UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WILSON SOUZA COSTA JÚNIOR

# UMA ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO NÍVEL SUPERIOR PERANTE QUESTÕES QUE ENVOLVEM O TEOREMA DE PITÁGORAS

VITÓRIA DA CONQUISTA

2016

WILSON SOUZA COSTA JÚNIOR

# UMA ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO NÍVEL SUPERIOR PERANTE QUESTÕES QUE ENVOLVEM O TEOREMA DE PITÁGORAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob orientação da Professora Ma. Ana Paula Perovano dos Santos Silva.

VITÓRIA DA CONQUISTA

2016

**TERMO DE APROVAÇÃO**

WILSON SOUZA COSA JÚNIOR

**UMA ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO NÍVEL SUPERIOR PERANTE QUESTÕES QUE ENVOLVEM O TEOREMA DE PITÁGORAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Colegiado do Curso de Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

_____

Ana Paula Perovano dos Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

_____

Antônio Augusto de Oliveira Lima
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

_____

Taise Sousa Santana
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Vitória da Conquista, 23 de Agosto de 2017

Agradecimentos

*A Deus, que ainda não o compreendo, que uma vez descri, mas acredito que de alguma forma fez possível a realização deste trabalho.*

*À minha mãe pelo amor, por ser exemplo e sempre fazer o possível para que eu tivesse a oportunidade de estudar.*

*À minha avó Regina pelo cuidado, carinho, incentivo e por sempre fazer barulho quando precisei de silencio para escrever.*

*Ao meu pai e familiares pelo apoio, incentivo e união a minha avó na produção de barulho.*

*Aos amigos Alessandra, Amanda, Bianca, Fernanda, Gandarela, Ícaro e João por sempre estarem ao meu lado durante esse caminho árduo que é a graduação, por compartilhar comigo pensamentos e experiências, pelo carinho, aceitação e companheirismo. Amo vocês.*

*À Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e todos que dela fazem parte, por fazer possível o sonho de ser professor.*

*Aos professores Antônio Augusto e Taise Santana pelas leituras e contribuições feitas a este trabalho.*

*À turma de 2016.1 do curso de Licenciatura em Matemática por aceitarem fazer parte dessa pesquisa.*

*À todos que contribuíram de alguma forma com esse trabalho e àqueles que foram pacientes comigo durante esse processo.*

*E por fim, o meu eterno agradecimento à professora Ana Paula, que acreditou em mim mais do que eu mesmo durante este trabalho. Gostaria de ter um capítulo especial de agradecimento a melhor orientadora que eu poderia ter, mas palavras não seriam suficientes para demonstrar o quão grato sou pela sua orientação, paciência, carinho e conselhos. Você é um exemplo de profissional que eu quero ter para mim. Do fundo do meu coração eu lhe digo: muito obrigado!*

*"Got a way to go, but it's worth the wait*
*No, you haven't seen the best of me*
*I'm still working on my masterpiece"*

*Masterpiece – Jessie J*

**RESUMO**

Este trabalho tem por objetivo analisar as estratégias de alunos recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática, quando estes se deparam perante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras em sua resolução. Pereira, Couto e Costa (2016) defendem esse tipo de trabalho pela possibilidade de analisar as dificuldades que os alunos encontram em determinado conteúdo. O estudo apresenta uma abordagem qualitativa de caráter descritivo, realizado com 32 participantes que acabavam de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática. O instrumento para a realização da coleta de dados foi um questionário composto por 10 questões que envolvessem o teorema estudado nesse trabalho. Por meio da análise de dados identificamos como média geral 24% de respostas corretas, que consideramos um valor pouco satisfatório. Dividimos as respostas incorretas em duas categorias: apresenta indício do Teorema de Pitágoras e não apresenta indício do Teorema de Pitágoras. Os dados coletados foram agrupados de acordo com suas características de forma a facilitar nossa análise. Assim, foi identificado que apesar da alta incidência de respostas erradas, 46% do total de respostas analisadas possuíam indícios de conhecimento do teorema. Nas respostas incorretas a estratégia mais frequente foi a *erro na resolução*, na qual em seus registros o aluno apresenta erro nas operações básicas, no cálculo de potência, raízes e na solução de equações do 2º grau. Além disso, foi possível identificar que os alunos apresentam melhor desempenho em questões não contextualizadas. Essa análise nos mostra que alunos que ingressam no Ensino Superior ainda apresentam dificuldades que deveriam ter sido sanadas na Educação Básica. Portanto, acreditamos ser necessária a criação de métodos de intervenção capazes de solucionar as dificuldades que acompanham esses alunos.

**Palavras-chave:** Teorema de Pitágoras; Estratégias de resolução; Geometria; Ensino Superior.

**ABSTRACT**

The purpose of this paper is to analyze the strategies of students recently enrolled in the degree course in Mathematics, when they are faced with questions that involve the Teorema de Pitágoras in its resolution. Pereira, Couto and Costa (2016) defend this type of work by the possibility of analyzing the difficulties that the students find in certain content. The study presents a qualitative approach of descriptive character, carried out with 32 participants who had just entered the course of Degree in Mathematics. The instrument for the collection of data was a questionnaire composed of 10 questions that involved the theorem studied in this work. Through the analysis of data, we identified as the general average 24% of correct answers, which we considered an unsatisfactory value. We divide the incorrect answers into two categories: it presents clue to the Teorema de Pitágoras and does not present a clue to the Teorema de Pitágoras. The data collected were grouped according to their characteristics in order to facilitate our analysis. Thus, it was identified that in spite of the high incidence of wrong answers, 46% of the total answers analyzed had evidence of knowledge of the theorem. In the incorrect answers the most frequent strategy was the error in the resolution, in which in its records the student presents an error in the basic operations, in the calculation of power, roots and in the solution of equations of the second degree. In addition, it was possible to identify that students perform better on non-contextualized issues. This analysis shows that students entering Higher Education still present difficulties that should have been solved in Basic Education. Therefore, we believe that it is necessary to create intervention methods capable of solving the difficulties that accompany these students.

**Keywords:** Teorema de Pitágoras; Resolution strategies; Geometry; Higher education.

**SUMÁRIO**

1 INTRODUÇÃO ..... 9
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA ..... 12
2.1 O TEOREMA DE PITÁGORAS ..... 12
2.2 O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS ..... 18
2.3 PESQUISAS QUE RETRATAM ESTRATÉGIAS DE ALUNOS EM QUESTÕES QUE ENVOLVEM O TEOREMA DE PITÁGORAS ..... 20
3 METODOLOGIA ..... 28
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS ..... 31
4.1 QUESTÃO 1 ..... 34
4.2 QUESTÃO 2 ..... 38
4.3 QUESTÃO 3 ..... 43
4.4 QUESTÃO 4 ..... 46
4.5 QUESTÃO 5 ..... 48
4.6 QUESTÃO 6 ..... 52
4.7 QUESTÃO 7 ..... 54
4.8 QUESTÃO 8 ..... 57
4.9 QUESTÃO 9 ..... 58
4.10 QUESTÃO 10 ..... 62
4.11 DISCUSSÃO GERAL ..... 65
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS ..... 67
REFERÊNCIAS ..... 70
ANEXO 1 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO ... 72
ANEXO 2 – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS ..... 74

# 1 INTRODUÇÃO

A partir do IV semestre na graduação comecei a pensar em possíveis temas que eu gostaria de pesquisar no Trabalho de Conclusão de Curso, porém não conseguia determinar algo que realmente despertava meu interesse. Quando chegou o momento de realizar o trabalho eu passei por uma situação em sala de aula que me fez questionar se a utilização de demonstrações na Educação Básica favorece a aprendizagem da Matemática. Naquele momento essa curiosidade se tornou o tema que eu gostaria de estudar. Reportei isso a minha orientadora e a mesma se fez animada para trabalhar o tema, já tendo em mente que trabalharíamos com demonstrações do Teorema de Pitágoras devido à quantidade de demonstrações que este possui, e logo me sugeriu algumas leituras sobre demonstrações. Li. Desisti do tema. Apesar da minha curiosidade, isso não causou motivação suficiente para seguir adiante.

Continuei sem saber o que gostaria de pesquisar até que a minha orientadora me apresenta um de seus trabalhos, que ainda se encontrava no prelo, em parceria com o professor Júlio Reis, que também faz parte do corpo docente dessa instituição. O referido trabalho tratava-se de um estudo sobre estratégias que alunos (do curso ao qual eu faço parte) utilizavam para solucionar problemas que envolvessem o Teorema de Pitágoras.

Os sujeitos dessa pesquisa eram alunos matriculados na disciplina Geometria Euclidiana que é ofertada no III semestre, logo, todos os participantes dessa pesquisa estavam no mínimo no III semestre. Isso implica que todos esses alunos além de supostamente terem estudado o Teorema de Pitágoras na Educação Básica, também já haviam tido contato com esse conteúdo em uma das disciplinas do 1º semestre em que o teorema faz parte da sua ementa.

A leitura desse texto despertou a curiosidade para investigar o desempenho e as estratégias que os alunos do refrente curso utilizavam em questões envolvendo o Teorema de Pitágoras, antes de esses estudarem o teorema na universidade, pois assim eu poderia detectar possíveis dificuldades que estes alunos trazem da educação básica em relação ao teorema. Assim surgiu o tema para realização desse trabalho.

Acreditamos ser importante analisar os conhecimentos dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática a fim de buscar identificar supostas dificuldades e assim pensar em meios de intervenções com o intuito de suprir as necessidades destes estudantes.

Além disso, existe a preocupação com conceitos apreendidos por esses alunos, pois, por se tratarem de futuros professores, é extremamente importante identificar equívocos e assim buscar métodos de intervenção que evite que esses sujeitos levem conceitos errados para a sala de aula.

Desta forma, com o intuito de avaliar possíveis dificuldades que alguns alunos apresentam em relação ao conteúdo Teorema de Pitágoras e objetivando uma melhor percepção sobre os conceitos adquiridos por esses para que se possa pensar em intervenções, traçamos nossos objetivos que apresentaremos a seguir.

**Objetivo geral**

Analisar as estratégias de alunos recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática, quando estes se encontram diante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras em sua resolução.

**Objetivos específicos**

Investigar as estratégias utilizadas pelos alunos em questões que envolvem o Teorema de Pitágoras.

Classificar as estratégias apresentadas pelos sujeitos.

Indicar as estratégias mais frequentes utilizadas por esses alunos.

Identificar dentre as respostas incorretas, quais apresentam indícios de conhecimento do Teorema de Pitágoras.

**Descrição**

O capítulo Fundamentação Teórica é repartido em três seções: O Teorema de Pitágoras, O ensino do Teorema de Pitágoras e Pesquisas que retratam estratégias de alunos em questões que envolvem o Teorema de Pitágoras.

No primeiro, fazemos um breve recorte da história do teorema e apresentamos algumas demonstrações para o teorema, utilizamos como referência para construção desse capítulo trabalhos de Berlingoff e Gouvêa (2008), Boyer (1974), Euclides (2009), Eves (2011), Imenes (1988) e Lima (1991).

Na segunda seção falamos sobre o ensino do Teorema de acordo com as recomendações dos documentos oficias: Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2016), Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – OCNEM (2006) e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (1998).

A terceira seção apresenta alguns dos trabalhos que tratam respostas de alunos em questões que envolvem o Teorema de Pitágoras, com o intuito de identificar as regiões onde os trabalhos foram realizados, o período, os níveis de ensino dos sujeitos investigados e as estratégias encontradas pelos pesquisadores. Para isso, utilizamos como referências Bastian (2000), Ferreira (2016), Pereira, Couto e Costa (2016), Reis e Perovano (2016) e Rodrigues e Menezes (2010).

No capítulo Metodologia descrevemos o tipo de pesquisa, os sujeitos, o instrumento de coleta de dados e os procedimentos realizados.

O capítulo Análise e Discussão dos dados apresenta um panorama geral do desempenho dos alunos no questionário, um esquema com as estratégias identificadas na pesquisa e em seguida a análise de cada questão do questionário, apresentando alguns extratos de estratégias que representam as respostas mais representativas em determinada questão.

Nas Considerações Finais expomos nossas conclusões obtidas pela análise dos dados coletados.

# 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentaremos aqui um breve resumo da história do Teorema de Pitágoras e algumas demonstrações. Discorreremos também sobre o ensino deste teorema na Educação Básica de acordo com os documentos oficias que regem a educação brasileira e por fim, apresentaremos uma síntese de alguns trabalhos que retratam o desempenho de alunos em questões que envolvem o Teorema de Pitágoras.

## 2.1 O TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras foi enunciado no Livro I dos elementos de Euclides como: “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto” (2009, p. 132). Esse teorema trata-se de uma relação entre os lados de um triângulo retângulo qualquer e tem a sua recíproca verdadeira.

Apesar de levar o nome do famoso Filósofo e Matemático grego Pitágoras, nascido por volta de 572 a.C., não se pode atribuir a ele a descoberta de tal conhecimento uma vez que, existem indícios de que povos, que antecedem Pitágoras, já conheciam essa relação.

Berlingoff e Gouvêa (2008) afirmam que em todo o mundo o antigo pode-se encontrar vestígios do conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras, sendo um dos mais antigos, encontrados no *Sulbasutras*, na Índia, em que é registrado que a diagonal de um retângulo “produz tanto quanto é produzido individualmente pelos dois lados”. Outra evidência apontada pelo autor são os ternos pitagóricos, trios de números inteiros que funcionam como medidas dos lados de um triângulo retângulo, que pode ser encontrada em grande parte das civilizações do mundo antigo.

Outra evidência apontada por Imenes (1988) é a Pirâmide de Quéops, considerada como a única maravilha do mundo antigo ainda existente, construída a cerca de 4500 anos. Sua construção exigiu conhecimento de diversas áreas e, a precisão dos ângulos retos da sua base surpreende pesquisadores. Documentos comprovam que o

trio 3, 4 e 5, terno pitagórico, já era conhecido por arquitetos e construtores egípcios daquela época, assim, eles utilizavam uma corda com 12 nós, de igual distância de um para outro, para construir um triângulo retângulo e assim formar o ângulo de 90º, utilizado em suas construções, sendo uma delas a Pirâmide de Quéops.

Boyer (1974) menciona que:

> Mesmo o teorema, a que o nome de Pitágoras ainda está ligado, muito provavelmente veio dos babilônios. Sugeriu-se, como justificativa para chamá-lo teorema de Pitágoras, que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele; mas não há meios de verificar essa conjetura (BOYER, 1974, p. 37).

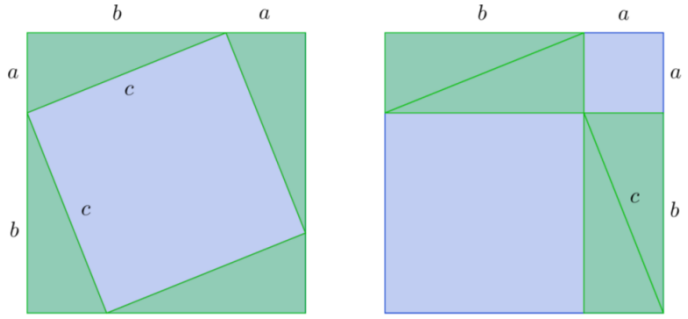
Assim como não podemos atribuir a descoberta do teorema a Pitágoras, não podemos ter certeza se a primeira demonstração do teorema foi feito por ele. Eves (2011) argumenta que:

> Como os ensinamentos da escola eram inteiramente orais e como era costume da irmandade atribuir todas as descobertas ao reverenciado fundador, é difícil agora saber exatamente que descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da confraria (EVES, 2011, p. 97).

Desta forma, não se pode dizer com certeza se Pitágoras foi o primeiro a apresentar uma demonstração do teorema ou se alguém de sua escola o fez. Contudo, existem várias especulações sobre a primeira demonstração do teorema.

Eves (2011) e Lima (1991) acreditam que a primeira demonstração atribuída a Pitágoras foi do tipo geométrica, utilizando decomposição de figuras, como pode ser observado a seguir.

Figura 1 – Quadrados de lado $(a + b)$.

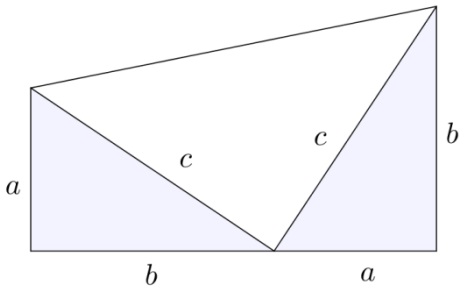



Fonte: Elaborado pelos autores.

Considerando $a$, $b$ e $c$ lados de um triângulo retângulo, em que $c$ é a hipotenusa, e os quadrados de lado $(a + b)$ da Figura 1, temos que as áreas dos dois quadrados possuem mesmo valor. Se em ambos os quadrados retirarmos quatro triângulos retângulos de lados $a$, $b$ e $c$, teremos que a área do quadrado de lado $c$ é igual à soma das áreas dos quadrados de lado $a$ e $b$.

Outra demonstração do Teorema de Pitágoras, trazida por Lima (1991) é "A demonstração do presidente", feita por James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos por quatro meses no ano de 1881, e é feita da seguinte forma:

Figura 2 - Trapézio de bases $a$ e $b$ e altura $(a + b)$.




Fonte: Elaborado pelos autores.

Considerando o trapézio da Figura 2, temos que este é composto por dois triângulos retângulos de catetos $a$ e $b$ e um triângulo retângulo isósceles de catetos $c$. É notável que a área do trapézio é igual a soma das áreas dos três triângulos retângulos, logo:

$$\frac{(b+a)(b+a)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

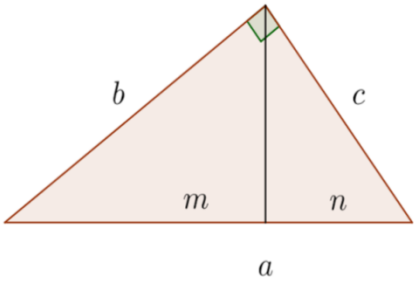
$$(b+a)^2 = 2ab + c^2$$

$$b^2 + 2ba + a^2 = 2ab + c^2$$

$$b^2 + a^2 = c^2$$

Uma das demonstrações mais conhecidas, de acordo com Lima (1991), e também a mais curta é a que segue com a utilização das relações métricas em um triângulo retângulo, consequência da semelhança de triângulos.

Figura 3 - Triângulo retângulo de catetos $b$ e $c$ e hipotenusa $a$.




Fonte: Elaborado pelos autores.

Observando o triângulo retângulo da Figura 3, temos que $m$ e $n$ são as projeções dos catetos $b$ e $c$, respectivamente, na hipotenusa e a hipotenusa $a$ é a soma das projeções dos catetos. Pelas relações métricas sabemos que o quadrado de um cateto é produto da hipotenusa e sua projeção sobre ela, assim, segue a seguinte demonstração:

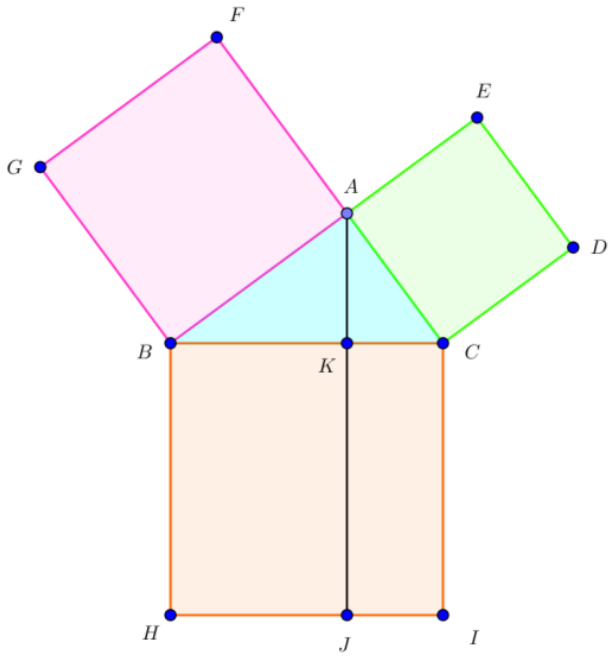
$$b^2 = am\,, c^2 = an\,, a = m + n$$

$$a = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Berlingoff e Gouvêa (2008) afirmam que a demonstração do Teorema de Pitágoras mais famosa foi aquela realizada por Euclides, apresentada no Livro I dos Elementos de Euclides, podendo ser observada a seguir.

Figura 4 – Construção para a demonstração de Euclides.



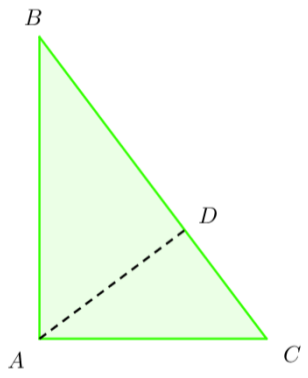

Fonte: Elaborada pelos autores.

Consideremos o triângulo $ABC$ reto em $A$, os quadrados feitos sobre os lados desse triângulo e o segmento $\overline{AJ}$ paralelo aos segmentos $\overline{BH}$ e $\overline{CI}$. É notável que os triângulos $ABH$ e $GBC$ possuem mesma área, por se tratarem de triângulos congruentes pelo caso LAL ($\overline{AB} = \overline{GB}, \widehat{ABH} = \widehat{GBC}, \overline{BH} = \overline{BC}$), que possuem mesma base e mesma medida da altura. Observe que a área de $GBA$ é metade da área do quadrado de lado $\overline{AB}$. O mesmo ocorre com o triângulo $ABH$ e $KBH$, sendo a área de $KBH$ metade da área de $KBHJ$. Temos então que as áreas de $GBA$ e $KBH$ possuem mesmo valor e consequentemente a área do quadrado de lado $\overline{AB}$ e do retângulo $KBHJ$ também. Realizando o mesmo procedimento com os triângulos $DCB$ e $ACI$, encontramos que a área de $KCIJ$ é igual à área do quadrado de lado $AC$. Assim, fica demonstrado que a área do quadrado formado no lado $\overline{BC}$ é igual à soma das áreas dos quadrados formados nos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

O que Euclides fez, de acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008), foi mostrar "como dividir o quadrado grande em duas partes cujas áreas coincidam com as áreas com as áreas dos dois quadrados menores".

Uma outra demonstração trazida por Berlingoff e Gouvêa (2008), em que sem mencionar por quem esta foi feita, julgam ser a demonstração mais elegante do teorema, pode ser vista a seguir.

Figura 5 – Triângulo retângulo $ABC$.




Fonte: Elaborada pelos autores.

Considerando o triângulo $ABC$, reto em $A$, e $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$, temos que os triângulos $ABC$, $DBA$ e $DAC$ são semelhantes, pois todos possuem um ângulo reto e um ângulo em comum. Observe que temos três figuras semelhantes construídas sobre cada um dos lados do triângulo retângulo $ABC$, $DBA$ sobre o lado $\overline{AB}$, $DAC$ sobre o lado $\overline{AC}$ e $ABC$ sobre o lado $\overline{BC}$. É fácil notar também que a área do triângulo $ABC$ é a soma das áreas dos triângulos $DBA$ e $DAC$, desta forma, temos que a área da figura formada sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das figuras, semelhantes, formadas sobre os catetos.

Essa demonstração é consequência de uma das descobertas de Euclides que mostra que a área de qualquer figura desenhada sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas de figuras semelhantes desenhadas sobre os catetos. Berlingoff e Gouvêa (2008) justificam tal afirmativa dizendo que "a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual à razão dos quadrados de seus lados".

Essas são algumas das muitas demonstrações feitas até hoje para o Teorema de Pitágoras. Reis e Perovano (2016) mencionam que existem por volta de 400 demonstrações diferentes para o Teorema de Pitágoras em que boa parte delas pode ser encontrada em uma das obras do professor de matemática americano Elisha Scott Loomis, publicado em sua primeira edição no ano de 1927 e em 1940 em uma segunda edição.

Não há como negar a beleza e a importância desse teorema, tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento, como a Engenharia, a Física, a Astronomia e diversas outras. Acreditamos que a sua simplicidade e suas diversas aplicações sejam os agentes motivadores a grande quantidade de estudos que existem a seu respeito.

## 2.2 O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Nesta seção discorreremos sobre as recomendações acerca do ensino do Teorema de Pitágoras na Educação Básica tendo em vista que analisaremos os conhecimentos acerca do Teorema de Pitágoras adquiridos durante a Educação Básica pelos sujeitos investigados.

O ensino do Teorema de Pitágoras é proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (1998), dentro do bloco de conhecimentos Espaço e Forma, para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, através de verificações experimentais, aplicações e demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Tal documento ressalta que nesse período de ensino a Geometria começa a ter exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso intensifica a necessidade do trabalho com as demonstrações do Teorema de Pitágoras na sala de aula, porém, sem a utilização de todo o rigor matemático. Nas orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclo é sugerido demonstrar o teorema “com base na congruência de figuras planas e no princípio da aditividade para as áreas” (BRASIL, 1998, p. 127), e quando possuírem conhecimentos sobre semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo, os alunos podem fazer uso desses saberes para demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Além disso, os PCN (1998) mencionam que as demonstrações não devem se restringir apenas ao bloco de conhecimentos Espaço e Forma e que não se deve deixar de lado as verificações experimentais, “pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos” (BRASIL, 1998, p. 87). A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2016) reforça essa ideia mencionando que:

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática (BRASIL, 2016, p. 221).

Assim a utilização de experimentações do Teorema de Pitágoras em sala de aula, além de estimular o aluno pode proporcionar um melhor entendimento desse teorema.

Os PCN (1998) destacam também a importância do conhecimento geométrico em outras áreas do saber, como a engenharia, arquitetura, a mecânica e etc. e salientam sobre o pouco destaque que essa área possui nas aulas de Matemática, em que muitas vezes é confundido com o bloco de Grandezas e Medidas. Nessa perspectiva, supomos que muitas vezes o ensino do Teorema de Pitágoras se restringe a aplicação da relação para determinar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, que não é suficiente para a aquisição do conhecimento sobre o teorema. A BNCC (2016) confirma isso quando diz que:

> [...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BRASIL, 2016, p. 228).

Acreditamos que uma abordagem do Teorema de Pitágoras limitada ao cálculo da medida dos lados do triângulo retângulo pode fazer com que este teorema perca o significado para ao aluno, se restringindo a uma “fórmula qualquer” da matemática a qual ele precisa memorizar.

Outra proposta dos PCN de Matemática (1998) para abordagem de conteúdos geométricos é a exploração de aspectos históricos, que evidenciam como foi desenvolvida a matemática a partir de descobertas feitas no decorrer da história. Como vimos na seção anterior, o conhecimento sobre a relação existente entre os lados de um triângulo retângulo já era conhecido por povos do mundo antigo. Levar evidências de que tal afirmação é verdadeira e mostrar as possíveis formas de como se deu tal conhecimento é uma forma de potencializar a aprendizagem sobre o Teorema de Pitágoras para os alunos da Educação Básica.

O ensino do teorema na Educação Básica não fica restrito ao Ensino Fundamental. As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - OCNEM (2006) afirmam que alguns conceitos que foram estudados no Ensino Fundamental devem se consolidar no Ensino Médio, um desses conceitos é o Teorema de Pitágoras.

Desta forma, durante a sua passagem pela Educação Básica, é suposto que o alunado tenha contato com o Teorema de Pitágoras em diferentes perspectivas, realizando verificações experimentais, demonstrações e aplicações, principalmente na resolução de problemas, durante o Ensino Fundamental e posteriormente no Ensino Médio consolidar o conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras.

A seguir apresentaremos estudos correlatos a essa investigação.

## 2.3 PESQUISAS QUE RETRATAM ESTRATÉGIAS DE ALUNOS EM QUESTÕES QUE ENVOLVEM O TEOREMA DE PITÁGORAS

Apresentaremos nesta seção os estudos correlatos que consideramos relevantes a essa investigação. Os estudos que compõe esta seção de revisão de literatura possuem enfoque nas respostas que alunos apresentam em questões que envolvem o Teorema de Pitágoras. Desta forma, possuem relação com nosso objetivo. Exibiremos os estudos de Bastian (2000), Rodrigues e Menezes (2010), Pereira, Couto e Costa (2016), Ferreira (2016) e Reis e Perovano (2016).

Em nossa busca por pesquisas que relatam o desempenho e estratégias de alunos diante de questões que envolvam o Teorema de Pitágoras, encontramos a

pesquisa de Ferreira (2016) que teve como principal objetivo investigar o conhecimento de estudantes do 3º ano do Ensino Médio acerca da aplicação do Teorema de Pitágoras como ferramenta para a resolução de problemas. O autor menciona a importância de conhecer e dominar o Teorema de Pitágoras e justifica sua pesquisa dizendo

> ser razoável que nossos discentes percebam o aprendizado de tal teorema como indispensável à sua formação intelectual não somente pelo grau de sua importância dentro da Matemática, mas também por se constituir em um útil pré-requisito em diversas situações teóricas e práticas do cotidiano. (FERREIRA, 2016, p. 14).

Participaram da investigação 170 alunos do Ensino Médio, matriculados em uma escola estadual localizada na cidade de Juazeiro – BA. O processo investigativo utilizado foi de uma pesquisa bibliográfica e de campo com aplicação de questionários. Ocorreu com a aplicação de dois questionários contendo cinco questões envolvendo o Teorema de Pitágoras. O primeiro questionário era contextualizado e o segundo sem contexto. Foi realizada também uma intervenção didático-metodológica e por último a aplicação de um terceiro questionário, contendo cinco questões contextualizadas. As questões dos três questionários eram de múltipla escolha, em que havia apenas uma resposta correta.

Ao avaliar o desempenho dos alunos nos dois primeiros questionários, Ferreira (2016) se deparou com resultados que os julgou insatisfatórios devido ao baixo rendimento, tendo encontrado uma média de 2,58 no primeiro questionário e 3,68 no segundo, avaliando em um intervalo de zero a 10, o que reforçou a ideia da necessidade de uma intervenção e a aplicação de um novo questionário. Esse teria o objetivo de avaliar uma melhora no desempenho dos alunos, que para o autor ocorreu de forma bastante “tímida” tanto em relação à aprendizagem do conteúdo em questão quanto de fundamentos de Matemática elementar, em que os índices de acertos foram de 25,82%, nos primeiros questionários, para 37,97% no terceiro. Diante desses dados, o autor alerta sobre o pouco conhecimento que os alunos possuem sobre conteúdos que serão requisitados no futuro.

Outro trabalho encontrado foi o de Pereira, Couto e Costa (2016) que realizaram um estudo sobre os erros frequentes de alunos do 9º ano do Ensino

Fundamental em questões que envolviam o Teorema de Pitágoras. Justificaram esse tipo de estudo pela possibilidade de avaliar as dificuldades dos alunos em relação ao conhecimento que foi adquirido. O trabalho trata-se de uma pesquisa diagnóstica, do tipo qualitativa em que foi aplicado um teste diagnóstico, contendo seis questões sobre o referido tema, a 20 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Belém do Pará.

As autoras criaram três categorias para os erros mais frequentes dos alunos: *erro na compreensão dos elementos de um triângulo retângulo*, que ocorre quando o sujeito confunde a hipotenusa do triângulo com um dos catetos; *erros cometidos na aplicação de regras e estratégias irrelevantes*, contendo as estratégias que utilizam estratégias aleatórias para solucionar a questão; *erros no desenvolvimento das operações matemáticas*, que eram estratégias que apresentavam erros com as operações básicas ou no cálculo de potência e radiciação. Estas apontam que a causa dos erros desses alunos estão relacionadas, sobretudo, à falta de compreensão do Teorema e de Pitágoras e da identificação dos elementos de um triângulo retângulo. Outro fator causador de erro encontrado por Pereira, Couto e Costa (2016) é "a falta de compreensão do conceito de área relacionado aos lados do triângulo", dificultando a compreensão do teorema, que mencionam não tê-lo identificado na literatura analisada.

Rodrigues e Menezes (2010) realizaram um estudo com uma turma no 9º ano da modalidade EJA, comentando sobre a resolução desses alunos em questões contextualizadas e não contextualizadas, ambas envolvendo o Teorema de Pitágoras. Justificam seu trabalho pela maior possibilidade de envolvimento dos alunos com problemas contextualizados, que remetem a situações do seu cotidiano e por considerarem que o conteúdo Teorema de Pitágoras "está entre o mais importante a ser utilizados no processo de ensino-aprendizagem da matemática desta série" (RODRIGUES; MENEZES, 2010. p. 4). A pesquisa, de abordagem qualitativa, com tratamentos de dados quantitativos, ocorreu com 19 alunos da referida série, matriculados em uma escola municipal do município de Santa Rita no estado da Paraíba, tendo como instrumento de coleta de dados questionários, entrevistas e atividades.

As considerações trazidas pelas autoras apontam que há um equilíbrio no desempenho e na preferência dos alunos pelos dois tipos de questão, porém ressaltam

que ambas devem ser trabalhadas em conjunto. Apontam também que em alguns momentos, a preferência dos alunos pelas questões não contextualizadas os levam a pensar que o "contato permanente" com esse tipo de questão pode gerar rejeição dos alunos pelas questões contextualizadas. Percebemos nos dados apresentados pelos autores que o erro na identificação dos elementos do triângulo retângulo também é um fator causador de erro nas estratégias utilizadas pelos alunos.

Outro trabalho que envolve o Teorema de Pitágoras é a dissertação de mestrado de Bastian (2000), que utiliza como metodologia a Engenharia Didática e testa uma sequência didática com alunos que ainda não conhecem o teorema, estudando a potencialidade dessa atividade na aprendizagem significativa de tal conteúdo.

O questionário aplicado pela autora, continha seis questões, em que em três dessas esperava-se um baixo desempenho justificado pela diversidade da turma, que possuía alunos oriundos de escolas particulares e públicas, com diferentes qualidades de ensino e por se tratarem de questões não semelhantes àquelas encontradas em livros didáticos.

O questionário foi aplicado, no ano de 1998, em uma escola estadual de São Paulo a 42 alunos matriculados no 1º ano do Ensino Médio, dos quais 88% eram oriundos de escolas públicas. Após a aplicação, 50% dos questionários voltaram totalmente em branco. Assim, os pesquisadores sentiram a necessidade de uma nova aplicação do questionário, desta vez em uma escola particular da cidade de Santos – SP, com 35 alunos também do 1º ano do Ensino Médio, em que destes, 15% vinham de escolas públicas. O tempo de aplicação do questionário foi de 50 minutos e foram analisados apenas os questionários da segunda aplicação.

Analisando as respostas dos alunos, Bestian (2000) detectou erros na igualdade Pitagórica, que entendemos ser do tipo em que se assume que o quadrado de um dos catetos é igual à soma dos quadrados do outro cateto e da hipotenusa; erro em contas, em cálculo com radical e o que ela chama de "considerações absurdas", que continha estratégias em que o aluno utilizava de forma indevida o Teorema de Tales ou considerava que o lado de um triângulo retângulo era a soma dos outros dois lados, ou utilizava a régua graduada para determinar a medida do lado de um triângulo ou utilizava da fórmula de área do triângulo ou fazia uso de uma estratégia que não condiz com a situação proposta.

Uma das considerações da autora sobre essa análise foi que os alunos possuem maior facilidade em aplicar o Teorema de Pitágoras quando o lado desconhecido do triângulo é a hipotenusa. O próximo passo da pesquisa foi a elaboração e a aplicação de uma sequência didática, que ocorreu no ano de 1999, com alunos do 8º ano de uma escola estadual na cidade de São Paulo. Após a sequência, foi aplicado o mesmo questionário com 30 dos alunos que participaram da atividade, com o objetivo de verificar os efeitos do trabalho na aprendizagem do Teorema de Pitágoras.

Mesmo após a sequência didática, alguns erros continuaram persistentes nas respostas dos alunos. Alguns desses erros são os erros na igualdade Pitagórica, erro no cálculo com radical e algumas "considerações absurdas". Além desses, a autora destaca a utilização da relação para determinar a medida do lado de um triângulo não retângulo, o erro na resolução de equações de 2º grau incompletas, erro no cálculo de potências, utilização do número um como elemento neutro da adição e esquecimento de elevar a hipotenusa ao quadrado.

Bestian (2000) declara que muitos alunos possuem dificuldades em questões em que se tem uma figura que é composta por subfiguras e também quanto à apreensão discursiva.

Quando comparada às amostras que obteve em 1998, Bastian (2000) considera que a sequência didática desenvolvida contribuiu para o desenvolvimento da percepção dos alunos quanto à utilização do Teorema de Pitágoras como ferramenta para resolução de problemas. Quanto a diversidade de erros em outros conteúdos matemáticos, Bastian (2000) justifica como "provável decorrência de obstáculos didáticos criados em séries anteriores".

Reis e Perovano (2016) também realizaram estudos sobre estratégias de alunos em problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras, com o objetivo de identificar quais as estratégias que alunos do Nível Superior utilizavam ao responderem questões envolvendo o teorema, justificando tal estado pela possibilidade de "perceber a dificuldade que os alunos enfrentam e assim buscar táticas que permitam determinar os modos de remediar essa situação" (p. 228).

A metodologia empregada foi de caráter qualitativo e delineamento descritivo. Os sujeitos da pesquisa 28 alunos do curso de Licenciatura em Matemática, ofertado

pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, no campus de Vitória da Conquista, matriculados na disciplina Geometria Euclidiana, que no referido curso é ofertado no III semestre. O instrumento de coleta de dados foi um questionário que continha 8 questões envolvendo o Teorema de Pitágoras.

Em duas questões analisadas a porcentagem de respostas incorretas ou em branco foi de 53,57% e 46,43%. Ao analisarem as respostas incorretas, os autores agruparam respostas com erros semelhantes para facilitar a análise. Entre esses erros destacam-se: *não elevar a hipotenusa ao quadrado*, *não realizar a conversão de unidade de medidas*, *falha na interpretação da questão* e *erros em operações*, sendo elas a soma com números decimais, potenciação e radiciação.

Reis e Perovano (2016) registram o propósito de dar continuidade ao estudo "buscando táticas que possibilitem dirimir com as dificuldades dos alunos", pois entendem que tais sujeitos, futuros professores, deverão direcionar sua prática pedagógica considerando as experiências de seus futuros alunos, propondo situações cotidianas que os motivam na busca de soluções.

As informações encontradas nos textos mencionados anteriormente estão apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 1 - Ano, unidade federativa, nível escolar, tipos de questões e erros encontrados nas pesquisas que compõem o referencial teórico da seção.

| **Ano** | **UF** | **Série/ Modalidade** | **Erros** | **Autores** |
|---|---|---|---|---|
| 2000 | SP | 1º; 8º / EM; EFII | ● erros na igualdade Pitagórica;<br>● erro em contas;<br>● erro em cálculos com radicais;<br>● considerações absurdas;<br>● utilização da relação;<br>● erro na resolução de equações do 2º grau incompletas;<br>● erro no cálculo de potências;<br>● utilização do número um como elemento neutro da adição;<br>● esquecimento de elevar a hipotenusa ao quadrado. | Bastian |
| 2010 | PB | 9º / EJA | ● erro na identificação dos elementos do triângulo retângulo. | Rodrigues e Menezes |
| 2016 | PA | 9º / EFII | ● erro na compreensão dos elementos de um triângulo retângulo;<br>● erros cometidos na aplicação de regras e estratégias irrelevantes;<br>● erros nos desenvolvimentos das operações matemáticas. | Pereira, Couto e Costa |
| 2016 | BA | 3º / EM | | Ferreira |
| 2016 | BA | ES | ● não elevar a hipotenusa ao quadrado;<br>● não realizar a conversão de unidade de medidas;<br>● falha na interpretação da questão;<br>● erros em operação. | Reis e Perovano |

EFII – Ensino Fundamental II; EM – Ensino Médio; EJA – Educação de Jovens e Adultos; ES – Ensino Superior.

Fonte: elaborado pelos autores

Como pode ser observado no Quadro 1, foram encontradas pesquisas realizadas em três diferentes regiões do Brasil, em diferentes níveis escolares e também em escolas públicas e privada. O que pudemos constatar nessas leituras é que em toda essa diversidade de estudantes existem dificuldades na resolução de questões que envolvem o Teorema de Pitágoras, independente de essas questões estarem ou não contextualizadas.

Em relação ao Teorema de Pitágoras, quando os traços dele aparecem nas estratégias cujo resultado final não está correto, os erros mais frequentes nas pesquisas são a não utilização correta do teorema, quando o aluno utiliza a relação “cateto ao quadrado igual a soma dos quadrados do outro cateto e a hipotenusa”, o esquecimento de elevar algum dos elementos do triângulo ao quadrado e erros com as operações matemáticas.

A ocorrência desses erros em estratégias de alunos do Ensino Médio e do Nível Superior é o que mais nos preocupa pois, é previsto que alunos do Ensino Médio já tenham o domínio sobre as operações básicas, potenciação e radiciação, assim, esperávamos que erros desse tipo fossem pouco frequentes nesse nível de ensino. Em relação ao teorema, entendemos que o seu conhecimento é consolidado no Ensino Médio, assim esses alunos ainda estão na fase de firmar tal conhecimento.

O que de fato nos preocupa são os erros dos alunos do Nível Superior, principalmente por se tratar de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Sobre tais alunos Reis e Perovano (2016) destacam que:

> serão futuros professores que precisarão direcionar sua prática docente, considerando os conhecimentos trazidos por seus futuros alunos apresentando situações que envolvam e estimulem a busca de soluções para problemas do cotidiano (REIS, PEROVANO, 2016, p. 248-249).

Ao perceber os erros existentes em diferentes localidades e diferentes modalidades de ensino, ponderamos investigar as estratégias de alunos recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática, quando estes se encontram diante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras em sua resolução. Pois, julgamos ser importante identificar conceitos e procedimentos incorretos utilizados por esses alunos, para que assim seja possível pensar em medidas capazes de evitar que quando estiverem à frente de uma sala de aula, estes alunos reproduzam informações errôneas aos seus alunos.

# 3 METODOLOGIA

Tendo como objetivo analisar as estratégias de alunos recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática, quando estes se encontram diante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras em sua resolução, empregamos uma pesquisa de campo, que em educação é caracterizada por Tozoni-Reis (2009) como "[...] a ida do pesquisador ao campo, aos espaços educativos para coleta de dados, com o objetivo de compreender os fenômenos que nele ocorrem" (p. 39).

A abordagem desse estudo é de caráter qualitativo, delimitado por Moresi (2003) como sendo uma pesquisa que:

> considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem. (MORESI, 2003. p. 8-9)

Moresi (2003) afirma que a pesquisa qualitativa é descritiva, sendo a sua finalidade apresentar as características de determinada população ou fenômeno. Cervo e Bervian (1996) acrescentam ainda que esse tipo de pesquisa "observa, registra, analisa e correlaciona fatos ou fenômenos (variáveis) sem manipulá-los", em que se busca descobrir a frequência em que tais fenômenos ocorrem, suas ligações e conexões com outros, sua natureza e propriedades.

O campo de estudo deste trabalho foram os alunos recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática, no ano de 2016, na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, campus de Vitória da Conquista, sendo os sujeitos dessa pesquisa 32 alunos matriculados no 1º semestre do referido curso no ano de 2016, com faixa etária média de 23 anos.

Como instrumento de coleta de dados utilizamos um questionário (Anexo 2) contendo 10 questões envolvendo o Teorema de Pitágoras, retiradas de livros didáticos e provas de vestibulares, como pode ser observado no Quadro 2.

Quadro 2 – Fontes das questões do questionário.

| | |
|---|---|
| Questão 1 | DANTE, 2010, p. 165 |
| Questão 2 | DANTE, 2010, p. 165 |
| Questão 3 | GIOVANNI JR., CASTRUCCI, 2009, p. 253 |
| Questão 4 | GIOVANNI JR., CASTRUCCI, 2009, p. 251 |
| Questão 5 | Coleção Estudo – 6V, Vol. 3 – Bernoulli Sistema de Ensino, p. 35 |
| Questão 6 | Coleção Estudo – 6V, Vol. 3 – Bernoulli Sistema de Ensino, p.35 |
| Questão 7 | DOLCE, POMPEO, 1993, p. 234 |
| Questão 8 | DOLCE, POMPEO, 1993, p. 235 |
| Questão 9 | GIOVANNI JR., CASTRUCCI, 2009, p. 252 |
| Questão 10 | Coleção Estudo – 6V, Vol. 3 – Bernoulli Sistema de Ensino, p.37 |

Fonte: Elaborado pelos autores.

O questionário foi respondido pelos sujeitos de forma anônima, que de acordo com Cervo e Bervian (1996) “possui a vantagem de os respondentes sentirem-se mais confiantes, dado o anonimato, o que possibilita coletar informações e respostas mais reais” (p. 138).

Para a aplicação do questionário foi marcada uma data com os alunos, quando estes possuíam horário vago e antes que eles tivessem contato com o conteúdo em questão na universidade, visto que o Teorema de Pitágoras faz parte da ementa de uma das disciplinas as quais esses alunos estavam matriculados.

No dia da coleta de dados e antes de aplicar o questionário, os sujeitos assinaram um termo de consentimento, que pode ser encontrado no Anexo 1, para fins de discussão e disseminação das conclusões deste estudo.

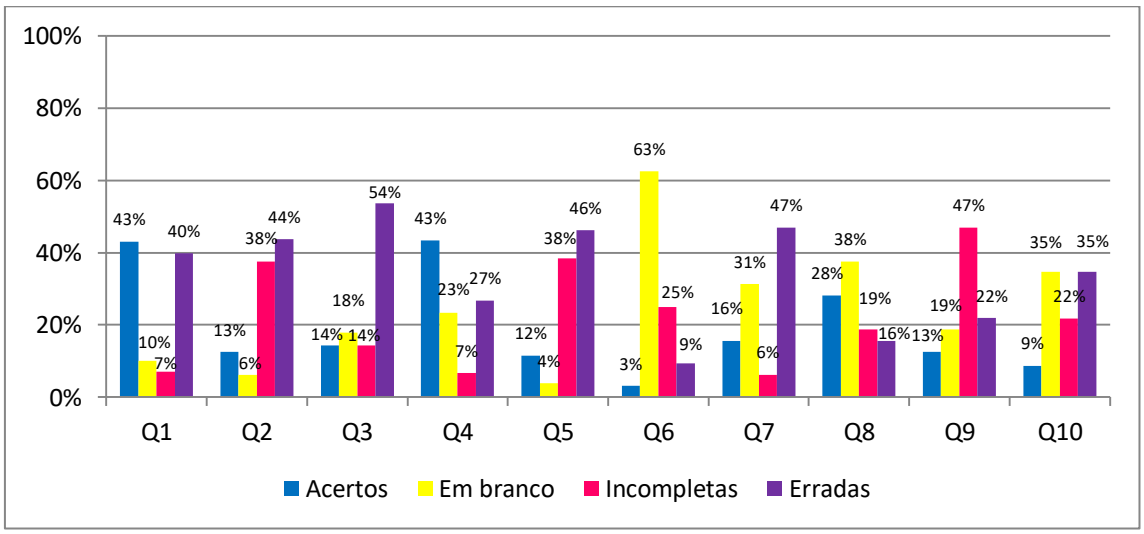
Cada questionário foi codificado com a letra “A”, de aluno, e um número correspondente à ordem em que cada aluno finalizou a resolução do mesmo, por exemplo, o questionário do primeiro sujeito a terminar recebeu o código A01 e assim sucessivamente até o questionário A32.

Após atribuir códigos a cada um dos questionários nosso próximo passo foi analisar as respostas, contabilizando a quantidade de erros, acertos, respostas em branco e incompletas em cada questão. Feito isso, partimos para a análise das respostas com erro e incompletas. Percebemos no início que alguns alunos utilizavam estratégias em que se notava traços de conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras enquanto que outros não. Assim, decidimos criar duas categorias maiores para essas estratégias: *Apresenta indícios de conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras* (C1) e *Não apresenta indícios de conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras* (C2). Analisando as respostas de cada categoria, percebemos características em comum em determinadas respostas e assim foram sendo delimitadas subcategorias para essas estratégias. Desta forma pudemos analisar com maior precisão os fatores que levaram esses alunos a uma resposta incorreta ou incompleta.

# 4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Após a coleta dos dados através da aplicação do questionário realizamos a correção dos 32 questionários respondidos, classificando as respostas como acertos, em branco, incompletas e erradas. O Gráfico 1 apresenta uma visão geral, por questão, do desempenho dos alunos investigados.

Gráfico 1 – Desempenhos dos alunos por questão.




Fonte: Dados da pesquisa.

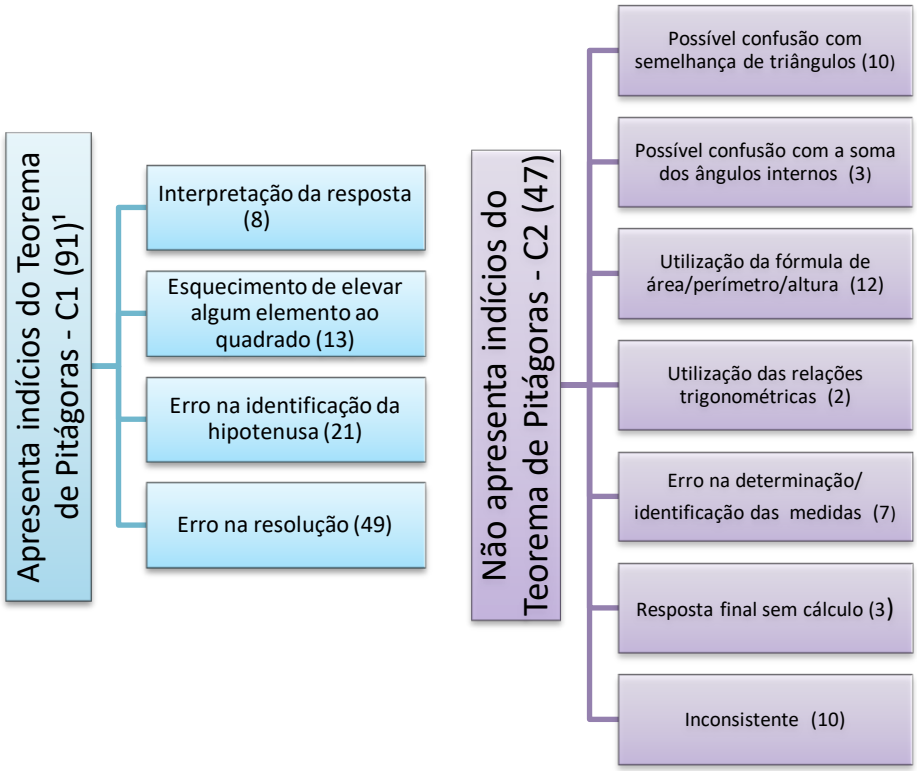
Calculamos a média geral de desempenho dos sujeitos e encontramos um valor próximo a 24%.

Analisando o Gráfico 1 anterior notamos que em nenhuma das questões o índice de acertos foi superior ou igual a 50%, o que consideramos um dado preocupante visto que o conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras e o domínio da sua utilização para resolução de problemas é algo que se espera a todos que já passaram pela Educação Básica.

O passo seguinte foi analisar as estratégias incompletas e erradas. Em tal ação observamos que mesmo não chegando a uma resposta final correta, algumas das estratégias apontavam que o aluno conhecia o Teorema de Pitágoras, assim, separamos essas estratégias em duas categorias: Apresenta indícios do Teorema de Pitágoras, que nesse texto denotaremos por C1, e Não apresenta indícios do Teorema de Pitágoras, que

denotaremos por C2. Dentro dessas duas categorias, subcategorias foram se delineando no decorrer da nossa análise e elas podem ser conferidas no esquema que apresentamos na Figura 6.

Figura 6 – Esquema de categorização das estratégias erradas.




Fonte: Elaborado pelos autores.

Nas respostas erradas, a maioria (66%) pertence à categoria C1, que quando somado ao número de respostas corretas, assim consideramos que o conteúdo Teorema de Pitágoras é de conhecimento da maioria dos sujeitos da pesquisa.

Para facilitar o entendimento das subcategorias delimitadas, descreveremos cada uma delas a seguir.

*Interpretação da resposta (C1)* – Estratégia em que o aluno apresenta uma medida com valor negativo;

[1] Quantidade de estratégias.

*Esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado (C1)* – Estratégia em que o aluno, na relação de Pitágoras, se esquece do quadrado de um dos elementos do triângulo;

*Erro na identificação da hipotenusa (C1)* – Estratégia na qual o aluno confunde a hipotenusa do triângulo com um dos catetos;

*Erro na resolução (C1)* – Estratégia que apresenta erros nas operações básicas, em radiciação, potência e na resolução de equações do 2º grau;

*Possível confusão com semelhança de triângulos (C2)* – Estratégia que apresenta procedimento semelhante ao utilizado no cálculo de razão de semelhança de triângulos;

*Possível confusão com soma dos ângulos internos (C2)* – Estratégia em que o aluno registra que a soma dos lados do triângulo é igual a um ângulo raso;

*Utilização da fórmula de área/perímetro/altura (C2)* – Estratégia na qual o aluno faz uso das fórmulas de área e/ou perímetro para determinar a medida de um dos lados do triângulo ou utiliza a fórmula da altura de um triângulo equilátero para determinar a altura de um triângulo;

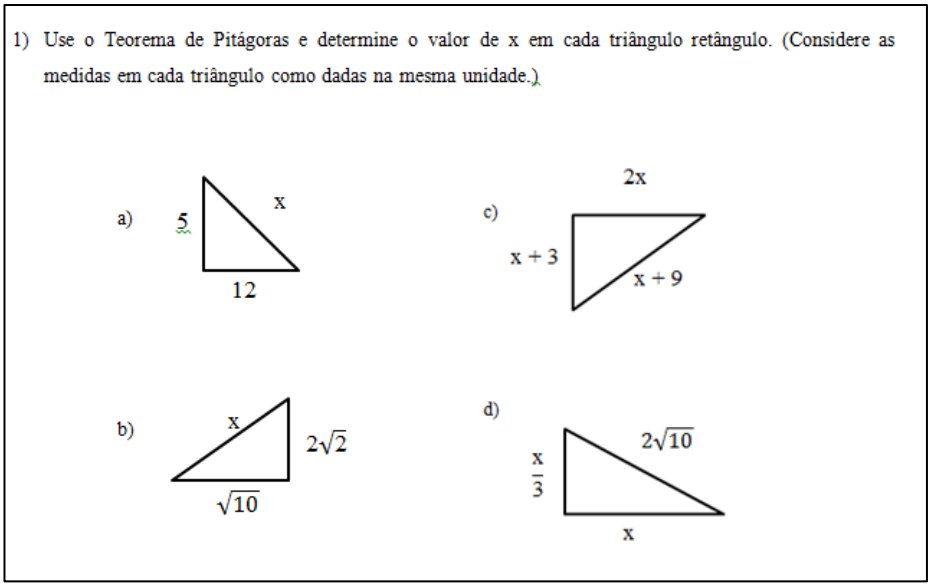
*Utilização das relações trigonométricas (C2)* – Estratégia em que o aluno faz uso das relações trigonométricas no triângulo retângulo para determinar a medida de um dos lados do triângulo;

*Inconsistente (C2)* – Uso de estratégias aleatórias não identificadas;

*Erro na determinação/identificação das medidas (C2)* – Estratégia em que o aluno não consegue escrever uma expressão algébrica para a medida dos catetos ou que não conseguem interpretar a medida correta do cateto dada no enunciado.

A seguir, apresentamos uma análise das estratégias em cada questão.

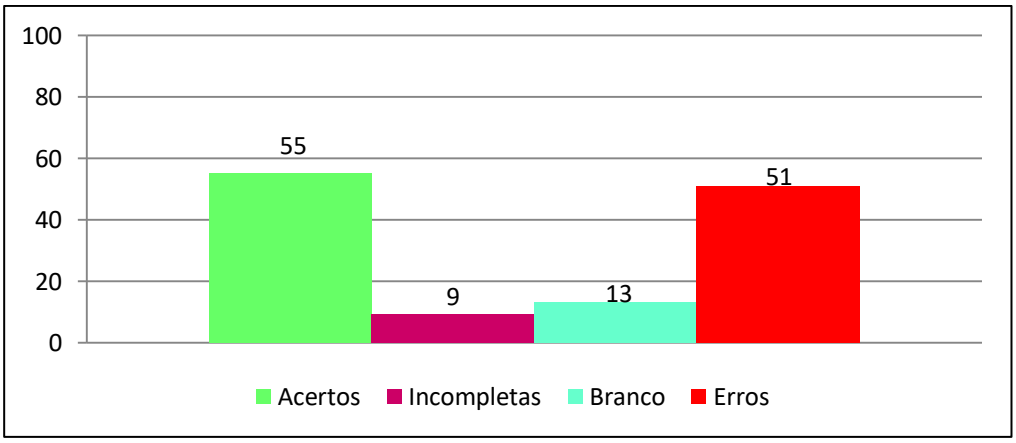
## 4.1 QUESTÃO 1


1) Use o Teorema de Pitágoras e determine o valor de x em cada triângulo retângulo. (Considere as medidas em cada triângulo como dadas na mesma unidade.)



Na questão um tínhamos como objetivo analisar se os alunos sabiam aplicar o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos dados. O total de questionários analisados foi de 32 e essa questão possuía as letras *a*, *b*, *c* e *d*, o que nos dá um total de $32 \times 4 = 128$ respostas nessa questão. O Gráfico 2 a seguir apresenta a quantidade de erros, acertos, respostas incompletas e em branco, na questão 1.

Gráfico 2 – Frequência de respostas, em Q1, corretas, incorretas, incompletas e em branco.




Fonte: Dados da pesquisa.

No Gráfico 2 observamos que o número de acertos dessa questão é maior que o número de respostas incompletas, em branco e erradas, porém, não chega à metade do total de respostas.

O número de erros nessa questão foi de 51 respostas (41% do total), em que 39 delas apresentam indícios da utilização do Teorema de Pitágoras (C1) e 12 não apresentam indícios da utilização (C2). Para as respostas da categoria C2, elaboramos o Quadro 3 apresentando as subcategorias dessas estratégias.

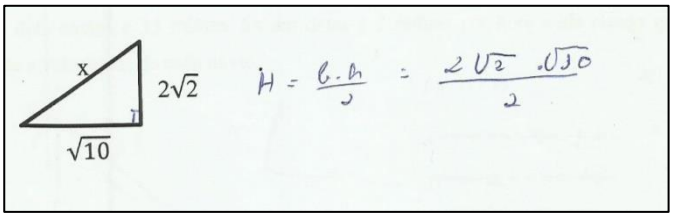
Quadro 3 – Quantitativo de respostas encontradas, em Q1, nas subcategorias de C2.

| **Subcategoria** | **Quantidade** |
|---|---|
| Possível confusão com semelhança de triângulos | 3 |
| Possível confusão com a soma dos ângulos internos | 2 |
| Utilização da fórmula de área/perímetro | 5 |
| Utilização das relações trigonométricas | 2 |
| **Total** | 12 |

Fonte: Costa Júnior e Perovano (2017).

De acordo com os dados do quadro anterior percebemos que na questão um a estratégia, sem indício do teorema, mais utilizada foi a *utilização da fórmula de área/perímetro*. Devemos salientar que essa foi a estratégia adotada por um mesmo aluno em todas as letras dessa questão. A Figura 7 mostra a estratégia utilizada por esse aluno nessa questão.

Figura 7 – Extrato da estratégia utilizada, em Q1, pelo sujeito A06.




Fonte: Costa Júnior e Perovano (2017).

Analisando a estratégia do sujeito A06 observamos que este explicita a relação de igualdade entre a letra “H”, que supomos ser a hipotenusa, e a fórmula da área de um triângulo. É notável que essa estratégia não apresenta sinais do Teorema de Pitágoras.

Identificamos que esse aluno não realiza as operações exigidas na relação apresentada por ele, pensamos que isso seja em consequência do surgimento de raízes, o que pode indicar que esse aluno possui dificuldades com o conteúdo de radiciação.

Estratégias assim também recebem destaque no trabalho de Pereira, Couto e Costa (2016) que apontam que a falta de compreensão do teorema leva os alunos adotarem estratégias incertas que os conduzem ao erro.

Outras estratégias que também não apresentam indícios da utilização do Teorema de Pitágoras podem ser observadas no Quadro 3, sendo elas: *possível confusão com semelhança* (9% das respostas), *possível confusão com a soma dos ângulos internos* (6% das respostas) e *utilização das relações trigonométricas* (6% das respostas).

As respostas pertencentes a C1 também foram agrupadas em subcategorias e a sua quantificação está apresentada no Quadro 4.

Quadro 4 - Quantitativo de respostas encontradas, em Q1, nas subcategorias de C1.

| **Subcategoria** | **Quantidade** |
|---|---|
| Interpretação da resposta | 6 |
| Esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado | 6 |
| Erro na identificação/determinação das medidas | 2 |
| Erro na resolução | 25 |
| **Total** | 39 |

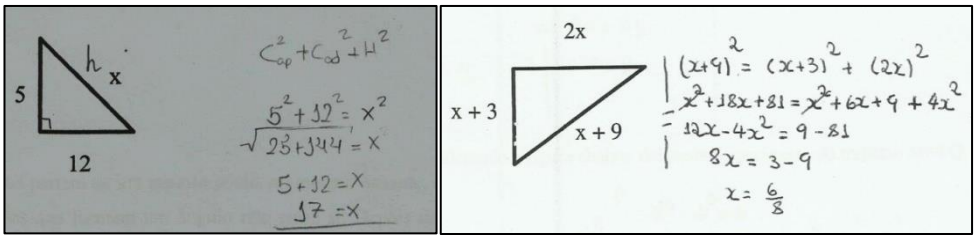
Fonte: Costa Júnior e Perovano (2017).

A *interpretação da resposta*, *esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado* e *erro na identificação/determinação das medidas* são algumas das subcategorias encontradas nas respostas erradas, da primeira questão, que apresentam indício do Teorema de Pitágoras. Porém, a categoria que mais chama a atenção é a "*erro na resolução"* devido a sua grande frequência na questão.

As respostas pertencentes à subcategoria erro na resolução são aquelas que apresentam algum erro durante a resolução do teorema, nessa questão os erros apresentados foram na resolução de: produtos notáveis, equação do 2º grau, potência,

radiciação e operações com frações. Na Figura 8 podemos observar algumas respostas dessa subcategoria.

Figura 8 – Extrato da estratégia utilizada, em Q1, pelos sujeitos A07 e A30.




Fonte: Costa Júnior e Perovano (2017).

Na primeira imagem o aluno inicia escrevendo a soma dos quadrados das medidas do triângulo retângulo, o que é considerado um erro, pois o aluno soma todos os quadrados enquanto que o teorema é enunciado como: a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Em seguida, quando vai substituir os valores, ele utiliza de forma correta a relação entre essas medidas, o que nos faz ponderar que esse aluno conhece o Teorema de Pitágoras. Outro erro desse aluno aparece no momento em que ele deve calcular a raiz quadrada da soma entre 25 e 144. Ele efetua a raiz da soma de 25 e 144 somando a raiz de 25 mais a raiz de 144. Ponderamos que esse tenha se confundido com uma propriedade de radiciação, que diz que a raiz do produto é o produto das raízes, e aplicado essa propriedade na raiz da soma.

Dificuldades com radiciação e potenciação são apresentadas também por Bastian (2000), Reis e Perovano (2016) e Pereira, Couto e Costa (2016), que são erros bastante frequentes nas estratégias dos sujeitos dessa pesquisa. Essas dificuldades são apontadas por Pereira, Couto e Costa (2016) como sendo algumas das principais dificuldades encontradas pelos alunos em suas análises e justificam os erros pela falta de conhecimento ou de atenção.

Na segunda imagem da Figura 8 o sujeito A30 identifica os elementos do triângulo, aplica o teorema e resolve os produtos notáveis de forma correta, porém, quando esse se encontra diante de uma equação do 2º grau ele comete o erro de operar com dois monômios de graus diferentes, $12x$ e $4x^2$, e soluciona a equação da maneira como se soluciona uma equação de grau um. Percebemos que esse aluno demonstra dificuldades na identificação e resolução de equações do 2º grau.

Das nove questões classificadas como incompletas sete apresentam indícios do teorema e duas não, sendo as últimas classificadas como *inconsistente* e *utilização das relações trigonométricas*. Já as incompletas de C1 foram classificadas em *não finalizou a resolução do teorema* (uma resposta) e *erro na resolução* (seis respostas), que apresentaram erros em cálculos aritméticos, em potências e produtos notáveis.

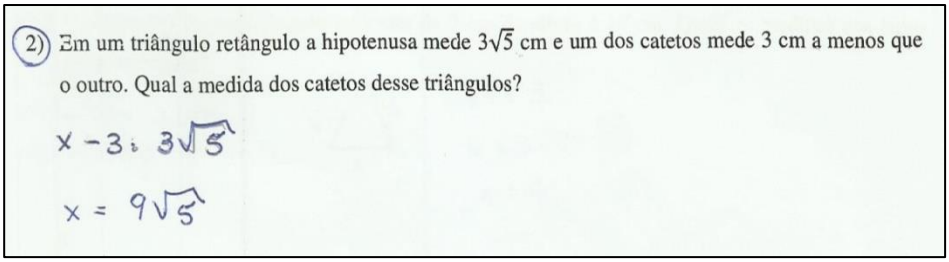
## 4.2 QUESTÃO 2

2) Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede $3\sqrt{5}$ cm e um dos catetos mede 3 cm a menos que o outro. Qual a medida dos catetos desse triângulos?

Na questão dois nosso objetivo era descobrir se aluno consegue com as informações da questão identificar as expressões relativas às medidas dos catetos do triângulo, aplicar o Teorema de Pitágoras e determinar as medidas dos catetos. Uma possível estratégia para solucionar essa questão é expressar as medidas dos catetos como $x$ e $x - 3$ e assim, aplicar o teorema para determinar essas medidas.

Nessa questão os resultados obtidos foram: quatro acertos, duas respostas em branco, 12 incompletas e 14 erros. Das 14 respostas classificadas como erro, 13 apresentaram indícios do teorema enquanto que uma não. Essa faz parte da subcategoria denominada *inconsistente* e o seu esboço pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Extrato da estratégia utilizada, em Q2, pelo sujeito A20.


2) Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede $3\sqrt{5}$ cm e um dos catetos mede 3 cm a menos que o outro. Qual a medida dos catetos desse triângulos?

$x - 3 = 3\sqrt{5}$

$x = 9\sqrt{5}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na estratégia apresentada anteriormente o sujeito extrai do enunciado da questão a medida de um dos catetos, $x - 3$, e a medida da hipotenusa, $3\sqrt{5}$, escrevendo na primeira linha o que parece ser o produto dessas duas medidas. Já na segunda linha, este apresenta uma medida para $x$, que entendemos ser para esse aluno, o valor que faz com que o que foi descrito anteriormente seja igual à zero. A estratégia utilizada por esse aluno não nos tem significado matemático relacionado a solução dessa questão e por isso a classificamos como *inconsistente*.

Analisando as 13 respostas restantes com erro, as organizamos em subcategorias, como é apresentado no quadro a seguir.

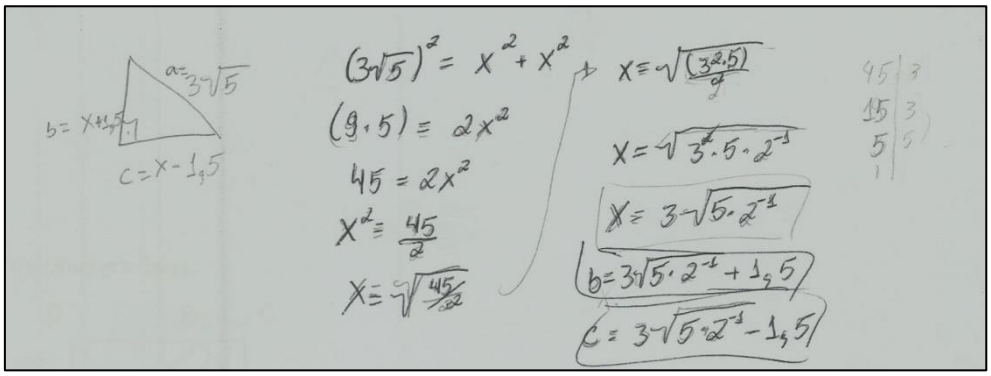
Quadro 5 - Quantitativo de respostas encontradas, em Q2, nas subcategorias de C1.

| **Subcategoria** | **Quantidade** |
|---|---|
| Interpretação da resposta | 1 |
| Esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado | 1 |
| Erro na identificação/determinação das medidas | 5 |
| Erro na resolução | 6 |
| **Total** | 13 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos observar que mais uma vez o tipo de erro mais frequente nessa categoria foi o *erro na resolução* apresentando seis respostas, sendo esses erros nos cálculos de potência, já apontados em estudos mencionados anteriormente, e na resolução de equação do 2º grau e de produtos notáveis. Outro erro também cometido com frequência nessa questão foi o *erro na identificação/determinação das medidas*, que acontece quando os alunos não conseguem determinar uma expressão para essas medidas a partir do enunciado. Podemos observar um exemplo de uma dessas respostas nas Figuras 10 e 11 a seguir.

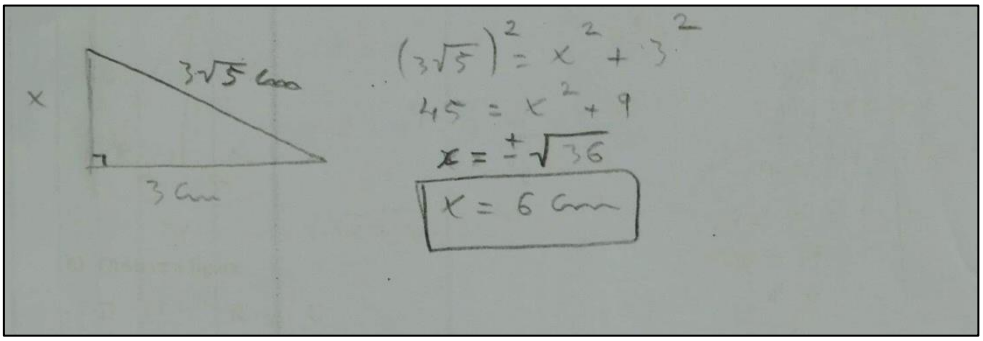
Figura 10 – Extrato da estratégia utilizada, em Q2, pelos sujeitos A18.




Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 10 aluno utiliza no teorema as medidas dos catetos como sendo, ambas, iguais a $x$. Este aplica o teorema de forma correta e quando encontra um valor para $x$, registra que as medidas dos catetos são $x + 1{,}5$ e $x - 1{,}5$. Os valores dados por esse aluno tem diferença igual a 3, como consta na questão, porém, estes valores não podem configurar medidas do triângulo em questão, pois, quando este aplica o Teorema de Pitágoras, ele se refere a um triângulo isósceles, assim, o triângulo com dimensões dadas pelo aluno não caracteriza um triângulo retângulo.

Figura 11 – Extrato da estratégia utilizada, em Q2, pelos sujeitos A29.




Fonte: Dados da pesquisa.

Na imagem da figura anterior o sujeito usa como medidas dos catetos $x$ e 3 e aplica de forma correta o Teorema de Pitágoras encontrando a medida 6 para o outro cateto. A resposta dada pelo aluno é numericamente igual à resposta correta mas, sua estratégia não. Mesmo que a medida de um dos catetos seja igual a 3, a questão não

fornece essa informação, logo, este não poderia utilizar essa medida no teorema. Acreditamos que esse aluno tenha pegado os valores que aparecerem na questão e aplicado no teorema, pois, o número 3 se encontra no enunciado.

Além dessas estratégias, aparece ainda uma classificada como *interpretação da resposta*, onde o aluno apresenta uma solução com valor positivo e outra com um valor negativo, e uma como *esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado*, onde o aluno esquece-se de elevar as medidas dos catetos ao quadrado.

É notável que seja de conhecimento de todos esses alunos o Teorema de Pitágoras e o insucesso de suas respostas são determinados pela falha no momento de determinar as medidas dos catetos do triângulo a ser tratado.

Das 12 respostas incompletas dessa questão, quatro não apresentam erros e foram classificadas como: *não finalizou a resolução do teorema* (uma resposta), *fez apenas a representação pictórica* (duas respostas) e *encontrou a medida de apenas um cateto* (uma resposta). As oito restantes apresentaram algum tipo de erro e demos a elas o mesmo tratamento que demos as respostas erradas.

Duas respostas incompletas não apresentaram indícios do teorema e suas classificações foram *utilização da fórmula de área/perímetro* (uma resposta) e *fez apenas a representação pictórica com erro na determinação dos catetos* (uma resposta).

As seis respostas incompletas restantes apresentam indícios do Teorema de Pitágoras e sua classificação pode ser vista no Quadro 6.

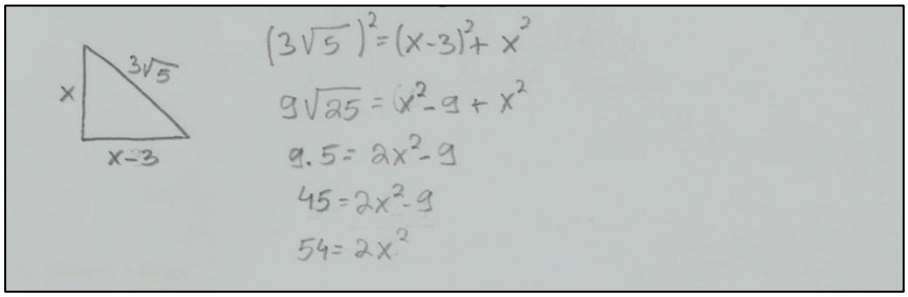
Quadro 6 - Quantitativo de respostas incompletas encontradas, em Q2, nas subcategorias de C1.

| **Subcategoria** | **Quantidade** |
|---|---|
| Erro na identificação/determinação das medidas | 3 |
| Não finalizou a resolução do teorema e apresenta erros | 1 |
| Encontrou a medida de apenas um cateto com erro na interpretação da resposta | 2 |
| **Total** | 6 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Os erros com indício do teorema das respostas incompletas são bastante semelhantes àqueles que vimos nas respostas erradas. A resposta classificada como *não finalizou a resolução do teorema e apresenta erros* está exibida na Figura 12.

Figura 12 – Extrato da estratégia, em Q2, do sujeito A09.




Fonte: Dados da pesquisa.

Na estratégia apresentada na Figura 12, o aluno identifica corretamente os elementos do triângulo e aplica o Teorema de Pitágoras, porém, comete um equívoco ao desenvolver um produto notável, em que este registra que $(x-3)^2$ é equivalente a $x^2-9$. Possivelmente esse aluno tenha confundido uma propriedade de potências que afirma que um produto de *a* e *b*, elevado a uma potência *n*, é o produto de *a* elevado a *n* e *b* elevado a *n*. Além disso, ao chegar em uma equação do 2º grau, o aluno abandona a questão e não apresenta uma resposta final. Nos registros desse aluno, na primeira questão, surgem, em letras distintas, duas equações do 2º grau incompletas, uma ele resolve e outra não.

O que percebemos com essa questão é que alguns alunos ainda apresentam dificuldade em interpretar a questão e, não conseguem assim determinar expressões corretas para as medidas dos catetos, mais de 30% dos alunos cometem erros durante essa etapa da resolução.

## 4.3 QUESTÃO 3

3) Dois navios partem de um mesmo ponto, no mesmo instante, e viajam com velocidade constante em direções que formam um ângulo reto entre si. Depois de uma hora de viagem, a distância entre os dois navios é 13 milhas. Se um deles é 7 milhas por hora mais rápido que o outro, determine a velocidade de cada navio.

A questão 3 é uma situação problema que possui relação com a física, pois, envolve o conceito de velocidade, exigindo que os alunos, com as informações dadas na questão consigam determinar a velocidade dos corpos. Nosso objetivo com essa questão era identificar se os alunos conseguiam solucionar o problema através da aplicação do Teorema de Pitágoras. Uma possível maneira de resolver esse problema é considerar a velocidade de um dos navios como $x$ milhas por hora e o outro $x + 7$ milhas por hora, assim, em cada hora a distância percorrida por eles será de $x$ e $x + 7$ milhas, respectivamente. Desta forma, podemos representar em um triângulo retângulo o percurso feito por esses navios e a distância entre eles, assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, torna-se possível a determinação de suas velocidades.

Em nossa análise encontramos nessa questão quatro respostas corretas, cinco em branco, seis com representações pictóricas, duas incompletas e 15 erradas. Do total de respostas erradas, 13 apresentam indícios do teorema (C1) e duas não (C2). As duas respostas da categoria C2 foram das classificações *resposta final sem cálculo* (uma resposta) e *inconsistente* (uma resposta). A quantificação das respostas de C1 podem ser vistas no Quadro 7.

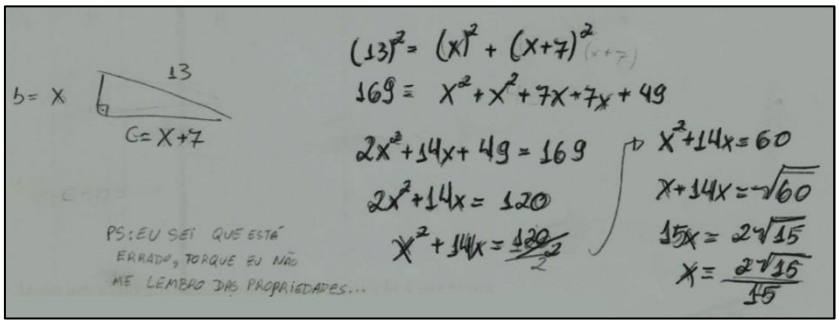
Quadro 7 - Quantitativo de respostas, em Q3, encontradas nas subcategorias de C1.

| **Subcategoria** | **Quantidade** |
|---|---|
| Esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado | 5 |
| Erro na identificação/determinação das medidas | 2 |
| Erro na resolução | 6 |
| **Total** | 13 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas estratégias que apresentam indícios da utilização do Teorema de Pitágoras, mais uma vez o erro mais frequente foi o *erro na resolução com seis respostas* e bem próximo a este erro está o *esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado*, a seguir podemos ver o esboço de estratégias dessas classificações.

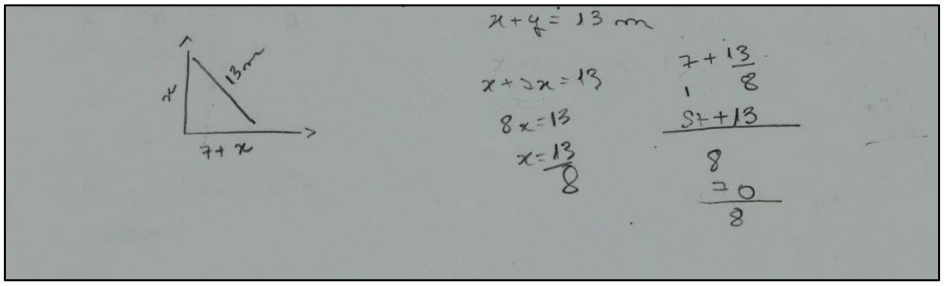
Figura 13 – Extrato da estratégia, em Q3, dos sujeitos A18.




Fonte: Dados da pesquisa.

Na estratégia apresentada na Figura 13, o aluno identifica os elementos do triângulo e aplica corretamente o teorema, o seu erro se encontra quando este está diante de uma equação do 2º grau, que não está em sua forma reduzida. Na expressão $x^2 + 14x = 120$, o aluno ao realizar o quociente entre ambos os membros da igualdade e o número 2, ele se esquece de dividir o monômio $14x$ e o seu erro não acaba aí, para resolver a equação ele calcula a raiz quadrada de todos os lados dizendo que $\sqrt{x^2 + 14x} = x + 14x$ e assim finaliza a equação do primeiro grau que resultou das suas ações. É perceptível que esse aluno também mostra dificuldades na resolução de equações do 2º grau e, registra a seguinte mensagem no questionário: “ps: eu sei que está errado, porque eu não me lembro das propriedades...”. Não sabemos quais propriedades este aluno se refere, porém, ele consegue perceber que seu procedimento estava incorreto, o que mostra que esse aluno consegue realizar uma boa avaliação sobre a sua estratégia. Bastian (2000) também detecta em sua pesquisa dificuldades dos alunos na resolução de equações do 2º grau, mas apenas em equações incompletas.

Figura 14 – Extrato da estratégia, em Q3, dos sujeitos A05.




Fonte: Dados da pesquisa.

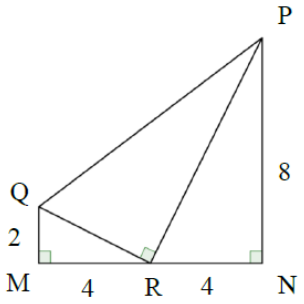
Na imagem da Figura 14, identificamos que o aluno, em sua representação pictórica, identifica corretamente a medida dos catetos, porém, quando vai utilizar a relação entre essas medidas, ele não só utiliza a medida errada, $7x$, ao invés de $7 + x$, como também se esquece de elevar a medida dos elementos do triângulo, ao quadrado. Esse aluno comete esse mesmo erro em várias outras questões, ponderamos que esse aluno não compreende de forma correta o Teorema de Pitágoras, podendo o seu conhecimento ser fruto de memorização do teorema.

Nas pesquisas de Reis e Perovano (2016) e Bastian (2000), também são encontradas estratégias semelhantes, porém, estas, apenas com o esquecimento de elevar a hipotenusa ao quadrado.

As duas respostas incompletas dessa questão são, ambas, da categoria C1 – Apresentam indícios do teorema e, foram classificadas como *não finalizou a resolução do teorema*, pois, ambas foram abandonas quando era necessária a resolução da equação de 2º grau.

## 4.4 QUESTÃO 4

4) Considerando a figura abaixo, determine o perímetro do trapézio MNPQ.




Tínhamos como objetivo na questão analisar se os alunos conseguiam determinar o perímetro do trapézio, PQMN, dado na questão, onde faltava a medida do lado PQ e, para isso deveriam utilizar o Teorema de Pitágoras. Uma das possíveis estratégias que poderia ser adotada por eles era identificar os triângulos retângulos MQR e NPR, retos em M e N, aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar a medida da hipotenusa desses triângulos, que são os catetos do triângulo retângulo RPQ, e assim poder encontrar a medida do lado PQ aplicando novamente o teorema nesse terceiro triângulo.

Na análise dessa questão encontramos 15 respostas corretas, em que duas delas apresentam apenas a resposta final, sete respostas em branco, duas respostas incompletas e oito respostas erradas. Nas respostas incompletas, notamos a presença do Teorema de Pitágoras, que indica que possivelmente esse é de conhecimento dos dois sujeitos. As respostas incompletas, dentro de C1, foram classificadas como *não calculou o perímetro e não finalizou a resolução do teorema*.

Os erros dessa questão foram separados nas categorias C1 (três respostas) e C2 (cinco respostas). O Quadro 8 apresenta as subcategorias de C2 para essas respostas.

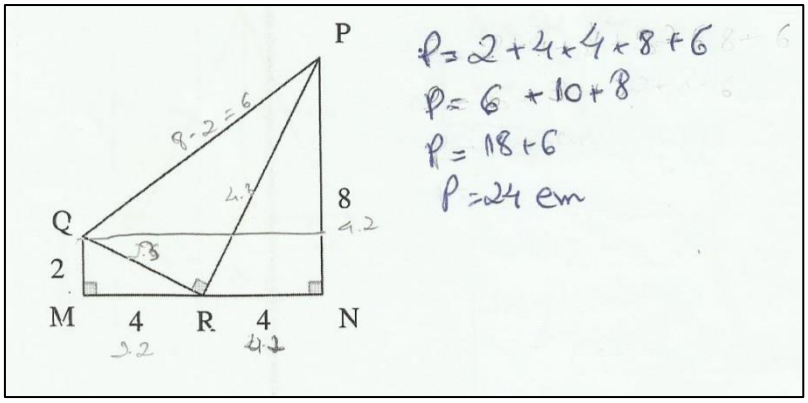
Quadro 8 - Quantitativo de respostas, em Q4, encontradas nas subcategorias de C2.

| **Subcategoria** | **Quantidade** |
|---|---|
| Possível confusão com semelhança de triângulos | 1 |
| Utilização da fórmula de área/perímetro | 3 |
| Erro na identificação/determinação das medidas | 1 |
| **Total** | 5 |

Fonte: Dados da pesquisa.

As estratégias *possível confusão com semelhança de triângulos* e *utilização da fórmula de área/perímetro*, apresentadas no Quadro 8, já apareceram em classificações anteriores de C2, a novidade que temos é a *erro na identificação/determinação das medidas*, apresentada nessa questão por apenas um aluno. A estratégia desse aluno pode ser observada na Figura 15.

Figura 15 – Extrato da estratégia, em Q4, utilizada pelo sujeito A17.




Fonte: Dados da pesquisa.

Observando a estratégia do aluno A17 em Q4, percebemos que o aluno identificou a medida do lado PQ como sendo a diferença entre as medidas de PN e QM, que não é correto, pois, isso só ocorreria se P, Q e M fossem colineares e QP//PN. Possivelmente, esse aluno tem dificuldades em determinar essas medidas.

As três questões restantes, categorizadas em C1, são todas da subcategoria *erro na resolução*, em que essas apresentavam erros nas operações básicas e erros com potências e radiciação, que já foram detectadas em pesquisas já mencionadas aqui.

## 4.5 QUESTÃO 5

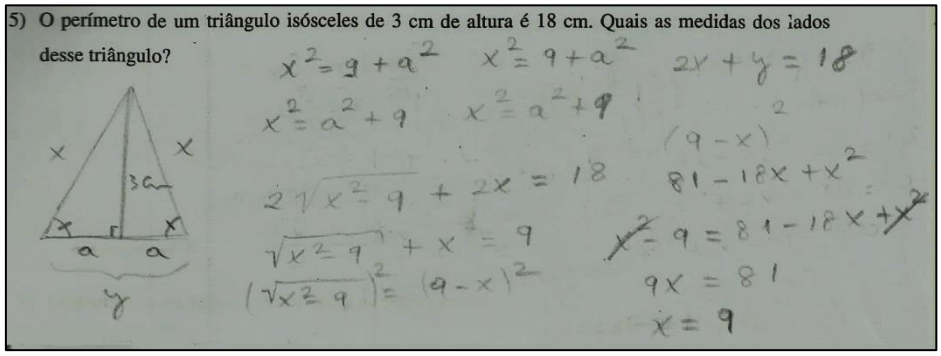
5) O perímetro de um triângulo isósceles de 3 cm de altura é 18 cm. Quais as medidas dos lados desse triângulo?

Na questão 5, nosso objetivo era analisar se o aluno conseguia determinar as medidas do lados do triângulo tratado no problema. Para determinar essas medidas, uma possível resposta seria identificar uma relação entre os lados desse triângulo, utilizando o valor do perímetro dado na questão, e assim ter a medida de um lado em função de outro lado. Em seguida, o aluno poderia traçar a altura relativa ao lado não congruente desse triângulo, obtendo dois triângulos retângulos congruentes em que poderia ser aplicado o Teorema de Pitágoras e assim, determinar as medidas procuradas.

Em nossa análise, encontramos três respostas corretas, uma resposta em branco, seis respostas contendo apenas a representação pictórica do triângulo, 10 questões incompletas e 12 respostas erradas. Das seis respostas em que havia apenas representações pictóricas, duas apontavam a medida da altura como 18 cm, o que indica que houve um equívoco interpretação da questão, que diz que "O perímetro de um triângulo isósceles de 3 cm de altura é 18 cm". Essa confusão também aparece nas respostas erradas e incompletas.

Das 10 respostas incompletas, três não apresentam indícios do teorema e são todas categorizadas como *erro na determinação/identificação das medidas*, em que dois deles confundiram as medidas da altura e do perímetro, e um não soube identificar o tipo de triângulo mencionado na questão, acreditando se tratar de um triângulo equilátero. As sete respostas que apresentavam indícios do teorema, tiveram como subcategorias o *erro na determinação/identificação das medidas* (quatro respostas) e o *erro na resolução* (três respostas), contendo na última, erros com potência, radiciação e na resolução de equação do 1º grau. Na Figura 16 a seguir está apresentada uma dessas resoluções.

Figura 16 – Extrato da estratégia, em Q5, utilizada pelo sujeito A29.

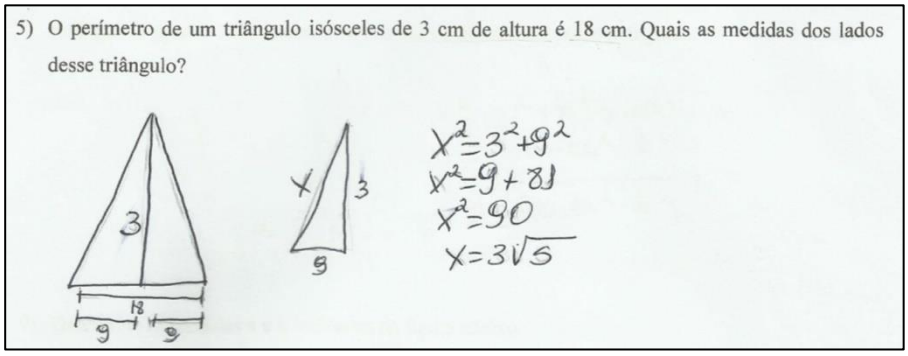



Fonte: Dados da pesquisa.

Na estratégia apresentada na figura anterior o aluno consegue estabelecer uma relação entre os lados do triângulo com a altura, utilizando o Teorema de Pitágoras e em seguida utiliza do cálculo do perímetro para determinar o valor dos lados congruentes. A sua estratégia está correta até o momento em que este chega à equação do 1º grau: $-9 = 81 - 18x$. Pelo registro do aluno, entendemos que ele adiciona o valor $18x$ em ambos os membros da igualdade e realiza a operação $-9 + 18x$, resultando em $9x$, que não está correto, e obtendo como medida para os lados congruentes o valor 9. Este sujeito não apresenta o valor do terceiro lado do triângulo, que também é pedido na questão, por este motivo sua resposta foi classificada como incompleta. Na literatura revisada não encontramos menções a erros ou dificuldades dos alunos na resolução de equações de 1º grau, em questões que envolvem o Teorema de Pitágoras.

Nas 12 respostas erradas, tivemos quatro que apresentaram indícios do teorema e oito que não. As quatro que apresentam indícios foram categorizadas como *erro na identificação/determinação das medidas* (uma resposta) e *erro na resolução* (três respostas), sendo que a última apresenta erros apenas com radiciação. A resposta categorizada como *erro na identificação/determinação de medidas* pode ser vista na Figura 17.

Figura 17 – Extrato da estratégia, em Q5, utilizada pelo sujeito A15.

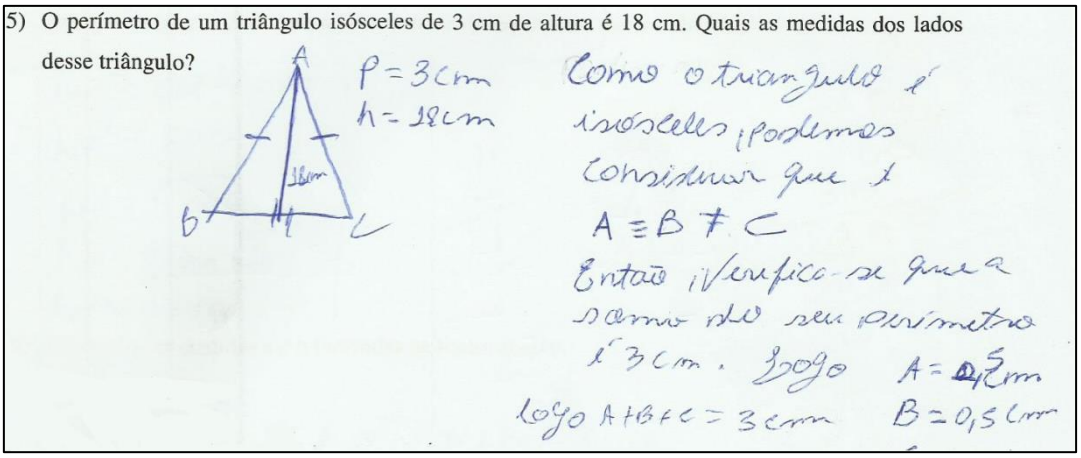



Fonte: Dados da pesquisa.

Na estratégia da Figura 17, o aluno entende que a altura do triângulo mede 3 cm e a base do triângulo 18 cm e usa dessas informações para determinar a medida dos outros dois lados congruentes do triângulo, utilizando o Teorema de Pitágoras. O processo feito pelo aluno estaria correto se não fosse o erro cometido na identificação das medidas dadas na questão.

Os erros da categoria C2 estão categorizados em *inconsistente* (uma resposta), *resposta final sem cálculo* (uma resposta) e *erro na identificação/determinação das medidas* (seis respostas). Dos seis alunos que utilizaram a estratégia erro na identificação/determinação das medidas, quatro entenderam que o triângulo da questão, era um triângulo isósceles e, como seu perímetro era de 18 cm, a medida dos lados só poderia ser igual a 6 cm. Os outros dois, tiveram respostas bastante interessantes e podem ser vistas nas figuras a seguir.

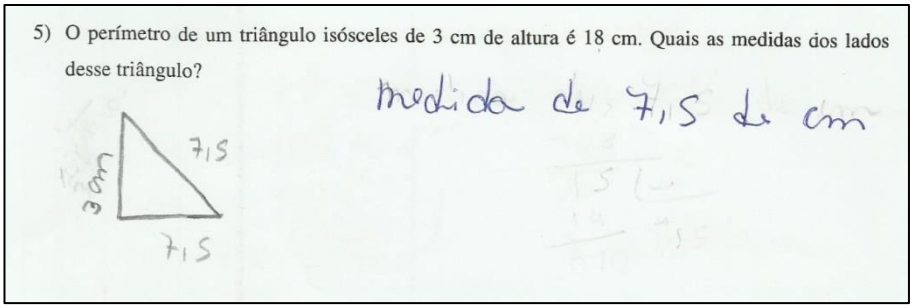
Figura 18 - Extrato da estratégia, em Q5, utilizada pelo sujeito A16.




Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 18 é apresentada uma estratégia onde o aluno indica o perímetro do triângulo como 3 cm e a altura como 18 cm e em seguida escreve: “Como o triângulo é isósceles, podemos considerar que $A \equiv B \neq C$”. Outro erro que pode ser apontado nessa estratégia é o fato de o aluno utilizar da representação de pontos para representar segmentos. Em seguida, ele escreve que a soma dos lados precisa ser igual 3 cm e aponta os valores 0,5 e 2 cm como sendo as medidas procuradas, descartando o outro valor informado na questão.

Figura 19 - Extrato da estratégia, em Q5, utilizada pelo sujeito A19.

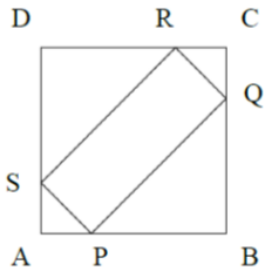



Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 19, o aluno faz a representação do que parece ser um triângulo retângulo com um dos catetos igual a 3 cm, que é o que ele considera como a altura do triângulo, e os outros dois lados com medidas iguais a 7,5, pois quando somadas todas as medidas desse triângulo o valor resultante é igual a 18. Se esse aluno considera o triângulo desenhado como um triângulo retângulo, a sua resposta continuaria errada uma vez que, a sua hipotenusa teria a mesma medida que um dos seus catetos, se ela fosse um dos lados de medida 7,5. Se a hipotenusa fosse o lado de medida 3 cm, ela seria menor que os seus catetos. Nenhuma dessas duas circunstâncias pode ocorrer em um triângulo retângulo. Se o aluno não considerou esse triângulo como sendo retângulo, sua resposta continua errada, pois, a altura do triângulo não seria nenhum de seus lados, como está representado no triângulo construído por ele. Essas estratégias nos mostram que alguns alunos ainda encontram dificuldade na interpretação de questões, nas representações de objetos geométricos e nos conhecimentos sobre triângulos.

## 4.6 QUESTÃO 6

6) Observe a figura.




Nessa figura, ABCD representa um quadrado de lado 11 e AP = AS = CR = CQ. Qual o perímetro do quadrilátero PQRS?

Na questão de número 6, nosso objetivo era avaliar se os alunos conseguiam a partir dos dados da questão, determinar o perímetro do retângulo inscrito no quadrado de lado 11, dados na questão. Uma possível estratégia para solucionar essa questão seria indicar a medida do segmento $\overline{AP}$ por $x$ e $\overline{PB}$ por $11 - x$, assim teríamos quatro triângulos retângulos, congruentes dois a dois, em que temos a expressão correspondente a medida dos seus catetos e as hipotenusas são os lados do retângulo cujo perímetro se deve determinar. Assim, bastaria aplicar o Teorema de Pitágoras em dois triângulos não congruentes para determinar as medidas dos lados do retângulo e assim calcular seu perímetro.

Analisando essa questão, foi identificada apenas uma resposta correta, 20 respostas em branco, oito incompletas e três respostas erradas. As subcategorias das respostas incompletas podem ser encontradas no Quadro 9.

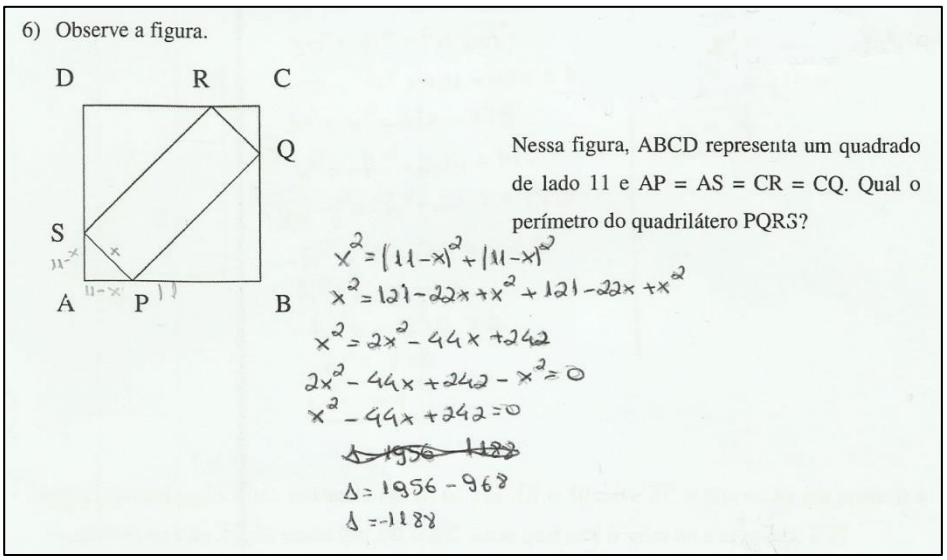
Quadro 9 – Quantitativo de respostas incompletas em Q6.

| **Subcategoria** | **Quantidade** | **Categoria** |
|---|---|---|
| Erro na resolução | 1 | C1 |
| Esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado | 1 | C1 |
| Não finalizou a questão | 2 | C1 |
| Erro na identificação/determinação das medidas | 2 | C1 |
| Inconsistente | 2 | C2 |
| **Total** | 8 | |

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com o Quadro 9, uma das estratégias mais frequentes no grupo das respostas incompletas foi a *erro na identificação/determinação das medidas*, utilizada em duas respostas de forma bastante semelhante, uma dessas estratégias pode-se ver na Figura 20.

Figura 20 – Extrato da estratégia, em Q6, utilizada por A27.




Fonte: Dados da pesquisa.

A estratégia exibida na Figura 20 mostra que o aluno chama a medida do segmento $\overline{AP}$ de $11 - x$, consequentemente $\overline{PB}$ deve medir $x$, já que o lado $\overline{AB}$ mede 11. Porém, este aluno diz que a medida da hipotenusa do triângulo $APS$ tem medida igual a $x$, que não é verdade. Esse aluno então aplica o teorema de Pitágoras nesse triângulo retângulo e obtém uma equação do 2º grau, cuja solução não é finalizada por ele e ainda comete um erro ao calcular o $b^2$ da fórmula do delta, afirmando que $(-44)^2 = 1956$, enquanto que a resposta correta é $1936$. Com a análise dessa estratégia é possível identificar que o aluno possui dificuldade em estabelecer expressões para as medidas dos lados da figura dada na questão.

Nessa questão tivemos apenas três respostas erradas, em que duas não apresentavam indícios do teorema, categorizadas como *inconsistentes* e uma apresentava indícios do teorema e pertence à categoria *erro na resolução*, por apresentar erros com o cálculo de potências.

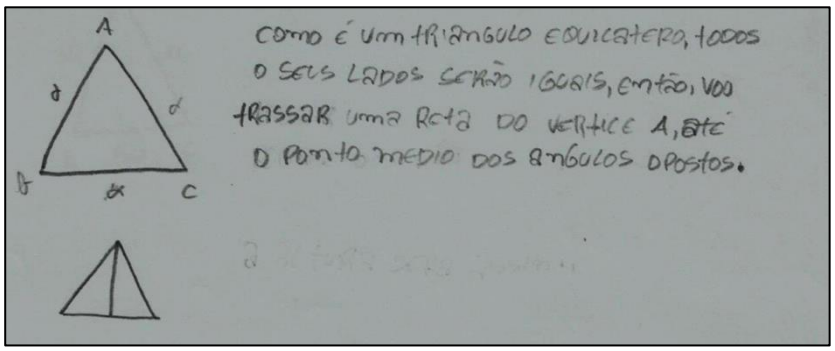
## 4.7 QUESTÃO 7

7) Dado um triângulo equilátero de lado $a$, calcule a sua altura.

Na questão sete nosso objetivo era identificar se os alunos conseguiam determinar uma expressão para a altura do triângulo utilizando o Teorema de Pitágoras. Uma possível maneira de solucionar a questão seria traçando a altura desse triângulo, que determina em um dos lados dois segmentos congruentes e forma dois triângulos retângulos também congruentes, para assim aplicar o Teorema de Pitágoras e encontrar a expressão que determina a medida da altura de um triângulo equilátero qualquer.

O número de respostas corretas encontradas nessa questão foi igual a cinco. Além disso, houve 10 respostas em branco, duas incompletas e 15 respostas erradas. Das duas respostas incompletas dessa questão uma possui indícios do teorema e outra não, sendo categorizadas como *erro na identificação/determinação das medidas* e *registro de estratégia*, respectivamente. A última pode ser observada na Figura 21.

Figura 21 – Extrato da estratégia, em Q7, utilizada pelo sujeito A09.




Fonte: Dados da pesquisa.

Na estratégia apresentada na figura anterior o aluno parece ter confundido a representação da medida do triângulo equilátero, que na questão aparece como sendo $a$, mas, em seu registro o aluno a representa por $\propto$, notação utilizada normalmente para ângulos. Após a representação pictórica do triângulo equilátero, o aluno registra a seguinte mensagem “como é um triangulo equilatero, todos o seus lados serão iguais,

então, vou trassar uma reta do vertice a, até o ponto medio dos angulos opostos". Nessa questão, o aluno registra a sua estratégia, mas, não a executa e não apresenta indícios de que iria fazer uso do Teorema de Pitágoras. Observamos também que esse comete equívocos em seu registro quando diz que irá traçar uma reta do vértice A, até o ponto médio dos ângulos opostos. Entendemos que este aluno quis dizer que iria traçar uma reta que passe pelo ponto A e pelo ponto médio do lado oposto ao ponto A, que seria um dos procedimentos corretos para iniciar a resolução da questão. Identificamos também alguns erros de ortografia no registro do seu registro, sendo eles as palavras "triangulo", "equilatero", "o", "trassar", "vertice", "medio" e "angulos", o que deve ser corrigido o quanto antes, uma vez que esse sujeito muito em breve estará atuando em sala de aula, correndo o risco de reproduzir tais erros.

As categorias das 15 respostas incorretas podem ser vistas no Quadro 10, a seguir.

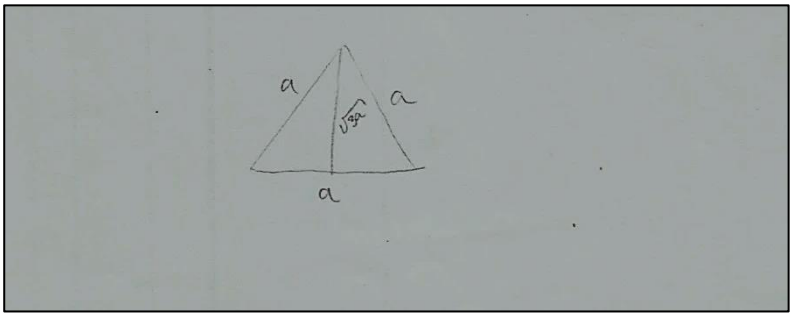
Quadro 10 – Quantitativo de respostas incorretas em Q7.

| **Subcategoria** | **Quantidade** | **Categoria** |
|---|---|---|
| Erro na resolução | 4 | C1 |
| Esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado | 1 | C1 |
| Indício de conhecimento da fórmula de altura | 1 | C2 |
| Erro na identificação/determinação das medidas | 4 | C1 |
| Inconsistente | 3 | C2 |
| Utilização da fórmula de área/perímetro | 2 | C2 |
| **Total** | 15 | |

Fonte: Dados da pesquisa.

Observando o quadro mostrado anteriormente, vimos que as estratégias mais frequentes nos erros foram *erro na identificação/determinação das medidas* e *erro na resolução*, em que a última apresentou erros com potência, radiciação e operações com frações. Em uma das respostas apareceu à categoria que chamamos de *indício de conhecimento da fórmula de altura*, essa estratégia pode ser vista na figura a seguir.

Figura 22 – Extrato da estratégia utilizada, em Q7, pelo sujeito A23.

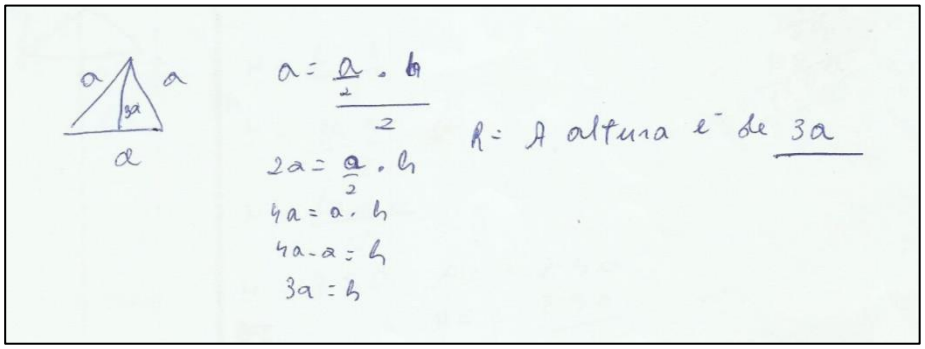



Fonte: Dados da pesquisa.

Na estratégia apresentada na Figura 22 o aluno faz a representação pictórica do triângulo equilátero com lados de medida $a$, traça o segmento que representa a altura do triângulo e a medida desse segmento atribui a expressão $\sqrt{3a}$. Acreditamos que esse aluno possivelmente já conheça a fórmula para determinar a altura de um triângulo equilátero, representada pela expressão $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ e tenha se confundido em seu registro.

Outra estratégia encontrada nessa questão foi a *utilização da fórmula de área/perímetro*, que pode ser vista na Figura 23.

Figura 23 – Extrato da estratégia utilizada, em Q7, pelo sujeito A06.




Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa estratégia o sujeito possivelmente lançou mão da fórmula de área de triângulos para solucionar a questão, dizendo que a área é igual à $a$, que é a medida do lado do triângulo equilátero. Porém, este calcula a área do triângulo retângulo formado pelo segmento respectivo a altura do triângulo equilátero, pois, o valor da base que este aluno utiliza é $\frac{a}{2}$. O restante do procedimento o aluno realiza de forma correta e obtém como medida para a altura a expressão $3a$, que não é válida.

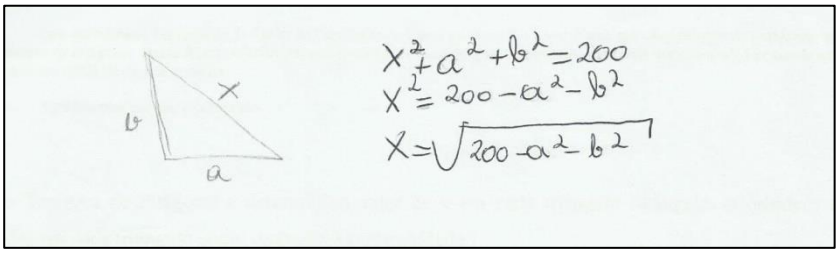
## 4.8 QUESTÃO 8

8) Sabendo que a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a 200, determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

Com a questão oito tínhamos o objetivo de verificar se os alunos conseguiam identificar a medida da hipotenusa do triângulo retângulo com as informações dadas no problema. Uma possível forma de solucionar essa questão seria identificando que a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa é igual a duas vezes a hipotenusa ao quadrado, pois a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, segundo o Teorema de Pitágoras. Assim, teríamos que a hipotenusa ao quadrado é igual a $100$ e consequentemente, a hipotenusa é igual a $10$.

Essa questão possui nove respostas corretas, 12 respostas em branco, seis incompletas e cinco respostas erradas. As seis respostas incompletas foram categorizadas como *erro na identificação/determinação das medidas*, onde três delas consideraram o triângulo da questão como sendo isósceles ou equilátero e os outros três não souberam estabelecer uma relação entre os lados do triângulo. A Figura 24 apresenta um registro dessa categoria.

Figura 24 – Extrato da estratégia utilizada, em Q8, por A15.




Fonte: Dados da pesquisa.

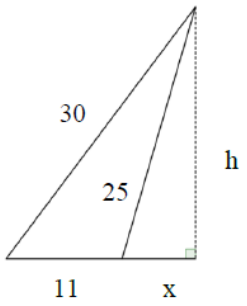
A Figura 24 apresenta a estratégia do aluno A15, em que este chama os catetos do triângulo de $a$ e $b$ e a hipotenusa de $x$ e, com esses valores registra a expressão dada na questão. O que este aluno não percebe é que $a^2 + b^2 = x^2$, assim, ele acaba

chegando a uma equação com três incógnitas e não consegue apresentar uma resposta final numérica.

Do total de cinco respostas erradas, três apresentam indícios do teorema e duas não, sendo essas duas categorizadas como *inconsistentes*. As três respostas com indícios, tiveram duas categorias distintas, a *interpretação da resposta* (uma resposta) e *erro na identificação/determinação das medidas* (duas respostas). A última se deu quando os alunos entenderam que a questão dizia que o quadrado da hipotenusa era igual a 200, levando-os ao erro, isso é um sinal de que esses alunos tiveram problemas com a interpretação da questão.

## 4.9 QUESTÃO 9

9) Determine as medidas x e h indicadas na figura abaixo.




Na questão nove, nosso objetivo era identificar se o aluno conseguia determinar as medidas dos catetos de um triângulo retângulo, de acordo com a imagem dada na questão. Uma das formas de solucionar essa questão seria aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos $x$ e $h$ e escrever a medida da altura em função de $x$. Em seguida, aplicar o teorema no triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 30, substituindo a medida da altura pela expressão encontrada anteriormente. Dessa forma, será possível determinar a medida do cateto $x$ e assim, encontrar a medida de $h$ utilizando a primeira relação feita.

Nessa questão, houve apenas quatro respostas corretas, seis respostas em branco, 15 incompletas e sete respostas erradas. O Quadro 11 apresenta as categorias delimitadas de acordo com as respostas incompletas.

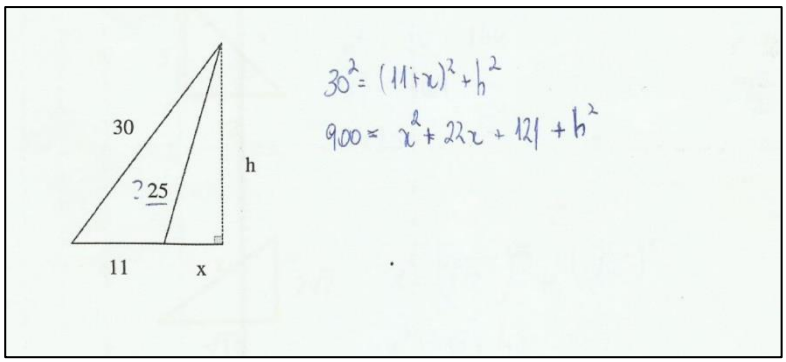
Quadro 11 – Quantitativo de respostas incompletas em Q9.

| **Subcategoria** | **Quantidade** | **Categoria** |
|---|---|---|
| Erro na resolução | 3 | C1 |
| Possível confusão com semelhança de triângulos | 1 | C2 |
| Possível confusão com soma dos ângulos internos | 1 | C2 |
| Erro na identificação/determinação das medidas | 7 | C1 |
| Não finalizou a questão | 1 | C1 |
| Utilização da fórmula de área/perímetro | 1 | C2 |
| Resposta final sem cálculo | 1 | C2 |
| **Total** | 15 | |

Fonte: Dados da pesquisa.

Como observado no quadro anterior, a estratégia mais frequente foi o *erro na identificação/determinação das medidas*, que ocorreu quando o aluno confundiu a hipotenusa com um dos catetos ou quando este não consegue estabelecer uma relação entre os lados do triângulo, resultando em uma equação com duas incógnitas. Podemos observar algumas dessas estratégias nas Figuras 25 e 26.

Figura 25 – Extrato da estratégia utilizada, em Q9, por A02.

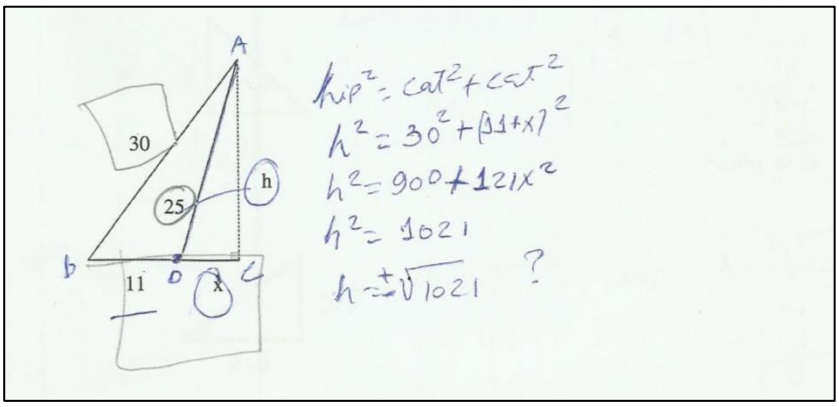



Fonte: Dados da pesquisa.

Na estratégia do sujeito A02 na questão nove, apresentada na Figura 25, o aluno aplica corretamente o teorema no triângulo retângulo de hipotenusa igual á 30, porém, este chega a uma equação com duas incógnitas e não consegue mais resolver o problema. Supomos que esse aluno não percebeu que havia na figura outro triângulo

retângulo de hipotenusa igual a 25, em que este poderia estabelecer uma relação entre as medidas $h$ e $x$, e assim solucionar a primeira equação registrada. Note que esse sujeito destaca a medida 25 do segundo triângulo e escreve o sinal de interrogação ao lado da medida. Isso reforça a nossa ideia de que o aluno não reconheceu o segundo triângulo retângulo.

Figura 26 – Extrato da estratégia utilizada, em Q9, por A16.

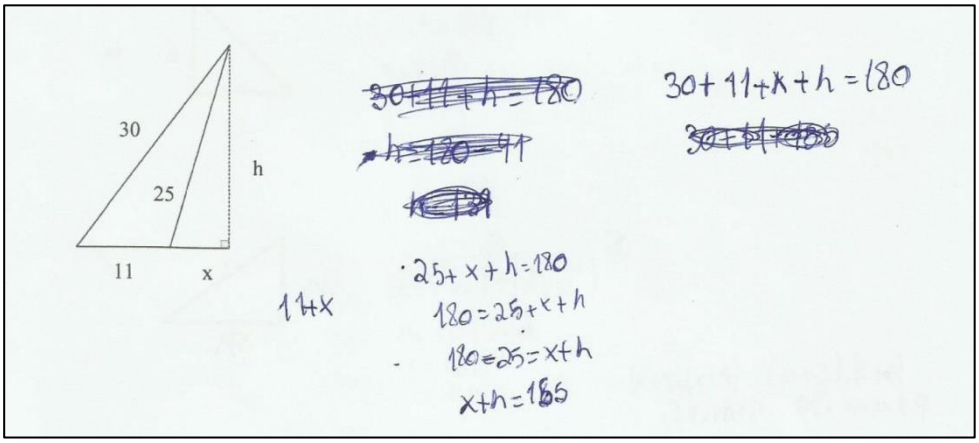



Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 26 observamos que o sujeito tenta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa igual a 30, mas acaba confundindo a medida da hipotenusa com um dos catetos do triângulo. Erro também frequente nas pesquisas de Rodrigues e Menezes (2010) e Pereira, Couto e Costa (2016). Observe também que este aluno apresenta dificuldades na resolução de produtos notáveis, escrevendo que $(11 + x)^2 = 121x^2$, na soma de monômios, realizando operação $900 + 121x^2$ e registrando como resultado $1021$. Apresenta também um erro na interpretação da resposta, escrevendo um valor negativo como possível medida para o cateto do triângulo, quanto a isso Bastian (2000) afirma que é importante o aluno reconhecer a existência do resultado negativo para a solução da equação, contudo, este deve entender que não é adequado fazer uso de valores negativos para representar medidas.

Outra estratégia também presente nas respostas incorretas foi a *possível confusão com a soma dos ângulos internos*, essa estratégia está apresentada na figura a seguir.

Figura 27 – Extrato da estratégia utilizada, em Q9, por A13.

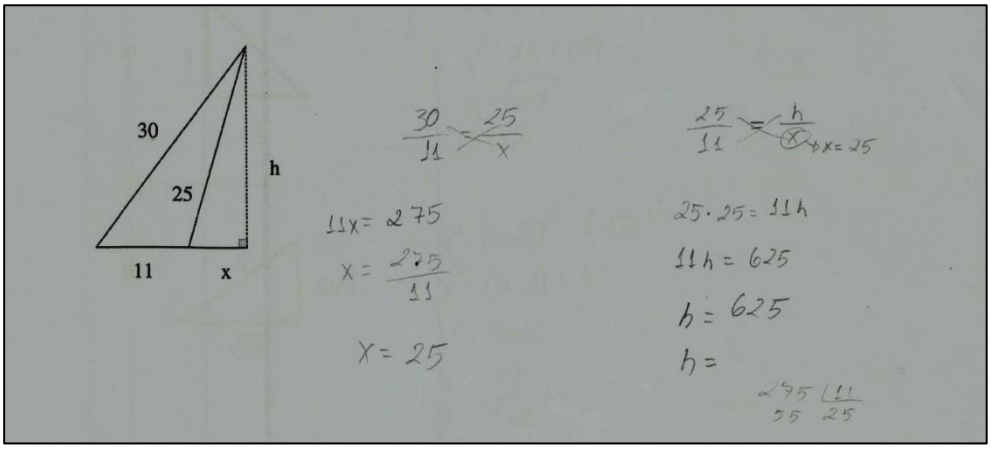



Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa estratégia, podemos observar que o aluno registra que a soma das medidas dos lados dos triângulos é igual a 180, mas não consegue chegar a uma solução para o problema. Ponderamos que esse aluno tenha se confundido com a soma dos ângulos internos de um triângulo, cujo resultado é igual a um ângulo raso.

Do total de sete respostas erradas, três possuíam indícios do teorema e quatro não. As respostas da categoria C1 foram categorizadas como *erro na identificação/determinação das medidas* (duas respostas) e *erro na resolução* (uma resposta), em que o erro desta se encontra na resolução de potências. As quatro respostas que não apresentam indícios do teorema, foram ambas categorizadas como *possível confusão com semelhança de triângulos* e uma dessas estratégias pode ser vista a seguir na Figura 28.

Figura 28 – Extrato da estratégia utilizada, em Q9, por A18.




Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa estratégia, o aluno registra a igualdade $\frac{30}{11} = \frac{25}{x}$, que acreditamos ser a razão de semelhança de dois triângulos, resolve de forma incorreta e encontra o valor igual a 25 para a medida $x$. De acordo com esse registro, o aluno indica que os triângulos de medidas $30, 11$ e $25$ e $25, x$ e $h$ são semelhantes, que não é verdade, pois o triângulo maior possui apenas um ângulo interno congruente a um dos ângulos internos do triângulo menor, que é o ângulo reto. Ao lado, o aluno continua insistindo nessa estratégia para determinar o valor de $h$, mas, quando é necessária a divisão do número $625$ pelo número $11$, esse aluno interrompe sua resolução.

## 4.10 QUESTÃO 10

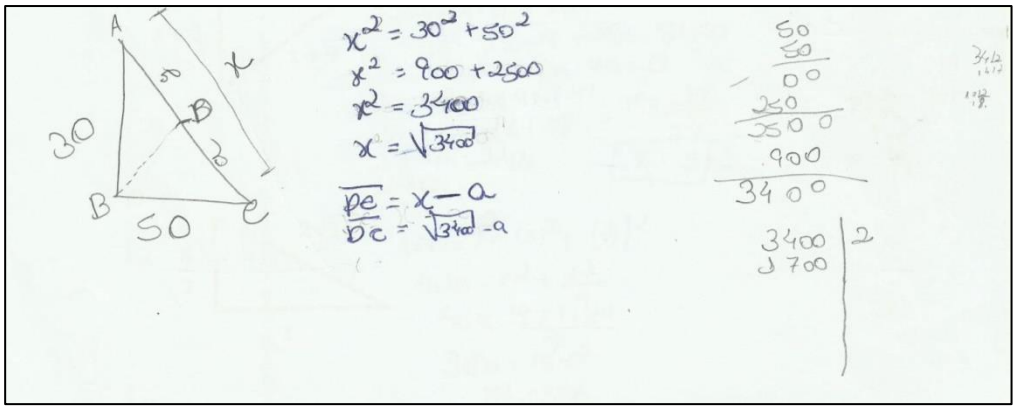
10) Seja um triângulo ABC, retângulo em A, tal que $\overline{AB}$ = 30 cm e $\overline{BC}$ = 50 cm. Se um ponto D é marcado no lado $\overline{AC}$, de modo que $\overline{BD} = \overline{DC}$, então qual será o valor do o segmento $\overline{DC}$?

Na questão 10, nosso objetivo era verificar se os alunos conseguiam determinar a medida de um segmento, com as informações dadas na questão. Uma possível estratégia para esse problema seria aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo $ABC$ e assim determinar a medida de $\overline{AC}$, que é igual a $40$. Desta forma, como $D$ é um ponto do segmento $\overline{AC}$, tem-se que $\overline{AD} + \overline{DC} = 40 \rightarrow \overline{AD} = 40 - \overline{DC}$. Como já é conhecida a medida de um dos lados e têm-se expressões para a medida dos dois outros lados do triângulo retângulo $ABD$, é possível aplicar o teorema e descobrir a medida do segmento que se procura.

Nessa questão, houve apenas duas respostas corretas, oito respostas em branco, nove respostas contendo apenas a representação pictórica do triângulo, cinco respostas incompletas e oito erros. Nas respostas que continham apenas as representações pictóricas, em quatro delas os alunos a fizeram de forma correta, enquanto que em cinco os alunos não construíram um triângulo reto em $A$, como era informado no texto, mas sim em um dos outros vértices do triângulo.

Analisando as respostas incompletas, encontramos uma resposta que não apresenta indícios do teorema, categorizada como *possível confusão com a soma dos ângulos internos* e quatro respostas com indícios do teorema, cujas categorizações foram *erro na identificação/determinação das medidas* (três respostas) e *erro na resolução* (uma resposta), sendo essa um erro com produtos notáveis. Na Figura 29, pode-se observar uma estratégia da categoria *erro na identificação/determinação das medidas*.

Figura 29 – Extrato da estratégia utilizada, em Q10, por A17.

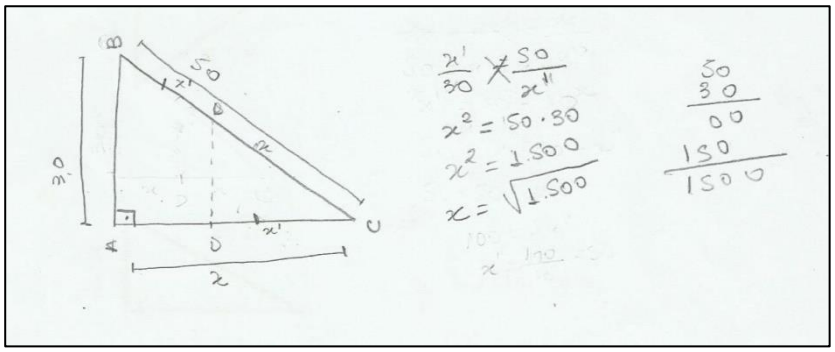



Fonte: Dados da pesquisa.

Na estratégia da Figura 29 podemos observar a representação do triângulo $ABC$ feito pelo sujeito, em que o ângulo reto não está em $A$. Este aluno aplica o teorema de Pitágoras em seu triângulo, porém, não obtém uma medida correta, pois, como seu triângulo não é o mesmo que o mencionado na questão, ele acaba cometendo erros ao identificar a hipotenusa e os catetos e ainda não consegue encontrar uma resposta para a medida de $\overline{DC}$.

Do total de oito respostas erradas, três apresentam indícios do Teorema de Pitágoras e cinco não. As respostas que não apresentam indícios do teorema foram categorizadas como *possível confusão com semelhança de triângulos* (duas respostas), *possível confusão com soma dos ângulos internos* (uma resposta), *utilização da fórmula de área/perímetro* (uma resposta) e *resposta final sem cálculo* (uma resposta), já as respostas que apresentam indícios do teorema foram todas classificadas como *erro na identificação das medidas*. Algumas dessas estratégias podem ser observadas nas Figuras 30 e 31.

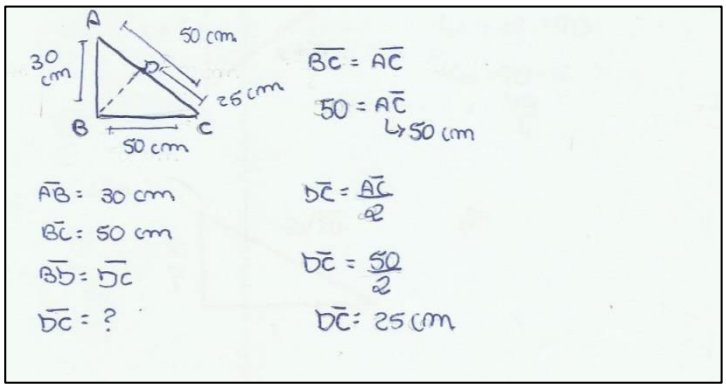
Figura 30 – Extrato da estratégia utilizada, em Q10, por A05.




Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 30 observamos os registros do aluno A05 e vemos que este marca um ponto $D$ no lado $\overline{AC}$ e outro ponto, que ele também chama de $D$, no lado $\overline{BC}$. O que parece, é que esse aluno determinou esses pontos de tal forma que o segmento $\overline{DD}$ é paralelo a $\overline{AB}$, então, seria possível utilizar a razão de semelhança entre os dois triângulos e determinar a medida de $\overline{DC}$. O que acontece é que, o aluno comete cerros com a determinação desses pontos no triângulo e suas medidas, o que invalida a sua resposta. Essa é uma estratégia categorizada como *possível confusão com semelhança de triângulos*.

Figura 31 – Extrato da estratégia utilizada, em Q10, por A20.




Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 31 o sujeito constrói o triângulo $ABC$, que não é reto em $A$, em seguida registra que $\overline{BC} = \overline{AC}$ e consequentemente $\overline{AC} = 50$. O aluno ainda considera que o ponto $D$ marcado no segmento $\overline{AC}$ é o ponto médio desse segmento e assim

$\overline{DC} = 25\ cm$. Essa foi uma estratégia categorizada como *erro na identificação/determinação das medidas*.

## 4.11 DISCUSSÃO GERAL

Através da tabulação dos dados podemos observar que as questões com maior índice de acertos são as questões de número um e quatro. Em ambas as questões eram apresentados os triângulos retângulos, em que na primeira questão o aluno precisaria apenas aplicar o Teorema de Pitágoras e na quarta questão além de aplicar o teorema, o aluno deveria determinar o perímetro da figura. Acreditamos que essas questões tiveram tal índice de acertos por se tratarem de questões de aplicação direta do teorema, em que não era exigida uma reflexão, sobre a situação proposta, para a sua resolução. Podendo isso ser um indicativo de que, mesmo no nível superior, existam dificuldades dos alunos em interpretar questões.

Analisando as 416 respostas, encontramos 138 respostas erradas enquanto apenas 100 respostas estavam corretas. Nesse total de respostas incorretas a estratégia mais utilizada, contida em 49 respostas, possuindo indícios de conhecimento do Teorema de Pitágoras, foi a *erro na resolução*. Os erros cometidos nessas respostas estavam no cálculo de potências, raízes, produtos notáveis, equações do 2º grau e nas operações básicas, o que nos indica que esses alunos estão chegando ao ensino superior com dificuldades em conteúdos que são abordados durante a sua escolaridade anterior. Erros assim já haviam sido detectados nos estudos de Bastian (2000), Pereira, Couto e Costa (2016) e Reis e Perovano (2016), realizados em diferentes regiões e modalidades de ensino, podendo isto ser um reflexo da qualidade da educação básica em nosso país.

Já na categoria que não apresenta indícios de conhecimento do Teorema de Pitágoras, as estratégias mais frequentes foram *possível confusão com semelhança de triângulos* (10 respostas) e *utilização da fórmula de área/perímetro/altura* (12 respostas). Supomos que a utilização dessas estratégias deu-se pelo fato de que o conteúdo Semelhança de triângulos havia sido recentemente abordado em uma das disciplinas nas quais os sujeitos estavam matriculados e por acreditarmos que o cálculo

de área e perímetro é bastante enfatizado na educação básica, então, esses utilizaram dessas ferramentas para resolverem as questões.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a leitura de uma pesquisa realizada por dois professores desta universidade, que investigaram as estratégias dos alunos desse curso em questões que envolviam o Teorema de Pitágoras, surgiu a vontade de investigar as estratégias dos alunos ao ingressarem na universidade.

Assim, realizamos este trabalho com o objetivo de analisar as estratégias de alunos recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática, quando estes se encontram diante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras em sua resolução.

O Teorema de Pitágoras, que é um conhecimento presente desde as civilizações do mundo antigo, é um dos teoremas mais famosos da Matemática, seja por sua simplicidade ou pelas suas diversas aplicações. É um conteúdo trabalhado na Educação Básica durante o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio, em que o conhecimento desse deve ser consolidado, assim é necessário que o professor de Matemática tenha domínio sobre o seu conceito e suas aplicações, pois de acordo com Reis e Perovano (2016) é papel do professor estimular o aluno a buscar soluções para problemas do cotidiano a partir desses conhecimentos.

Realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa e caráter descritivo, em que participaram como sujeitos da pesquisa 32 alunos recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, no campus de Vitória da Conquista, no período de 2016.1, tendo como instrumento de coleta de dados foi um questionário contendo 10 questões que envolviam o Teorema de Pitágoras.

Em nossa análise encontramos desempenho geral de 24% de acertos. Além disso, em nenhuma das questões houve um percentual de acertos igual ou superior a 50%, o que nos mostra que é grande o número de alunos que ainda encontram dificuldades na solução de problemas desse tipo.

Analisamos 416 repostas, em que 100 dessas, eram respostas corretas e 138 eram respostas incorretas, das quais 91 apresentavam traços do teorema e 47 não. A estratégia mais frequente nos erros encontrados foi da categoria Apresenta indícios do Teorema de Pitágoras, sendo da subcategoria *erro na resolução*, apresentando um total

de 49 respostas. Nessas, os erros encontrados foram na resolução de operações básicas, erro no calculo de potências e de raízes e também na solução de equações do 2º grau. Todos esses erros encontrados são de conteúdos que também são trabalhados no decorrer da Educação Básica, isso nos mostra que os alunos ao ingressarem no Nível Superior trazem consigo dificuldades que não conseguiram ser dirimidas em sua escolaridade anterior.

Apareceram também nas estratégias com indícios do teorema respostas categorizadas como *interpretação da resposta, esquecimento de elevar algum elemento ao quadrado, erro na identificação da hipotenusa* e *erro na determinação da medida dos catetos.*

Nas estratégias que não apresentavam indícios do Teorema de Pitágoras, encontramos respostas das categorias *possível confusão com semelhança de triângulos, possível confusão com soma dos ângulos internos, utilização da fórmula de área/perímetro/altura, utilização das relações trigonométricas, inconsistente e erro na determinação/identificação das medidas*. Os sujeitos da pesquisa estavam matriculados em uma disciplina na qual recentemente havia sido abordado o conteúdo semelhança de triângulos, acreditamos que esse seja o motivo que levou o surgimento das respostas com *possível confusão com semelhança de* triângulos. Já a ocorrência das estratégias de *utilização da fórmula de área/perímetro/altura* pensamos ser consequência do enfoque que acreditamos ser dada a elas na Educação Básica.

Essa análise comprovou nossa suposição de que o ensino do Teorema de Pitágoras nas escolas se restringe a aplicação da relação para determinar um dos lados desconhecidos do triângulo, deixando o ensino focado na memorização de fórmulas, que muitas vezes não possuem significados para os alunos e que não são suficientes para aquisição do conhecimento.

Desta forma, acaba se tornando bastante comum o ingresso dos alunos na universidade sem ou com insuficientes conhecimentos de conteúdos que deveriam ser adquiridos na Educação Básica e que são pré-requisitos para a continuidade dos seus estudos.

Assim, esperamos que este trabalho seja capaz de apresentar algumas das dificuldades que calouros, do curso de Licenciatura em Matemática dessa universidade,

possuem ao solucionar questões que envolvem o Teorema de Pitágoras, que também podem ser dificuldades em outros tipos de questões, fazendo necessária a construção de meios de intervenção capazes de suprir essas dificuldades.

Uma proposta para suprimir parte dessas dificuldades é a realização de oficinas que trabalhassem essas dificuldades na Semana de Integração, evento ocorrido nesse curso, realizado por representantes estudantis a fim de recepcionar os alunos recém-ingressados durante a primeira semana de aula. Assim, como na Semana de Integração pensamos também ser possível a execução dessas oficinas pelo Laboratório de Matemática – Labomat, que já desempenha trabalhos do tipo.

Acreditamos ser também necessária a continuação de pesquisas desse tipo, que sejam capazes de identificar se há melhoria na aprendizagem do Teorema de Pitágoras no decorrer do curso e se existem outras dificuldades nessas situações.

**REFERÊNCIAS**


BASTIAN, I. V. **O Teorema de Pitágoras.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

BERLINGHOFF, W. P., GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Terceira versão revista. Brasília: MEC, 2016. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pdf/4.2_BNCC-Final_MA.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CERVO, A. L., BERVIAN, P.A. **Metodologia Científica**. 4ª ed. – São Paulo: MAKRON *Books*, 1996.

**Coleção Estudo** – 6V – Vol. 3 – Bernoulli Sistema de Ensino, 2016.

COSTA JÚNIOR, W. S., PEROVANO, A. P. **UMA ANÁLISE SOBRE AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO NÍVEL SUPERIOR PERANTE QUESTÕES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PITÁGORAS.** In: Encontro Baiano de Educação Matemática, XVII, Alagoinhas – BA, 2017. No prelo.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática** – 8ª série – 2º ed. – São Paulo: Ática, 2010.

DOLCE, O., POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar**: Geometria plana – v. 9 – 7ª ed – São Paulo: Atual, 1993.

EUCLIDES. **Os elementos**. tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 5º ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, R. M. **Teorema de Pitágoras:** uma análise quantitativa do seu saber na 3º série do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2016.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R., CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática** – 9º ano – 1º ed. – São Paulo: FTD, 2009.

IMENES, L. M. **Descobrindo o Teorema de Pitágoras.** 4º edição. Editora Scipione, 1988. (Coleção vivendo a matemática).

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MORESI, E. (Organizador). **Metodologia da Pesquisa.** Universidade Católica de Brasília – UCB – Pró-Reitoria de Pós-Graduação – PRPG – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Gestão do Conhecimento e Tecnologia da Informação – Brasília, 2003. Disponível em: < http://www.academia.edu/download/34168313/MetodologiaPesquisa-Moresi2003.pdf>. Acesso em 27 de Junho de 2017.

PEREIRA, M. G. G., COUTO, A. P. N. P., COSTA, A. C. **Análise de erros em questões de Teorema de Pitágoras:** um estudo com alunos do Ensino Fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XII, São Paulo – SP, 2016.

REIS, J. C.; PEROVANO, A. P. . Uma análise das Estratégias Empregadas por Alunos do Ensino Superior em Problemas Envolvendo o Teorema de Pitágoras. **In:** SANT'ANA, Claudinei de Camargo; SANTANA, Irani Parolin; AMARAL, Rosemeire dos Santos.. (Org). AÇÕES COLABORATIVAS E COOPERATIVAS EM EDUCAÇÃO: entre História, Ensino e Formação de Professores. 1ªed. São Carlos: Pedro & João Editores, 2016, v. , p. 231-254.

RODRIGUES, R. F., MENEZES, J. E. **Aplicações de problemas diferenciados do Teorema de Pitágoras na Educação de Jovens e Adultos.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, X, Salvador – BA, 2010.

TOZONI-REIS, M. F. de C. **Metodologia da Pesquisa.** 2ª edição – Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2009. Disponível em: <http://197.249.65.74:8080/biblioteca/bitstream/123456789/785/1/METODOLOMET%20DA%20PESQUISA.pdf>. Acesso em 27 de Junho de 2017.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

## ANEXO 1 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) como voluntário (a) a participar da pesquisa "UMA ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO NÍVEL SUPERIOR PERANTE QUESTÕES QUE ENVOLVEM O TEOREMA DE PITÁGORAS". Neste estudo pretendemos analisar as estratégias de alunos recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática, quando estes se encontram diante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras em sua resolução. O motivo que nos leva a estudar esse assunto é o fato de a Geometria estar pouco presente ou ausente da sala de aula, e por que os professores tendem a priorizar outros conteúdos matemáticos, desconsiderando o conhecimento geométrico e sua importância na formação do futuro cidadão. Dada a importância da Geometria, surgiu o interesse em analisar o conhecimento geométrico de futuros professores de matemática. Assim, você responderá um questionário com questões envolvendo o Teorema de Pitágoras, no qual serão analisadas as estratégias de resolução utilizadas, bem como o seu desempenho nas resoluções. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido (a) em todas as formas que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não causará qualquer punição ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Os resultados estarão à sua disposição quando finalizados. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a sua permissão. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, _____fui informado (a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e posso modificar a decisão de participar se assim o desejar. Declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Vitória da Conquista, ____ de _____ de 2016.

_____

Assinatura do (a) participante

_____

Assinatura do (a) pesquisador (a)

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

PESQUISADOR RESPONSÁVEL: Wilson Souza Costa Júnior

ENDEREÇO: Estrada do Bem-Querer, km 4. Caixa Postal 95. CEP 45083-900. Vitória da Conquista – BA

FONE: (77) 3424-8600 / E-MAIL: willcostajr@gmail.com

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

## ANEXO 2 – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS

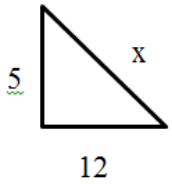
### Questionário

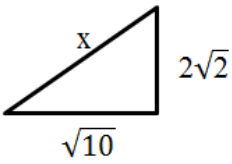
Caro aluno,

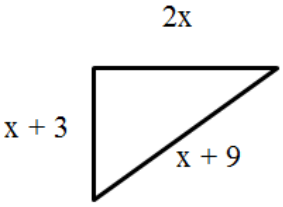
Este questionário faz parte do Trabalho de Conclusão de Curso que possui o tema: Estratégias de resolução de problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras. Dessa forma, solicitamos que escrevam suas estratégias de resolução para cada questão abaixo de caneta azul ou preta e não utilizem qualquer tipo de consulta.

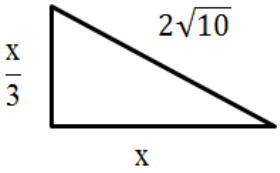
Agradecemos por sua colaboração.

1) Use o Teorema de Pitágoras e determine o valor de x em cada triângulo retângulo. (Considere as medidas em cada triângulo como dadas na mesma unidade.)

a)



b)


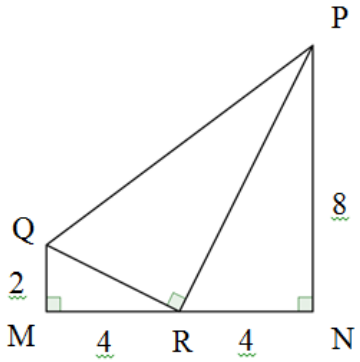

c)



d)



2) Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede $3\sqrt{5}$ cm e um dos catetos mede 3 cm a menos que o outro. Qual a medida dos catetos desse triângulo?

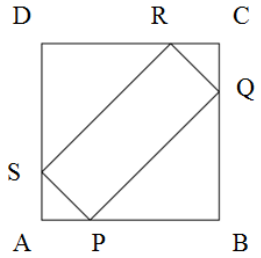
3) Dois navios partem de um mesmo ponto, no mesmo instante, e viajam com velocidade constante em direções que formam um ângulo reto entre si. Depois de uma hora de viagem, a distância entre os dois navios é 13 milhas. Se um deles é 7 milhas por hora mais rápido que o outro, determine a velocidade de cada navio.

4) Considerando a figura abaixo, determine o perímetro do trapézio MNPQ.




5) O perímetro de um triângulo isósceles de 3 cm de altura é 18 cm. Quais as medidas dos lados desse triângulo?

6) Observe a figura.

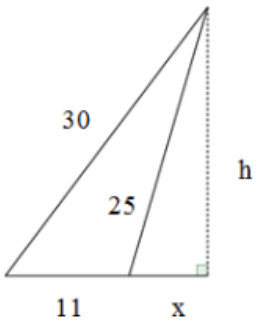



Nessa figura, ABCD representa um quadrado de lado 11 e AP = AS = CR = CQ. Qual o perímetro do quadrilátero PQRS?

7) Dado um triângulo equilátero de lado *a*, calcule a sua altura.

8) Sabendo que a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a 200, determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

9) Determine as medidas x e h indicadas na figura abaixo.




10) Seja um triângulo ABC, retângulo em A, tal que $\overline{AB}$ = 30 cm e $\overline{BC}$ = 50 cm. Se um ponto D é marcado no lado $\overline{AC}$, de modo que $\overline{BD}$ = $\overline{DC}$, então qual será o valor do o segmento $\overline{DC}$?