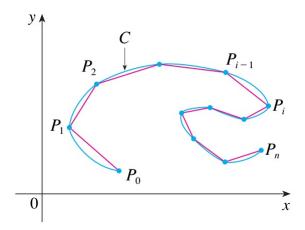
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt \tag{1.9}$$

Após a simplificação e sabendo que $\frac{dx}{dt} > 0$, tem-se

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \tag{1.10}$$

Com isso percebemos que a fórmula acima se torna válida para toda curva parametizada. Isso se deve pelo fato de dividirmos uma certa curva em partes infinitesimais, tão pequenas quanto se queira, fazendo com que consigamos aproximações poligonais em relação a curva, tornando possível calcularmos o comprimento desta. Pois, se dividimos o intervalo do parâmetro [a, b] em n subintervalos de comprimentos iguais ∇t . Se $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$ são as extremidades desses subintervalos, então $x_i = f(t_i)$ e $y_i = t(t_i)$ são as coordenadas dos pontos $P_i(x_i, y_i)$ que estão em C e o polígono com vértices $P_0, P_1, ..., P_n$ aproxima C, como mostra a figura abaixo. Com isso percebemos que para encontar L é

Figura 9 – Curva com poligonais



Fonte: Stewart (2013, p. 587)

necessário calcular o comprimento de cada poligonal e somar todas, ao final faz se preciso buscar uma aproximação da curva sendo assim basta fazermos.

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1} - P_i|$$

Com isso aplicando o teorema do Valor Médio e substituindo em (2.9), podemos chega em:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$
 (1.11)

Portanto o comprimento do arco de uma curva qualquer parametrizada é dada pela Equação 1.11.

1.4 Função Vetorial

O conceito de uma função Vetorial é muito utilizado no dia a dia mesmo que de forma intuitiva, um exemplo seria nos telejornais quando a previsão do tempo é anunciada para os telespectadores e mostra um mapa com a direção das massas de ar em várias regiões. Mas existem exemplos que exigem maior aprofundamento em outras áreas, por exemplo, para medir o fluxo de um líquido, para esboçar o campo elétrico, campo gravitacional, etc. Sendo assim definiremos uma função Vetorial.

Definição 1.3: Seja D um conjunto em \mathbb{R}^2 (uma região plana). Um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é uma função F que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional F(x, y). Stewart (2013)

Assim como em uma função de uma ou duas variáveis é possível representar uma função vetorial no plano cartesiano, sua representação gráfica é chamada de **Campo Vetorial**. Pode-se estender o conceito já visto anteriormente de função vetorial, com isso tem-se.

Definição 1.4: Seja E um subconjunto de \mathbb{R}^m . Um campo vetorial em \mathbb{R}^m é uma função F que associa a cada ponto $(x_1, x_2, ..., x_m)$ em E um vetor de \mathbb{R}^n , sendo associado a $(y_1, y_2, ..., y_n)$.

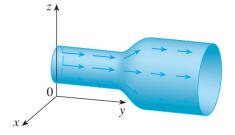
Podemos resumir o que foi dito da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, x_2, ..., x_m) \to (y_1, y_2, ..., y_n)$$

Exemplo 1.7: Imagine a seguinte situação, um líquido escoando uniformemente em um cano e seja V(x, y, z) o vetor velocidade em um ponto (x, y, z). Então V associa um vetor a cada ponto (x, y, z) de certo domínio E (interior do cano) e assim, V é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 chamado campo de velocidade.

Solução: Um exemplo de campo vetorial pra a situação ilustrada no exemplo seria o seguinte campo vetorial.

Figura 10 – Campo Vetorial de um Liquido escoando



Fonte: Stewart (2013, p. 951)

1.

Exemplo 1.8: Seja $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida da seguinte forma F(x, y) = (y, x), sendo assim esboçe o campo vetorial dessa função.

Com o auxílio de um software para maior precisão temos o campo vetorial conforme a Figura 11.

Figura 11 – Campo Vetorial Plano

Construção Própria

Sendo assim foi visto neste capítulo alguns assuntos que servirão para a parte teórica tanto das Derivadas Direcionais quanto das Integrais de Linha, que serão apresentados mais a frete.

2 Derivadas Parciais

Para iniciarmos o estudo da teoria das Derivadas Parciais primeiro veremos algumas definições.

Definição2.1: Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são dadas pelas funções f_x e f_y definidas por:

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$
$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Observando a definição 2.1 podemos perceber que para derivarmos a função f em relação a x a variável y permanece constante, já se derivarmos a função f em relação a y a variável x permanece como constante.

Podemos definir a noção de derivadas parciais para função de três ou mais variáveis da mesma forma como fizemos para uma função de duas variáveis. Se f é uma função de três variáveis, suas derivadas parciais são dadas pelas funções f_x , f_y e f_z definidas por:

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$f_y(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$f_z(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h}$$

Em relação a notação adotaremos f_x ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ para denotarmos a derivada parcial em relação a x, já se formos derivar em relação a y escrevemos f_y ou $\frac{\partial f}{\partial y}$. A mesma notação será adotada se caso a função trabalhada for uma função de três ou mais variáveis.

Exemplo 2.1: Calcule a derivada parcial em relação a x, y e z da função $f(x, y, z) = 2 - x^3 - \cos y + \frac{1}{z}$.

Solução:

Como para derivarmos a função f em relação a x as outras variáveis são consideradas constantes faremos:

$$f_x = -3x^2$$

Agora a derivada da função f em relação a y faremos as outras variáveis serem constantes, Logo:

$$f_y = -(-\sin y)$$

$$f_y = \sin y$$

Já se derivarmos a função f em relação a variável z faremos da mesma forma.

$$f_z = (-1).z^{-1-1}$$

$$f_z = -z^{-2}$$

$$f_z = -\frac{1}{z^2}$$

A equação de Clapeyron ou equação dos gases perfeitos foi formulada pelo físico-químico francês Benoit Paul Émile Clapeyron entre os séculos XVIII-XIX é uma equação muito utilizada na termoquímica e na termodinâmica. Acesso disponível em: http://www.fem.unicamp.br/em313/paginas/person/claper.htm

Exemplo 2.2: A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é PV = mRT, onde R é a constante do gás. Stewart (2013)

Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

Solução:

Temos que PV = mRT, com R constante e m fixo.

Inicialmente faremos $\frac{\partial P}{\partial V},$ sendo P definida implicitamente por:

$$PV = mRT \rightarrow P = \frac{mRT}{V}$$

Considerando $V \neq 0$, com isso teremos:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -(mRT)V^{-2}$$

Agora faremos $\frac{\partial V}{\partial T},$ sendo V definido implicitamente por:

$$V = \frac{mRT}{P}$$

Considerando $P \neq 0$, sendo assim teremos:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{mR}{P}$$

Por último faremos $\frac{\partial T}{\partial P}$, sendo T definido implicitamente por

$$T = \frac{PV}{mR}$$

Como $mR \neq 0$, temos:

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{mR}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P}$$

Temos:

$$-(mRT)V^{-2}\frac{mR}{P}\frac{V}{mR}$$

Após simplicar ficamos com:

$$\frac{-(mRT)}{PV}$$

Mas PV = mRT, substituindo no denominador teremos:

$$\frac{-(mRT)}{mRT} = -1$$

Portanto

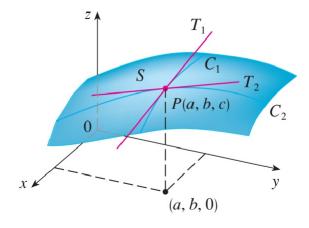
$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

2.1 Interpretação das Derivadas Parciais

Para interpretar as derivadas parcias é necessário considerar uma superfície S z = f(x, y). Se (a, b) for um ponto do domínio de f e f(a, b) = c, então o ponto P(a, b, c) pertencerá a superfície S. Fixando y = b note que a atenção será voltada para a curva C_1 , que pode ser interpretada como a interseção do plano y = b com a superfície S. Analogamente obtemos uma curva C_2 , interpretando o plano x = a com a superfície S.

Note que a curva C_1 é a inclinação da tangente T_1 em P que é dado por $f_x(a,b)$. Já a curva C_2 é a inclinação da tangente T_2 em P é $f_y(a,b)$. Sendo assim as derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em P(a,b,c) aos cortes C_1 e C_2 de S nos planos y=b e x=a.

Figura 12 – Tangentes a superfície



Fonte: Stewart (2013, p. 814)

Exemplo 2.3: Se $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$, determine $f_x = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $f_y = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e interprete

esses números como inclinações.

Solução:

Temos que $f_x = \cos x$ e $f_y = -\sin y$, logo se fizermos $f_x(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 0$ e $f_y(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -1$ Os resultados obtidos podem ser interpretados no gráfico, como mostra a Figura 13.

2 2 2 5 3

Figura 13 – Superfície

Fonte: Construção Própria

2.2 Derivadas de Ordem Superior

Seja f uma função de duas variáveis reais, considerando que suas derivadas parciais f_x e f_y são funções de duas variáveis, sendo assim pode-se calcular novamente as derivadas parciais f_{xx} , f_{xy} e f_{yx} e f_{yy} , sendo chamadas de derivadas parciais de segunda ordem de f. Seja z = f(x, y) denotaremos suas derivadas parciais por:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Com isso percebe-se que se derivar f_{xy} , $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, primeiro a derivada de f é em relação a x e depois em relação a y, note que se quer-se a derivada f_{yx} basta fazer o inverso.

Dada uma função f de duas ou mais variáveis o seguinte teorema dá uma condição necessária para que se tenha,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Teorema de Schwarz 2.1: Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a,b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então:

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada no livro de Cálculo de James Stewart no Volume 2, edição 7, no apêndice F, páginas A42 e A43.

A fórmula da energia cinetica é muito utilizada na mecânica, uma parte da física que estuda o comportamento de sistemas, a sua aplicação se dá em vários problemas que envolvem corpos em movimento.

Exemplo 2.4: A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é dada por $K = \frac{mv^2}{2}$. Onde m é a massa do corpo ou objeto e v é a sua velocidade. Stewart (2013) Sendo assim mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K.$$

Solução:

Seja $K = \frac{mv^2}{2}$, tem-se que provar que

$$\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K \tag{2.1}$$

Fazendo

$$\frac{\partial K}{\partial m} = \frac{v^2}{2} \tag{2.2}$$

Agora fazendo

$$\frac{\partial K}{\partial v} = \frac{m}{2} 2v$$
$$\frac{\partial K}{\partial v} = mv$$

Logo

$$\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = m \tag{2.3}$$

Substituindo 2.2 e 2.3 em 2.1 tem-se

$$\frac{v^2}{2}m = K$$

Mas

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Portanto temos:

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

2.3 Derivadas Direcionais

Definição 2.2: A derivada direcionada de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $u = \langle a, b \rangle$ é dada por:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se este limite existir.

Essa definição mostra como está definida a derivada parcial de f em (x_0, y_0) , mas não diz nada a respeito de como calcular, para isso veremos o seguinte teorema que diz como proceder para calcular.

Teorema 2.2: Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $u = \langle a, b \rangle$ e

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Demostração:

Considere g(t) = f(x + ta, y + tb)

Agora utilizando a definição de derivadas parciais de funções de duas variáveis e fazendo q'(0) temos:

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_{0,y_0})}{h} = D_u f(x, y)$$
 (2.4)

Agora g = f(x, y), onde u = x + ta e v = y + tb, então:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Como $\frac{du}{dt} = a$ e $\frac{dv}{dt} = b$, temos:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}a + \frac{\partial f}{\partial v}b$$

Se tomarmos t = 0, tem-se u = x e v = y

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b \tag{2.5}$$

Agora comparando 2.4 e 2.5 temos :

$$g'(0) = f_x a + f_y b = D_u f(x, y) \quad \blacksquare$$

A noção de derivadas parciais pode ser estendida para funções de três variáveis tornando válido os resultados visto anteriormente para funções de duas variáveis.

Obeservação : Se for dado o ângulo entre um vetor \overrightarrow{u} e o eixo x, então pode-se tomar \overrightarrow{u} como sendo:

$$\overrightarrow{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$$

Exemplo 2.5: Próximo a uma boia, a profundidade de um lago com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0,02x^2 - 0,001y^3$, onde x, y, e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto (80,60) em direção à boia, que está localizada no ponto (0,0). A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique como chegou a essa conclusão.

Solução: Sendo assim aplicaremos os conceitos de derivadas direcionais vistos anteriormente, note que a direção do vetor que trabalharemos será dada por $\overrightarrow{u} = \langle -80, -60 \rangle$, pois o ponto final é o ponto (0,0) e o inicial é o (80,60).

Para aplicarmos o teorema é necessário que o vetor seja unitário e para isso consideremos

$$\overrightarrow{u} = \left\langle \frac{-8}{10}, \frac{-6}{10} \right\rangle$$

Agora calculando $f_x = 0.04x$ e $f_y = -0.003y^2$, utilizando a equação que descreve a profundidade do lago.

Com base no teorema visto anteriormente tem-se que:

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Logo a deivada direcional no ponto será dada por:

$$D_u f(80, 60) = (0, 04.80). \left(\frac{-8}{10}\right) + (-0, 003.(60)^2). \left(\frac{-6}{10}\right)$$
$$D_u f(80, 60) = 622, 4$$

Interpretando a derivada direcional, podemos ver que como seu resultado é positivo tem-se que a medida que o barco se move a profundidade aumenta.

Definição 2.3: Se f é uma função de duas variáveis x e y, o vetor $\langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle$ recebe o nome de Gradiente de f no ponto (x,y) e é denotado por $\nabla f(x,y)$. Sendo assim podemos escrever

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) . \overrightarrow{u}$$

ou seja, a derivada direcional de f é o produto escalar entre o gradiente de f e o vetor u **Observação**: Como veremos no próximo capítulo, a grande utilidade do Gradiente de f é definir, a partir de um ponto fixo, em qual direção a função cresce mais rapidamente.

Portato nesse capítulo foi aprsentado alguns resultados das Derivadas Parciais que serviram como base para o próximo capítulo que é o de Aplicações das Derivadas Parciais.

3 Aplicações das Derivadas Parciais

Neste capítulo iremos trabalhar com algumas aplicações das derivadas parciais, através de exercícios onde cada tópico será composto por alguns exemplos sobre os assuntos visto no capítulo anterior. Algumas das aplicações aqui apresentadas tiveram como base os exemplos e exercícios contidos no livro Stewart (2013).

3.1 Funções de Várias Variáveis e as Derivadas Parciais

Nesta seção será apresentado o problema Charles Cobb e Paul Douglas publicado em 1928 que utilizaram a teoria de derivadas parcias para aplicar a economia.

Exemplo 3.1: Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelaram o crescimento da economia norte-americana durante o período de 1899–1922. Eles consideraram uma visão simplificada da economia em que a saída da produção é determinada pela quantidade de trabalho envolvido e pela quantidade de capital investido. Apesar de existirem muitos outros fatores afetando o desempenho da economia, o modelo mostrou-se bastante preciso. Stewart (2013)

Após eles modelarem a produção total P de um sistema econômico como função da quantidade de trabalho L e do capital investido K, eles através da utilização da teoria de derivadas parciais chegaram na seguinte função.

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Vejamos como eles conseguiram elaborar essa função.

Solução: Agora utilizaremos a teoria vista sobre derivadas parciais para mostrar como a forma particular desse modelo deriva de certas hipóteses que eles fizeram sobre a economia. Seja a função de produção denotada por P = P(L, K), onde a derivada parcial $\frac{\partial P}{\partial L}$ é a taxa de variação da produção em relação à quantidade de trabalho, sendo chamada pelos economistas de produção marginal em relação ao trabalho, ou **produtividade marginal do trabalho**. Da mesma forma, a derivada parcial $\frac{\partial P}{\partial K}$ é a taxa de variação da produção em relação ao capital investido, e é **denominada produtividade marginal do capital**. Nesses termos, as hipóteses feitas por Cobb e Douglas podem ser interpredas da seguinte forma:

- (i) Se ou o trabalho ou o capital se anulam, o mesmo acontece com a produção.
- (ii) A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade de produção por unidade de trabalho.

(iii) A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

Com base na hipótese (ii) e sabendo que a produção por unidade de trabalho é dada por $\frac{P}{L}$, temos:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L} \tag{3.1}$$

sendo α uma constante. Agora considerando K uma constante tal que $K=K_0$, a equação acima se transforma em uma equação diferencial separável. Utilizando os métodos de resolução de Equações diferenciais ficamos com:

$$P(L, K_0) = C_1(K_0) L^{\alpha}$$
(3.2)

Sendo C_1 uma constante que pode depender de $K = K_0$.

Procedendo da mesma forma na hipótese (iii), ficamos com:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K} \tag{3.3}$$

Utilizando as mesmas considerações e resolvendo a equação diferencial temos:

$$P(L_0, K) = C_2(L_0).K^{\beta} \tag{3.4}$$

Agora comparando as equações 3.2 e 3.4, temos:

$$P(L,K) = bL^{\alpha}.K^{\beta} \tag{3.5}$$

Sendo b uma constante independente de K e L.

Agora utilizando a hipótese (i) mostra que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Observando a equação 3.5 note que se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m, temos:

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Note que se considerarmos $\alpha + \beta = 1$, então P(mL, mK) = mP(mL, mK), o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m. Essa foi a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$, após isolar o β e substituir na equação 3.5 chegamos em

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha} \tag{3.6}$$

como queriamos mostrar. A equação 3.6 é conhecida como função de produção de Cobb-Douglas.

Exemplo 3.2: Cobb e Douglas usaram a equação $P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$ para o modelo de economia norte-americana de 1899 a 1922, onde L é a quantidade de trabalho e K, a quantidade de capital.

a) Calcule $P_L e P_K$

Sendo assim temos que

$$P_L = 1,01.0,75L^{0,75-1}.k^{0,25} \Rightarrow P_L = 0,7575.K^{0,25}.L^{-0,25} = 0,7575\left(\frac{K}{L}\right)^{0,25}$$

Agora fazendo

$$P_K = 1,01.0,25L^{0,75}.k^{0,25-1} \Rightarrow P_K = 0,2525.K^{-0,75}.L^{0,75} = 0,2525\left(\frac{L}{K}\right)^{0,75}$$

b) Encontre a produtividade marginal de trabalho e a produtividade marginal de capital no ano de 1920, quando L = 194 e K = 407.

Solução: Como a taxa marginal do trabalho é dada por

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 0,7575 \left(\frac{K}{L}\right)^{0.25}$$

Então

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 0,7575 \left(\frac{407}{194}\right)^{0,25} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial L} = 0,9116$$

Agora calculando a taxa marginal do capital temos:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 0,2525 \left(\frac{194}{407}\right)^{0,75} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial K} = 0,1448$$

Note que a taxa marginal do trabalho teve um índice bem maior do que a taxa marginal do capital.

3.2 Derivadas de Ordem Superior

Nesta seção veremos algumas das aplicações das derivadas parciais na Física, mas serão apresentados exemplos com foco somente na apresentação de tais aplicações.

Exemplo 3.3: A equação de Laplace tridimencional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = 0$$

é satisfeita pelas distribuições de temperatura no estado estacionário T=f(x,y,z) no espaço, pelos potenciais gravitacionais e pelos potenciais eletrostáticos. A equação de Laplace bidimencional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

obtida eliminando-se o termo $\partial^2 f/\partial^2 z$ da equação anterior, descreve potenciais e distribuções de temperatura no estado estacionário no plano como mostra a Figura 14. Na parte de cima da Figura 14 temos um plano que pode ser tratado como uma fatia fina do sólido da parte de baixo da Figura 14 pependicular ao eixo z. Thomas (2009, p. 318) Sendo

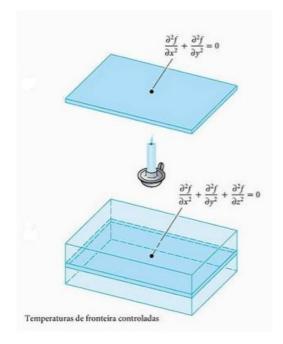


Figura 14 – Representação das Equações de Laplace

Fonte: Thomas (2009)

assim mostre que as funções abaixo satisfazem as equações de Laplace

$$f(x, y, z) = e^{3x+4y}\cos 5z \ e \ f(x, y) = e^{-2y}\cos 2x$$

Solução:

Trabalhando com a função $f(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$, temos que mostrar que ela satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = 0 \tag{3.7}$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{3x+4y}\cos 5z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 9e^{3x+4y}\cos 5z \tag{3.8}$$

Agora calculando em relação a y, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4e^{3x+4y}\cos 5z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 16e^{3x+4y}\cos 5z \tag{3.9}$$

Calculando em relação a z, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -5e^{3x+4y} \sin 5z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = -25e^{3x+4y}\cos 5z \tag{3.10}$$

Sustituindo 3.8, 3.9 e 3.10 em 3.7, temos:

$$9e^{3x+4y}\cos 5z + 16e^{3x+4y}\cos 5z - 25e^{3x+4y}\cos 5z = 0$$
$$25e^{3x+4y}\cos 5z - 25e^{3x+4y}\cos 5z = 0$$

Observe que a igualdade acima é verdadeira, logo satisfaz a equação de Laplace.

Agora tabalhando com a função $f(x,y) = e^{-2y}\cos 2x$, temos que mostrar que ela satisfaz a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0 \tag{3.11}$$

Agora derivando em relação a x, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2e^{-2y} \sin 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = -4e^{-2y}\cos 2x\tag{3.12}$$

Derivando em relação a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{-2y}\cos 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{-2y}\cos 2x \tag{3.13}$$

Substituindo 3.12, 3.13 em 3.11, temos:

$$-4e^{-2y}\cos 2x + 4e^{-2y}\cos 2x = 0$$

Note que a equação acima é verdadeia, logo satisfaz a equação de Laplace.

Exemplo 3.4: Se ficarmos em uma praia e tirarmos uma fotografia das ondas, está mostrará um padrão regular de picos e depressões em dado instante. Veremos movimento vertical periódico no espaço em relação à distância. Se ficarmos na água, poderemos sentir a subida e descida da água com o passar das ondas. Veremos movimento peródico no tempo. Em Física essa bela simetria é expressa pela equação de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

onde w é a altura da onda, x é a variável distância, t é a variável tempo e c é a velocidade com a qual as ondas se propagam, como mostra a Figura 15. Neste exemplo, x é a distância ao longo da superfície do mar, mas em outras aplicações x pode ser a distância ao longo de uma onda vibrando, a distância no ar(ondas sonoras) ou a distância no espaço (ondas luminosas). O número c varia de acordo com o meio e o tipo da onda. Thomas (2009, p.

Figura 15 – Representação da Equação da Onda

Fonte: Thomas (2009)

319)

Mostre que a função abaixo satisfaz a equação da onda, sendo portanto uma solução .

$$w = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$$

Solução:

Sendo assim temos que mostrar que a função dada satisfaz

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3.14}$$

Agora derivando a função w em relação a x, temos:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -15\operatorname{sen}(3x + 3ct) + e^{x+ct}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -45\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct} \tag{3.15}$$

Derivando w em relação a t, temos:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -15c \operatorname{sen}(3x + 3ct) + c.e^{x+ct}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -45c^2 \cos(3x + 3ct) + c^2 e^{x+ct}$$
 (3.16)

Sendo assim substituindo 3.15 e 3.16 em 3.14, temos

$$-45c^{2}\cos(3x+3ct) + c^{2}e^{x+ct} = c^{2}\left(-45\cos(3x+3ct) + e^{x+ct}\right)$$

$$c^{2}\left(-45\cos(3x+3ct) + e^{x+ct}\right) = c^{2}\left(-45\cos(3x+3ct) + e^{x+ct}\right)$$

Note que a equação da onda foi satisfeita, portanto a função dada é solução da equação da onda.

3.3 Derivadas Direcionais

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos de aplicações utilizando os conceitos vistos sobre as derivadas direcionais.

Exemplo 3.5: A temperatura de uma chapa metálica em um ponto (x, y, z) é dada pela seguinte função:

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2 - 3y^2 - 9z^2}$$

Onde T é medido em C^{o} e x, y, z em metros. Stewart (2013, p. 848)

a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto P(2, -1, 2) em direção ao ponto (3, -3, 3).

Solução:

Sabemos que a derivada direcional é dada por

$$D_u f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z)(a, b, c)$$

Sendo assim seja $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ o vetor de P em direção ao ponto (3, -3, 3). Logo

$$\overrightarrow{u} = (1, -2, 1)$$

Agora transformando o vetor \overrightarrow{u} em unitário ficamos com

$$\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Fazendo

$$f_x = -400xe^{(-x^2 - 3y^2 - 9z^2)}$$

$$f_y = -1200ye^{(-x^2 - 3y^2 - 9z^2)}$$

$$f_z = -3600ze^{(-x^2 - 3y^2 - 9z^2)}$$

Segue que

$$D_u f(x, y, z) = \left(-400xe^{\left(-x^2 - 3y^2 - 9z^2\right)}, -1200ye^{\left(-x^2 - 3y^2 - 9z^2\right)}, -3600ze^{\left(-x^2 - 3y^2 - 9z^2\right)}\right) \cdot \overrightarrow{u}$$

$$D_u f(x, y, z) = \left(-\frac{400x}{\sqrt{6}} + \frac{2400y}{\sqrt{6}} - \frac{3600z}{\sqrt{6}}\right) e^{\left(-x^2 - 3y^2 - 9z^2\right)}$$

Portanto

$$D_u f(x, y, z) = -\frac{10400}{\sqrt{6}} e^{-43} \cong -8,98.10^{-16}$$

b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?

Solução:

Sendo assim utilizaremos o gradiente da função:

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z)$$

Utilizando as derivadas calculada na questão a), temos:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-400xe^{\left(-x^2 - 3y^2 - 9z^2\right)}, -1200ye^{\left(-x^2 - 3y^2 - 9z^2\right)}, -3600ze^{\left(-x^2 - 3y^2 - 9z^2\right)}\right)$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-400x, -1200y, -3600z\right)e^{\left(-x^2 - 3y^2 - 9z^2\right)}$$

Como queremos o crescimento na direção de P(2, -1, 2)

$$\nabla f(2, -1, 2) = (-800, 1200, -7200) e^{(-4-3-36)}$$
$$\nabla f(2, -1, 2) = (-2, 3, -18) 400 e^{-43}$$

Concluimos então que será maior o crescimento na direção do vetor (-2, 3, -18).

c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

Solução:

Para calcularmos a taxa de crescimento máximo calcularemos

$$\parallel \nabla f \parallel$$

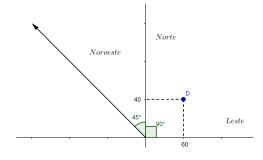
Utilizando do gradiente que já foi calculado anteriormente no item b).

$$\|\nabla f\| = 400e^{-43}\sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-18)^2}$$

 $\|\nabla f\| = 400e^{-43}\sqrt{337}$

Exemplo 3.6: Suponha que você esteja subindo uma montanha cuja forma é dada pela equação $z = 1000 - 0,005x^2 - 0,01y^2$, onde x, y e z são medidos em metros e você está em um ponto com coordenadas (60,40,966). O eixo x positivo aponta para o leste e o eixo y positivo aponta para o norte. Stewart (2013, p. 848)

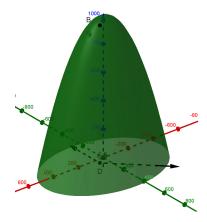
Figura 16 – Esquematização do Problema



Fonte: Construção Própria

a) Se você andar exatamente para o Sul, começará a subir ou a descer? A que taxa?
 Solução:

Figura 17 – Gráfico da montanha de Acordo com as Considerações I



Fonte: Construção Própria

Utilizando o vetor unitário (0, -1), que será o vetor direção que aponta para o sul. Calculando as derivadas da função, para a utilização do teorema de derivadas direcionais, temos:

$$z_x = -0.01x$$

$$z_y = -0.02y$$

Tem-se

$$D_u z(x,y) = (-0.01x, -0.02y).(0, -1)$$
$$D_u z(x,y) = 0.02y$$

Calculando

$$D_u z(60, 40) = 0.8$$

Como a taxa é positiva, concluimos que se andarmos para o sul estaremos subindo, conforme podemos ver na Figura 17.

b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, começará a subir ou a descer? A que taxa? Solução:

Utilizando o vetor unitário $(\cos \theta, \sin \theta)$, observando a ??, concluimos que $\theta = 135^{\circ}$ ou $\frac{3\pi}{4}$. Sendo assim calculando a derivada diecional para podermos utilizar de seus resultados, temos:

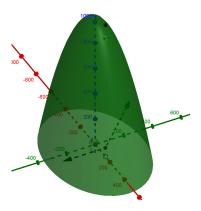
$$D_u z(x, y) = (-0.01x, -0.02y) \left(\cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$D_u z(x, y) = 0.007x - 0.014y$$

Agora substituindo, tem-se:

$$D_u z(60, 40) = -0.14$$

Como a derivada direcional deu negativa podemos concluir que se deslocarmos para o noroeste estaremos descendo a montanha, pois obtemos a taxa de -0.14, conforme vemos na Figura 18

Figura 18 – Gráfico da montanha de Acordo com as Considerações II



Fonte: Construção Própria

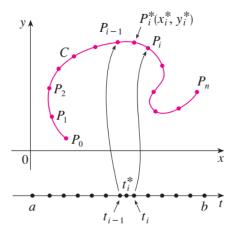
Nesse capítulo vimos algumas aplicações das Derivadas parcias em outras áreas como na Física e na economia. Sendo assim veremos no próximo capítulo a parte teórica das Integrais de Linha.

4 Integral de Linha

A integral que será trabalhada neste capítulo diferencia da já trabalhada, pois ao invés de integrarmos sobre um intervalo [a,b], integraremos sobre uma determinada curva C. Para iniciar a teoria consideraremos uma curva C, como mostra a Figura 19, definida pelas equações paramétricas da seguinte forma:

$$x = x(t)$$
 $y = y(t)$ $a < t < b$

Figura 19 – Representação da Curva Descrita



Fonte: Stewart (2013, p. 954)

4.1 Integrais de Linha Sobre uma Função Escalar

Definição 4.1: Se f é definida sobre uma curva suave C , então a integral de linha de f sobre C já definida anteriormente é

$$\int_{c} f(x,y)ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i}^{*}, y_{i}^{*}) \triangle s_{i}$$

se esse limite existir.

Temos que a função f apresentada na definição é contínua e o limite da função existe e pode ser apresentado como o comprimento de arco, na seção 1.3 página 18 foi apresentado o comprimento de arco que é dado por

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Sendo assim substituindo na definição apresentada temos

$$\int_{c} f(x,y)ds = \int_{a}^{b} f(x(t),y(t))\sqrt{[f'(t)]^{2} + [g'(t)]^{2}}dt$$

Observação: Uma característica importante que deve ser notada é que o valor da integral de linha não depende da parametrização, pois uma curva pode ser parametrizada de mais de uma forma. Porém depende do fato da curva ser percorrida uma única vez no sentido em que t cresce de a para b.

Exemplo 4.1: Determine a massa de um fio metálico que é representado pelo gráfico da função $y = \frac{x^3}{27}$; $0 \le x \le 3$, onde $f(x,y) = 2(x^3 + y)$ é a função densidade linear do fio que é dada em g/cm.

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)ds$$

Solução:

Substituindo o que foi dado na integral ficamos com

$$m = \int_{C} 2(x^{3} + y)\sqrt{[x'(t)]^{2} + [y'(t)]^{2}}dt$$

Como a curva C é a função densidade linear do fio temos:

$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{27} \\ x = t \longrightarrow x' = 1 \\ y = \frac{t^2}{27} \longrightarrow y' = \frac{t^2}{9} \end{cases}$$

Com isso tem-se $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 1 + \frac{t^4}{81} = \frac{81+t^4}{81}$ Substituindo na integral

$$m = 2 \int_0^3 \left(t^3 + \frac{t^3}{27} \right) \sqrt{\frac{81 + t^4}{81}} dt$$

Após simplificarmos

$$m = \frac{56}{243} \int_0^3 t^3 \sqrt{\frac{81 + t^4}{81}} dt$$

Utilizando a mudança de variável e logo após resolvendo a integral tem-se que a massa do fio será de 224g.

Observação: O conceito de integral de Linha pode ser extendida para uma função de três variáveis, sendo o procedimento e toda teoria parecida com a que foi vista para funções de duas variáveis.

4.2 Integrais de Linha Sobre uma Função Vetorial

A teoria das integrais de linha sobre uma função vetorial é muito utilizada na Física, por exemplo, quando se estuda a relação entre força e trabalho, utilizando funções

vetoriais. Também tem-se sua utilização nas teorias sobre eletromagnetismo principalmente nas equações de MaxWell. Sendo assim definiremos a integral de linha sobre uma função vetorial.

Definição 4.2: Seja F um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial r(t), $a \le t \le b$. Então, a integral de linha de F ao longo de C é

$$\int_{c} F.dr = \int_{a}^{b} F(r(t)).r'(t)dt = \int_{c} F.Tds$$

Observação: A notação utilizada para representar uma função vetorial será feita neste trabalho de duas formas, por exemplo, seja $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$F(x, y, z) = (x, 2y, 4z)$$

Representaremos também essa função como

$$F(x, y, z) = x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} + 4z\overrightarrow{k}$$

Ou ainda

$$F(x, y, z) = xi + 2yj + 4zk$$

Exemplo 4.2: Determine o trabalho realizado pelo campo de força $F(x,y) = x^2i + xyj$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientada no sentido antihorário.

Solução:

Temos que $F(x,y) = x^2i + xyj$ e que o caminho C pode ser escrito como

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \Longrightarrow dx = -2\sin\theta d\theta \\ y = 2\sin\theta \Longrightarrow dy = 2\cos\theta d\theta \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Utilizando a definição de integral de linha sobre uma função vetorial temos:

$$\int_{C} FdS = \int_{C} Mdx + Ndy$$

Nesse caso $M=x^2$ e N=xy, sendo assim temos:

$$\int_{c} x^{2} dx + xy dy$$

Utilizando o caminho dado temos:

$$\int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^2 (-2\sin\theta)d\theta + (4\cos\theta\sin\theta)2\cos\theta d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} (-8\cos^2\theta \sin\theta + 8\cos^2\theta \sin\theta) = 0$$

Concluimos então que o trabalho é nulo.

Se consideramos o vetor gradiente, que é definido como, ∇f de uma função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f, então podemos ter uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 4.1: Seja C uma curva suave dada pela função vetorial r(t), $a \le t \le b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então:

$$\int_{c} \nabla f . dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Demonstração:

Utilizando a definição 4.2 dessa subseção temos que

$$\int_{c} \nabla f dr = \int_{a}^{b} \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Mas $\nabla f(r(t)).r'(t)$ pode ser denotado utilizando a regra da cadeia para funções de várias variáveis, logo

$$\nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Mas

$$\frac{df(r(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Sendo assim ficamos com a seguinte integral após as substituições.

$$\int_{a}^{b} \frac{df(r(t))}{dt} dt$$
$$[f(r(t))]_{a}^{b}$$
$$f(r(b)) - f(r(a)) \quad \blacksquare$$

Observação: Observe que esse teorema afirma que no cálculo da integral de linha o caminho não vai interferir no resultado, pois o resultado final só depende do ponto inicial e final da curva.

Definição 4.3: Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas suaves por partes, sendo denominadas de caminhos, que têm o mesmo ponto inicial a e o mesmo ponto final b. Se F for um campo vetorial contínuo com domínio D, dizemos que a integral de linha $\int_c F dS$ é independente do caminho se $\int_{c_1} F dS = \int_{c_2} F dS$ para quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essas características, podemos dizer que as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho.

Definição 4.4: Uma curva é denominada fechada se seu ponto final coincide com seu ponto inicial.

Observação: Em uma integal de linha temos a seguinte propriedade que pode ser facilmente demostrada, por meio das propriedades da Integral de Linha.

$$\int_{-c_1} F ds = -\int_{c_1} F ds$$

Teorema 4.2: A $\int_c F dS$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_c F dS = 0$ para todo caminho fechado C em D.

Foi visto anteriormente que a integral de linha de qualquer campo vetorial conservativo F é independente do caminho, segue que $\int_c F dS = 0$ para qualquer caminho fechado. Sendo assim a interpretação física para esse tipo se situação é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo (por exemplo o campo gravitacional ou o campo elétrico) para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

Observação: Pode-se estender a versão do teorema visto para funções de três varáveis definido da seguinte forma.

Teorema 4.3: Suponha que F seja um campo vetorial contínuo em uma região aberta conexa por caminhos D. Se $\int_c F.dr$ for independente do caminho em D, então F é um campo vetorial conservativo em D, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = F$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada no livro de Cálculo de James Stewart no Volume 2, edição 7, nas páginas 965 e 966.

O seguinte teorema mostra uma condição para que um campo vetorial seja conservativo.

Teorema 4.4: Se F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j é um campo vetorial conservativo, onde $P \in Q$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, então em todos os pontos de D temos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Observação: Se $\int_c F dS$ não depende do caminho então existe uma função escalar f chamada de função potencial tal que, $F(x, y, z) = (M, N, P) = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$, ou seja,

$$\begin{cases} M = f_x \\ N = f_y \\ P = f_z \end{cases}$$

Exemplo 4.3: Dada a função potencial $f(x, y, z) = \frac{x^2y+x}{z}$ determine o campo vetorial associado à está função.

Solução: Estamos procurando F(x, y, z), mas pela observação vista, temos:

$$F(x, y, z) = \nabla f$$

Como $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$, então

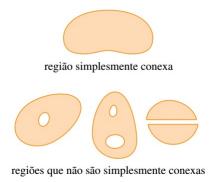
$$\nabla f = \left(\frac{2xy+1}{z}, \frac{x^2}{z}, \frac{-x^2y-x}{z^2}\right)$$

Sendo assim temos:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2xy+1}{z}, \frac{x^2}{z}, \frac{-x^2y-x}{z^2}\right)$$

Definição 4.5: Uma região simplesmente conexa no plano é uma região conexa por caminhos D tal que toda curva fechada simples em D inclui apenas os pontos que estão em D. Observe a Figura 20 para uma melhor visualização. Após essa definição que dá uma

Figura 20 – Região Conexa e não Conexa



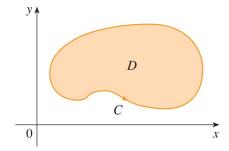
Fonte: Stewart (2013, p. 966)

condição mais forte para que seja possível enunciar a recíproca do teorema anterior temos. **Teorema 4.5**: Seja F = Pi + Qj um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conexa D. Suponha que P e Q tenham derivadas contínuas de primeira ordem e que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ em todo o domínio D então F é conservativo.

4.3 Teorema de Green

O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região do plano D delimitada por C. Observe a figura 13 para uma melhor compreensão.

Figura 21 – Região D considerada



Fonte: Stewart (2013, p. 971)

Sendo assim no teorema de Green usamos a convenção de que a orientação positiva de uma curva fechada simples C refere-se ao sentido anti-horário de C, percorrido uma só

vez. Então C é dada pela função vetorial r(t), $a \leq t \leq b$.

Teorema de Green 4.6: Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\oint_{c} P dx + Q dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada no livro de Cálculo de James Stewart no Volume 2, edição 7, nas páginas 971 e 972.

Observação 06: O teorema de Green pode ser extendido para regiões onde contém os chamados "Buracos", mas mesmo assim continua válido sendo possível através do cálculo sobre cada curva que forma a região.

Neste capítulo vimos alguns resultados sobre a integral de linha qu servirão como base para as aplicações do próximo capítulo.

5 Aplicações das Integrais de Linha

Neste capítulo serão trabalhadas algumas aplicações da integral de linha principalmente em alguns conteúdos de Física. As aplicações serão feitas de forma resumida fazendo com que alguns conceitos de Física sejam citados de forma rápida ou até mesmo presupondo que o leitor já saiba dos conceitos previamente. Algumas das aplicações que serão apresentadas tiveram como base o livro Stewart (2013) e o livro Halliday (2012b) e Halliday (2012a).

5.1 Conservação de Energia

Considere um campo de força F que seja contínuo e move em um objeto ao longo de um caminho C dado por r(t), $a \le t \le b$, onde r(a) = A é o ponto inicial e r(b) = B é o ponto final de C.

De acordo com a Segunda Lei do Movimento de Newton, diz que:

A força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração. Halliday (2012b, p. 95)

Sendo assim podemos expressar essa lei na seguinte equação Matemática.

$$\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$$

Consideremos uma força F(r(t)) a um ponto em C que esteja relacionada com a aceleração a(t)=r''(t) pela a equação

$$F(r(t)) = m.r''(t)$$

Sendo assim o trabalho realizado sobre o objeto será dado por;

$$W = \int_{C} F.dr = \int_{a}^{b} F(r(t)).r'(t)dt$$

Mas sabemos que F(r(t)) = m.r''(t), então

$$\int_{a}^{b} mr''(t).r'(t)dt \tag{5.1}$$

Como $mr''(t).r'(t) = \frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} \left[r'(t).r'(t) \right] \right)$, substituindo em (6.1) temos:

$$\frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \left[|r'(t)| \right]^2 dt$$

Sendo assim ficamos com

$$\frac{m}{2} \left[|r'(t)|^2 \right]_a^b = \frac{m}{2} \left[|r'(b)|^2 - |r'(a)|^2 \right]$$

Temos que v = r'(t) que é a velocidade, portanto

$$W = \frac{m}{2}|v(b)|^2 - \frac{m}{2}|v(a)|^2$$
(5.2)

A metade da equação acima ou $k = \frac{m}{2} |v(t)|^2$ é denominado de energia cinética, com isso temos que:

A energia cinética \mathbf{K} é a energia associada ao estado de movimento de um objeto. Quanto mais depressa o objeto se move, maior é a energia cinética. Quando um objeto está em repouso a energia é nula. Halliday (2012b, p. 147)

Sendo assim podemos rescrever (6.2) da seguinte forma

$$W = K(b) - K(a) \tag{5.3}$$

Portanto podemos concluir que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo de C é igual à variação da energia cinética nas extremidades do caminho C denotado.

O trabalho realizado por uma força conservativa sobre uma partícula que se move entre dois pontos não depende da trajetória seguida pela partícula. Halliday (2012b, p. 174)

Agora suponha que F seja um campo de forças conservativo, ou seja, podemos escrever F sendo igual ao seu gradiente, isto é $F = \nabla f$. Sendo que a energia potencial de um objeto no ponto de (x,y,z) é definida como P(x,y,z) = -f(x,y,z), portanto temos $F = -\nabla P$.

Sendo assim podemos concluir que

$$W = \int_{c} F.dr = -\int_{c} \nabla P.dr$$

Após simplificarmos ficamos com

$$W = (P(a) - P(b))$$

Agora comparando com 5.3 ficamos com

$$P(a) + K(a) = P(b) + K(b)$$

Portanto podemos concluir que se um objeto se move de um ponto a para outro b sob a influência de um campo de forças conservativa, então a soma de sua energia potencial e sua energia cinética permanece constante. Essa é a chamada Lei da Conservação de

Energia e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado conservativo.

Exemplo 5.1: Em uma corrida, um pai tem metade de energia cinética do filho, que tem metade da massa do pai. Aumentando a velocidade em 1,0m/s, o pai passa a ter a mesma energia cinética do filho. Qual é a velocidade escalar inicial do pai e do filho? Halliday (2012b, p. 165)

Solução:

Para isso faremos as seguintes considerações:

Seja:

- $m_p \rightarrow massa do pai$
- $m_f \rightarrow massa do filho$
- $v_p \rightarrow velocidade do pai$
- $v_f \rightarrow velocidade do filho$
- $E_p \rightarrow energia cinética do pai$
- $E_f \rightarrow energia cinética do filho$

Sendo assim temos:

$$E_p = \frac{m_p \cdot v_p^2}{2} \tag{5.4}$$

$$E_f = \frac{m_f \cdot v_f^2}{2} (5.5)$$

Foi dado que $Ep = \frac{E_f}{2} \Rightarrow 2E_p = E_f$, utilizando 5.4 e 5.5, temos:

$$2\frac{m_p.v_p^2}{2} = \frac{m_f.v_f^2}{2}$$

Sabe-se que $m_f = \frac{m_p}{2}$, após algumas simplificações chegamos em:

$$v_p^2 = \frac{v_f^2}{4}$$

Mas na questão foi dito que se aumentarmos a velocidade do pai teremos $E_p = E_f$, sendo assim:

$$\frac{m_p (v_p + 1)^2}{2} = \frac{m_f v_f^2}{2} \tag{5.6}$$

Como $m_f = \frac{m_p}{2}$, substituindo na Equação 5.6, tem-se

$$v_p^2 + 2v_p + 1 = \frac{v_f^2}{2} \tag{5.7}$$

Temos que $v_f^2=4v_p^2$, substituindo em 5.7, chegamos em:

$$v_p^2 - 2v_p - 1 = 0$$

Solução:

Resolvendo a equação encontramos $v_{p_1}=2.414\ m/s$ e $v_{p_2}=-0.414\ m/s$

Considerando os valores positivo, concluimos que a velocidade do pai foi de $2.414 \ m/s$ e a velocidade do filho $4.828 \ m/s$.

Exemplo 5.2: Uma bola de gude de 5,0g é lançada verticalmente para cima usando um espingarda de mola. A mola deve ser comprimida de exatamente 8,0cm para que a bola alcance um alvo colocado 20m acima da posição da bola de gude na mola comprimida. Qual é a Constante constante elástica da mola? Halliday (2012b, p. 196)

Como a energia potencial pode ser definida como a energia de associação de dois objetos por meio da ação da gravidade, na qual pode ser calculada utilizando os conhecimentos de Física, por meio da fórmula

$$E_p = m.g.h$$

Onde m é a massa, g a gravidade e h a altura. Sendo assim no problema temos: m=5g ou 0.005Kg, $g=9.81~m/s^2~e~h=20m$, substituindo ficamos com

$$E_p = 0.005.9.81.20 = 0.981j$$

Agora utilizando a conservação de energia por se trata de forças conservativas, temos:

$$p = E_{el} (5.8)$$

Onde E_{el} é a energia elástica que é deduzida por meio da lei de Hooke, sendo expressa por:

$$E_{el} = \frac{k.x^2}{2}$$

Onde k é a constante da mola e x é a deformação da mola.

Com isso utilizando 5.8, sabendo que x = 0.08m, temos:

$$\frac{k(0.08)^2}{2} = 0.981$$

$$k = 306, 56 \ N/m$$

Portanto a constante da mola é k = 306, 56 N/m.

5.2 Lei de Gauss

Uma das principais aplicações das integrais de linha está na teoria eletromagnética uma parte da Física que estuda o campo eletromagnético e suas propriedades que tem como base as equações de Maxwell. Sendo assim temos que:

A lei de Gauss relaciona os campos elétricos nos pontos de uma superfície gaussiana (fechada) à carga total envolvida pela superfície. Halliday (2012a, p. 50)

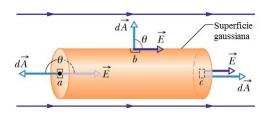
A grande importância da lei de Gauss está no cálculo do fluxo total ϕ de um campo elétrico,que é relacionado com uma carga q que pode ser dado por

$$\phi = \oint \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A} \tag{5.9}$$

A lei de Gauss faz parte das equações de Maxwell, sendo que essas equações constituem a base fundamental da teoria eletromagnética.

Exemplo 5.3: A Figura 22 mostra uma superfície gaussiana com a forma de um cilindro de raio R imersa em um campo elétrico uniforme \overrightarrow{E} , com o eixo do cilindro paralelo ao campo. Qual é o fluxo Φ do campo elétrico através dessa superfície fechada? Halliday (2012a, p. 52)

Figura 22 – Superfície Gaussiana



Fonte: Halliday (2012a, p. 52)

Solução:

Sendo assim podemos calcular o fluxo Φ através da integração do produto escalar $\overrightarrow{E}d\overrightarrow{A}$ para toda a superfície. A integração será feita em três partes:

- Em relação a base esquerda a do cilindro
- \bullet Em relação a base lateral b
- \bullet E por último para a direita c

Sendo assim utilizando a lei de Gauss, temos:

$$\Phi = \oint \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A}$$

$$\Phi = \int_a \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A} + \int_b \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A} + \int_c \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A}$$

Em relação a base a, o ângulo θ entre \overrightarrow{E} e \overrightarrow{A} é 180° e o módulo E do campo é o mesmo. Com isso temos:

$$\int_{a} \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A} = \int E\left(\cos 180^{\circ}\right) dA = -EA$$

Sendo que $\int dA$ é igual a base do cilindro $(A = \pi r^2)$.

Procedendo dá mesma forma com a base C, note que $\theta=0$; em todos os pontos, com isso ficamos com

$$\int_{c} \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A} = \int E(\cos 0) dA = EA$$

Agora observando a superfície lateral b do cilindro, temos que $\theta=90^{\rm o}$, para todos os pontos, sendo assim:

$$\int_{b} \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A} = \int E(\cos 90^{\circ}) dA = 0$$

Por tanto temos:

$$\Phi = -EA + 0 + EA = 0$$

Uma consideração importante é que o resultado já era esperado, pois todas as linhas de campo que representam o campo elétrico atravessam a superfície gaussiana, fazendo com que o fluxo total seja nulo.

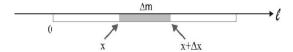
5.3 Cálculo da massa de um Fio

Nesta seção será apresentada a utilização da integral de linha no cálculo da massa de um fio delgado.

Cálculo da massa de um Fio

Considere um bastão de comprimento l, como mostra a Figura 23, supondo que a função de densidade linear (Que é dada por unidade de comprimento) seja conhecida, mostraremos que é possível calcular sua massa.

Figura 23 – Representação do Fio por Meio de um Bastão



Fonte: Google Imagens

Sendo assim inicialmente dividimos o bastão em quantidades bem pequenas e consideraremos que m seja a representação da quantidade de massa contida no segmento no intervalo de x até $x+\Delta x$ de forma que essa massa seja dada por unidade de comprimento em relação ao segmento.

Sendo assim para o cáculo da massa desse fio teremos duas possibilidades:

i. A massa está distribuida uniformente: Dessa forma o cálculo da massa do fio será dado por $m=\rho.l$, sendo ρ a densidade do fio.

ii. O Caso em que a massa não for distribuida uniformente, então faremos $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ ser a densidade média no segmento de x a Δx , sendo que seu valor depende da posição e do comprimento que o bastão tenha.

Dessa forma se quisermos calcular a densidade desse fio faremos:

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Seja

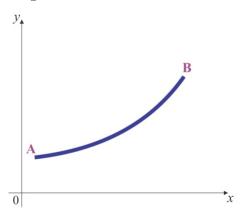
$$m = \int dm$$

Utilizando o fato que $dm = \rho(x)dx$, então:

$$m = \int_0^l \rho(x) dx$$

Agora utilizando a interpretação da Integral de Linha consideraremos a função densidade $\rho(x)$ como sendo associada com os pontos x de uma reta como mostra a Figura 24.

Figura 24 – Bastão curvado AB

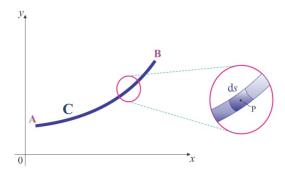


Fonte: Google Imagens

Sendo assim para calcular a massa do bastão consideraremos f(x,y) como sendo a densidade de massa do bastão e ds uma quantidade infinitesimal (bem pequena) do bastão.

Dessa forma tem-se que dm = f(x, y)ds a quantidade de massa dessa porção onde f(x, y) representa a densidade linear em cada ponto P da curva C que representa o bastão no plano cartesiano, conforme a Figura 25.

Figura 25 – Consideração Infinitesimal do bastão



Fonte: Google Imagens

Portanto podemos concluir que

$$m = \int_c dm$$

$$m = \int_{c} f(x, y) ds$$

Sendo que essa fórmula expressa a massa total do fio com as considerações tomadas.

Portanto esse último capítulo abordou aplicações voltadas a Integral de Linha principalmente na Física.

6 Conclusão

O planejamento prévio do trabalho, que foi elaborado sem contar com os empecilhos que encontaríamos pela frente, contava com a apresentação da história da Matemática no desenvolvimento do Cálculo Integral e Diferencial, da revisão de alguns assuntos, do resumo da teoria das Derivadas Parciais e Integral de Linha e por fim suas aplicações nas diversas áreas.

Porém não foi levado em consideração que para apresentar várias aplicações seriam necessárias uma gama de assuntos que serviriam de prerrequisitos, o que faria com que o trabalho ficasse muito grande. Sendo assim foi feita a seleção de algumas aplicações que não necessitam de muitas definições para o seu entendimento, fazendo com que o trabalho ficasse mais curto, mas em conta partida mais simples.

Uma das grandes dificuldades na elaboração do trabalho foi trabalhar com os dois temas de forma que suas apresentações não ficassem muito extensa; outra dificuldade encontrada foi na escolha das aplicações pelo fato de várias delas necessitar de conhecimentos abrangentes das áreas que aplicam esse assuntos, sem contar que quando eram encontradas tais aplicações elas necessitavam de definições e de assuntos anteriores que eram cruciais para o seu entedimento. Sendo assim as aplicações que foram colocadas no trabalho, embora simples elas mostram que a Matemática é muito utilizada em outras áreas do conhecimento e isso foi um dos fatores principais que fizeram com que eu pesquisasse sobre esse tema.

O trabalho de forma geral contribuiu muito para minha formação acadêmica, pois foi uma oportunidade de realizar uma pesquisa sobre temas que gosto de trabalhar e perceber que para colocar em prática o que foi planejado é bem mais difícil do que parece, sendo necessário muitos anos de experiência para fazer um trabalho como se deseja. A experiência de trabalhar com dois temas foi muito satisfatória, pois pude aprender mais do que foi apresentado nas disciplinas de Cálculo em relação ao tema da pesquisa fazendo com que contribuisse muito para minha formação.

As dificuldades encontradas na elaboração do trabalho e durante o curso me fizeram perceber que quem estuda ou estudou os assuntos que compõem a Matemática sempre deve estar se aperfeiçoando, pois a Matemática em sua vastidão também sempre evolui e propociona cada vez mais desafios.

Referências

BARUFI, M. C. B. *O Nascimento do Cálculo*. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm>. Acesso em: 17 julho 2017. Citado na página 9.

HALLIDAY, R. R. D. Fundamentos de Física: Eletromagnetismo. 9^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 3. Citado 3 vezes nas páginas 46, 49 e 50.

HALLIDAY, R. R. D. Fundamentos de Física: Mecânica. 9ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 46, 47, 48 e 49.

STEWART, J. $C\'{a}lculo$. 7^a . ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2. Citado 11 vezes nas páginas 19, 20, 23, 24, 26, 29, 35, 36, 39, 44 e 46.

THOMAS, G. B. *Cálculo*. 11^a. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009. v. 2. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32, 33 e 34.