UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JANFFERSON JOSÉ DOS SANTOS

UM BREVE ESTUDO SOBRE OS FRACTAIS: CONSTUÇÕES, CONCEITO E APLICAÇÕES

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA
2018

JANFFERSON JOSÉ DOS SANTOS

UM BREVE ESTUDO SOBRE OS FRACTAIS: CONSTUÇÕES, CONCEITO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB/ Campus de Vitória da Conquista – BA, para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA

2018

Folha de Aprovação

Janfferson José dos Santos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva

Banca Examinadora

_____

Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

_____

Profa. Ma. Ana Paula Perovano dos Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

_____

Prof. Dr. Júlio César dos Reis
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Vitória da Conquista – BA, 20 de dezembro de 2018

Dedicatória

Muitos foram aqueles que me incentivaram ao longo da minha caminhada, e durante todo este período, conheci amigos de verdade e pessoas que realmente acreditaram em mim, do início ao fim. Uma destas pessoas me acompanhou desde que nasci, mas hoje infelizmente o tempo o levou embora, meu pai Ilídio José dos Santos (*in memoriam*) este trabalho eu dedico a você que sempre desejou o sucesso aos seus filhos.

Agradecimentos

As dificuldades existem em todos os momentos, nos primeiros meses do meu curso demorei para perceber que precisaria de dedicação exclusiva, aos poucos fui me acostumando a um novo ritmo, mesmo assim a cada semestre uma nova dificuldade. Precisei lutar contra cobranças impostas por mim mesmo e por situações que eu mesmo me coloquei, mas tive a ajuda de algumas pessoas que agradeço e muito por estarem ao meu lado e dando um apoio fora do comum.

Inicialmente agradeço ao meu orientador o Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva, pela paciência em cada momento da orientação. Não posso esquecer aqui de um dos exemplos de profissional que levarei durante toda minha carreira como educador, a Profa. Ma. Ana Paula Perovano dos Santos Silva.

Deixo um agradecimento mais do que especial a três pessoas em particular que me apoiaram seja financeiramente ou com conselhos sobre minhas escolhas profissionais, são eles minha mãe Isabel da Anunciação Santos, minha tia Aidil Soares Santos e minha madrinha Mônica Suede Santos Silva.

Agradeço também aos meus amigos que conheci dentro do curso, em especial aqueles que me ajudaram quando tive dúvidas em algumas questões, trabalhos e principalmente nesta reta final.

O último agradecimento é o mais especial, pois apesar de estar presente nos últimos dois anos de curso, foi esta pessoa que mais me incentivou, por muitas vezes me acordando pela manhã ou mesmo durante a noite para estudar, obrigado minha esposa Agnaide Lacerda Alves por ser esta pessoa especial em minha vida e por me dar o apoio emocional que precisei nestes últimos meses.

“As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, a casca das árvores não é lisa e os relâmpagos não viajam em linha reta“

Benoît Mandelbrot

Resumo

Neste trabalho apresentamos um breve estudo sobre os fractais, ressaltando processos de construção aplicados a um software, para gerar fractais tidos como ideais, destacando conceitos ligados as construções geométricas. O forte apelo visual visto nos fractais serviu de base para se entender seu conceito e sua definição. As características presentes em um fractal, podem ser empregadas em diversos estudos. Verificamos a existência da fractalidade de um conjunto de esferas de pão amassado, ao qual existem diferentes padrões que aparecem quando os objetos estão amassados, utilizando o modelo de Campo Médio para bolas de pão amassado de tamanhos diferentes, relaciona-se as massas M com os raios r da bola. A análise dos resultados, mostrou que a relação na forma $M = k \cdot r^D$, sendo k e D constantes, fornece um valor fracionário, entre 2 e 3, para a sua dimensão D. Um detalhe importante que tentamos explicar é a atuação das forças dentro do processo ao qual foi gerado a estrutura fractal, ou seja, como se dá a atuação destas forças.

Palavras – chave: Fractais, Benoît Mandelbrot, Amassamento, GeoGebra.

Abstract

In this work we present a brief study about the fractals, emphasizing construction processes applied to a software, to generate fractals considered as ideals, highlighting concepts related to geometric constructions. The strong visual appeal seen in the fractals served as a basis for understanding its concept and definition. Features present in a fractal, can be employed in several studies. We verified the existence of the fractality of a set of crushed bread spheres, to which there are different patterns that appear when the objects are kneaded, using the Medium Field model for balls of crushed bread of different sizes, relates the masses M with the r rays of the ball. The analysis of the results showed that the relation in the form $M = k \cdot r^D$, where k e D constants, gives a fractional value, between 2 and 3, for its dimension D. An important detail that we try to explain is the forces within the process to which the fractal structure was generated, that is, how these forces act.

Keywords: Fractais, Benoît Mandelbrot, Kneading, GeoGebra

Lista de figuras

Figura 1 - Função quadrática $f(x) = x^2$ 17
Figura 2 - Trecho da função x^2 no intervalo $[1,1.5]$ 18
Figura 3 - Curva de Koch com trecho destacado 18
Figura 4 - Segmento inicial AB 24
Figura 5 - Resultado após a primeira iteração do Conjunto de Cantor 24
Figura 6 - Resultado após a segunda iteração do Conjunto de Cantor 24
Figura 7 - Resultado após a primeira iteração da Curva de Koch 27
Figura 8 - Triângulo equilátero inicial 29
Figura 9 - Resultado após a primeira iteração do Triângulo de Sierpinski 30
Figura 10 - Interface do GeoGebra Classic 6.0 32
Figura 11 - Barra de Ferramentas 32
Figura 12 - Ferramenta: Segmento 33
Figura 13 - Segmento de reta AB 33
Figura 14 - Ferramenta: Reflexão em Relação a um Ponto 34
Figura 15 - Criando uma cópia do segmento AB 34
Figura 16 - Ferramenta: Círculo dados Centro e Raio 34
Figura 17 - Ferramenta: Interseção de Dois Objetos 35
Figura 18 - Dividindo o segmento A'B' em três partes iguais 35
Figura 19 - Conjunto de Cantor com cinco níveis de iteração 36
Figura 20 - Construindo dois novos segmentos 37
Figura 21 - Nível de iteração 1 da Curva de Koch 37
Figura 22 - Curva de Koch com cinco níveis de iteração 38
Figura 23 - Ferramenta: Polígono Regular 38
Figura 24 - Triângulo inicial ABC 39
Figura 25 - Ferramenta: Reflexão em Relação a uma Reta 39
Figura 26 - Cópia do triângulo ABC 39
Figura 27 - Pontos médios dos lados do triângulo A'B'C' 40
Figura 28 - Ferramenta: Ponto Médio ou Centro 40
Figura 29 - Ferramenta: Polígono 40
Figura 30 - Três níveis de iteração do Triângulo de Sierpinski 41
Figura 31 - Tipo 01: Pão sem amassar 47
Figura 32 - Tipo 02: Pão sem amassar 47
Figura 33 - Tipo 03: Pão sem amassar 47
Figura 34 - Tipo 01: Pão amassado 48
Figura 35 - Tipo 02: Pão amassado 48
Figura 36 - Tipo 03: Pão amassado 49
Figura 37 - Tipo 01: Gráfico 52
Figura 38 - Tipo 02: Gráfico 52
Figura 39 - Tipo 03: Gráfico 53

Lista de tabelas

Tabela 1 - Analisando os níveis de iteração do Conjunto de Cantor 25
Tabela 2 - Analisando os níveis de interação da Curva de Koch 27
Tabela 3 - Analisando o Triângulo de Sierpinski 30
Tabela 4 - Tipo 01: Resultados obtidos antes de amassar 46
Tabela 5 - Tipo 02: Resultados obtidos antes de amassar 46
Tabela 6 - Tipo 03: Resultado obtido antes de amassar 46
Tabela 7 - Tipo 01: Pão de Forma Tradicional/ Sem Casca 50
Tabela 8 - Tipo 02: Pão de Forma Integral/ Soja 50
Tabela 9 - Tipo 03: Pão de Forma Integral/ Iogurte e Granola 50
Tabela 10 - Volume das amostras de pão do Tipo 01 54
Tabela 11 - Volume das amostras de pão do Tipo 02 54
Tabela 12 - Volume das amostras de pão do tipo 03 55

Sumário

Introdução 11
Capítulo 1 - Definições, conceito e características básicas 15
1.1. Definição e conceito 15
1.2. Características dos fractais 16
1.2.1. Estrutura fina 17
1.2.2. Auto-similaridade 18
1.2.3. Simplicidade na lei de formação 19
1.3. Dimensão fractal 19
1.3.1. Dimensão de Hausdorff – Besicovitch 19
1.3.2. Método Box – Counting 20
1.3.3. Modelo de campo médio ou de Flory generalizado 21
Capítulo 2 – Analisando alguns fractais ideais 23
2.1. Conjunto de Cantor 23
2.1.1. Processo iterativo para o Conjunto de Cantor 23
2.1.2. Analisando o Conjunto de Cantor 24
2.2. Curva de Koch 26
2.2.1. Processo iterativo para a Curva de Koch 26
2.2.2. Analisando a Curva de Koch 27
2.3. Triângulo de Sierpinski 29
2.3.1. Processo iterativo para o Triângulo de Sierpinski 29
2.3.2. Analisando o Triângulo de Sierpinski 29
Capítulo 3 – Construções de fractais ideais a partir do software GeoGebra 32
3.1. Conjunto de Cantor 33
3.2. Curva de Koch 36
3.3. Triângulo de Sierpinski 38
Capítulo 4 – Aplicações e possíveis utilizações para a Geometria Fractal 42
4.1. Fractais como ferramenta de ensino 42
4.2. A dimensão fractal de formações urbanas 42
4.3. Análise da fractalidade de um determinado conjunto 43
Capítulo 5 – Investigando a fractalidade do pão amassado 45
Conclusão 56
Referências 58

Introdução

A humanidade sofreu grandes mudanças ao longo de sua existência, foram criadas novas formas de descrever o mundo em que vivemos. Com os avanços frequentes da tecnologia digital e de uma nova maneira de pensar, muitas ciências evoluíram para o que enxergamos hoje. A Matemática, assim como tantas outras grandes áreas de estudo do homem, passou por diversas mudanças, seja no campo da pesquisa ou no ambiente escolar.

Uma das descobertas mais recentes na Matemática, é a Geometria Fractal, definida em 1975 e fortificada com o desenvolvimento dos computadores. O principal objeto de estudo da Geometria Fractal são os Fractais, apesar de ser considerada uma descoberta recente, diversos autores destacam a existência dos Fractais a muitos anos atrás, por sua vez denominados por monstros matemáticos.

Um exemplo de 1872, foi construído por Karl Weierstrass, este fractal é a representação gráfica da função que recebe o nome de seu criador. Esta função é contínua sem derivada em ponto algum. Outro exemplo seguindo a mesma ideia de ser contínua, mas não possui derivada em um ponto, temos a Curva de Peano, esta foi criada por Giuseppe Peano em 1890, com intuito de preencher um espaço bidimensional, como um quadrado. Livros sobre fractais costumam explorar a Curva de Koch e o Conjunto de Cantor como exemplos clássicos, respectivamente datados de 1906 e 1883. Mas o que significa para a matemática a tal Geometria Fractal?

Por muito tempo a Geometria Euclidiana, servia como base para resolver e explicar os padrões matemáticos da natureza. Mas, com o desenvolvimento da tecnologia ao qual nos referimos anteriormente, várias são as descobertas que surgiram no campo científico. Nas últimas décadas a geometria ganhou mais uma base de sustento, a Geometria Fractal, e com isso entrelaçado a uma nova forma de entender o mundo e alguns objetos presentes na natureza, justamente o que afirma Janos (2008, n.p) em seu livro, quando apresenta a seguinte passagem, “A Geometria Fractal é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza”.

Um fractal pode ser chamado “ideal” quando são gerados por meio de processos repetitivos ou mesmo funções iterativas, mas também temos aqueles objetos da natureza, como montanhas, nuvens, descargas elétricas entre outros, estes recebem o nome de fractais “naturais”.

A denominação fractal foi imposta pela primeira vez pelo matemático francês de origem judaico-polonesa Benoît Mandelbrot (1924 - 2010) em 1975. Estes objetos, apesar de serem complexos possuem algumas propriedades, bastante interessante que ajudam a entender o que são. Serra e Karas (1997) destacam a estrutura fina, a auto - similaridade e a simplicidade da lei de formação, como sendo as principais características de um fractal.

Além das características presentes nos fractais, alguns autores destacam a dimensão de um fractal como sendo outro fator bastante analisado em estudos envolvendo esses objetos complexos, Barbosa (2005, n.p) aponta, "[…] usualmente não é dada por um número inteiro, mas é uma fração, é um novo tipo de dimensão denominada dimensão fractal**,** que diríamos mais associada a aspereza, espessura, densidade, textura etc.".

Atualmente, existem diversas pesquisas envolvendo os fractais, entre elas está um dos principais trabalhos de Mandelbrot "The (mis)behaviour of markets: a fractal view of risk, ruin, and reward" (Tradução: O (des)comportamento dos mercados: uma visão fractal do risco, da ruína e da recompensa). Outras pesquisas também ganham destaque, nas áreas de comunicação, distribuição urbana, medicina, informática, artes, geologia, entre outras.

Delimitação do tema

As vezes a pouca informação a respeito de certo tema, desperta uma grande curiosidade para estudá-la. Na literatura, existem poucos livros traduzidos sobre a Geometria Fractal, além do mais, o tema é pouco comentado entre os corredores da nossa instituição, uma vez que a Geometria Fractal não está presente nas ementas das disciplinas estudadas. Quando pensamos nos Fractais como um objeto a ser investigado sem dúvida podemos direciona-los a exploração em sala de aula, e isso ocorre pela presença do aspecto visual destacado nestes objetos, fator este que fortifica a possibilidade em estudar um pouco sobre a Geometria Fractal.

Realizar um estudo por mais simples que se possa ser, exige um certo tempo, e também necessita de escolhas sobre até onde será pesquisado. Muitas perguntas podem estar entrelaçadas a temática dos fractais, como por exemplo, o seu significado e definição, ou mesmo se seria possível construir algum fractal através de processos de construção simples, como por exemplo, o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch ou o Triângulo de Sierpinsk.

Os fractais por si só, apresentam características fundamentais, entre elas a dimensão fractal, esta ajuda a definir determinados objetos ou coleções como sendo um fractal. Um

experimento citado em trabalhos envolvendo a análise de objetos com intuito de se observar a fractalidade dos mesmos, tem autoria de Gomes (1987), e esta intitulado como “Fractal Dimension of Paper Ball”. Ao fim de seu artigo Gomes, indica outros possíveis estudos como a investigação da dimensão fractal em um conjunto de esferas de pão amassado.

A falta de informação e visibilidade, entrelaçada a uma curiosidade imensa ao qual obtive ao conhecer esta temática, me direcionou a realizar um estudo inicialmente simples, ressaltado as características básicas de um fractal, maneiras de se construir tais objetos e possíveis aplicações de suas teorias em diversas áreas.

Motivação

Uma de minhas grandes motivações na escolha deste tema, veio no primeiro trabalho de graduação realizado por mim e alguns colegas, em um estudo sobre alguns modelos matemáticos na natureza, me deparei com o termo fractal, e com uma curiosidade simples procurei pesquisar em sites, mas deparando sempre com os mesmos argumentos ou exemplos.

Como objetivo pessoal pretendo despertar em alguns colegas de curso, a curiosidade que tive para pesquisar e desenvolver algum trabalho envolvendo esses objetos complexos. Vale ressalta que existem poucos livros nacionais ou traduções sobre a Geometria Fractal, fato talvez explicado por ser uma descoberta recente.

Através desta pesquisa, busco obter uma ferramenta que me auxilie como um futuro professor, uma vez que em nossa profissão precisamos nos atualizar e conhecer novas formas de se relacionar os conteúdos ensinados, e com os fractais posso despertar em meus futuros alunos uma nova maneira de enxergar o ambiente em que eles vivem.

Objetivo

Realizar um estudo sobre os fractais, apresentando algumas construções, formulando o conceito de fractal e expondo aplicações e formas de utilização da geometria fractal, seja mediante experimentos ou como ferramenta de ensino.

Descrição da monografia

Como abordado anteriormente, os fractais são objetos complexos, sendo assim precisaremos conhecer suas características e compreender sua definição e o conceito mais usual

presente em livros, o capítulo 1 será destinado a apresentar toda base necessária para determinarmos se objetos complexos são realmente fractais.

No capítulo 2, iremos realizar uma análise de três fractais ideias, apresentando o processo iterativo responsável por gerar estes fractais, resultados obtidos na observação de cada nível de iteração, a presença das características básicas, no terceiro capítulo apresentaremos o processo iterativo aplicado ao GeoGebra dos respectivos fractais.

No capítulo seguinte, será indicado três formas de utilizar os fractais ou mesmo a Geometria Fractal em diferentes situações. No quinto capitulo será realizado um experimento nos moldes do artigo de Gomes (1987), por fim será apresentado algumas conclusões sobre a pesquisa realizada.

Capítulo 1 - Definições, conceito e características básicas

1.1. Definição e conceito

De forma simplificada um fractal é uma forma geométrica, assim como todas que conhecemos dentro da Geometria Euclidiana, mas com uma peculiaridade, cada parte desta forma se assemelha com o todo, justamente é o que afirma Pimentel e Urban (2003, p.17), quando dizem que "Fractais, em termos simples, são formas geométricas elementares, cujo padrão pode repetir-se indefinidamente, gerando complexas figuras que preservam em cada uma de suas partes a singularíssima propriedade de representar o todo.".

Esta ideia pode ser levada para os fractais naturais, com a ressalva de que, exista uma espécie de autosemelhança estatística, ou seja, as réplicas que podem ser observados não serão totalmente semelhantes ao todo. A definição de fractal ainda não é totalmente precisa. Existem divergências entre autores, por exemplo o próprio Mandelbrot não ficou satisfeito com a definição que ele formulou. Benoît Mandelbrot apresentou sua definição nas primeiras páginas do livro "The Fractal Geometry of Nature". A definição formulada por Mandelbrot (1977, p.15) é descrita da seguinte forma, "A fractal is by definition a set for which the Hausdorff Besicovitch dimension strictly exceeds the topological dimension". A seguir sua tradução.

Definição 1: *Um fractal é por definição um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff – Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.* (Tradução nossa). (MANDELBROT, 1977, p.15)

Veremos mais à frente neste capítulo, como calcular a dimensão fractal ou dimensão de Hausdorff-Besicovitch, e ressaltaremos o que ela nos apresenta. A dimensão topológica, citada na Definição 1, é descrita por Falconer (1990) como um número inteiro. Serra e Karas (1997, p.14) também classificam a dimensão topológica da mesma maneira, ou seja, "a dimensão de uma figura assim caracterizada é uma dimensão topológica, que se exprime como um número inteiro".

Falconer (1990), ressalta sua insatisfação pela definição de Benoit e, apresenta no livro "Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications", sua própria definição para estes monstros matemáticos, a seguir temos esta definição:

Definição 2: *[...] quando nos referimos a um conjunto F como fractal, tipicamente teremos seguindo em mente:*

- *F tem uma estrutura fina, isto é, detalhes em escalas arbitrariamente pequenas;*
- *F é irregular demais para ser descrito na linguagem geométrica tradicional, tanto local e globalmente;*
- *Frequentemente F tem alguma forma de auto-similaridade, talvez aproximada ou estatística;*
- *Normalmente, a "dimensão fractal" de F (definida de alguma forma) é maior que sua dimensão topológica;*
- *Na maioria dos casos de interesse, F é definido de uma forma muito simples, talvez recursivamente;*

(FALCONER, 1990, n.p)

As duas definições também podem ser encontradas no livro "Descobrindo a Geometria Fractal: para a sala de aula", de Ruy Madsen Barbosa. No mesmo livro o autor destaca que ainda é preciso formular uma definição formal para os fractais, neste sentido vamos considerar como sendo um fractal, aquela estrutura geométrica que possua:

- Dimensão fractal, ou seja, uma dimensão não inteira, calculada usando métodos já definidos na literatura;
- Os detalhes não se perdem quando se observa a estrutura em diferentes escalas;
- Uma semelhança de partes da estrutura com o todo, considerando ser estatisticamente semelhante;
- Construído ou gerado por processos recorrentes simples;

Os itens listados a cima são baseados nas principais características de um fractal, sendo assim discutiremos na próxima seção as características básicas destes objetos complexos.

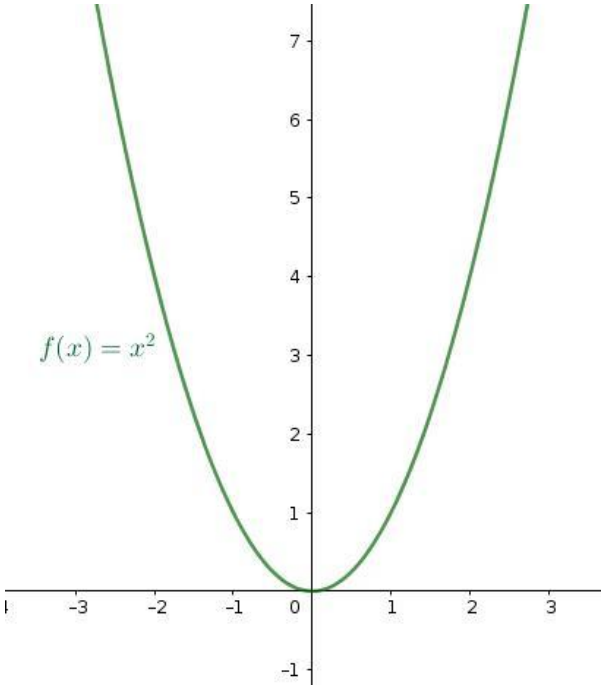
1.2. Características dos fractais

As características principais dos fractais, são bem definidas e ajudam a entender o que é um fractal, como vimos anteriormente são consideradas por alguns autores três características, mas além disso temos mais uma chamada dimensão fractal. Nesta seção iremos falar sobre, estrutura fina, auto-similaridade e simplicidade na lei de formação, destacando o que isso significa para os fractais.

1.2.1. Estrutura fina

Esta característica diz respeito ao grau de detalhamento que um fractal possui quando se observa apenas um pequeno pedaço do todo. Ou seja, um fractal não perde sua riqueza de detalhes em nenhuma escala. Podemos pensar da seguinte maneira, quando temos uma curva, como exemplo de uma função quadrática $f(x) = x^2$, como mostra a imagem a seguir.

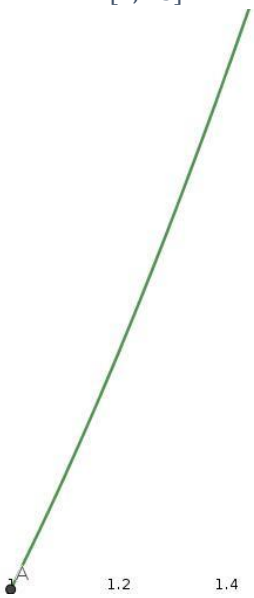
Figura 1 - Função quadrática $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Se começarmos a ampliar um trecho da representação gráfica desta função, em um determinado momento vamos perceber somente uma ligeira curvatura, algo semelhante a uma reta, esta situação pode ser visualizada na imagem a seguir.

Figura 2 - Trecho da função x^2 no intervalo [1,1.5]



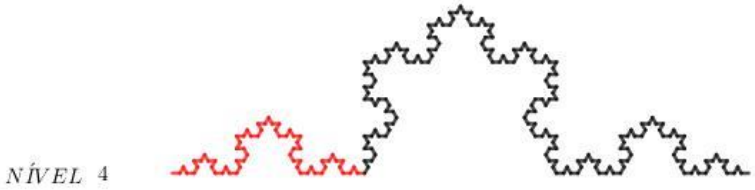
Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

O que pode ser visto na imagem não acontece nos fractais, pois tratamos de figuras com detalhamento infinitos, ao qual em escala microscópica permanecem com detalhes inalterados. Uma única ressalva, é quando utilizamos uma imagem do fractal, ou seja, restringimos o mesmo a uma resolução de computador, segundo Karas e Serra (1997), o seu detalhamento não pode ir além da resolução da tela gráfica do sistema.

1.2.2. Auto-similaridade

A auto-similaridade também chamada de auto-semelhança, esta é uma característica que segundo Janos (2008) se torna intuitivamente, bastante claro e autoexplicativo. Nos fractais, podemos representá-los através de um determinado nível de interação, neste caso se observarmos a imagem a seguir e compararmos com um trecho apenas, iremos perceber que existe uma semelhança evidente.

Figura 3 - Curva de Koch com trecho destacado



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Vale ressaltar ainda que em fractais naturais, esta característica é dita auto-similaridade estatística, ou seja, uma parte ou pedaço observado será semelhante ao todo até certas condições.

1.2.3. Simplicidade na lei de formação

Os fractais podem ser construídos por processos repetitivos ou algoritmos simples, nos exemplos presentes no capítulo dois, temos fractais gerados através de construções geométricas, sendo que são repetidos o mesmo método a cada nível. As duas condições citadas acima, qualificam a chamada simplicidade na lei de formação.

1.3. Dimensão fractal

Para calcular a dimensão D de um fractal, temos diversos métodos, mas destacaremos os mais utilizados. O primeiro é usualmente apresentado em livros e aplicado principalmente em fractais clássicos obtidos através de processos iterativos. Já o segundo é conhecido como "contagem de caixas" ou "Box – Counting" bastante utilizado para fractais naturais. Também podemos citar o modelo de campo médio ou modelo de Flory generalizado.

Inicialmente, ressaltamos que a dimensão de um fractal é necessariamente fracionária, ou seja, podemos dizer que os objetos fractais transitam entre as dimensões inteiras, caracterizadas por Falconer (1990) e Serra e Karas (1997) como dimensão topológica. A seguir iremos apresentar três métodos para calcular esta dimensão.

1.3.1. Dimensão de Hausdorff – Besicovitch

O primeiro método a ser descrito é dado pela seguinte expressão matemática $D_f = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$. Tal expressão se origina dos estudos sobre topologia do matemático alemão Felix Hausdorff (1868-1942). Sendo N o número de partes que o objeto foi dividido e r o fator de redução. Hausdorff obteve a seguinte relação $N = \frac{1}{r^{D_f}}$.

Ao qual D_f é a dimensão de Hausdorff. Alguns autores chamam este valor D_f, como dimensão de Hausdorff – Besicovitch, isso ocorre pelo fato do matemático russo Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970) realizar diversas contribuições nos estudos de Hausdorff. Para obter a expressão $D_f = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$, basta aplicar em $N = \frac{1}{r^{D_f}}$ o logaritmo, mantendo

– se balanceada, ou seja, $N = \frac{1}{r^{D_f}} \Rightarrow N = \left(\frac{1}{r}\right)^{D_f}$. Aplicando-se o logaritmo em ambos os lados, temos:

$$\log N = \log\left(\frac{1}{r}\right)^{D_f} = D_f \cdot \log\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow D_f = \frac{\log N}{\log\frac{1}{r}}$$

A dimensão de Hausdorff-Besicovitch, ganhou papel importante nos estudos sobre os fractais por meio de Benoit Mandelbrot, vejamos alguns exemplos com situações da Geometria Euclidiana. Consideramos um segmento de reta e um quadrado, sabemos que as dimensões destes dois objetos são respectivamente um e dois, ou seja, unidimensional e bidimensional. Inicialmente tomando um segmento de reta, e dividindo em quatro partes de igual comprimento, temos que $N = 4$ e $r = \frac{1}{4}$, logo:

$$D_f = \frac{\log 4}{\log 4} = 1$$

Sendo assim a dimensão de uma reta é $D_f = 1$, o que de fato é verdade por se tratar de um objeto unidimensional. Já aplicando ao quadrado, consideramos quatro cópias do mesmo mas, com lados proporcionais a $\frac{1}{2}$ do quadrado original, sendo assim, $N = 4$ e $r = \frac{1}{2}$, logo:

$$D_f = \frac{\log 4}{\log 2} = \frac{2 \cdot \log 2}{\log 2} = 2$$

Comprovando que o quadrado é uma figura bidimensional. Ambas a situações envolvem exemplos da Geometria Euclidiana, mas ao longo do trabalho serão calculadas as dimensões dos fractais ideais analisados no capitulo 2.

1.3.2. Método Box – Counting

Este método é utilizado eventualmente em análise de imagem, o objetivo principal é analisar padrões complexos, dividindo objetos, conjunto de dados, imagens, entre outros em partes cada vez menores. Uma curiosidade deste método, está na ideia de se aplicar um “zoom”, ou seja, observar situações a partir de seus mínimos detalhes.

Existem variações deste método, adaptados para os diversos fins, como por exemplo o que veremos no experimento ao qual será calculado a dimensão do pão amassado. O que

podemos afirmar sobre o método Box – Counting é que o mesmo não necessita do requisito da existência de auto-similaridade, na utilização deste método se faz necessário o uso de um computador. Este método é aplicado no intuito de se calcular a dimensão de figuras planas, como o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski.

Segundo Karas e Serra (1997), este é um método mais geral utilizado para o cálculo da dimensão, no caso dos fractais citados anteriormente o método se reduz a uma contagem de quadrados. O processo é simples, normalmente recorre-se a cobrir a imagem com malha quadriculada de lado δ, e em seguida contar quantos quadrados recobrem pelo menos um ponto da imagem. Esta etapa é repetida aumentando ou diminuindo progressivamente o tamanho dos quadrados e repete-se a contagem realizada anteriormente, obtendo assim uma série de dados (número de quadrados e respectiva dimensão δ).

Por fim aplica-se os resultados a seguinte expressão $D_f = \frac{\log\left(\frac{N_2}{N_1}\right)}{\log\left(\frac{L_2{}^{-1}}{L_1{}^{-1}}\right)}$, onde D_f é a dimensão fractal, N_i representa o número de quadrados e L_i é o comprimento do lado do quadrado relacionado ao respectivo L_i.

1.3.3. Modelo de campo médio ou de Flory generalizado

As definições para dimensão fractal apresentadas até então não podem determinar o valor da dimensão do amassamento de bolas de papel, arame ou pão. Existe outra definição de dimensão, e pode ser usada para a determinação da dimensão de objetos fractais reais. A dimensão baseada na relação massa-volume, se torna mais adequada para medidas de objetos reais uma vez que suas relações são tiradas de quantidades físicas mensuráveis. Este método é uma alternativa ao método Box – Counting que requer imagens, preferencialmente digitalizadas.

Gomes (1987) realizou um experimento a fim de determinar a dimensão fractal do papel amassado. Neste experimento, por mais que pressiona – se a bola de papel não conseguia comprimi-la até ocupar todo o espaço tridimensional. Em outras palavras, uma bola que tem ar, vazio, e que oferece uma grande resistência à compressão.

Flory (1953) idealizou um sistema amassado mergulhado num espaço d – dimensional. Nesse modelo, a energia interna do sistema é descrita pela contribuição das forças de exclusão

e energia elástica $E = E_{elástica} + E_{repulsão}$ onde, $E_{elástica}(R, n) = \frac{kR^n}{2}$, com k sendo a constante elástica efetiva e R o raio da esfera, $E_{repulsão} \Rightarrow E_{rep}$(componente de auto exclusão).

A energia elástica $E_{elástica}$, está associada a privilegiar configurações estendidas do sistema amassado com uma força elástica para dentro da forma:

$$F_e = -\frac{\partial E_{elástica}}{\partial R} = -nkR^{n-1}$$

A outra parcela E_{rep}, vinda da interação de dois corpos e, consequentemente, proporcional ao quadrado da densidade média de massa $\rho = \frac{M}{V}$. Por sua vez, $E_{rep} = \alpha M^2 R^{-3}$ corresponde a uma força não-linear repulsiva de curto alcance:

$$F_{rep} = -\frac{\partial E_{rep}}{\partial R} = \alpha \frac{M^2}{R^4}$$

Admitindo a hipótese da contagem das caixas, quando a massa segue a lei de potência $\alpha M R^D$, teremos $F_{rep} = \alpha M R^{4-2D}$. Observe que esta hipótese é exatamente o processo de Box – Counting. Observando as equações F_e e F_{rep} a energia E está em função apenas do raio R e ao minimizar a energia total, $\frac{dE}{dR} = 0$, obtemos a excepcional relação entre os expoentes de escala $D = D(n) = \frac{3+n}{2}$.

É interessante mencionar o fato de que o expoente D obtido pelo método Box – Counting coincide com o expoente crítico encontrado na relação massa-tamanho. Com essas equações, Gomes (1987) de posse dos valores dos diâmetros da bola de papel, calculou o volume médio de cada bola por $V = \frac{4\pi}{3} R^{2,51}$, onde R é o raio médio de cada bolinha e o expoente 2,51 é o valor da dimensão da bola amassada.

Capítulo 2 – Analisando alguns fractais ideais

Os fractais ideais ou matemáticos, são assim chamados por serem gerados por processos que se repetem de forma a se tornarem totalmente auto semelhantes, segundo Janos (2008, p. 35), "Nos fractais matemáticos, as partes são copias exatas do todo". Os processos repetitivos, são também chamados de funções iterativas ou funções iteradas, basicamente é uma técnica que usa uma repetição em escala de uma mesma figura.

A seguir iremos discutir algumas ideias observadas ao longo da pesquisa, ressaltando aspectos que cada exemplo possui, a partir de seus respectivos processos iterativos. Os fractais que serão explorados são o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski, dando foco a resultados obtidos com a observação dos níveis de iteração.

2.1. Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor, recebe este nome pelo seu criador Georg Cantor (1845-1918), também chamado de "Poeira de Cantor" este fractal foi apresentado em 1883. Originalmente este conjunto é um subconjunto do intervalo $[0,1]$, mas consideraremos aqui seu aspecto visual, ou uma representação geométrica. Barbosa (2005, n.p), descreve o Conjunto de Cantor como sendo "o conjunto de pontos (números) que permanecem após as infinitas fases.". Aqui o autor considera fases, mas chamaremos de iterações.

2.1.1. Processo iterativo para o Conjunto de Cantor

Uma das formas de se descrever o processo ao qual é gerado o Conjunto de Cantor, pode ser resumido em três etapas simples.

1º. Considerar um segmento de reta;

2º. Dividir o segmento em três partes iguais;

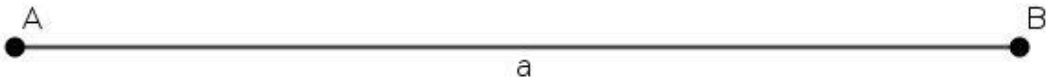
3º. Remover o segmento central;

Este processo ele é aplicado novamente, no entanto, nos dois novos segmentos que foram gerados, repetindo o mesmo nos níveis seguintes.

2.1.2. Analisando o Conjunto de Cantor

Como descrito anteriormente, este processo se inicia com um segmento de reta, considerando um segmento inicial $\overline{AB}$ de comprimento igual a 1 unidade, assim como na imagem abaixo.

Figura 4 - Segmento inicial AB



Fonte: Elaboro pelo autor (2018)

Após a primeira iteração, ou seja, quando se aplica o processo descrito anteriormente o comprimento total se reduz, pois é removido $\frac{1}{3}$ do segmento $\overline{AB}$, obtendo no nível seguinte um comprimento total de $\frac{2}{3}$.

Figura 5 - Resultado após a primeira iteração do Conjunto de Cantor

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A partir deste momento vamos definir cada segmento obtido, de forma que está sendo representada na imagem a cima. Como o processo divide o segmento em três partes iguais e remove a parte central, os novos segmentos obtidos têm comprimentos iguais, ou seja, $b = c = \frac{1}{3}$ de unidade. Comprovando que a soma total dos comprimentos dos dois segmentos é $b + c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Para obter o próximo nível, aplica – se o mesmo processo nos segmentos b e c.

Figura 6 - Resultado após a segunda iteração do Conjunto de Cantor

Fonte: Elaboro pelo autor (2018)

Podemos observar agora que os segmentos d, e, f e g tem o mesmo comprimento, isto é, iguais a terça parte de $\frac{1}{3}$, ou seja, $d = e = f = g = \frac{1}{9}$. Podemos formular duas expressões para definir respectivamente o comprimento total após cada iteração e o comprimento total removido após cada iteração, para isso vamos observar o que aconteceu de um nível para o outro. Na tabela a seguir temos o nível e suas respectivas situações.

Tabela 1 - Analisando os níveis de iteração do Conjunto de Cantor

Nível	**Total de segmentos**	**Comprimento total**	**Comprimento removido**
0	1	1	0
1	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	4	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
...	...	...	...
n	2^n	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\frac{2^{n-1}}{3^n}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Analisando a tabela, podemos definir, a expressão que representa o comprimento total após cada iteração é dada por $t_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Já a expressão que representa o comprimento removido após cada iteração é dada por $r_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Com as observações feitas podemos definir também uma expressão para representar a quantidade de segmentos em cada iteração, ou seja, $c_n = 2^n$. Mas o que acontece quando $n \to \infty$.

Aplicando – se o limite sobre a expressão t_n, podemos fazer algumas conclusões sobre a representação geométrica do Conjunto de Cantor. Se referindo ao comprimento total após infinitas iterações, para analisar o que acontece, basta calcular $\lim_{n\to\infty} t_n$. De início observamos que quanto mais n se aproxima do infinito, t_n tende a zerar.

Com isso podemos afirmar que, após um processo infinito de iterações todo o segmento $\overline{AB}$ foi removido, levando a impressão que sobra apenas os pontos. O Conjunto de Cantor tem algumas propriedades interessantes destacadas por alguns autores, a seguir vamos apresentá-las e justificar o porque ele é tido como um fractal. As propriedades são:

- É fechado;
- É um fractal;

Para verificarmos que se trata de um fractal, iremos usar a definição usual de Mandelbrot, simplesmente basta verificar se a dimensão de Hausdorff-Besicovitch não é dada por um número inteiro, está definição é suficiente para garantir se um objeto matemático é um

fractal. Retomando aos resultados gerados através da construção do Conjunto de Cantor, temos no nível 2, $N = 4$ e $r = \frac{1}{9}$, ou seja, aplicando na expressão $D_f = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$, encontraremos:

$$D_f = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} = \frac{\log 4}{\log 9} = \frac{2 \cdot \log 2}{2 \cdot \log 3} \approx 0{,}630929$$

Como a dimensão encontrada tem um valor fracionário, podemos afirmar que este conjunto é um fractal pela definição de Mandelbrot. Na construção do Conjunto de Cantor tínhamos inicialmente um intervalo fechado $[0,1]$, tudo o que removemos após cada iteração foram intervalos abertos, ou seja, o complementar do Conjunto de Cantor é uma reunião de conjuntos abertos. Como em topologia, um conjunto é dito fechado, se seu complementar for aberto, portanto temos que o Conjunto de Cantor é fechado.

Existem outras propriedades, interessantes sobre o Conjunto de Cantor, por exemplo, é um conjunto dito desconexo e não enumerável. No entanto, apenas concentramos em observar o que acontece ao longo do processo de construção.

2.2. Curva de Koch

A Curva de Koch, é tida como um dos primeiros fractais a serem descritos. Seu criador é Helge von Koch e foi apresentada pela primeira vez em 1906 num artigo intitulado "*Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*". Existem algumas variações de nome para a Curva de Koch, como o Floco de neve de Koch ou Estrela de Koch.

2.2.1. Processo iterativo para a Curva de Koch

O processo iterativo que será descrito é semelhante ao do Conjunto de Cantor. Dividimos em três etapas:

1º. Consideramos um segmento de reta;

2º. Divide – se esse segmento em três partes iguais;

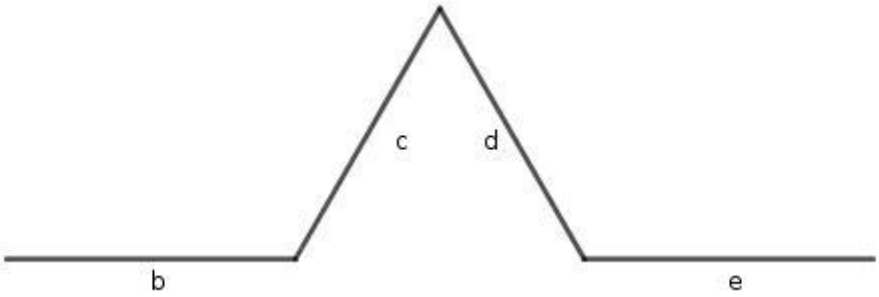
3º. Substitui – se o segmento médio por dois segmentos iguais, de modo que, o segmento médio e os dois novos segmentos formem um triângulo equilátero.

Este assim como o anterior, ocorre de forma infinita, gerando assim a Curva de Koch.

2.2.2. Analisando a Curva de Koch

Observando o processo iterativo da Curva de Koch, temos que se inicia a partir de um segmento $\overline{AB}$, de comprimento igual a 1 unidade, podemos representar através da Figura 4. Após a primeira iteração é removido $\frac{1}{3}$ do segmento, mas em seguida é adicionado $\frac{2}{3}$, obtendo um total de $\frac{4}{3}$. Vale ressaltar que para a próxima iteração será aplicado o processo sobre os quatro novos segmentos.

Figura 7 - Resultado após a primeira iteração da Curva de Koch



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Ao se aplicar novamente o processo será removido um total de $\frac{4}{9}$ do segmento inicial, mas assim como observado no nível anterior, será adicionado $\frac{8}{9}$, obtendo um total de $\frac{16}{9}$ de unidade de comprimento. Na tabela a seguir temos o nível e suas respectivas situações.

Tabela 2 - Analisando os níveis de interação da Curva de Koch

Nível	**Total de segmentos**	**Comprimento total**	**Comprimento removido**	**Comprimento adicionado**
0	1	1	0	0
1	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	16	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$
3	64	$\frac{64}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{32}{27}$
...	...	...	...	...
n	4^n	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$	$\frac{4^{n-1}}{3^n}$	$\frac{2^{2n-1}}{3^n}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Através da tabela apresentada anteriormente, conseguimos definir três expressões, a primeira que representa o total após cada iteração $t_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Já a segunda representa o comprimento removido após cada iteração $r_n = \frac{4^{n-1}}{3^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Por sua vez, o último nos informa quanto foi adicionado $a_n = \frac{2^{2n-1}}{3^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Se aplicarmos o limite em t_n, vamos perceber uma situação que pode ser vista durante cada nível. Temos que:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$

Ou seja, o comprimento total tende ao infinito, mais precisamente aumenta cada vez mais rápido. Mas quanto as características básicas dos fractais, a Curva de Koch possui todas? Devemos então verificar se, a Curva de Koch:

- Possui estrutura fina;
- Possui auto-semelhança;
- Pode ser obtido com uma lei de formação simples;

Por se tratar de um processo recorrente de iterações, existe de fato uma simplicidade na lei que defini a Curva de Koch. A curva possui um certo grau de detalhamento que não se perde em nenhum momento. A auto-similaridade, se focarmos em apenas um trecho do nível de iteração 4 por exemplo, podemos perceber que é semelhante ao nível de iteração anterior.

Para se calcular a dimensão fractal da Curva de Koch, também utilizamos a mesma expressão $D_f = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$, com $N = 4$ e $r = \frac{1}{3}$. Portanto:

$$D_f = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}26186$$

Garantindo assim pela definição de Mandelbrot que a Curva de Koch é realmente um fractal.

2.3. Triângulo de Sierpinski

Assim como os dois fractais anteriores, este também foi gerado ou construído por um matemático. O Triângulo de Sierpinski, também chamado de Cesta de Sierpinski ou Junta de Sierpinski, foi criado por Wacław Sierpiński (1882-1869).

2.3.1. Processo iterativo para o Triângulo de Sierpinski

Diferente dos anteriores, este triângulo não se baseia em segmentos e sim em uma figura plana. De certo modo, a construção é obtida por remoção de triângulos em escalas menores, mas seguindo um padrão que se repete. Neste caso o processo se divide em quatro etapas, descritas a seguir.

1º. Considere um triângulo equilátero;

2º. Determina – se os pontos médios de cada lado do triângulo original;

3º. Liga – se os pontos médios, criando quatro triângulos equiláteros em escala menor;

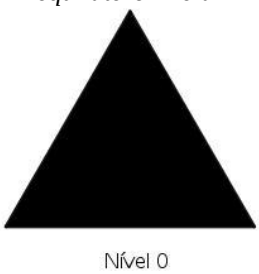
4º. Remove – se o triângulo central, cujo os vértices são respectivamente os pontos médios;

Este processo assim como os demais é aplicado de forma infinita, dando origem ao Triângulo de Sierpinski.

2.3.2. Analisando o Triângulo de Sierpinski

No nível de iteração 0 temos um triângulo equilátero de lados iguais a 1 unidade comprimento.

Figura 8 - Triângulo equilátero inicial



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Após a primeira iteração, removemos um triângulo equilátero de lado $\frac{1}{2}$, que está posicionado no centro do triângulo original criando uma figura, ao qual será mostrada a seguir:

Figura 9 - Resultado após a primeira iteração do Triângulo de Sierpinski

Nível 1

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Nesta etapa observamos que, existem três triângulos equiláteros de lados iguais $\frac{1}{2}$ do original. Seguindo este raciocínio, teremos cada situação representada na tabela a seguir:

Tabela 3 - Analisando o Triângulo de Sierpinski

Nível	**Número de triângulos**	**Comprimento do lado**	**Perímetro total**
0	1	1	3
1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
2	9	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{4}$
3	27	$\frac{1}{8}$	$\frac{81}{8}$
...	...	...	...
n	3^n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A dimensão fractal do Triângulo de Sierpinski, pode ser calculado tomado os seguintes valores, $N = 3$ e $r = \frac{1}{2}$, o valor para a escala tem como referência ao lado do triângulo original, sendo assim:

$$D_f = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58496$$

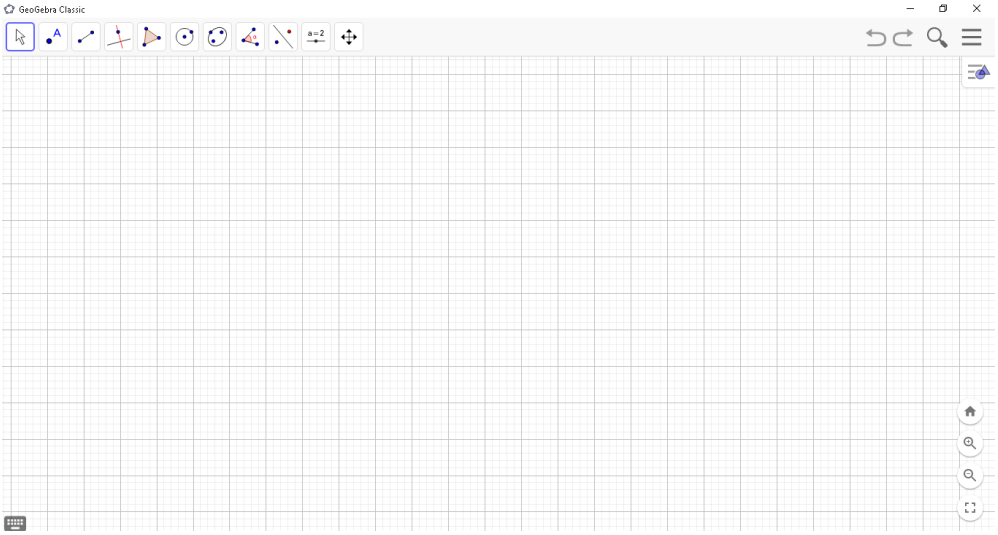
Pela definição de Mandelbrot, então o Triângulo de Sierpinski é um fractal. As características são fáceis de se observar, por exemplo o processo geométrico repetitivo é simples e comprova a simplicidade na lei de formação. O mesmo processo que gera este fractal, por se tratar de algo que ocorre de forma infinita, nos mostra os detalhes que não se alteram em diferentes escalas, por fim se observarmos um nível mais alto por exemplo, perceberemos réplicas reduzidas da imagem como um todo.

Capítulo 3 – Construções de fractais ideais a partir do software GeoGebra

O software GeoGebra é bastante utilizado em construções geométricas e estudos envolvendo funções, por ser uma ferramenta intuitiva e simples, se torna uma boa ferramenta para a construção de alguns fractais, neste capítulo direcionamos os processos iterativos estudados anteriormente ao GeoGebra, com o objetivo de obter um resultado visual dos fractais presentes no capítulo dois. A versão utilizada foi a Classic 6.0 disponível no site da desenvolvedora.

O foco aqui será apenas nos processos iterativos, no entanto precisamos explorar um pouco a interface do software utilizado. A interface do GeoGebra Classic 6.0 pode ser visto na imagem abaixo, com ressalva de que mostramos apenas a janela de visualização sem os eixos.

Figura 10 - Interface do GeoGebra Classic 6.0



Fonte: Interface GeoGebra (2018)

Para as construções, usaremos as ferramentas localizadas na Barra de Ferramentas que está dividida em 11 janelas cada uma com sua respectiva categoria, a barra pode ser vista abaixo.

Figura 11 - Barra de Ferramentas

Fonte: Interface GeoGebra (2018)

3.1. Conjunto de Cantor

O processo descrito a seguir segue algumas técnicas de desenho geométrico, aplicadas no software GeoGebra, o objetivo aqui é relatar passo a passo como ocorre cada nível de iteração.

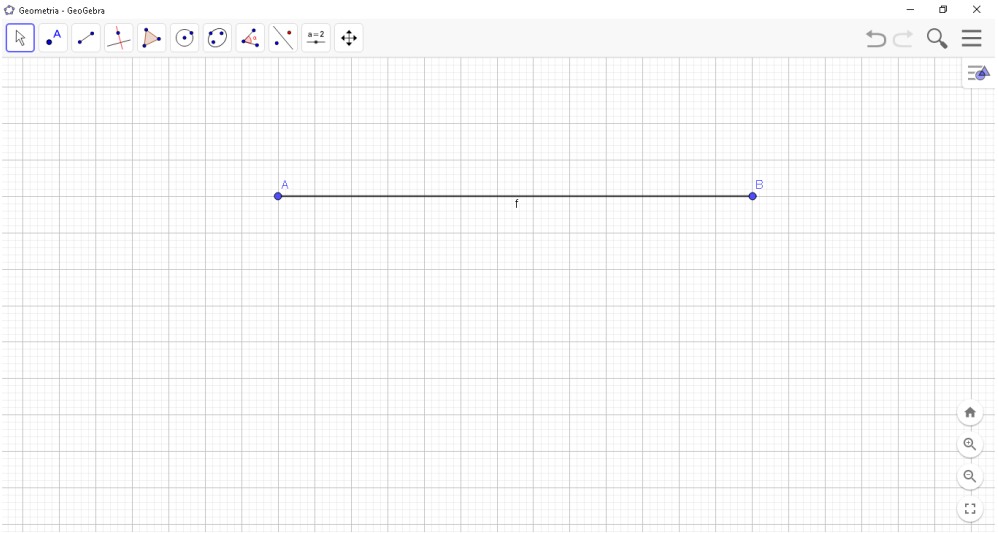
1º Passo: Precisamos definir um segmento de reta $\overline{AB}$, pois a construção deste fractal considera inicialmente um segmento de reta. Para isso vamos utilizar a ferramenta "Segmento", localizado na terceira aba do software, a ferramenta é apresentada com o seguinte ícone:

Figura 12 - Ferramenta: Segmento

Fonte: Interface GeoGebra (2018)

Para a construção, temos um segmento $\overline{AB} = 1.u.c$, aqui temos a iteração 0, representada na Figura 13.

Figura 13 - Segmento de reta AB



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

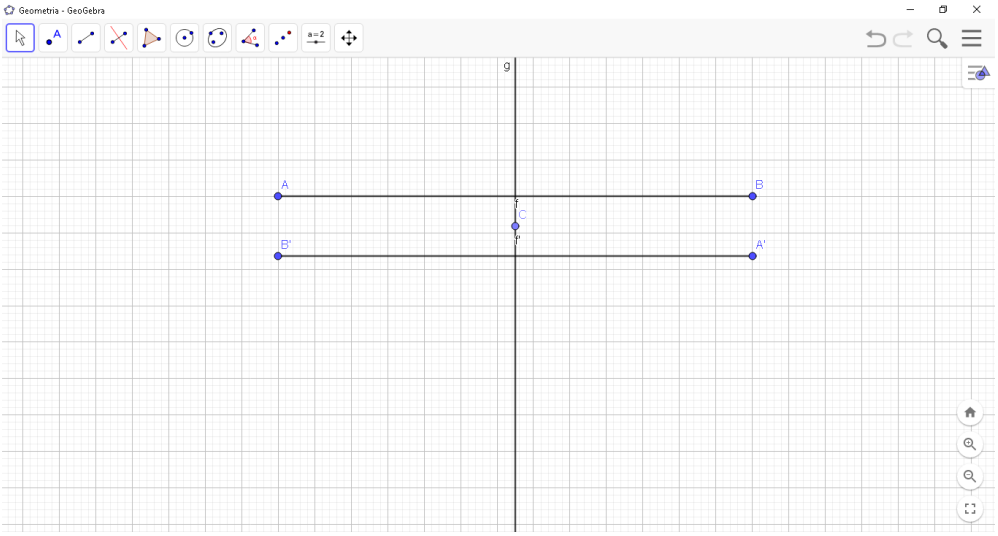
2º Passo: Precisaremos criar uma cópia do segmento $\overline{AB}$, ou seja, um segmento $\overline{A'B'}$ de mesma medida. Para realizar esta etapa da construção, vamos definir um ponto C que necessariamente localiza-se abaixo do segmento inicial e pertencente a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Após definir este ponto C, vamos usar a ferramenta "Reflexão em Relação a um Ponto", está ferramenta, está localizada na nona aba do software e é indicada pelo ícone apresentado a seguir:

Figura 14 - Ferramenta: Reflexão em Relação a um Ponto

Fonte: Interface do GeoGebra (2018)

Para aplicar a reflexão em relação a um ponto, clicamos no segmento $\overline{AB}$ e em seguida no ponto C. Ao final desta etapa teremos o seguinte resultado.

Figura 15 - Criando uma cópia do segmento AB



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

No próximo passo dividiremos o segmento $\overline{A'B'}$ em três partes iguais.

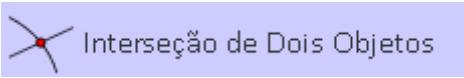
3º Passo: Para dividir este segmento em três partes iguais, utilizamos a ferramenta "Círculo dados o Centro e Raio", construindo assim dois círculos de centros necessariamente em A' e B', o tamanho do raio deverá ser igual $\frac{1}{3}$ do próprio segmento, logo ao utilizar a ferramenta, clicamos nos respectivos pontos por vez, e em seguida digitamos na caixa de diálogo que será aberta o valor "$f/3$" que corresponde a $\frac{1}{3}$ de f, pressionando "Enter" ao digitar o valor. A ferramenta "Círculo dados o Centro e Raio" está localizada na sexta aba, e representada pelo seguinte ícone:

Figura 16 - Ferramenta: Círculo dados Centro e Raio

Fonte: Interface do GeoGebra (2018)

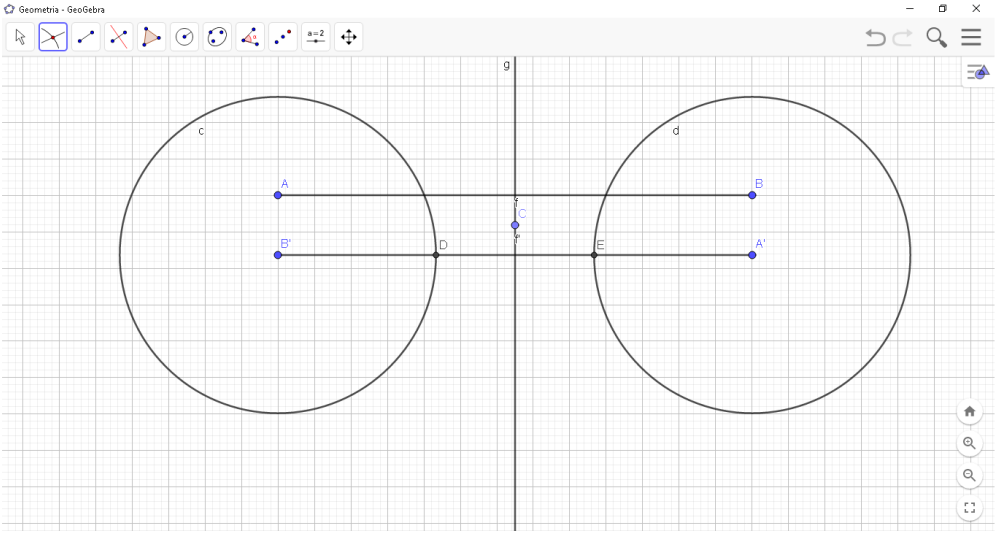
Para finalizar este passo, agora basta marcar os pontos de interseção C e Digite a equação aqui. entre os círculos e o segmento $\overline{A'B'}$. Para isso será usada a ferramenta localizada na segunda aba e nomeada de "Interseção de Dois Objetos", cujo o ícone é mostrada na Figura 17. O procedimento desta ferramenta é simples, selecionamos a ferramenta e em seguida clicamos nos dois objetos, como por exemplo no círculo c e no segmento $\overline{A'B'}$, repetindo o mesmo com o círculo d. A seguir veremos a ferramenta utilizada e o resultado após esta construção.

Figura 17 - Ferramenta: Interseção de Dois Objetos



Fonte: Interface do GeoGebra (2018)

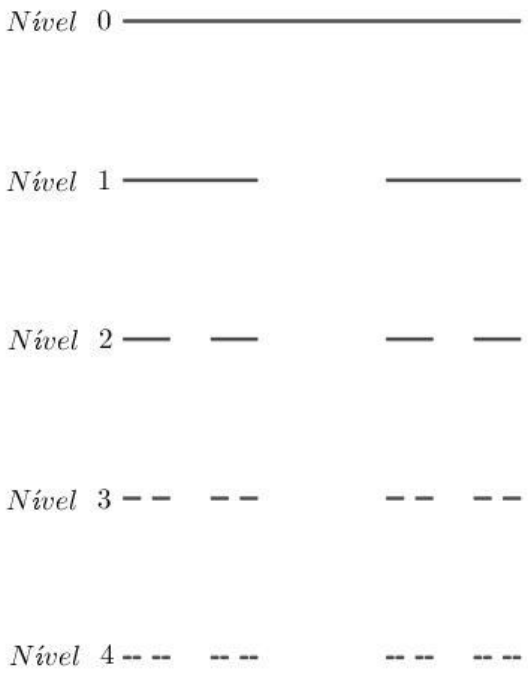
Figura 18 - Dividindo o segmento A'B' em três partes iguais



Fonte: Elaborada pelo autor (2018)

4º Passo: Finalizando a primeira iteração, basta esconder os círculos e o segmento $\overline{A'B'}$, em seguida, ligando o ponto A' ao ponto E e o ponto B' ao ponto D usando a ferramenta "Segmento". Teremos dois segmentos correspondentes a terça parte do segmento $\overline{AB}$. A repetição destes quatro passos, aplicando nos novos segmentos criados da origem ao Conjunto de Cantor. Ao final do processo basta esconder os pontos, para uma representação aplicaremos estes passos mais quatro vezes formando assim o Conjunto de Cantor com cinco níveis de iteração.

Figura 19 - Conjunto de Cantor com cinco níveis de iteração



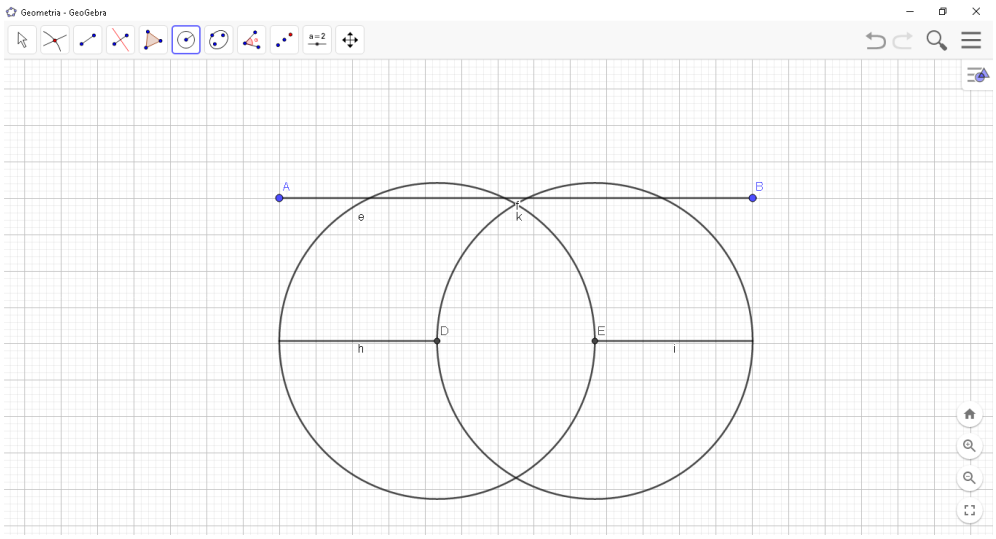
Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

3.2. Curva de Koch

A construção será feita também no software GeoGebra e usa praticamente as mesmas ferramentas da construção anterior, a sequência é semelhante até o 4º Passo, no entanto, não escondemos os pontos D e E.

5º Passo: Continuando esta construção, iremos criar dois novos segmentos formando com a o trecho removido, um triângulo equilátero. Sendo assim, definiremos dois círculos de centros respectivamente em D e E, cujo o raio é igual $\frac{1}{3}$ do segmento $\overline{A'B'}$. Aqui usaremos a ferramenta "Círculo dados o Centro e Raio", o resultado da construção será:

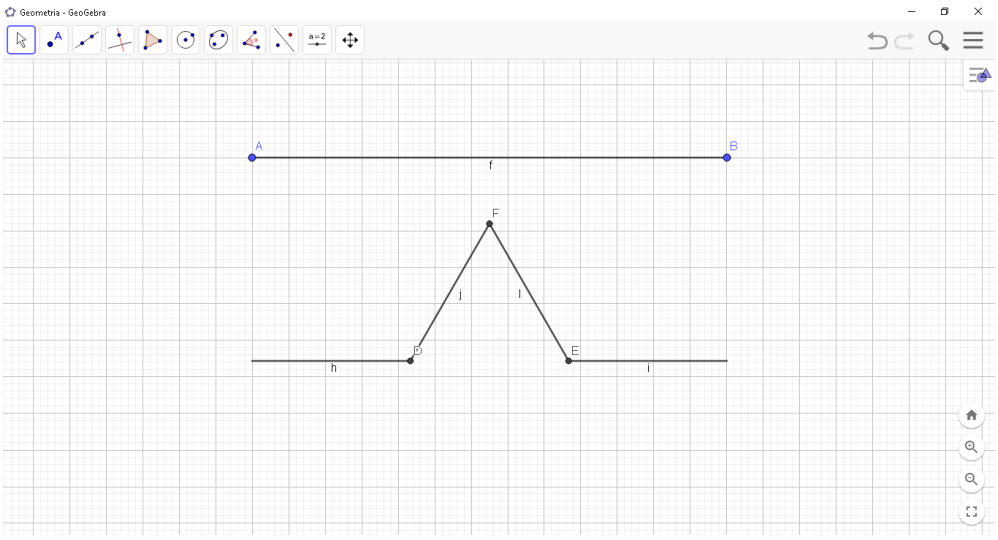
Figura 20 - Construindo dois novos segmentos



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

6º Passo: Marcamos a interseção entre os círculos e e k criando assim o ponto F e G, com a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", em seguida escondemos os dois círculos e o ponto G, por fim ligamos os pontos D ao F e F ao E, finalizando assim a construção da Curva de Koch. O resultado pode ser visto na Figura 21.

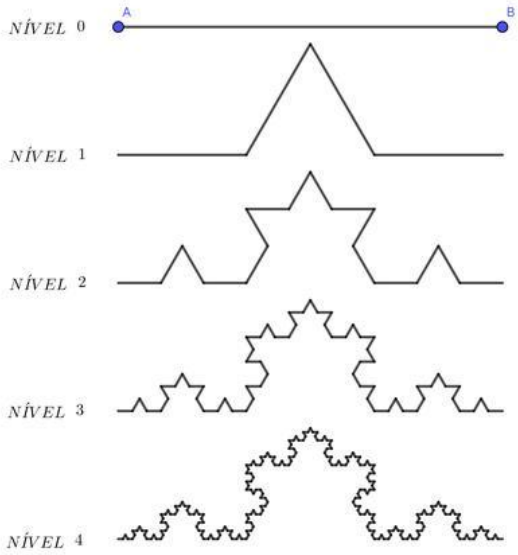
Figura 21 - Nível de iteração 1 da Curva de Koch



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Ao final do processo basta esconder os pontos, para uma representação aplicaremos estes passos mais quatro vezes formando assim a Curva de Koch com cinco níveis de iteração.

Figura 22 - Curva de Koch com cinco níveis de iteração



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

3.3. Triângulo de Sierpinski

Como já vimos anteriormente, definimos um triângulo equilátero. Para isso usaremos o passo descrito abaixo.

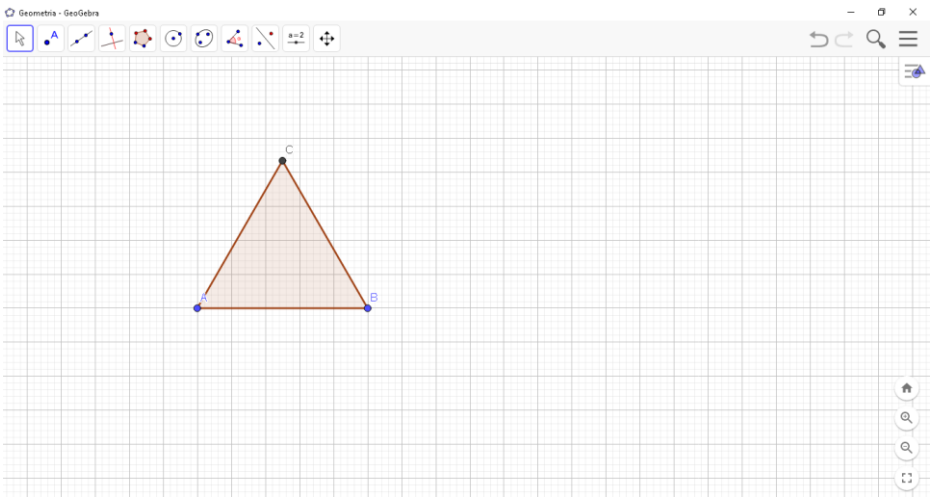
1º Passo: Iniciaremos definindo um triângulo equilátero ABC. Para isso usaremos a ferramenta "Polígono Regular", clicando em dois pontos do plano e escrevendo na caixa de diálogo o valor três, indicando a quantidade de vértices. A ferramenta é indicada pelo ícone:

Figura 23 - Ferramenta: Polígono Regular

Fonte: Interface do GeoGebra (2018)

Após este passo teremos um triângulo como na imagem a seguir.

Figura 24 - Triângulo inicial ABC



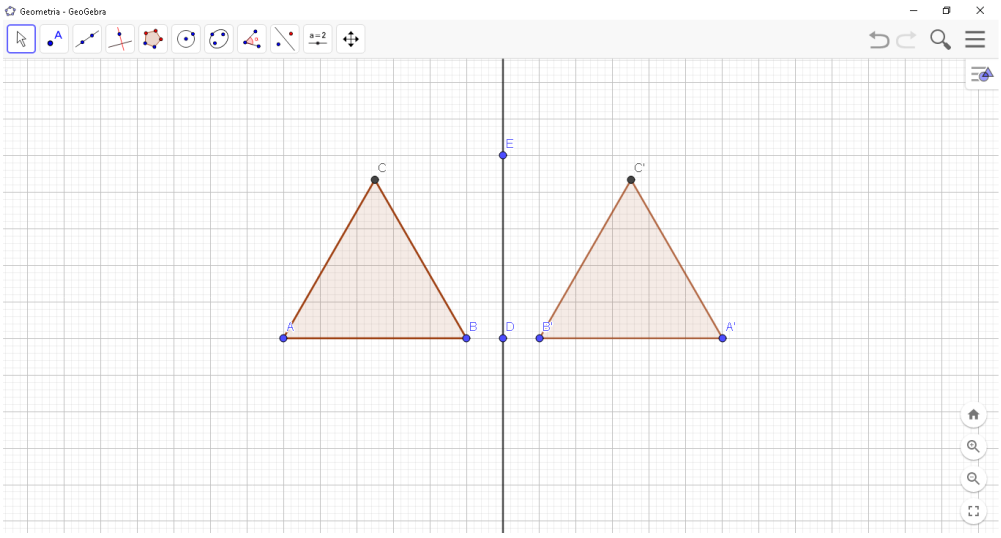
Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

2º Passo: Criaremos uma cópia do triângulo ABC. Para isso usaremos a ferramenta "Reflexão em Relação a uma Reta", clicando sobre o triângulo e seus vértices, e em seguida sobre uma reta definida ao lado do triângulo, construímos a nossa cópia. Na Figura 25 temos a ferramenta utilizado e na Figura 26 temos o resultado após este passo.

Figura 25 - Ferramenta: Reflexão em Relação a uma Reta

Fonte: Interface do GeoGebra (2018)

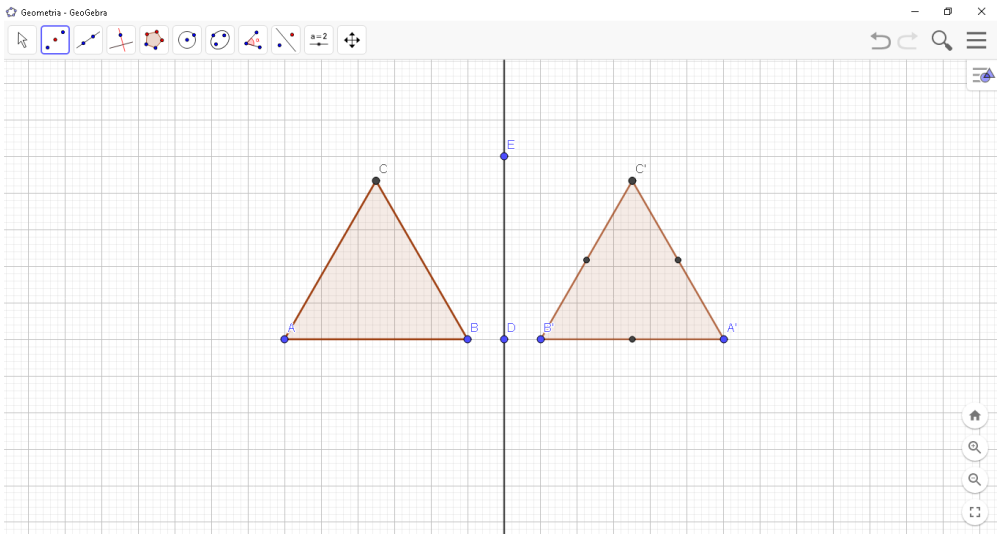
Figura 26 - Cópia do triângulo ABC



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

3º Passo: Construiremos os pontos médios dos lados do triângulo $A'B'C'$. Para realizar este passo, basta selecionar a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" e clicar sobre os pontos A' e C', C' e B', e por fim B' e A', obtendo como resultado a Figura 27, neste caso os pontos médios são nomeados como F, G e H.

Figura 27 - Pontos médios dos lados do triângulo A'B'C'



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A ferramenta utilizada tem o seguinte ícone:

Figura 28 - Ferramenta: Ponto Médio ou Centro

Fonte: Interface do GeoGebra (2018)

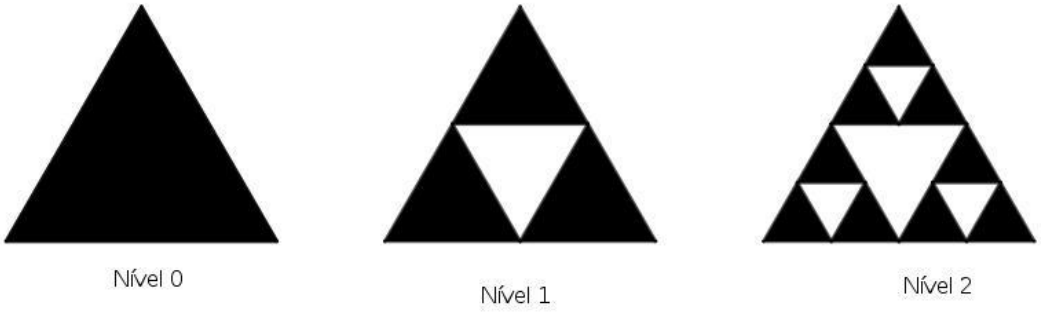
4º Passo: No último passo, escondemos o triângulo $A'B'C'$ mantendo apenas os vértices, e criaremos três novos triângulos em escala menor, mas semelhantes ao triângulo ABC. Para isso usaremos a ferramenta "Polígono", clicando em cada ponto na sequência $B' \Rightarrow F \Rightarrow H \Rightarrow B'$ formando assim o triângulo $B'FH$, repetimos a mesma lógica obtendo assim os triângulos FGC' e GHA'. A referida ferramenta é representada pelo ícone:

Figura 29 - Ferramenta: Polígono

Fonte: Interface do GeoGebra (2018)

Para finalizar o processo, basta esconder os elementos desnecessários, ou seja, a reta definida inicialmente, a cópia do triângulo e os pontos, outra dica é alterar a cor dos triângulos. O Triângulo de Sierpinski com três níveis de iteração está representado na imagem a seguir.

Figura 30 - Três níveis de iteração do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborada pelo autor (2018)

A construção de um fractal pode ser uma boa pratica investigativa em sala de aula, além de se explorar alguns conceitos geométricos básicos, podemos destacar ainda que direcionar os processos iterativos ao software desperta o interesse dos alunos quanto ao acesso à tecnologia.

O GeoGebra Classic 6.0 em particular é bem intuitivo e apresenta em sua interface maneiras de se utilizar as ferramentas, ou seja, os elementos ou o que será necessário para utilizar aquela ferramenta em questão. Sendo assim pode ser uma boa ferramenta não apenas para se construir um fractal, mas outros objetos em geral.

A opção de se obter a construção ou aplicar o processo iterativo através do GeoGebra, baseou – se na necessidade de gerar os fractais estudados, pois o processo se exercido a mão pode levar a alguns erros ou mesmo bastante tempo para ser finalizado, outro detalhe a se destacar é a investigação dos detalhes que no papel se torna inadequado de se observar.

Capítulo 4 – Aplicações e possíveis utilizações para a Geometria Fractal

Entre as muitas aplicações realizadas sobre a Geometria Fractal e os Fractais, apresentaremos três possíveis utilizações: uma maneira de utilizar os fractais como ferramenta de ensino, e duas aplicações em trabalhos acadêmicos já realizados.

4.1. Fractais como ferramenta de ensino

O forte apelo visual dos fractais, possibilita que o mesmo seja utilizado como um material concreto e ilustrativo em diversas situações em sala de aula. Uma sugestão para a utilização do Geometria Fractal em sala de aula, é a buscar relacionar as características básicas de um fractal com conceitos matemáticos. O observar padrões se torna ideal quando buscamos introduzir o conteúdo de sequências, sugerimos atividades baseadas em dobras, estimativas e distância.

Uma sugestão de investigação é discutir as ideias iniciais de sequências e progressões com dobraduras de folhas de papel e procurar o entendimento de razões, semelhança, padrões, auto – similaridade, progressão aritmética e geométrica, e de distâncias que poderiam ser alcançadas. Os materiais necessários são uma folha de papel, revista, jornal, lápis e uma calculadora para facilitar os cálculos. As discussões serão baseadas em uma lista inicial de perguntas entregue aos alunos, nesta etapa, serão possíveis o diálogo e a apresentação de outros questionamentos.

Uma segunda sugestão busca simplesmente explorar o lado lúdico e criativo dos estudantes, através de dobraduras e recortes na produção de um cartão fractal. Em termos de conteúdos matemáticos explorados, podemos citar o processo iterativo proporcionado pela construção, a compreensão de unidades e processos de medida, o uso da álgebra para os cálculos e também a investigação de padrões e auto – similaridade existentes na construção.

4.2. A dimensão fractal de formações urbanas

A busca por analisar formas irregulares, qualificam a geometria fractal a investigar situações como instabilidade de mercados financeiros, ou o mesmo crescimento urbano. Ao se tratar do crescimento urbano por exemplo, a incerteza em justificar ou realizar um planejamento urbano adequado pode ser um incomodo nas políticas públicas.

O aumento populacional é um dos fatores principais nas transformações das áreas urbanas, justificando as vezes uma formação complexa na ocupação do espaço. Observar a irregularidade na ocupação deste espaço pode ajudar a entender os fenômenos de expansão e tendências de ocupação. A dimensão fractal pode influenciar na explicação do grau de irregularidade desta expansão territorial. Um dos trabalhos, foi publicado na Revista Mackenzie de Engenharia e Computação, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 71-90, 2014, cujo a autoria é de Paulo César da Costa.

Foram analisadas manchas urbanas, ou seja, uma região que apresenta uma intensa urbanização, se destacando no local onde se encontra, as cidades de Curitiba e Maceió. Umas das conclusões foi de que a forma urbana de Curitiba revela maior densidade de ocupação da superfície que Maceió.

Este tipo de pesquisa pode ser direcionado a escalas menores, ou mesmo ambientes diferentes como a investigação da irregularidade em rios, montanhas e galhos de árvores. Também pode servir para explicar situações da bolsa de valores ou dos mercados imobiliários, por se tratar de áreas com possíveis padrões irregulares.

Vale ressaltar ainda que muitas destas pesquisas são associadas com outras áreas do conhecimento então fazem – se necessários conhecimentos prévios sobre cada uma delas.

4.3. Análise da fractalidade de um determinado conjunto

O experimento de Gomes (1987) consiste em utilizar o modelo de Campo Médio, para calcular a dimensão fractal de objetos semelhantes a “bolas” obtidas ao se amassar um pedaço de papel, assim como Amaku (2001) realizou como forma de acrescentar resultados e exemplificar a sugestão dada por Gomes (1987), no caso de um conjunto formado por esferas de pão amassado.

Neste trabalho realizado por Amaku (2001), é ressaltado uma incerteza na ordem de 3% sobre a fractalidade do objeto pão amassado. Vale ressaltar ainda que é deixado claro na introdução da publicação que nem todos objetos não-homogêneos ou porosos se tornam candidatos a fractais. O experimento consistiu em medir as massas e os diâmetros de bolas amassadas obtidas a partir de cubos de pão branco, de forma e italiano, e um tipo de pão preto multigrão alemão, bem denso.

Com os dados recolhidos foi utilizado, a equação estabelecida inicialmente por Hausdorff para o cálculo da dimensão de objetos, vale ressaltar que foi feita algumas ponderações sobre cada elemento que seria utilizado para realizar a utilização da referida equação considerando os dados analisados (massa e diâmetro médio). A equação foi apresentada da seguinte forma:

$$M = K\phi^D, \text{ escrita para o diâmetro, } \phi = 2r \text{ com } K = \frac{K}{2^D}$$

O que foi proposto no experimento era de se verificar a possibilidade de definir uma relação entre as grandezas que apresente valores constantes para k e D, se ainda, D resultar em um número não-natural, está-se caracterizando esta coleção de objetos como fractais. A análise gráfica da equação acima foi feita a partir de uma linearização utilizando como os próprios autores definem uma ”logaritmização”, segundo eles, esta é a maneira mais direta de se obter a informação desejada, pois resulta em uma reta de coeficiente angular D, no caso da hipótese feita se demonstrar verdadeira. Com a linearização acima e as devidas manipulações obteve-se a seguinte expressão:

$$\log M = \log k + D \cdot \log r$$

Outra maneira para representar esta situação, e que os autores se utilizam para obter a dimensão fractal, está representada a seguir:

$$\log \phi = \frac{1}{D} \cdot \log \frac{1}{K} + \frac{1}{D} \cdot \log M$$

Sendo $y = ax + b$, temos ainda que:

$$y = \log \phi, x = \log M, a = \frac{1}{D} \text{ e } b = \frac{1}{D} \cdot \log \frac{1}{K}$$

Temos que a dimensão fractal será dada por $D = \frac{1}{a}$, ao qual a é o coeficiente angular da função linearizada para o diâmetro das esferas de pão amassado em função da massa.

Esta investigação em laboratório pode ser feita para outros materiais, e também com intuitos e objetivos diferentes, como por exemplo estudar as forças presente no processo de amassamento, ou mesmo se existe realmente a fractalidade em objetos naturais considerados pela literatura como um fractal.

Capítulo 5 – Investigando a fractalidade do pão amassado

Segundo Feder (1998) não é o fato de um objeto ser não-homogêneo ou poroso que o torna candidato a fractal, a não-homogeneidade deve seguir uma lei de formação, tal que ela se modifique conforme o tamanho do objeto. Nosso experimento segue a linha de raciocínio do trabalho realizado por Gomes (1987), em que o mesmo analisou um conjunto de esferas de papel amassado, com intuito de se observar a existência de propriedades fractais neste conjunto.

Os dados que foram tomados como base na observação são os diâmetros de cada esfera e as respectivas massas de cada amostra. Para o diâmetro foram feitas três medições em posições diferentes com o intuito de obter uma média que represente o valor mais próximo para o diâmetro, aqui foi usado para estas medições uma régua simples de uso escolar, para as pesagens foi utilizada uma balança analítica digital de precisão mínima de 0,01 gramas. Com o intuito de manter um padrão, optamos por escolher as amostras de pão de forma, de uma mesma marca, no entanto de tipos diferentes, os tipos escolhidos foram:

- Tipo 01: Pão de forma tradicional sem casca;
- Tipo 02: Pão de forma integral de soja;
- Tipo 03: Pão de forma integral de iogurte e granola;

Para o início da análise entendemos primeiramente a composição de cada tipo de pão, com isso podemos verificar que o pão de forma tradicional sem casca é mais macio e tem uma facilidade maior para ser amassado, já o pão integral de iogurte e granola tem uma dificuldade maior de ser amassado, fato este ligado à sua composição. Com a ressalva de que os tipos 02 e 03 precisaram ser retiradas as cascas.

Antes de formarmos as esferas foi preciso escolher como seria feita a redução nas fatias, então optamos em reduzir pela metade os comprimentos de cada fatia, desprezando para os resultados a espessura das mesmas, foram obtidas para cada amostra as seguintes medidas.

Tabela 4 - Tipo 01: Resultados obtidos antes de amassar

Comprimento	Largura	Massa antes
9,2 cm	9,0 cm	20,3 gramas
4,6 cm	9,3 cm	9,85 gramas
4,5 cm	4,6 cm	5,08 gramas
4,3 cm	2,1 cm	2,63 gramas
2,4 cm	2,6 cm	0,96 gramas

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Tabela 5 - Tipo 02: Resultados obtidos antes de amassar

Comprimento	Largura	Massa antes
9,5 cm	8,6 cm	22,09 gramas
4,8 cm	9,2 cm	10,05 gramas
4,7 cm	4,1 cm	5,54 gramas
4,8 cm	2,1 cm	2,43 gramas
2,1 cm	2,0 cm	1,14 gramas

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Tabela 6 - Tipo 03: Resultado obtido antes de amassar

Comprimento	Largura	Massa antes
9,0 cm	9,7 cm	24,65 gramas
4,7 cm	9,1 cm	12,16 gramas
4,9 cm	4,3 cm	7,32 gramas
5,0 cm	2,2 cm	2,92 gramas
2,4 cm	2,0 cm	0,94 gramas

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

As medidas obtidas para comprimento e largura, de cada amostra foi realizada com intuito ilustrativo, mas se percebe que foi reduzido de certo ponto seguindo um padrão respaldado anteriormente, as imagens que serão mostradas a seguir representam cada amostra antes de realizar o processo de se amassar o pão.

Figura 31 - Tipo 01: Pão sem amassar

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Figura 32 - Tipo 02: Pão sem amassar

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Figura 33 - Tipo 03: Pão sem amassar

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A cada redução feita era realizado as medições necessárias para obter dados representativos de cada amostra, em seguida foram feitas o processo de amassar cada fatia de

pão, mas antes de realizar as medições com a régua e a balança para adquirir as medidas do diâmetro e da massa das esferas, as mesmas foram deixadas em repouso por dez minutos para que as forças aplicadas se dissipassem. As imagens referentes a cada amostra de pão amassado podem ser vistas a seguir.

Figura 34 - Tipo 01: Pão amassado

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Figura 35 - Tipo 02: Pão amassado

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Figura 36 - Tipo 03: Pão amassado

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

No momento que amassamos manualmente a fatia de pão aplicamos uma força, gerando assim uma estrutura semelhante à de uma esfera. No entanto, ao soltarmos a mesma, podemos considerar duas forças atuantes uma força que mantém a estrutura no formato esférico, ou seja, comprimindo o pão, e outra que impede da estrutura se manter no formato mencionado, de certa forma podemos dizer que estas duas forças se mantêm em equilíbrio. Ressaltamos aqui que os ingredientes são fatores relevantes na dimensão destes objetos, pois geram forças de compressão diferente.

Na fabricação do pão, os ingredientes são misturados, ao ponto que os mesmos fiquem dispostos de forma aleatória, ao se amassar manualmente podemos explicar o que acontece com as forças, através de uma analogia simples.

Observamos por exemplo, a seguinte situação ao qual preenchemos uma mala com roupas de forma aleatória, e em um determinado momento por mais força que seja feita não será possível fechar a mala. A ideia apresentada pode ser estendida ao processo aplicado para gerar as esferas de pão amassado.

Os resultados que queremos utilizar para encontrar uma linearização que melhor represente os valores estudados, são representados pelas seguintes situações:

$\log M$, ao qual M é a massa de cada esfera

$\log \phi$, ao qual ϕ é o diâmetro médio de cada esfera

Com isso buscaremos uma função linear para a relação, ou seja, um gráfico linearizado para o diâmetro das esferas de pão amassado em função da massa, em escala logarítmica, para os três tipos de pães analisados. Os dados da pesagem estão apresentados a seguir, onde temos:

Tabela 7 - Tipo 01: Pão de Forma Tradicional/ Sem Casca

Nº	**M**	ϕ	**log** ϕ	**log** M
01	20.07	3,23	0,509650479546582	1,30254737248749
02	9,75	2,8	0,447158031342219	0,989004615698537
03	5,01	2,3	0,361727836017593	0,699837725867246
04	2,56	1,87	0,271066772286538	0,40823996531185
05	0,95	1,1	0,041392685158225	-0,022276394711152

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Tabela 8 - Tipo 02: Pão de Forma Integral/ Soja

Nº	**M**	ϕ	**log** ϕ	**log** M
01	21,95	4,1	0,612783856719735	1,34143452457814
02	9,96	3,37	0,52720011906298	0,998259338423699
03	5,5	2,57	0,409369470452819	0,740362689494244
04	2,41	1,87	0,271066772286538	0,382017042574868
05	1,14	1,3	0,113943352306837	0,056904851336473

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Tabela 9 - Tipo 03: Pão de Forma Integral/ Iogurte e Granola

Nº	**M**	ϕ	**log** ϕ	**log** M
01	24,46	3,97	0,598425706672868	1,38845645270027
02	12,07	3,17	0,500602350569185	1,08170727009735
03	7,24	2,4	0,380211241711606	0,859738566197147

04	2,92	1,73	0,238882088915137	0,859738566197147
05	0,9	1,3	0,113943352306837	-0,045757490560675

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Para a linearização foi utilizado o software GeoGebra, que se utiliza de ferramentas estatísticas para alcançar o resultado esperado. Uma observação a ser feita é que como nosso intuito é de analisar a existência da fractalidade neste conjunto, não apresentaremos o desenvolvimento até obter uma função linear, neste caso utilizamos uma ferramenta computacional.

No entanto, precisaremos entender o que é uma linearização, na literatura podemos encontrar o termo descrito como sendo uma regressão linear, em termos simples, é uma forma de se descrever um fenômeno por meio de uma reta. Segundo Ferreira (2017, p.28) regressão linear, “Se trata de um procedimento aplicado à uma função real, que possui representação gráfica diferente de uma reta, afim de torná-la uma reta”.

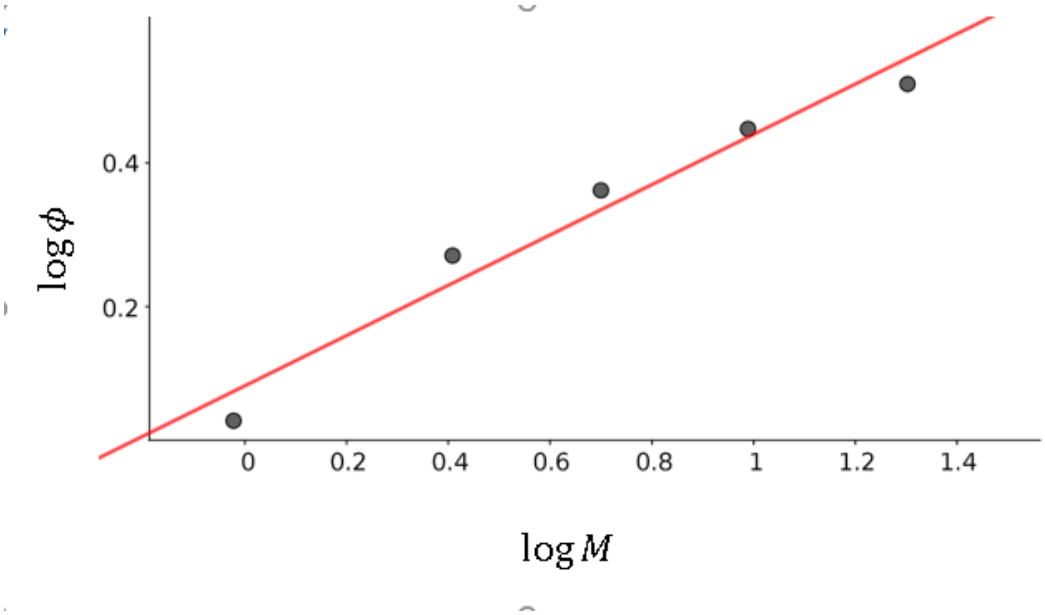
Em nosso experimento coletamos os valores da massa e do diâmetro médio, em seguida realizamos uma transformação destes valores através de uma função logarítmica. Barroso (1987), indica que podemos obter uma função linear substituindo uma ou mais variáveis por funções destas variáveis, em nosso caso é considerada uma transformação do tipo:

$$M = K\phi^{D} \implies \log M = \log k + D \cdot \log r$$

Aplicamos os valores ao software GeoGebra Classic 6.0, e usamos a ferramenta estatística “Análise Bivariada”, ao qual estabelecemos uma função aproximada que melhor representasse o experimento, dentro das opções é possível escolher o tipo de modelo de regressão, que em nosso caso é o “Linear”. Consideramos aqui resultados do experimento de Amaku (2001).

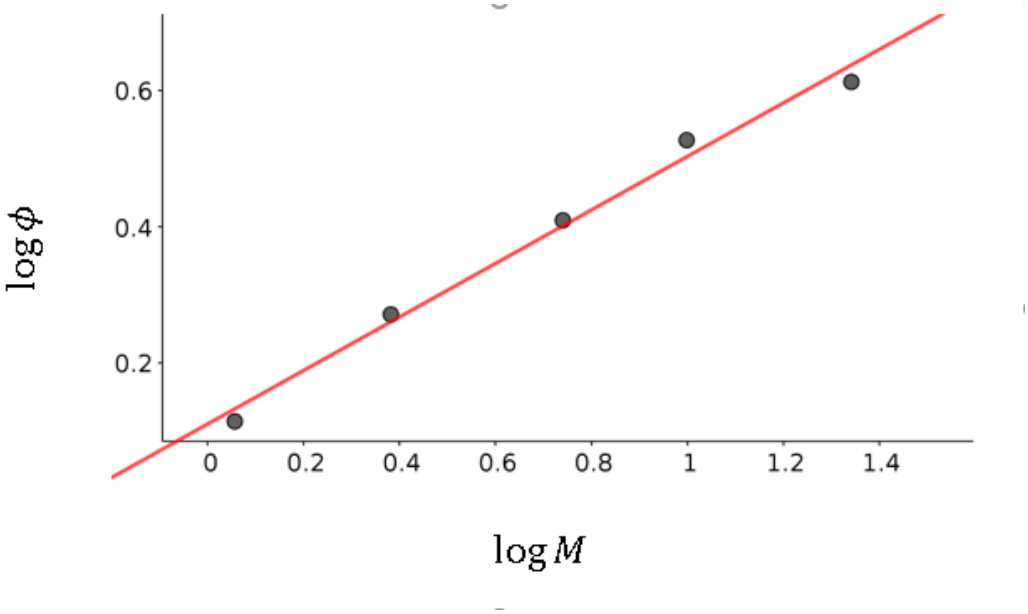
Os gráficos que representam a linearização dos resultados podem ser vistos a seguir:

Figura 37 - Tipo 01: Gráfico



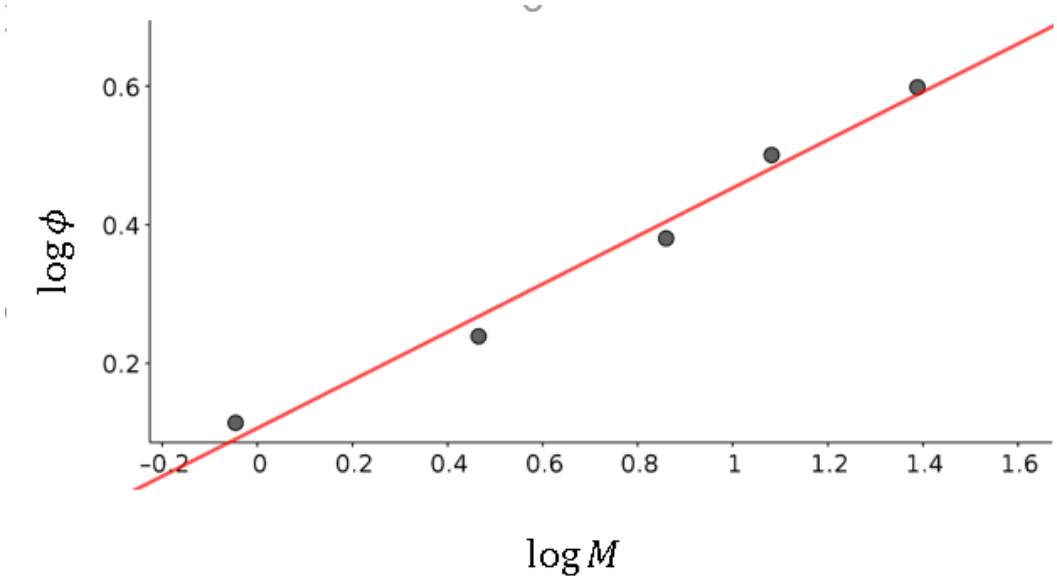
Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Figura 38 - Tipo 02: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Figura 39 - Tipo 03: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Percebemos que de certo modo os gráficos e os resultados são bem próximos, isso ocorre por se tratar de estruturas com semelhança estatística, ou seja, não são totalmente parecidas, mas coeficientes angulares aproximadamente iguais. Para cada tipo de pão encontramos as seguintes funções lineares:

- Tipo 01: $y = 0{,}35x + 0{,}09$
- Tipo 02: $y = 0{,}39x + 0{,}11$
- Tipo 03: $y = 0{,}35x + 0{,}11$

Temos os seguintes coeficientes angulares para cada tipo de pão:

- Tipo 01: $a = 0{,}35$
- Tipo 02: $a = 0{,}39$
- Tipo 03: $a = 0{,}35$

Usando a relação $D = \frac{1}{a}$, iremos obter os seguintes valores para as dimensões fractais:

- Tipo 01: $D_1 = \frac{1}{0{,}35} = 2{,}8571428571$

- Tipo 02: $D_2 = \frac{1}{0,39} = 2,5641025641$

- Tipo 03: $D_3 = \frac{1}{0,35} = 2,8571428571$

Vale ressaltar aqui que as dimensões dos pães de tipo 01 e 03 são mais próximos da dimensão euclidiana de uma esfera, cujo valor é 3. O valor encontrado pode ser mais preciso, considerando equipamentos de alta precisão, como balanças com leitura mínima de 0,0001 gramas e uma régua milimétrica.

Usando os resultados D_1, D_2 e D_3, podemos calcular o volume de cada amostra utilizada, ou seja, tomando como base a expressão definida por Gomes (1987), dada por $V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^D$. Teremos os seguintes resultados para as esferas de pão do Tipo 01, 02 e 03.

Tabela 10 - Volume das amostras de pão do Tipo 01

Nº da amostra	**Raio**	**Volume**
1	1,61666666666667	16,5252156138693
2	1,4	10,9546191313197
3	1,15	6,24469181736178
4	0,933333333333333	3,43937396649059
5	0,55	0,75904534662785

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Tabela 11 - Volume das amostras de pão do Tipo 02

Nº da amostra	**Raio**	**Volume**
1	2,05	26,3910994835458
2	1,68333333333333	15,9225273166604
3	1,28333333333334	7,94112686811835
4	0,933333333333335	3,50961785951131

5	0,65	1,38796740527407

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Tabela 12 - Volume das amostras de pão do tipo 03

Nº da amostra	**Raio**	**Volume**
1	1,98333333333333	29,6340248518916
2	1,58333333333334	15,5702411027734
3	1,2	7,05213700379686
4	0,866666666666665	2,78306379404408
5	0,65	1,22336300345347

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Os resultados obtidos nas tabelas 10, 11 e 12, mostram a influência da dimensão fractal, ligada ao volume ocupado pelo pão amassado, observando agora os valores das dimensões D_1 e D_2, podemos ressalta que a irregularidade é menor pois o espaço ocupado é mais próximo da dimensão 3 do que no Tipo 02.

As esferas de pão amassado, não são totalmente semelhantes, mas possuem uma forma de auto-semelhança estatística, classificada assim por possuir aspectos idênticos até uma determinada circunstância.

Conclusão

O estudo envolvendo os fractais apresenta diversas vertentes, entre eles a possibilidade de explorar o aspecto visual destes objetos, ou mesmo uma análise mais profunda de sua teoria. As observações realizadas em laboratórios produzem uma análise de diferentes objetos, seja esferas de papel ou pão.

Seguindo este caminho, o mesmo experimento pode ser estendido para outros materiais, como fios de arame, fatias de queijo, nata de leite, entre outras. Ressaltamos que nem todos os objetos que tem dimensão representada por um número não inteiro, pode ser dito fractal, neste caso precisamos garantir a existência das características. No entanto, a divergência na definição e as diferentes formas de se classificar ou conceituar uma estrutura como sendo um fractal, possibilita-se organizar uma maneira de entender o que são tais objetos.

A definição usual formulada por Mandelbrot, se adequa por exemplo a fractais matemáticos, que possuem de forma clara as suas características, neste sentido comprovamos o argumento de que objetos naturais precisam ser observados com mais cuidado.

Nosso estudo, não se restringiu apenas no experimento, durante as pesquisas foi possível usar métodos simples para construir os fractais mediante a utilização de simulações em computador, além do mais, observamos a existência de aplicabilidades da teoria em diversas áreas do conhecimento. Seguindo a linha teórica da Geometria Fractal, podemos colocar – lá como modelo mais próximo do ideal para explicar os fenômenos que ocorrem com frequência em nosso cotidiano, uma vez que muitos são considerados difíceis de se padronizar.

Outra posição interessante para sustentar a Geometria Fractal como modelo principal para entender tudo o que nos cerca, é a possibilidade de se observar que todos os fractais criados ou estudos neste trabalho não surgiram do zero, eles foram transformados, e essa ideia já era defendida por volta de 1760 por Mikhail Lomonosov (1711 - 1765) e sustentada por Antoine Lavoisier (1743 – 1794).

Exemplos como raios ou a forma como os rios estão sendo constituídos com suas nascentes, apresentam o grau de incerteza, ao qual a dimensão fractal pode explicar o tão irregular é estas estruturas, ultrapassando as definições usuais da Geometria Euclidiana.

De fato, a existência da dimensão fractal pode ser observada no conjunto de pão amassado analisado durante o experimento, outros fatores importantes também podem ser vistos, como a similaridade existente entre as amostras, ressaltando que tratamos de uma similaridade estatística, ou seja, são semelhantes de forma aproximada. As formas simples como as esferas de pão são obtidas também fazem parte de uma característica dos fractais.

Esta estrutura com formato aparentemente esférico, obtida ao se amassar manualmente uma fatia de pão possui realmente uma dimensão fractal, no entanto, é preciso ressalta que existem um certo grau de incerteza pelo fato da imprecisão das ferramentas utilizadas, além do mais este experimento serve como forma de complementar as ideias apresentadas por Gomes (1987).

Dentre as diversas formas de se utilizar as teorias da Geometria Fractal, minha visão como professor, me possibilita a reconhecer os fractais como ferramenta ideal para o ensino de sequências e séries, pois a falta de interesse de alguns alunos é consequências de aulas as vezes chatas e com paradigmas que precisam ser superados.

Por fim, vejo meu trabalho como algo que pode servir como gatilho para novos estudos dentro do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, uma vez que se percebe o desconhecimento de muitos colegas sobre a temática.

Referências

AMAKU, Marcos; MORALLES, Maurício; HORODYNSKI-MATSUSHIGUE, Ighia Brigitta. Fractais no Laboratório Didático. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 23, n. 4, p. 422-428, dez. 2001.

BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrindo a Geometria Fractal - para a sala de aula. 3. ed. [S.l.]: Autêntica, 2005. 160 p.

BARROSO, L. C. et al. Cálculo Numérico (com aplicações). São Paulo: Harbra, 2. ed., p. 384, 1987.

COSTA, Paulo Cesar. METODOLOGIA APLICADA AO CÁLCULO DA DIMENSÃO FRACTAL DE FORMAÇÕES URBANAS UTILIZANDO O ÍNDICE DE DESENVOLVIMENTO HUMANO MUNICIPAL (IDHM) COMO CRITÉRIO DE SELEÇÃO. Revista Mackenzie de Engenharia e Computação, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 71-90, maio. 2014.

FALCONER, Kenneth John. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. 3. ed. [S.l.]: Wiley, 2014. 385 p.

FEDER, J. *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.

FERREIRA, Wellington Vieira. Regressão Linear Simples aplicado na Física Experimental do Ensino Médio. 2017. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2017.

FLORY, P. J. Principles of polymer chemistry. [S.l.]: Cornell University Press, 1953.

GOMES, Marcelo Andrade de Filgueiras. Fractal Dimension of Paper Ball. American Journal of Physics, [S.l.], v. 55, n. 7, p. 649-650, jul. 1987.

JANOS, Michel. Geometria Fractal. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008. 100 p.

MANDELBROT, Benoît B. The Fractal Geometry of Nature. 1. ed. [S.l.]: W. H. Freeman And Company, 1982. 480 p.

SERRA, Celso Penteado; KARAS, Elizabeth Wegner. Fractais gerados por Sistemas Dinâmicos Complexos. Curitiba: Editora Universitária Champagnat, 1997. 190 p.