UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS- DCET
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AMANDA FERNANDES BORBA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE COM A PRESENÇA DO AMBIENTE COMPUTACIONAL DE APRENDIZAGEM GEOGEBRA

Vitória da Conquista
Dezembro de 2017

AMANDA FERNANDES BORBA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE COM A PRESENÇA DO AMBIENTE COMPUTACIONAL GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática, sob a orientação da professora Ma. Camila Macedo Lima Nagamine.

Vitória da Conquista

Dezembro de 2017

AMANDA FERNANDES BORBA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE COM A PRESENÇA DO AMBIENTE COMPUTACIONAL DE APRENDIZAGEM GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática, sob a orientação da professora Ma. Camila Macedo Lima Nagamine.

Vitória da Conquista, 20 de dezembro de 2017.

Componentes da Banca Examinadora:

_____

Profª Ma. Camila Macedo Lima Nagamine
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

_____

Profª Ma. Ana Paula Perovano dos Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

_____

Profª Esp. Cristina de Andrade Santos Reis
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

“A educação não transforma o mundo. Educação muda pessoas. Pessoas transformam o mundo.” (Paulo Freire)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me sustentado, sem Ele não teria conseguido chegar até aqui, me deu forças desde o início do curso e principalmente permitiu que eu encerrasse esse ciclo da minha vida. Meu Deus, muito obrigada!

Ao meu esposo Murillo, meu companheiro para todas as horas, esteve comigo sempre me apoiando, com uma palavra de ânimo. Suportou os dias difíceis, me suportou nos dias difíceis, foi meu ombro nas tantas vezes que me deparei com um obstáculo e também se alegrou comigo em cada sucesso, acreditou mais em mim do que eu mesma.

A minha família que sempre torceu por mim, em especial meus pais, Jasiel e Marizete, por todas as palavras de incentivo, todas as orações e por vibrarem comigo em cada conquista. Agradeço, pois são a minha base, devo tudo a vocês. Meus irmãos Raphael e Ana Luiza por todo carinho, por tornarem a minha vida mais leve.

Agradeço a minha orientadora Camila, por toda paciência, compreensão e por ter me acompanhado durante esse trabalho. Excelente professora, sempre interessada com a aprendizagem dos seus alunos e, além disso, uma pessoa maravilhosa, fez com que tudo se tornasse bem mais leve, a simplicidade dela por muitas vezes me fez esquecer que se trata de uma relação professor-aluno. Agradeço por tudo, inclusive pelas tantas vezes que teve a sensibilidade de ouvir as minhas preocupações e me tranquilizou dizendo que iria dar certo. Muito obrigada Camila, por acreditar em mim, tenho certeza que torce pelo meu sucesso.

Aos meus professores, tão queridos, com eles aprendi tanto. Em especial cito Augusto como exemplo de professor, simples e muito competente. Ana Paula cooperou muito para o meu crescimento no decorrer do curso, mesmo sendo exigente, soube corrigir e elogiar nos momentos necessários e sempre com muita educação. Eliana, tão querida, sempre se preocupa com seus alunos. Professor André por conciliar a sua competência com a excelente didática. A professora Cristina que também muito contribuiu para que esse trabalho fosse concluído, dando as suas contribuições e sugestões, muito obrigada. Altemar por ser tão dedicado, sempre com palavras motivadoras, se preocupando com a minha situação no curso, além de toda a sua paciência. De cada um de vocês levarei um pouquinho para a minha prática, muito grata a cada um de vocês.

RESUMO

A relevância do ensino de Estatística nas aulas de Matemática é reconhecida. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) a incluem em toda a educação básica, e nestes documentos oficiais os conteúdos de Probabilidade são propostos, também, para o Ensino Fundamental II. Sabendo que um dos recursos mais utilizados pelo professor é o livro didático, objetivamos nesse trabalho fazer uma análise de um livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental II relacionada ao conteúdo de Probabilidade. Nesse âmbito, acreditamos que as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), assim como as de Lopes (2010) e Viali e Oliveira (2010) possam direcionar o ensino de Probabilidade, assim como a importância do uso de outras ferramentas didáticas no processo de ensino e aprendizagem. Por isso, o presente trabalho tem como objetivo construir uma Sequência Didática para o ensino de Probabilidade utilizando como recurso didático o *software* GeoGebra. Esperamos que esta sequência possa auxiliar professores de Matemática em suas práticas pedagógicas.

Palavras-chave: Estatística. Probabilidade. Livro Didático. Sequência Didática. GeoGebra.

ABSTRACT

The relevance of Statistics teaching in Mathematics classes is recognized. The National Curricular Parameters (1998) include it in all basic education, and in these official documents the contents of Probability are also proposed for Elementary School II. Knowing that one of the resources most used by the teacher is the textbook, we aim in this work to make an analysis of a didactic textbook of the 9th year of Elementary School II related to the content of Probability. In this context, we believe that the recommendations of the National Curricular Parameters (1998), as well as those of Lopes (2010) and Viali and Oliveira (2010) can guide Probability teaching, as well as the importance of using other didactic tools in the teaching and learning. Therefore, the present work has as objective to construct a Didactic Sequence for the teaching of Probability using as a didactic resource the software GeoGebra. We hope that this sequence can help teachers of Mathematics in their pedagogical practices.

Keywords: Statistics. Probability. Textbook. Following teaching. GeoGebra.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS…….…….09
LISTA DE TABELAS…….11
1.INTRODUÇÃO……..……..12
2. REFERENCIAL TEÓRICO…….…….……..14
2.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (1998)…….....14
2.2 PROBABILIDADE……...16
2.2.1- HISTÓRIA DA PROBABILIDADE……..…..18
2.3. LIVRO DIDÁTICO…….….20
2.4 *Software* GeoGebra …….....21
3. METODOLOGIA……..……..22
3.1 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO……..……..23
4. ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO…….. .24
4.1. ANÁLISE GLOBAL DO LIVRO…….. .25
4.2. ANÁLISE REGIONAL DO LIVRO…….. .28
4.3. ANÁLISE LOCAL DO LIVRO DIDÁTICO…… .30
5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA…… .34
5.1 DISPOSITIVO EXPERIMENTAL……. .34
5.2 SOLUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA…….39
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS……..48
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS…….……...50
ANEXOS…….52
I- QUESTIONÁRIO DO PROFESSOR……..52
II- QUESTIONÁRIO RESPONDIDO…….....54
III- MANUAL GEOGEBRA……...56
IV- SEQUÊNCIA DIDÁTICA……....71
V- SEGUNDA SOLUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA…….....75

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Estruturas organizacionais.....25
Figura 2: Tiro ao alvo.....37
Figura 3: Construção dos círculos.....40
Figura 4: Escolha do raio.....40
Figura 5: Círculos concêntricos.....41
Figura 6: Alterando as cores dos círculos.....41
Figura 7: Selecionando a cor do círculo.....42
Figura 8: Representação do Tiro ao alvo.....42
Figura 9: Ponto aleatório.....43
Figura 10: Pontos aleatórios no círculo(c) de raio 5.....43
Figura 11: Planilha contendo os lançamentos.....44
Figura 12: Visualização da planilha.....44
Figura 13: Desmarcando os pontos aleatórios.....45
Figura 14: Áreas dos círculos.....45
Figura 15: Visualização das áreas dos círculos.....46
Figura 16: Análise univariada.....46
Figura 17: Construção do gráfico.....47
Figura 18: Gráfico.....47
Figura 19: Interface do GeoGebra.....56
Figura 20: Janela de álgebra.....57
Figura 21: Alteração de malha.....57
Figura 22: Barra de botões.....58
Figura 23: Ícone de pontos.....58
Figura 24: Ícone reta.....59
Figura 25: Relações entre retas.....60
Figura 26: Polígonos.....61
Figura 27: Círculo.....61
Figura 28: Ângulo.....62
Figura 29: Reflexões de retas e pontos.....63

Figura 30: Controle deslizante.....64
Figura 31: Alterações de objetos.....65
Figura 32: Como abrir a planilha.....66
Figura 33: Planilha.....66
Figura 34: Análise de dados.....67
Figura 35: Análise Univariada.....67
Figura 36: Gráficos da análise univariada.....68
Figura 37: Tipos de gráfico.....68
Figura 38: Análise Bivariada.....69
Figura 39: Medidas de Tendência Central.....69
Figura 40: Cálculo de Probabilidades.....70
Figura 41: Tipos de distribuição.....70
Figura 42: Tiro ao alvo.....72
Figura 43: Ponto aleatório.....75
Figura 44: Sequência de pontos aleatórios.....75
Figura 45: Lista.....76
Figura 46: Simulação A_3.....76
Figura 47: Simulações.....77
Figura 48: Simulação A_1 77
Figura 49: Planilha contendo os lançamentos.....77
Figura 50: Visualização da planilha.....78
Figura 51: Análise univariada.....78
Figura 52: Construção do gráfico.....79
Figura 53: Gráfico acertos no alvo por aluno.....79
Figura 54: Áreas dos círculos.....80
Figura 55: Visualização das áreas dos círculos.....80

LISTA DE TABELAS

Tabela 01: Estrutura do livro..... 27
Tabela 02: Incentivo ao uso de calculadora no livro didático..... 27
Tabela 03: Estrutura organizacional global do livro didático..... 28
Tabela 04: Estrutura organizacional regional do capítulo 5 do livro..... 29
Tabela 05: Organização local do livro didático - Seção 4: Probabilidade..... 30

INTRODUÇÃO

A Estatística para alguns autores é considerada uma área da Matemática, outros a consideram uma ciência, para Cazorla, Kakaoka e Silva (2010) a Estatística é "[...] uma ciência que tem como objetivo coletar, organizar e analisar dados." (CAZORLA; KATAOKA; SILVA, 2010, p.23). O fato é que a Estatística no Brasil é estudada nas aulas de Matemática e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática-PCN (1998) possuem as diretrizes para o ensino dos conteúdos de Estatística. Um dos ramos da Estatística é a Probabilidade.

Apesar de a Probabilidade ser considerada recente, reconhecemos a sua importância e, além disso, apontamos que este conteúdo deveria ser abordado nas aulas de Matemática considerando a sua relevância, pois há a possibilidade de ser explorado na educação básica desde as séries iniciais até o Ensino Médio. Para Viali e Oliveira (2010),

> Tanto a Probabilidade quanto a Estatística apresentam a oportunidade de trabalhar com uma variedade de problemas relacionados com o dia a dia dos alunos, proporcionando desafios à imaginação, e permitem técnicas organizadas de resolução. Isso estimula o raciocínio, pois o tratamento de situações complexas e diversificadas permite o aluno pensar por si mesmo. Dessa forma, ele pode construir estratégias de resolução e argumentações, relacionando diferentes tipos de conhecimentos com situações reais [...]
> (VIALI; OLIVEIRA, 2010, p. 86)

A Probabilidade e a Estatística permitem a aplicação em diferentes áreas do conhecimento, em que podem ser utilizadas situações reais para a exemplificação. Esses conceitos são essenciais para o aluno, já que o auxilia no desenvolvimento da imaginação, raciocínio e também permite que este organize os seus pensamentos.

> [...] a Probabilidade pode desempenhar um papel essencial na educação para a cidadania. Essa disciplina pode contribuir com uma nova visão de mundo, que permita que o acaso e a incerteza, inerentes à existência, façam parte, também do currículo escolar. Além disso, a Probabilidade serve de base para o estudo de Estatística e justifica e dá suporte aos métodos de amostragem que aparecem diariamente na imprensa por meio de reportagens e notícias sobre enquetes dos mais variados tipos. (VIALI; OLIVEIRA, 2010, p. 87)

A Probabilidade e a Estatística permitem que o aluno compreenda as diferentes situações do seu cotidiano de maneira crítica para que ele como indivíduo não seja enganado, manipulado por dados que são diariamente expostos na mídia, através de pesquisas, gráficos muitas vezes tendenciosos. Segundo Lopes (2010) tanto a Estatística como a Probabilidade exigem que "as pessoas utilizem o pensamento probabilístico, o qual se tornou essencial em sua vida, já que necessitam tomar decisões rapidamente, analisando as possibilidades de eventos que ocorrem com maior ou menor chance." (LOPES, 2010, p.50) Outra aplicação no contexto do aluno é perceber o quão difícil é ser contemplado em jogos de azar.

O meu interesse por Estatística e Probabilidade se deu por conta de uma inquietação ainda quando aluna da educação básica, pois apesar desses conteúdos não serem trabalhados durante a minha escolaridade, constantemente me deparava com questões que exigiam conhecimentos estatísticos, principalmente na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas- OBMEP e nos Exames Nacionais do Ensino Médio-ENEM.

A partir daí, a motivação dessa pesquisa está relacionada ao fato dos conteúdos de Estatística serem deixados para o final dos programas de ensino da educação básica, os professores, em geral, priorizam os conteúdos de Álgebra e Aritmética, enquanto que os conteúdos de Geometria e Estatística, geralmente não são contemplados por falta de tempo. Na nossa prática percebemos que um dos motivos da Estatística não ser valorizada por alguns professores, se dá por não conhecerem a sua importância e por isso "nem sempre [são] estudados pelos alunos, por falta de tempo, por falta de convicção do seu real interesse ou por falta de domínio teórico-metodológico do professor sobre os conceitos estatísticos e probabilísticos." (LOPES, 2010, p. 58)

Apontamos que as situações sobre Probabilidade utilizadas pelos livros didáticos e também nas aulas de Matemática são restritas na maioria das vezes a jogos de azar, apesar da grande possibilidade de aplicação em outras áreas do conhecimento que podem ser exploradas e até mesmo o uso de outros recursos didáticos, como Resolução de Problemas, Tecnologias da Informação e Comunicação- TICs e Jogos.

Por isso, o objetivo do trabalho é construir uma sequência didática para o 9º ano do Ensino Fundamental II sobre os conteúdos de Probabilidade utilizando o *software* GeoGebra subsidiado pela análise do livro didático de Matemática do 9º ano.

Espera-se que essa sequência elaborada nesse trabalho possa contribuir na prática pedagógica de professores principalmente do 9º ano do Ensino Fundamental II. As questões de pesquisa são: Uma Sequência Didática pode contribuir para a prática do professor minimizando as deficiências do livro didático? Atividades sobre Probabilidade precisam estar

restritas a jogos de azar? É possível utilizar GeoGebra como recurso para responder a questões de Probabilidade? Quais conteúdos do bloco Tratamento da Informação são propostos no livro didático? Qual a ênfase dada aos conteúdos de Probabilidade pelo livro didático analisado? Quais atividades sobre Probabilidade são propostas no livro didático, e quais propriedades e conceitos são necessários para realizar essas atividades?

2-REFERENCIAL TEÓRICO

A seguir apresentaremos a teoria em que o trabalho foi baseado. Consideramos necessário investigar primeiramente os documentos oficiais, pois neles estão contidos todos os conteúdos e metodologias que devem ser cumpridos por série em todo o país. Por isso iremos verificar o que Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática- PCN (1998) traçam como diretrizes para o ensino de Estatística, especialmente referente ao ensino de Probabilidade.

2.1-Parâmetros Curriculares Nacionais (1998)

Para o desenvolvimento deste trabalho foi preciso destacar o que os PCN de Matemática (1998) sinalizam sobre Probabilidade. Mas antes disso, é importante reforçar que os conteúdos de Matemática são organizados em blocos, sendo eles: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Os conteúdos de Estatística e Probabilidade fazem parte do Tratamento da Informação. De acordo com os PCN (1998) “A demanda social é que leva a destacar este tema como um bloco de conteúdo embora pudesse ser incorporado aos anteriores. A finalidade do destaque é evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade.” (BRASIL, 1998, p.52)

O documento oficial do Ensino Fundamental é organizado por ciclos, 1º ciclo (2º e 3º anos), 2º ciclo (4º e 5º anos), 3º ciclo (6º e 7º anos) e 4º ciclo (8º e 9º anos). O estudo de Estatística no Ensino Fundamental tem como finalidade “[...] fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia.” (BRASIL, 1998, p.52) O que vai além da simples aplicação de fórmulas e conceitos.

Como o presente trabalho é destinado ao 9º ano do Ensino Fundamental II, os PCN de Matemática (1998) apontam que o ensino de Estatística no 4º ciclo visa o desenvolvimento

> Do raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: construir tabelas de frequência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos; construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (BRASIL, 1998, p.82)

Especificamente no ensino de Probabilidade é destacado pelos PCN (1998) como finalidade para o Ensino Fundamental

> [...] que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p. 52)

Deve ser levado em consideração as experiências dos alunos para que ele possa identificar experimentos aleatórios ou determinísticos no seu cotidiano, da mesma forma eventos e espaço equiprováveis.

Os PCN (1998) propõem para o 4º ciclo em Probabilidade, o uso de experimentos e simulações e assim traçam como finalidade

> [...] fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Para tanto, terão de construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando-se de uma razão. (BRASIL, 1998, p.85-86)

Na seção de conceitos e procedimentos os PCN (1998) sugerem que ao ser abordado espaço amostral seja utilizado do princípio multiplicativo, tabela de dupla entrada ou diagrama de árvore, para que o aluno tenha uma melhor visualização. Além disso, os documentos oficiais sugerem que o professor deve utilizar nas aulas de Estatística e Probabilidade outros recursos didáticos, como por exemplo, os experimentos e simulações,

para que o aluno compreenda que Probabilidade não é simplesmente o uso de definições e aplicações de fórmulas. A seguir abordaremos as definições de Probabilidade, e pautaremos nos autores Novaes e Coutinho (2013), Magalhães (2004) e Morettin (1999).

2.2- Probabilidade

Para estudarmos a Teoria de Probabilidades devemos recordar alguns conceitos. Assim, observamos na natureza dois tipos de fenômenos, sendo eles, os determinísticos e os aleatórios. Morettin (1999) define os fenômenos determinísticos como "[...] aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de ocorrências verificadas. Nos fenômenos aleatórios, os resultados não serão previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno." (MORETTIN, 1999, p.1)

O autor define experimentos aleatórios como "[...] fenômenos produzidos pelo homem. [...] mesmo que as condições iniciais sejam sempre as mesmas, os resultados finais de cada tentativa do experimento serão diferentes e não previsíveis." (MORETTIN, 1999, p.1)

Novaes e Coutinho (2013) consideram a Probabilidade como a "medida da incerteza na ocorrência de um evento resultante de uma experiência aleatória". (NOVAES; COUTINHO, 2013, p.138) Depois disso, as autoras definem espaço amostral (U ou Ω) como "o conjunto de todos os possíveis resultados para um experimento aleatório. [...] Cada um desses possíveis resultados recebe o nome de **evento**." (NOVAES; COUTINHO, 2013, p.138)

Por exemplo, no lançamento de dois dados teríamos U={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4), (3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)} e sendo o evento E, por exemplo, o conjunto em que são considerados apenas os lançamentos com as duas faces pares então E= {(2,2),(4,4),(6,6),(2,4),(2,6),(4,6)}. Para a determinação do espaço amostral podem ser utilizadas tabela de dupla entrada e diagrama de árvore para facilitar na visualização.

Segundo Novaes e Coutinho (2013) a Probabilidade pode ser abordada de maneiras distintas, sendo elas: o enfoque subjetivo, o enfoque combinatório e o enfoque frequentista,

> A probabilidade subjetiva é determinada por especialistas, que analisam todo o contexto e os resultados já conhecidos nas mesmas condições (série histórica de resultados) para então estimar valor a ser adotado. Tal valor é testado no final de cada processo, para avaliar sua adequação. Este tipo de enfoque está na base do que se chama Métodos Bayesianos. A probabilidade frequentista é determinada pela observação da estabilização da frequência relativa acumulada de um evento que se quer estudar, quando o experimento

> é repetido um número infinito de vezes. [...] Por exemplo, deseja-se estudar a probabilidade de uma pessoa contrair uma determinada doença (no caso de epidemias).Verifica-se a proporção de pessoas que contraíram essa doença em condições análogas em situações anteriores para estimar o valor da probabilidade procurada. Finalmente, a probabilidade combinatória (que é a mais conhecida e estudada até o Ensino Médio) é aquela determinada pela razão entre o número de sucessos e o número total de casos, quando se considera cada um dos casos igualmente possíveis. Ou seja, P(A) $=\frac{n(A)}{n(U)}$. (NOVAES; COUTINHO, 2013, p.138)

Quando o conteúdo de Probabilidade é visto na educação básica geralmente é apresentado ao aluno apenas a Probabilidade Clássica, a que foi definida por Novaes e Coutinho (2013) como Probabilidade Combinatória. O conteúdo muitas vezes é abordado tanto nos livros didáticos como por professores de maneira que apenas é feita a aplicação de fórmulas, não exigindo que o aluno desenvolva o pensamento probabilístico.

Magalhães (2004) aponta a respeito da definição de Probabilidade:

> A definição clássica de probabilidade se refere a subconjuntos unitários equiprováveis. No caso enumerável finito temos:
> P(A) $=\frac{\text{número de elementos em } A}{\text{número total de elementos em } \Omega}$ Utilizando esta definição, muitos problemas são resolvidos através de técnicas de análise combinatória e contagem. (MAGALHÃES, 2004, p.10)

A Probabilidade Geométrica é pouco explorada nas aulas e também nos livros didáticos, apesar de ser uma excelente possibilidade de aliar esses dois conceitos matemáticos, podendo revisá-los ou até mesmo uma oportunidade de desenvolver um trabalho paralelo entre os conteúdos, desenvolvendo assim uma abordagem diferenciada, mostrando que os conteúdos matemáticos podem ser explorados de maneira que não estejam desconexos. A definição de Probabilidade Geométrica apresentada por Magalhães (2004)

> Se Ω não for enumerável, o conceito se aplicará ao comprimento de intervalos, medidas de áreas ou similares, dando origem ao que é chamado de probabilidade geométrica. Por exemplo, para Ω sendo um intervalo dos reais temos, P(A)=$\frac{\text{Comprimento de } A}{\text{Comprimento total de } \Omega}$ (MAGALHÃES, 2004, p.10-11)

Apresentaremos a seguir a definição axiomática de Probabilidade dada por Novaes e Coutinho (2013)

> Dados dois eventos A e B, resultantes de um mesmo experimento aleatório, ou seja, contidos em um mesmo espaço amostral Ω, sendo A $\neq \emptyset$ e B $\neq \emptyset$, temos:
> Axioma I: $0 \leq P(A) \leq 1$
> Axioma II: Se A = Ω, então P(A) = 1, e nesse caso A é chamado evento certo.
> Axioma III: Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
> (NOVAES;COUTINHO,2013,p.139)

A partir dos axiomas apresentados são definidas propriedades operatórias, que não serão mostradas neste trabalho, pois o foco desta pesquisa é alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II, os quais que ainda não têm conhecimento da teoria de conjuntos. Desta forma, na Sequência Didática elaborada não foram abordadas tais propriedades. Ponderamos ser relevante apresentar brevemente a História da Probabilidade para esclarecer o seu surgimento o que justifica a grande quantidade de exemplos utilizados sobre jogos de azar.

2.2.1- História da Probabilidade

O surgimento do estudo de Probabilidade se deu com a contribuição de vários matemáticos de diferentes períodos e o que inspirou esse estudo foram os jogos de azar. Faremos uma síntese da História da Probabilidade, uma vez que ela é extensa pelo fato da contribuição de vários estudiosos, nos baseamos em Lopes e Meirelles (2005) e Eves (2004).

Lopes e Meirelles (2005) afirmam que

> A teoria da Probabilidade apareceu como ramo da Matemática em meados do século XV, embora tenha se iniciado como ciência empírica muito antes desse período. Suas raízes apareceram principalmente nos jogos e apostas. Há registros de que, por volta do 1200 a.C., um pedaço de osso do calcanhar (astragalus) fosse utilizado formando faces como as de um dado. Mesmo antes disso, por volta de 3500 a.C., no Egito, já havia jogos utilizando ossinhos. (LOPES; MEIRELLES, 2005, p. 1)

Antes da teoria da Probabilidade ser formalizada no século XV, povos antigos já tinham noções desse conceito. Um dos matemáticos que mais contribuíram para o início da teoria de Probabilidade foi Jerónimo Cardano (1501-1576), no século XVI, a história relata que ele era um jogador e

> [...] decidiu estudar as probabilidades de ganhar em vários jogos de azar. Analisou seriamente as probabilidades de retirar azes de um baralho de cartas e de obter “setes” com dois dados e publicou os resultados dessas pesquisas em um manual para jogadores chamado “Liber de Ludo Aleae” (O livro dos jogos de azar - 1526). [...] foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado honesto e a escrever um argumento teórico para calcular probabilidades. Ele afirmou que, ao jogar dados, a chance de se obter um, três ou cinco era a mesma de se obter dois, quatro ou seis. (LOPES; MEIRELLES, 2005, p. 1)

Cardano no século XVI fez afirmações que até hoje são situações utilizadas nos livros didáticos, lançamento de dados e também a Probabilidade de retirar uma determinada carta do baralho. No entanto, Lopes e Meirelles (2005) apontam que muitos autores atribuem a Pascal e a Fermat a teoria da Probabilidade, supostamente descoberta em 1653, pois esses matemáticos tentaram resolver problemas de jogos de azar propostos por Chevalier de Méré (filósofo do jogo) em 1653. Mas, como foi discutido anteriormente, antes disso Cardano já tinha feito suas contribuições para o estudo de Probabilidade.

Depois disso, o estudo de Probabilidade avançou teve a contribuição de Christian Hygens, Jakob Bernoulli. Segundo Lopes e Meirelles (2005),

> O desenvolvimento da Probabilidade tem grande impulso em 1657, com a publicação do primeiro tratado formal sobre probabilidades escrito pelo físico, geômetra e astrônomo holandês Christian Hygens. A esse estudo deve-se o conceito de esperança matemática de grande relevância para o Cálculo de Probabilidades e Estatística. Depois disso, apenas em 1713, foi publicado postumamente o primeiro livro inteiramente dedicado à teoria das probabilidades de autoria de Jakob Bernoulli (1654-1705). Uma parte desse livro é dedicada à reedição do trabalho de Hygens sobre jogos de azar [...] (LOPES; MEIRELLES, 2005, p. 1)

Um marco na teoria de Probabilidades foi o surgimento do primeiro livro em 1713, a partir daí os estudos avançaram. Muitos matemáticos se interessaram pela teoria e, além disso, buscavam aplicações em outras áreas do conhecimento, exemplos disso são a Geometria (problema da agulha de Buffon) e também a Probabilidade dos julgamentos. De acordo com Eves (2004)

> Os negócios de seguros passaram por uma explosão de crescimento no século XVIII, o que atraiu muitos matemáticos para a teoria da probabilidade subjacente. Como consequência, desenvolveram esforços para aplicar a teoria das probabilidades a outros campos. Foi na esteira dessa preocupação que Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1701-1788), famoso por sua deliciosa história natural em trinta e seis volumes, propôs a primeira questão de probabilidade geométrica, o conhecido “problema da agulha”, pelo qual pode-se obter experimentalmente uma aproximação de π [...] Também se tentou usar a teoria das probabilidades em situações que envolvem o julgamento humano, como, por exemplo, a determinação da chance de um

> tribunal chegar a um veredicto acertado, na hipótese de se poder atribuir a cada jurado um número que medisse sua chance de expressar ou compreender a verdade. (EVES, 2004, p.468)

O trabalho da Probabilidade dos julgamentos foi desenvolvido pelo filósofo e matemático, Antoine Nicolas de Caritat (1743 - 1794), marquês de Condorcet. Uma das conclusões nesse trabalho é que "[...] a pena de morte deveria ser abolida porque, embora a probabilidade de acerto numa decisão unitária seja grande, no curso de uma série muito grande de decisões, a probabilidade de se condenarem pessoas inocentes é bastante alta." (EVES, 2004, p.468) Esse trabalho de Antonie Nicolas Caritat, apesar da sua data de publicação, mostra a possibilidade de aplicações do conteúdo de Probabilidade em outras situações que vão além dos jogos de azar, que é a sua origem.

Na próxima seção será discutido sobre o livro didático, sendo que nos pautamos no Programa Nacional do Livro Didático- PNLD, pois este é responsável por avaliar os livros didáticos e também disponibilizá-los. Assim, apresentaremos alguns aspectos essenciais na escolha de um livro didático.

2.3 – Livro Didático

Sabe-se que um dos recursos mais utilizados pelo professor é o livro didático, tanto como fonte de pesquisa como também na sala de aula. Desta forma, no Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático- PNLD de 2017 discute-se que as avaliações feitas dos livros do PNLD 2017 buscaram atender às necessidades atuais dos estudantes das escolas públicas e também atender as Diretrizes Curriculares Nacionais da educação básica, a fim de

> [...] se cumprir o preceito Constitucional de uma Educação Básica de qualidade, esta deve proporcionar uma formação escolar plena para o exercício da cidadania, dos direitos sociais, econômicos, civis e políticos. Nesse sentido, o PNLD busca constantes aprimoramentos no processo de avaliação e seleção de obras didáticas disponibilizadas às escolas públicas do país. (BRASIL, 2017)

Na escolha do livro didático feita pelo professor devem ser considerados alguns critérios, como por exemplo, se ele atenderá as necessidades daqueles alunos e professores de

determinada cultura, se os exemplos e atividades contidos nele fazem sentido para a região em que será utilizado. Este precisa contemplar todos esses pré-requisitos e principalmente reforçar o exercício da cidadania. Além disso, “o livro didático deve veicular informação correta, precisa, adequada e atualizada, procurando assegurar que os componentes curriculares e as áreas de conhecimento possam ser trabalhados, a partir da abordagem de temas abrangentes e contemporâneos [...]” (BRASIL, 2017)

Compreende-se que o livro didático a ser escolhido além de possuir as informações dos conteúdos corretas deve-se ter uma abordagem atual, utilizando de situações contemporâneas, tornando o conteúdo mais significativo para o aluno. Além disso, esse livro adotado deve atender as necessidades do professor e também da escola.

Mesmo compreendendo o livro didático como uma ferramenta indispensável, sabemos das outras possibilidades que o professor poderá recorrer nas suas aulas de Matemática, uma delas é o *software* Geogebra, utilizando assim as TICs

2.4 – *Software* GeoGebra

Antes de iniciarmos a descrição do *software* GeoGebra iremos discorrer a sua real importância para o ensino de Estatística. Os PCN (1998) orientam o uso das tecnologias nas aulas de Matemática e especialmente em relação ao bloco Tratamento da Informação apontam como atitudes do professor a valorização da tecnologia como instrumento nas aulas de Matemática.

Além dos documentos oficiais, Lopes (2010) afirma que “A inserção das tecnologias, destacando-se o uso de *softwares* e calculadoras gráficas, permite uma visualização muito mais pontuada e menos exaustiva da análise dos fenômenos do que um estudo estatístico baseado em cálculos e fórmulas.” (LOPES, 2010, p.53) Com isso, consideramos muito relevante o uso das tecnologias nas aulas de Matemática e especificamente *softwares* que podem auxiliar no processo de aprendizagem. Escolhemos o GeoGebra por ser o *software* mais difundido atualmente no meio matemático.

O *software* de matemática dinâmica GeoGebra é livre. Foi criado por Markus Hohenwarter e está disponível no endereço eletrônico http://www.geogebra.org. No GeoGebra, há recursos de Geometria, Álgebra, Estatística e Probabilidade, Gráficos e Planilha de Cálculo em um único ambiente, além disso, possibilita diferentes representações de um mesmo objeto que interagem entre si. A utilização desse *software* pode auxiliar na

aprendizagem da Matemática e Estatística em vários níveis de ensino, desde as séries iniciais ao Ensino Superior.

Coutinho (2012) discute que as aulas em que o professor for explorar a informática ele deve estar devidamente preparado para isso, tanto no sentido computacional como também pedagógico,

> [...] a análise das potencialidades do uso da informática, mais especificamente do Geogebra no ensino e aprendizagem da Estatística, e o fato de que um professor deve ter uma vivência expressiva com programas computacionais educacionais, antes de utilizá-los em sala de aula, justifica as escolhas feitas no momento do planejamento do projeto. Nestas condições, a formação de professores construída deveria abranger, também, conhecimentos de informática sobre os principais programas educacionais disponíveis e, ainda, discutir aspectos didáticos ligados ao uso dos mesmos em sala de aula. O professor deve saber que o computador e os programas educativos são ferramentas de trabalho, cujo uso precisa de uma estratégia didático pedagógica. É o professor quem deve definir essa estratégia em função dos objetivos do ensino e das ferramentas de que dispõe. (COUTINHO, 2012, p.252-253)

Antes de o *software* ser usado nas aulas de Matemática, o professor deve planejar essa aula cuidadosamente para que esse recurso não seja apenas para utilizar as TIC'S e dessa forma traçar os objetivos que serão alcançados com o uso dessa ferramenta. Para que o professor recorra a esse recurso didático, ele tem que conhecer a ferramenta, daí a importância de programas e trabalhos que estimulem e atendam às necessidades do professor.

Neste trabalho não apresentaremos todas as potencialidades do GeoGebra, mas nos anexos iremos detalhar as que consideramos importantes para o 9º ano do Ensino Fundamental II e exploraremos a parte Estatística do *software.* Nessa perspectiva, propomos uma Sequência Didática para auxiliar o aprendizado sobre Probabilidade com auxílio do GeoGebra.

3-METODOLOGIA

Como procedimento metodológico, após o estudo de nosso referencial teórico, partimos para uma análise pedagógica através de uma entrevista (Anexo I). Uma vez que a instituição existe, mas sem documento oficial que revele as organizações propostas para o tratamento dos conceitos de Probabilidade no qual investigamos, elaboramos uma entrevista escrita destinada à professora de Matemática do 9º ano quanto à Probabilidade e os recursos explorados nas aulas. A escolha do questionário escrito foi pensado no intuito de minimizar

um possível viés de constrangimento. Grande parte das questões foram abertas, segundo Chaer, Diniz e Ribeiro (2013),

> As perguntas abertas são aquelas que permitem liberdade ilimitada de respostas ao informante. Nelas poderá ser utilizada linguagem própria do respondente. Elas trazem a vantagem de não haver influência das respostas pré-estabelecidas pelo pesquisador, pois o informante escreverá aquilo que lhe vier à mente. (CHAER; DINIZ; RIBEIRO, p. 262,2013)

Na confecção do questionário pensamos em uma entrevista escrita que contemplasse os pontos que seriam importantes para a pesquisa, mas que a quantidade de questões não fosse extensa e que as questões fossem claras e objetivas para o entrevistado. Chaer, Diniz e Ribeiro (2013) afirmam que um

> [...] aspecto a ser observado é a quantidade de questões. O pesquisador deverá formular questões em número suficiente para ter acesso às respostas para as perguntas formuladas, mas também em número que não seja grande a ponto de desestimular a participação do investigado. (CHAER; DINIZ; RIBEIRO, p. 263,2013)

Após a elaboração do questionário, aplicamos em uma Escola Municipal de Vitória da Conquista e foi respondido pela professora que é responsável pelas turmas de 9º ano. A escolha desta escola e professora se deu por ter estagiado na instituição com a supervisão da professora entrevistada. Após a análise desse questionário, fizemos num segundo momento a análise do livro didático utilizado pela professora e pela unidade escolar referida. Essa análise foi importante para a construção da Sequência Didática, apresentada em forma de dispositivo experimental, contendo questões para serem desenvolvidas no *software* GeoGebra.

3.1- Resultados do Questionário

Durante a minha regência no estágio supervisionado obrigatório no Ensino Fundamental II pude perceber que apesar dos conteúdos de Estatística e Probabilidade fazerem parte do currículo do 9º ano do Ensino Fundamental II, tanto no planejamento do município, como nos PCN (1998) esses conteúdos não são apresentados aos alunos.

Observei que a prioridade para o 9º ano é Álgebra, grande parte do ano letivo é destinado a Polinômios, deixando para segundo plano a Geometria e depois, Estatística e

Probabilidade. A partir dessa percepção elaboramos um questionário para a professora, sendo que não revelaremos o nome da professora e nem a instituição onde fizemos a pesquisa, iremos utilizar um nome fictício de Marta.

A professora Marta informou que a instituição possui cinco professores de Matemática. Referente ao laboratório de informática a mesma informou que a escola não possui este recurso.

A percepção de que os conteúdos priorizados são os de Álgebra também coincide com a afinidade que a professora possui com os conteúdos, afirmando que tem interesse e preferência em lecionar Álgebra e equações.

Quando questionada a respeito da importância dos conteúdos de Estatística e Probabilidade no Ensino Fundamental, Marta afirmou que os conteúdos de Estatísticas "tem uma importância significativa para o desenvolvimento dos alunos." As dificuldades encontradas por ela são a falta de pré-requisitos dos alunos e, além disso, a carga horária que não permite que esses conteúdos sejam trabalhados. Marta ainda afirmou que não utiliza *softwares* como recursos didáticos em suas aulas.

Marta ainda afirma que a ordem dos conteúdos que estão dispostos no livro didático não é seguida rigorosamente devido às dificuldades dos alunos nas atividades e também os conteúdos são selecionados de acordo com o Ensino Médio, ou seja, aqueles que a professora considera como pré-requisitos para o ano seguinte. Referente ao livro didático adotado pela instituição os conteúdos são considerados, por ela, como satisfatórios, apenas a quantidade de exercícios que é insuficiente, por isso ela tem que recorrer a outras fontes.

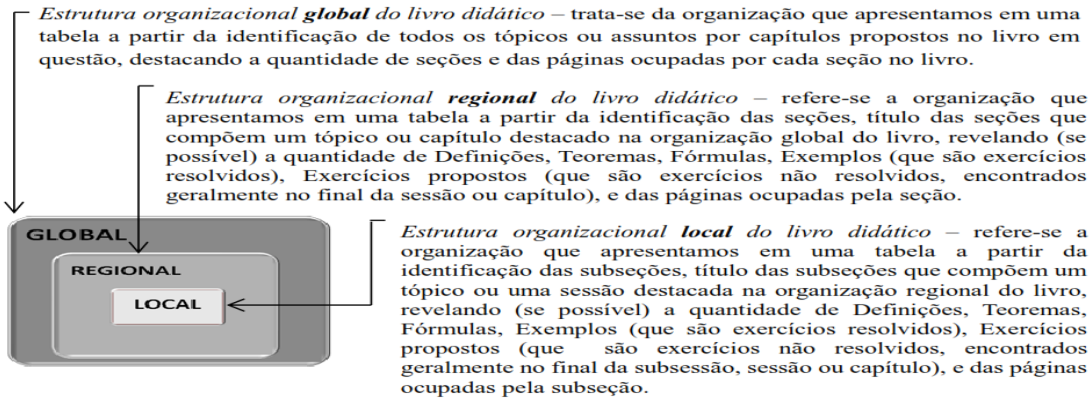
Tanto o questionário como as respostas da professora estão nos anexos. A partir desses dados fornecidos pela professora Marta, julgamos importante analisar o livro didático utilizado pela instituição para identificarmos como estão dispostos os conteúdos de Estatística, especificamente Probabilidade.

4-ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

Nesta seção, analisamos a terceira edição do livro Matemática: Compreensão e Prática de autoria de Ênio Silveira, publicado em São Paulo pela Editora Moderna em 2015 e que pertence ao Programa Nacional do Livro Didático de 2017.

Na análise utilizamos as estruturas organizacionais, sendo elas: global, regional e local, conforme Henriques, Nagamine e Nagamine, (2012). Essas estruturas são esclarecidas na figura abaixo.

Figura 01: Estruturas organizacionais



Fonte: Henriques, Nagamine e Nagamine, p.127, 2012

Conforme Henriques (2011) a restrição do livro didático as suas estruturas organizacionais,

> [...] proporcionam uma visão geral dos objetos de estudo propostos no livro em análise. Dependendo do interesse do trabalho, o pesquisador pode restringir-se a uma das partes dessas estruturas. (HENRIQUES, 2011, p.09).

O objeto de estudo neste trabalho é a Probabilidade, para chegarmos até ele, primeiramente iremos analisar as estruturas globais e regionais do livro didático referido.

4.1-Análise Global do Livro

Para a apresentação dos dados faremos uma descrição da estrutura organizacional com a finalidade de obtermos uma visão clara e geral do objeto que investigamos.

Estrutura organizacional global do livro Matemática Compreensão e Prática

O autor inicia a obra com a apresentação da estrutura geral do livro. Nessa estrutura são utilizados em todo o livro *boxes* intitulados: *É hora de observar e discutir, Trocando Ideias, Apresentação do conteúdo, Lendo e aprendendo, Um pouco de história, Atividades, Resolvendo em equipe* e *Trabalhando os conhecimentos adquiridos*. Os quais serão esclarecidos abaixo.

Na introdução, o autor apresenta, em todos os capítulos, duas páginas de abertura contendo uma imagem e um *boxe* denominado *É hora de observar e discutir* que é "um texto que explora a imagem da abertura e atividades que incentivarão você [aluno] a refletir sobre o conteúdo que será trabalhado considerando o conhecimento obtido em capítulos ou em anos anteriores" (SILVEIRA, 2015, p.4).

Para a motivação o autor abre um *boxe* denominado *Trocando Ideias* que é uma "Situação introdutória sobre o conteúdo abordado no capítulo." (SILVEIRA, 2015, p.4) esta situação é sempre proposta antes do conteúdo ser iniciado formalmente.

O conteúdo é apresentado em dois subitens: *apresentação do conteúdo* e *lendo e aprendendo,* este último é um "Texto que explica e enriquece o conteúdo principal." (SILVEIRA, 2015, p.4).

O item denominado *Um pouco de história* é apresentado em parte da obra que consiste na "Contextualização do conteúdo na história da Matemática" (SILVEIRA, 2015, p.4). Concordamos com o Guia Digital do PNLD ao descrever a coleção afirma que "Lamentavelmente, a história da Matemática é frequentemente apresentada apenas como curiosidade, perdendo-se o seu significado como um conteúdo importante no estudo da disciplina." (BRASIL, 2017) Quando é apresentado no capítulo 5, de Estatística é apenas uma curiosidade, não é dada a sua real importância.

Para exercitar o conteúdo o autor propõe as *Atividades*, *Resolvendo em equipe* e *Trabalhando os conhecimentos adquiridos*. O autor pontua que "Após cada conteúdo estudado, propomos atividades com nível de dificuldade crescente. Algumas delas abordam o cálculo mental e o trabalho com calculadora. Outras propõem a discussão e a resolução em dupla." (SILVEIRA, 2015, p. 5). Já *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* é divido em *Revisitando* e *Aplicando*, o primeiro se refere a questões de revisão e o outro aplicação de questões de vestibulares, Exame Nacional do Ensino Médio-ENEM e desafios. Observamos que o livro possui muitos exercícios de repetição e não é incentivado o trabalho em equipe em todos os capítulos.

Tabela 01: Estrutura do livro

Capítulo	É hora de observar e discutir	Trocando ideias	Apresentação dos conteúdos	Lendo e aprendendo	Um pouco de história	Atividades	Resolvendo em equipe	Trabalhando os conhecimentos adquiridos
1	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim
2	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
3	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Sim	Sim	Sim
4	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim
5	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Não	Sim
6	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
7	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Não	Sim
8	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Sim
9	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Sim
10	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Sim
11	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
Total de sim	11	11	11	7	6	11	5	11

Fonte: Elaborada pelos autores

A partir da tabela podemos verificar que *Lendo e aprendendo*, *Um pouco de história e Resolvendo em equipe* não estão em todos os capítulos. *Um pouco de história* não está em mais de 50% dos capítulos, apesar da importância de utilizar esta tendência da Educação Matemática não apenas para contextualizar, mas para significar os conteúdos. No caso de *Resolvendo em equipe* o autor já havia apontado que não seria utilizado em todos os capítulos do livro didático. Analisamos em quais capítulos o autor incentivou o aluno a utilizar a tecnologia, o uso da calculadora, verificamos somente este recurso.

Tabela 02- Incentivo ao uso de calculadora no livro didático

Capítulo	Incentiva a utilização da calculadora
1	Sim
2	Sim
3	Sim
4	**Não**
5	**Não**
6	**Não**
7	Sim
8	Sim
9	**Não**
10	Sim
11	Sim
Total de sim	7

Fonte: Elaborada pelos autores

Os documentos oficiais recomendam o uso das tecnologias da informação e comunicação- TICs para o Ensino Fundamental II. Sabendo que a calculadora também é

considerada como tecnologia, a sua recomendação deveria estar incluída tanto nas aulas de Matemática como também nos livros didáticos. As TICs podem ser exploradas em todo o 9º ano inclusive nas aulas de Estatística que pode ajudar na visualização dos dados.

Consideramos relevante a forma de introdução dos conteúdos que é proposta pelo autor, trazendo imagens e elementos que levantam discussão do conteúdo por parte do aluno. O boxe *trocando ideias* motiva os alunos a pensar sobre o conteúdo que será apresentado formalmente na seção *apresentação dos conteúdos*. O subitem *lendo e aprendendo* e *resolvendo em equipe* não é apresentado em todos os capítulos. A tabela 03 apresenta a estrutura organizacional global do livro didático analisado em que são observados quantidade de capítulos, número de seções e número de páginas por capítulo.

Tabela 03: Estrutura organizacional global do livro didático

Capítulos	Conteúdos	Seções	Páginas
01	Potenciação e radicais	08	32
02	Equações do 2º grau	06	26
03	Função Afim	03	20
04	Funções Quadráticas	03	18
05	Estatística e Probabilidade	04	26
06	Segmentos proporcionais e semelhança	06	40
07	Relações métricas em um triângulo retângulo e razões trigonométricas	07	34
08	Circunferência, arcos e relações métricas	03	20
09	Polígonos regulares	03	18
10	Área de figuras planas	06	24
11	Matemática Comercial e financeira	03	18
Respostas		--	09
Sugestões de leitura		--	01
Bibliografia		--	01
Lista de siglas		--	01

Fonte: Elaborada pelos autores.

Pelos dados da Tabela 03 identificamos uma predominância dos conteúdos relativos aos blocos Espaço e Forma e Números e Operações. O bloco Número e Operações é composto pelos capítulos 1,2,3,4 e 11. Espaço e Forma juntamente com Grandezas e Medidas são os capítulos: 6,7,8,9 e 10. Tratamento da Informação é abordado apenas no capítulo 5.

4.2-Análise Regional do Livro Didático

Como vimos anteriormente, a estrutura organizacional regional do livro didático consiste na organização apresentada em forma de tabela. Na nossa análise, consideramos o capítulo 05 da organização global do livro (composto de 04 seções, ocupando 26 páginas do

livro). Na Tabela 04 apresentamos a estrutura desta organização.

Tabela 04: Estrutura organizacional regional do capítulo 5 do livro.

Seção	Título da seção	Exemplos	Exercícios	Páginas
É hora de observar e discutir		--	02	02
Trocando ideias		--	02	01
01	Processo estatístico	05	03	05
02	Construção de gráficos	10	04	06
03	Determinação de parâmetros	05	04	05
04	Probabilidade	04	04	02
Trabalhando os conhecimentos adquiridos		--	23	05
Total		24	40	26

Fonte: Elaborada pelos autores.

A organização regional deste capítulo começa com o *boxe É hora de observar e discutir* que apresenta um texto informativo sobre energia elétrica no Brasil apresentando dois gráficos de setores, elaborados com os dados da Empresa de Pesquisa Energética, comparando o consumo em 2010 e 2013. Depois disso, propõe aos alunos questionamentos a respeito da análise do gráfico. A primeira questão não estimula a compreender a situação, pois é solicitado que este informe somente o tipo de gráfico, já na segunda permite que o aluno compreenda um pouco mais do contexto, sendo que é questionado a respeito da outra fonte de geração de energia elétrica que diminuiu além da hidráulica se comparado 2010 e 2013.

No boxe *Trocando Ideias* é sugerido ao aluno a interpretação de um gráfico de linhas e uma tabela. A apresentação do conteúdo é iniciada com Processo estatístico que é dividido em etapas (o objetivo da pesquisa, a seleção das variáveis que serão analisadas, a coleta de dados e sua organização e agrupamento) são destinadas cinco páginas para essa seção. Antes de iniciar a seção *Construção de gráficos*, o boxe *Um pouco de história* aborda o surgimento da Estatística: "os primeiros relatos datam de 2000 a.C. e tratam do recenseamento de populações agrícolas chinesas" (SILVEIRA, 2015, p. 114) em que é trazido um texto informativo discorrendo sobre a primeira vez em que a palavra Estatística foi utilizada como pesquisa de dados. Consideramos que este boxe foi utilizado trazendo informações históricas para o aluno, porém não é dada ênfase para a História da Matemática, é apresentado como uma curiosidade para o aluno que nem sempre irá despertar o interesse de todos. Posteriormente, o autor destina seis páginas para a explicação dos tipos de gráficos.

Logo após, tem a seção Determinação de Parâmetros (moda, média e mediana), utilizando de situações como a altura de pessoas, quantidade de filhos que casais entrevistados possuem. Para essa seção são destinadas cinco páginas para explicitação do conteúdo. O que

nos chamou a atenção é que o conteúdo seguinte é Probabilidade possuindo apenas duas páginas neste livro e a seção que recebe maior ênfase é Construção de gráficos.

Como podemos observar até aqui, tanto a organização global quanto a organização regional, não nos permitem destacar com precisão o enfoque dado ao nosso objeto de estudo, Probabilidade. Esse fato nos conduz a realização de uma análise mais fina, recorrendo assim a análise local da seção 4 (Probabilidade), em que destacamos a seção apresentada na tabela 04, na organização regional.

4.3-Análise Local do Livro Didático

Segundo Henriques (2011, p. 15) "essa organização permite evidenciar os objetos de estudo tratados em um determinado capítulo ou seção do livro em análise". Em nosso caso, encontramos na seção 4 denominada Probabilidade no livro em análise os objetos que apresentamos na Tabela 05 abaixo.

Tabela 05 – Organização local do livro didático - Seção 4: Probabilidade

Subseção	Título da subseção	Definição	Exemplos	Exercícios	Páginas
01	Experimento aleatório	01	03	--	$\frac{1}{4}$
02	Espaço amostral	01	01	--	$\frac{1}{4}$
03	Evento de um experimento aleatório	01	01	--	$\frac{1}{4}$
04	Probabilidade	01	02	04	$\frac{5}{4}$
Trabalhando os conhecimentos adquiridos		--	--	03	--
Total		04	07	07	02

Fonte: Elaborada pelos autores.

Na tabela 05 temos as seguintes subseções: Experimento aleatório, Espaço amostral, Evento de um experimento aleatório, que são os conceitos revisados antes de definir Probabilidade. Esses conteúdos são definidos da seguinte forma:

> Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso é chamado de **experimento aleatório.** [...]
> O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral (S)** desse experimento. [...]
> Qualquer conjunto de resultados possíveis do espaço amostral de um evento aleatório é chamado de **evento**. (SILVEIRA, 2015, p. 125).

Pontuamos que na definição de evento o autor não faz uso de nenhuma notação para representar este conceito, no entanto, no exemplo é utilizado a letra *E* para referir-se a evento, o que pode gerar dúvida, pois o aluno poderia confundir com experimento aleatório cujo

termo também inicia com a letra “e” e o autor também não apresentou notação. Tais definições estão de acordo com que é apresentado por autores que abordam o ensino de Estatística e Probabilidade como por exemplo, Viali e Oliveira (2010) e são necessárias para que o conteúdo de Probabilidade seja introduzido. Além disso, na retomada desses conceitos são utilizados exemplos que possibilitam o entendimento dos alunos.

Antes da definição de Probabilidade é utilizado um exemplo para que o aluno compreenda de maneira intuitiva o que é espaço amostral equiprovável. O exemplo se refere à retirada de uma bola de uma urna giratória com 100 unidades, em que cada elemento do espaço amostral tem a mesma chance de ocorrer. O autor conclui o exemplo afirmando que “Seja E o evento de um experimento aleatório com espaço amostral equiprovável S. Para determinar a medida da chance de ocorrência desse evento, calculamos sua probabilidade.” (SILVEIRA, 2015, p. 125). A definição de Probabilidade utilizada pelo autor é

> A probabilidade de um evento E ocorrer, sendo S um espaço amostral equiprovável, é uma razão dada por:
>
> $P(E) = \frac{n(e)}{n(s)}$ → Número de elementos de E
> → Número de elementos de S
>
> A probabilidade é a medida de chance de ocorrência de um evento.
> Essa medida pode assumir um valor de 0 a 1:
> $0 \leq P(E) \leq 1$
> - Se E é um evento impossível, então: P(E)=0
> - Se E é um evento certo, então: P(E)=1
>
> (SILVEIRA,2015,p.126)

Avaliamos que as definições utilizadas pelo autor são claras e coerentes explicitando a condição do espaço amostral equiprovável e que a Probabilidade é um número expresso entre 0 e 1. Depois de definir probabilidade são apresentados apenas dois exemplos, que possuem o mesmo modelo.

Durante a seção 4 não identificamos a indicação para a construção do diagrama de árvores, sendo que este possibilita uma melhor visualização do aluno das possibilidades do espaço amostral. Além disso, consideramos que, os dois exemplos citados pelo autor possuem o mesmo nível, ou seja, foram modificados apenas os dados.

Logo após, são propostas ao aluno quatro atividades que consideramos com o nível de dificuldade maior, envolvendo lançamento de dado, moeda, principalmente em uma delas em

que são lançados dois dados simultaneamente, nesse caso, o aluno provavelmente terá dificuldade, já que os exemplos apresentados sobre Probabilidade seguem um mesmo modelo. O autor limita os seus exemplos a jogos de azar. Tal como foi encontrado por Viali e Oliveira (2010) quando analisaram os conteúdos de Probabilidade em livros didáticos do Ensino Médio, o autor ainda não se desprendeu da ideia original do conceito que foram os jogos de azar. "Existem inúmeras outras situações, em todas as áreas, que fornecem exemplos de fenômenos aleatórios, contudo os autores continuam a adotar a abordagem simplista e pouco criativa dos lançamentos de dados e moedas. (VIALI; OLIVEIRA, 2010, p.101)

Na seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos*, em *Revisitando* são feitos alguns questionamentos a respeito dos conteúdos abordados e uma dessas questões é: " O lançamento de um dado é um evento com espaço amostral equiprovável? Explique." (SILVEIRA,2015, p. 127). O capítulo é encerrado com 18 atividades (Aplicando), quatro delas do ENEM e uma de vestibular, sendo que as questões que tratam de Probabilidade são apenas duas, a quantidade de exercícios sobre Probabilidade é considerada por nós insuficiente.

Os conceitos são apresentados em uma ordem que considera os pré-requisitos necessários para que o aluno compreenda Probabilidade, são retomados conceitos necessários, como Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento. No entanto, as questões são poucas e envolvem apenas lançamento de dados, moedas e sorteios. Poderiam ser utilizados exemplos mais diversificados sobre Experimentos aleatórios, como por exemplo

> a duração da vida de equipamentos, pessoas e animais, tempos de viagem, duração de chamadas telefônicas, número de alunos que comparecem diariamente à aula de Matemática, número de passageiros de ônibus, avião etc.(VIALI; OLIVEIRA, 2010, p.90)

Na seção analisada não percebemos nenhum incentivo de interação professor-aluno e/ou aluno-professor e como faz parte da proposta dos capítulos sugerir atividades em conjunto, para o conteúdo probabilidade não foi feita nenhuma proposta para trabalhos dessa forma.

Consideramos que a maneira como é feita a abordagem do conteúdo Probabilidade não chama a atenção do aluno, não utiliza a realidade deles e nem desperta para a importância do conteúdo. Não são utilizadas outras áreas do saber para estimular e informar os alunos. Os autores sugerem que os livros didáticos devem "[...] apresentar problemas desafiadores; promover a contextualização e a interdisciplinaridade […]" (VIALI; OLIVEIRA, 2010, p.86)

Não identificamos a utilização de nenhuma Tendência da Educação Matemática na seção 4, também não é recomendado o uso de outros recursos como *softwares* e calculadora. A proposta do livro é utilizar a calculadora para questões que são mais elaboradas, mas para Probabilidade não foi sugerida. No entanto, os exemplos e as atividades sobre Probabilidade são simplesmente aplicações de fórmula.

Além disso, não é proposto ao aluno fazer algum experimento ou simulação, apesar de ser sugerido pelos PCN (1998), desta forma,

> A realização de experimentos e simulações permite certa percepção sobre o movimento aleatório presente nos fenômenos, possibilitando aos estudantes compreender o processo probabilístico durante a análise das situações confrontadas. (LOPES, 2010, p. 53)

Assim os documentos oficiais apontam que a utilização de experimentos e simulações nas aulas de Estatísticas são importantes para que os alunos percebam o processo probabilístico existentes nas situações.

Apesar da importância do conteúdo Probabilidade, verificamos na análise do livro didático que poucas páginas do livro foram destinadas para Estatística e Probabilidade, de 11 capítulos apenas um deles foi destinado para o bloco Tratamento da Informação e dentro deste capítulo a abordagem de Probabilidade foi pouco explorada. Percebemos também que não foram apresentadas atividades que despertem o interesse dos alunos, utilizando situações que não fazem parte do cotidiano dos mesmos, foram abordados exemplos e atividades que envolvem dados, cartas e sorteios. Além da quantidade reduzida de atividades, não foram apresentados exemplos diferenciados que auxiliassem os alunos na resolução dos exercícios. Neste caso, sugerimos ao professor recorrer a outras obras para complementar o quadro de exercícios, para suprir a deficiência da quantidade de atividades e apresentando questões com o mesmo nível de dificuldade das que foram propostas em *Atividades*. De acordo com o guia digital do PNLD 2017,

> Recomenda-se que o professor complemente algumas orientações para o desenvolvimento de atividades, pois as que são oferecidas tanto no Livro do Estudante, quanto no *Suplemento com orientações para o professor*, nem sempre dão o suporte necessário para a sua realização, especialmente no que diz respeito ao uso de jogos, materiais concretos e *softwares*. (BRASIL, 2017)

Compreendemos que o estudo de Probabilidade ultrapassa a aplicação de fórmulas, definições e propriedades. Acreditamos que se limitar a isso pode afetar significativamente a aprendizagem dos alunos em relação ao conteúdo. Por isso, apontamos a necessidade de

utilizar outros recursos como *softwares*, essas práticas podem contribuir significativamente na construção dos conteúdos de Estatística e Probabilidade. Desta forma, consideramos importante que o professor utilize além do livro didático adotado pela escola outras ferramentas, como Sequências Didáticas.

5- SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Antes de falarmos sobre a construção da Sequência Didática-SD desenvolvida nesse trabalho, faremos um breve comentário sobre o que é uma Sequência Didática. Adotaremos a definição utilizada por Henriques (2001),

> Uma Sequência Didática é um esquema experimental formado por situações, ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar [análise institucional] em torno de um objeto do saber e de uma análise matemática/didática, caracterizando os objetivos específicos de cada situação, problema ou tarefa [constituinte de uma praxeologia] (HENRIQUES, 2001, p. 23).

A Sequência Didática é desenvolvida pelo professor para atender a um determinado objetivo e para isso esta é dividida em seções, em cada uma dessas seções têm-se tarefas a ser desenvolvidas. A importância da SD é que o professor ao planejá-la sabe onde ele quer que o seu aluno chegue, mas para isso considera o desenvolvimento do aluno, sendo cauteloso com as etapas que serão seguidas. Além do objetivo geral da SD cada tarefa possui os seus objetivos específicos.

Coutinho (2013) aponta a necessidade de elaborar materiais sobre Estatística e Probabilidade que possam auxiliar o professor em suas aulas, pois sabemos que o livro didático não atende a todas as necessidades da turma e do professor. Desta forma, a autora afirma que "[...] a pouca disponibilidade de materiais didáticos sobre o tema, que possibilitem ao professor enriquecer as suas aulas, sem limitar-se ao uso de um determinado livro, adotado pela escola." (COUTINHO, 2013, p.12) Neste sentido, propomos uma Sequência Didática sobre Probabilidade que utiliza em uma das suas seções o *software* GeoGebra.

5.1 Dispositivo Experimental

O presente instrumento contém as atividades da sequência, está dividido em quatro seções. Cada seção contém no mínimo duas atividades. Durante e ao final da realização de cada

atividade, favor registrar os arquivos gerados e anotar no papel todas as informações inerentes ao tratamento da atividade.

Sequência Didática: Probabilidade usando o Software GeoGebra

Objetivo Geral: A sequência didática: "Aprendendo Probabilidade" é apresentada como um suporte para o ensino de Probabilidade usando os recursos do *software* GeoGebra, mais especificamente, (colocar os conceitos que serão trabalhados) . O objetivo da Sequência é ensinar de maneira simples como usar os recursos do GeoGebra para calcular Probabilidades explorando conceitos elementares de Probabilidade e Estatística referente a ementa abordada no 9º ano do Ensino Fundamental II.

Tempo estimado : Em média 6 horas/aula.
Materiais: Computadores com o *software* GeoGebra instalado.

Adaptado do artigo de Paterlini, o artigo apresenta o Jogo dos discos e segundo a descrição da situação foi criado por alunos em uma feira de Ciências e cada visitante dessa feira teria que lançar aleatoriamente discos em um piso de certa área. Se o visitante ao lançar o disco este tocasse na lateral do piso, a escola ganharia um determinado valor, mas se o disco caísse inteiramente no piso, o visitante ganharia. Assim, utilizamos apenas a ideia do autor quanto as figuras geométricas, que no nosso caso foram círculos, em que serão lançados aleatoriamente flechas e com isso poderá ser calculada a Probabilidade Geométrica. O arquivo para a aplicação desta atividade está em anexo.

SEÇÃO 1 – TRABALHANDO OS CONCEITOS DE PROBABILIDADE

A primeira seção desta sequência tem como objetivo familiarizar os sujeitos da pesquisa com os conceitos elementares de Probabilidade. Sabemos que antes de conceituar Probabilidade, é preciso que o aluno relembre as definições de Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento. Para isso, criamos três atividades teóricas, sendo que optamos por não utilizar exercícios envolvendo jogos de azar, uma vez que identificamos na nossa análise do livro didático apenas questões com essa contextualização. Com isso, optamos por utilizar objetos tecnológicos que são conhecidos pelos alunos, como *tablets*, mesmo que sejam questões teóricas, mas que no momento julgamos ser necessárias.

Atividade 1: A vida útil de um *tablet* é um Experimento Aleatório ou Determinístico? Justifique a sua resposta.

Atividade 2: Dois *tablets* são retirados de uma linha de produção. Cada *tablet* é classificado como bom (B) ou defeituoso (D). Qual é o Espaço Amostral Ω para esse experimento?

Atividade 3: Considerando a situação da atividade 2, escreva os seguintes eventos:
A: Um *tablet* defeituoso e o outro bom;
B: Apenas *tablets* bons.

SEÇÃO 2 - TRABALHANDO DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DE PROBABILIDADE

A segunda seção desta sequência tem como objetivo familiarizar os sujeitos da pesquisa com o conceito de Espaço Amostral Equiprovável e com a definição de Probabilidade. Nessa seção, o aluno irá revisar as definições e propriedades já vistas. São duas atividades simples, porém importantes para que o aluno avance durante a sequência didática.

Atividade 1: Em uma caixa possui 15 picolés, sendo que 5 são de chocolate, 5 de morango e 5 de creme. Cada picolé tem a mesma chance de ser retirado?

Atividade 2: Considere a mesma situação da atividade 1. Qual a probabilidade de retirar da caixa um picolé de creme?

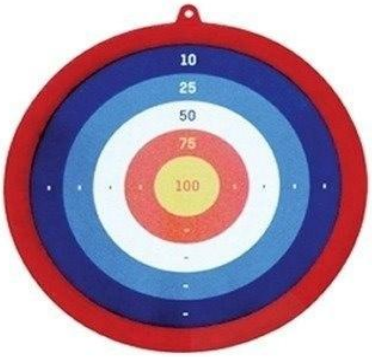
SEÇÃO 3 - A PROBABILIDADE NO COTIDIANO

A seção três dessa sequência tem como objetivo utilizar situações contextualizadas para que o sujeito da pesquisa perceba que a Probabilidade pode ser utilizada também em situações reais. Propomos esta situação em que o aluno poderá ler, discutir com professor e colegas, o professor deve fazer intervenções sempre que achar necessário.

Gustavo em um feriado prolongado estava entediado com as horas passadas em frente ao celular, videogame e televisão, então resolveu dar um pause nas tecnologias. Ao mexer nos

seus brinquedos e jogos, encontrou um jogo que era dos seus pais, na caixa estava escrito Tiro ao alvo. Gustavo começou a ler as regras, pois não conhecia esse jogo. Ele percebeu que para ter uma melhor pontuação teria que acertar com uma flecha o círculo amarelo (menor), a pontuação variava de dez a cem pontos conforme a figura 02 abaixo:

Figura 02 : Tiro ao alvo



Fonte: Site Mercado Livre, 2017

Gustavo havia combinado com cinco amigos para fazer uma disputa de videogame à tarde e teve a ideia de propor a eles para jogarem Tiro ao alvo, já que videogame eles jogam todos os dias, imaginou que seria uma forma de diversificar as brincadeiras. Como é uma competição, ele pensou em estabelecer a regra que cada jogador terá a chance de 10 lançamentos.

Mas, o problema é que Gustavo é muito competitivo e se deparou com a seguinte situação:

- Qual a chance que eu tenho de acertar o alvo e garantir 100 pontos? Estou achando muito difícil!

Vamos ajudar Gustavo a verificar a possibilidade de acerto dele, porque a partir dessas informações ele irá decidir se vai propor para os colegas ou não.

Nessas duas atividades a seguir o aluno deverá responder de maneira intuitiva, o que ele acha que é mais provável, nesse momento o professor pode abrir para a discussão.

Atividade 1: Ao lançar a seta o que é mais provável ter uma pontuação entre 10 a 75 pontos ou a de 100 pontos? Justifique.

Atividade 2: Qual a probabilidade de acertar o alvo? Tem alguma possibilidade de Gustavo ganhar? Justifique.

Recomendamos que as seções 1,2 e 3 sejam feitas em um mesmo dia, utilizando duas aulas, pois as atividades são mais conceituais, o que deve demandar mais tempo são as discussões.

SEÇÃO 4 - PROBABILIDADE NO GEOGEBRA

A seção 4 tem como objetivo utilizar o contexto da seção 3 e aplicar no *software* GeoGebra para solucionar cada atividade. É importante que o professor fale um pouco sobre o *software*, que mostre brevemente algumas de suas possibilidades, mas que informe ao aluno que a situação da seção 3 será resolvida nessa aula. Nessa aula (quatro horários aproximadamente) é importante que o professor auxilie os alunos individualmente e até mesmo coletivamente, recomendamos que seja utilizado o data-show para projetar alguns dos comandos que os alunos deverão executar.

Então, a primeira construção no GeoGebra será: construa a figura 24 acima, considerando os raios *r* dos círculos azul escuro, azul claro, branco, amarelo e vermelho,r = 5, r = 4, r = 3, r = 2 e r = 1, respectivamente.

Atividade 1: Faça a simulação do campeonato de Gustavo no GeoGebra e verifique de 10 lançamentos de cada jogador, quantos tiveram sucesso? Faça uma tabela, considerando que n é a quantidade de lançamentos e a a quantidade de acertos e $\hat{p}$ a Estimativa, ou seja, $\hat{p} = \frac{a}{n}$.

Essa questão foi pensada para atender as recomendações dos PCN (1998) que afirma a importância do uso de simulações nas aulas de Estatística. Essa simulação poderia ser feita com o jogo físico, porém na nossa sequência optamos por utilizar somente o *software*.

Atividade 2 : A área dos círculos influencia nos acertos? Considerando círculos de raio=5 e o de raio=1, calcule a Probabilidade de acertar o alvo (utilize o conceito de Probabilidade Geométrica). Depois disso, na tabela complete uma coluna utilizando a Probabilidade Geométrica.

A Probabilidade Geométrica dificilmente é abordada na educação básica, mas é uma possibilidade de ser explorada desde as séries iniciais até mesmo no Ensino Superior. Além

disso, recorre a Geometria, sendo uma boa oportunidade para revisar conceitos e até mesmo trabalhar conceitos matemáticos paralelamente.

Atividade 3: A partir dos dados da tabela construa um gráfico que compare a Estimativa $\hat{p}$ com a Probabilidade Geométrica P.

O professor irá trabalhar com seus alunos além da Probabilidade, tabela e gráfico de barras.

Atividade 4: Analisando o gráfico, o que você pode concluir a respeito da diferença entre a estimativa da Probabilidade e a Probabilidade teórica (Geométrica)?

Essa questão faz com que a partir do que foi construído o aluno tire as suas conclusões e depois é imprescindível que compartilhe com a turma.

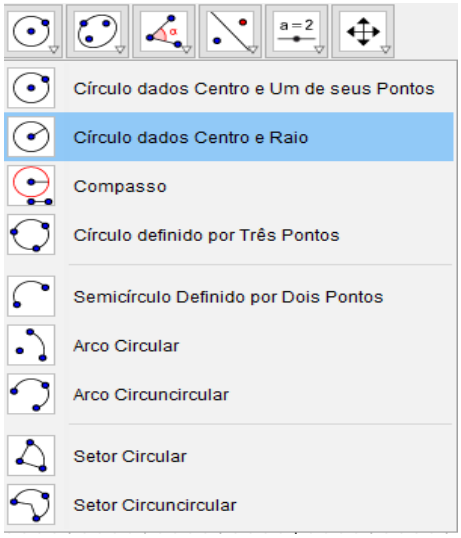
Atividade 5: Na sua opinião, você aconselharia Gustavo a promover esse campeonato? Ele teria chance de vencer? Justifique.

Apresentaremos a seguir a solução da sequência didática, principalmente da seção 4 contendo o procedimento a ser realizado no GeoGebra,

5.2 Solução da Sequência Didática

As duas primeiras questões serão respondidas de maneira intuitiva, em que os alunos deverão justificar as suas respostas. Depois disso, as construções devem ser feitas no GeoGebra. Para construir os círculos, na barra de ferramentas selecione o ícone , clique na seta no canto inferior e então selecione a opção *Círculo dados centro e raio* conforme a figura abaixo:

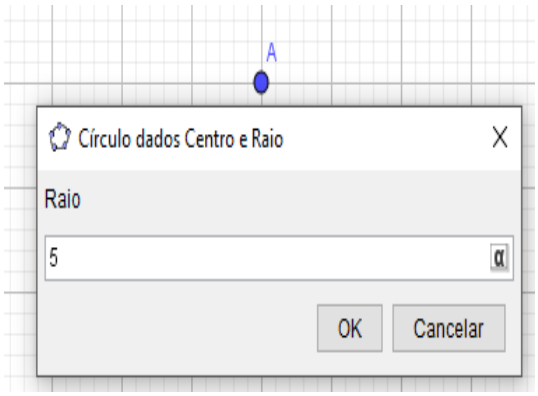
Figura 03: Construção dos círculos



Fonte: Elaborada pelos autores

Ao selecionarmos o ponto que será o centro do círculo, automaticamente uma janela será aberta em que basta digitar o raio desejado.

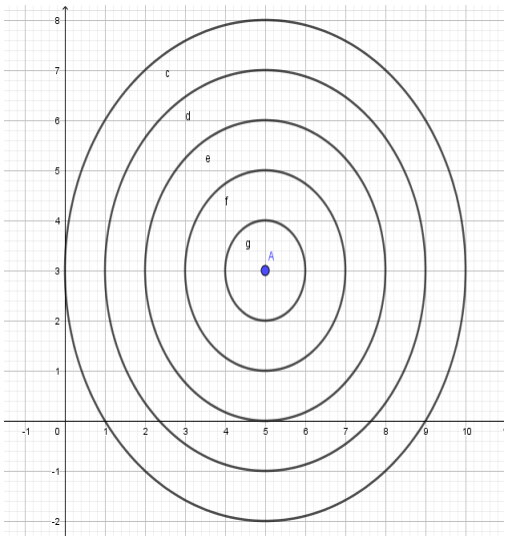
Figura 04: Escolha do raio



Fonte: Elaborada pelos autores

No problema teremos que fazer cinco círculos com os raios 5,4,3,2 e 1. Então primeiramente digitamos o raio 5, por exemplo, depois selecionamos o mesmo centro e raio 4 e assim sucessivamente. Confira na figura abaixo. Ao repetir esse processo com os outros raios, teremos os cinco círculos concêntricos. Como podemos verificar abaixo.

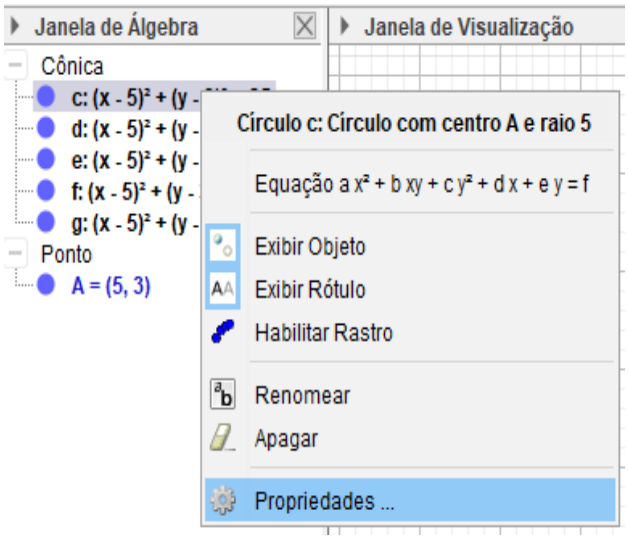
Figura 05: Círculos concêntricos



Fonte: Elaborada pelos autores

As cores dos círculos podem ser modificadas, vamos alterá-las conforme o jogo que apresentamos na Figura 02. Para alterar a cor, basta na janela de álgebra clicar com o botão direito em cada círculo e aparecerá a seguinte janela

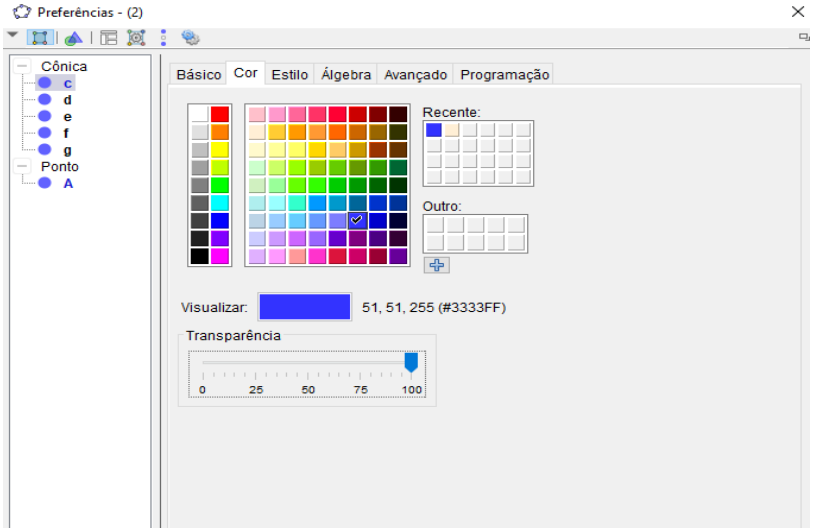
Figura 06: Alterando as cores dos círculos



Fonte: Elaborada pelos autores

Depois clicamos em cor e escolhemos a cor desejada e a intensidade (transparência) que varia de 0 a 100, conforme a figura:

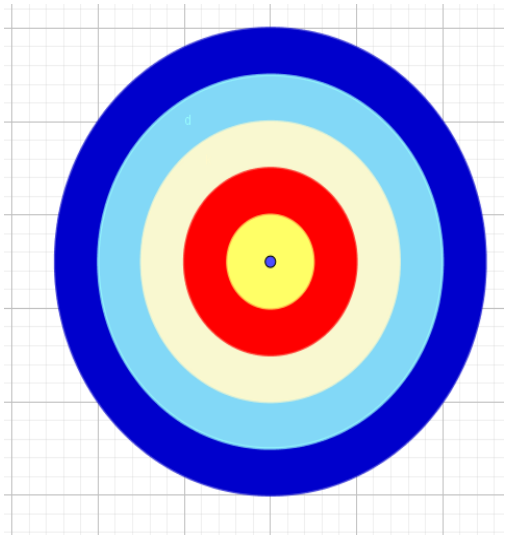
Figura 07: Selecionando a cor do círculo



Fonte: Elaborada pelos autores

Repetindo esse procedimento para todos os círculos teremos o jogo Tiro ao alvo:

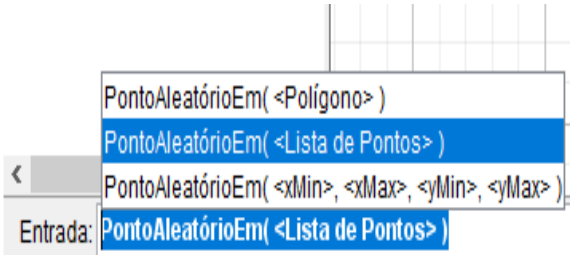
Figura 08: Representação do Tiro ao alvo



Fonte: Elaborada pelos autores

Para simular as flechas iremos utilizar o recurso de pontos aleatórios na caixa de entrada, veja na figura:

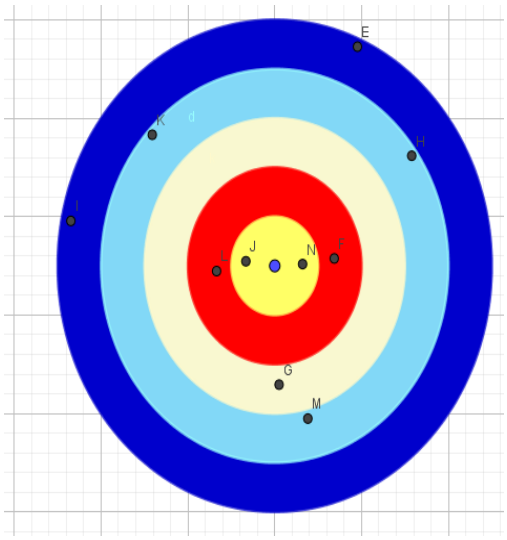
Figura 09: Ponto aleatório



Fonte: Elaborada pelos autores

No lugar de lista de pontos iremos colocar o círculo maior, no nosso caso é o c, então o comando ficará da seguinte forma: *PontoAleatórioEm(c).* Deve ser reforçado ao aluno o que se trata ponto aleatório, se o aluno lançasse a flecha esse fenômeno também seria aleatório, podendo acertar o alvo como os demais círculos. Nessa simulação será considerado que cada participante terá 10 chances, então *n=10* e os acertos chamaremos de *a.* Com isso, pode ser feita a tabela de frequência relativa. Posteriormente o gráfico.

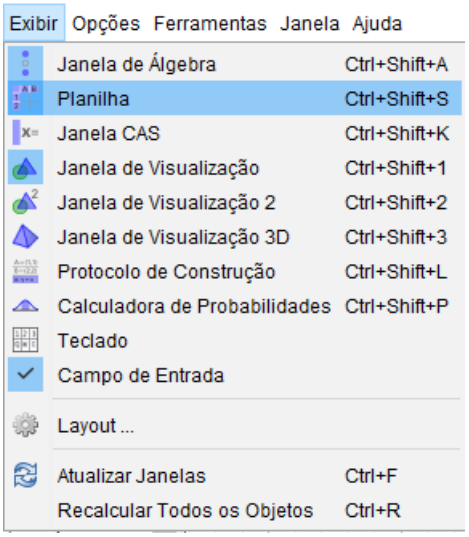
Figura 10: Pontos aleatórios no círculo(c) de raio 5



Fonte: Elaborada pelos autores

E então o aluno deverá fazer os registros na planilha. Para criar essa planilha, clica-se em *exibir* na barra de ferramentas e selecione *Planilha*, conforme a figura abaixo.

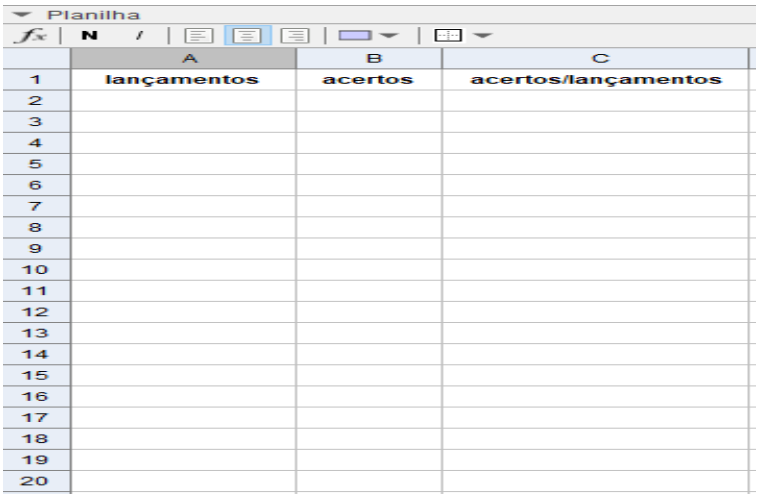
Figura 11: Planilha contendo os lançamentos



Fonte: Elaborada pelos autores

Ao a Planilha ser criada, oriente o aluno a criar três colunas, a primeira referente a quantidade de lançamentos n , a segunda os acertos (a) e a terceira a estimativa da probabilidade chame de $\hat{p}$ e será $\hat{p} = \frac{a}{n}$, observe a figura.

Figura 12: Visualização da planilha

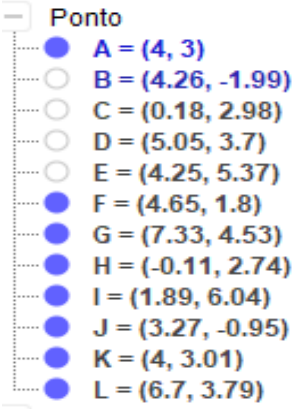


Fonte: Elaborada pelos autores

Como são seis jogadores e cada um terá dez chances, a primeira coluna será preenchida por 10. Oriente o aluno a fazer a divisão utilizando os seguintes comandos para facilitar: Em C2, digite *=B2/A2* e basta clicar ao lado de C2 e arrastar até C7 para que a fórmula valha até essa linha. E então continue a simulação, para que o aluno não se perca

orientamos que em cada dez lançamentos ele desmarque os dez pontos na janela de álgebra. Veja

Figura 13: Desmarcando os pontos aleatórios

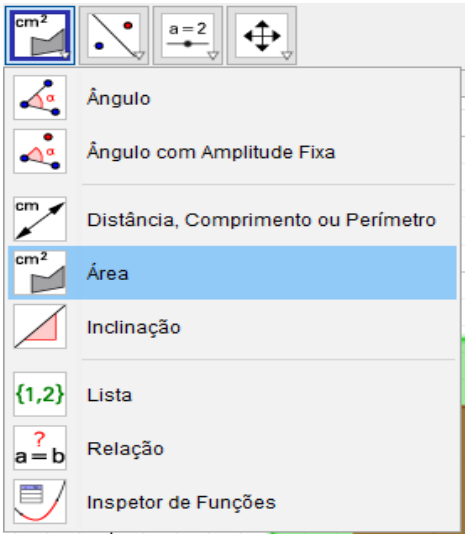


Fonte: Elaborada pelos autores

Basta desmarcar esse ponto, clicando nele. Depois disso, o aluno poderá fazer a simulação para os outros cinco jogadores. Depois o aluno deverá de preencher a planilha com o número dos lançamentos *n* e os acertos *a*.

Para que o aluno encontre a Probabilidade Geométrica é necessário que se tenha as áreas dos círculos, para isso pode ser utilizada a ferramenta área em que basta clicar em área e depois selecionar o círculo da seguinte forma:

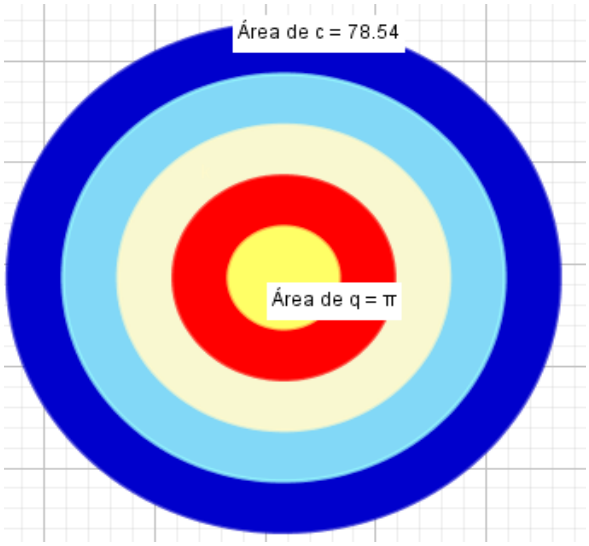
Figura 14: Áreas dos círculos



Fonte: Elaborada pelos autores

Desta forma teremos as áreas de todos os círculos, veja a figura 15, e então para encontrar a Probabilidade de acertar ao alvo considerando o círculo azul (escuro), teremos P= $\frac{\text{área do círculo azul escuro}}{\text{área do círculo amarelo}}$, logo P = $\frac{\pi}{78{,}54}$ = 0,0399 (aproximadamente).

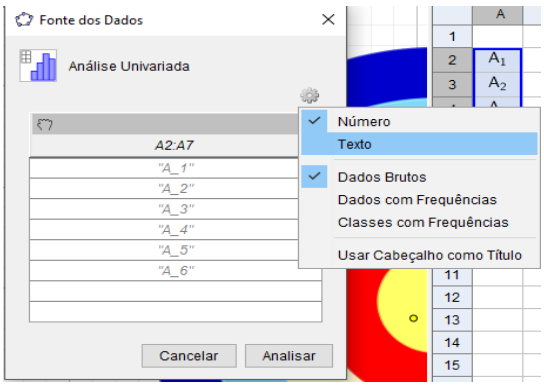
Figura 15: Visualização das áreas dos círculos



Fonte: Elaborada pelos autores

Depois que todas as planilhas estiverem preenchidas, pode ser feito o gráfico. Basta selecionar a primeira coluna e clicar em análise univariada e então aparecerá a seguinte janela:

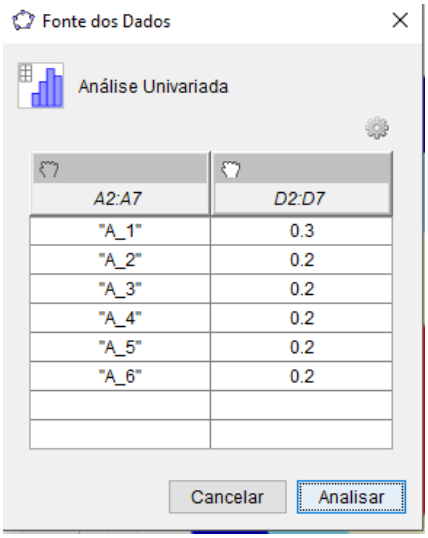
Figura 16: Análise univariada



Fonte: Elaborada pelos autores

Selecione a opção texto e depois dados com frequência, depois disso selecione a coluna das estimativas e clique na mão da segunda coluna que aparece na janela, conforme a figura abaixo:

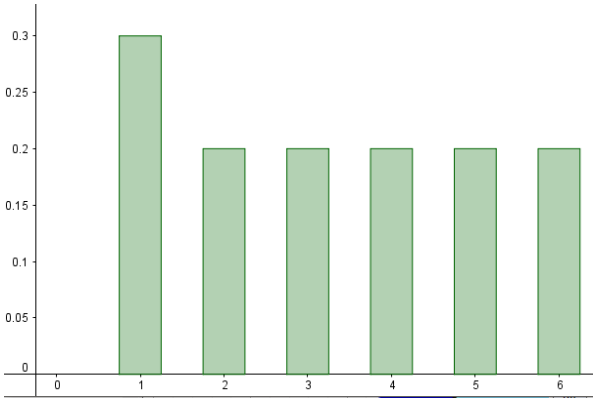
Figura 17: Construção do gráfico



Fonte: Elaborada pelos autores

Então basta analisar, com isso surgirá na tela o gráfico dos acertos dos alunos.

Figura 18: Gráfico



Fonte: Elaborada pelos autores

Nesse momento, é importante que o professor oriente a comparar o valor da estimativa com o da Probabilidade Geométrica, que nessa simulação, é aproximadamente P= 0,04. Discuta que a estimativa não é um valor exato, ela pode se aproximar e distanciar da probabilidade teórica, no nosso caso a geométrica. O erro é calculado fazendo e = p - $\hat{p}$, ele pode ser minimizado aumentando o número de lançamentos *(n).* A partir dessas informações os alunos irão debater se Gustavo tem chance de acertar ao alvo, levando em consideração tanto os dados obtidos na simulação como os calculados através das áreas.

É imprescindível que o professor faça reflexões com os alunos e promova a socialização tanto das tabelas como dos gráficos dos alunos. Essa aula deve ser explorada de

maneira que o professor observe a evolução dos alunos em relação ao conteúdo e fazendo intervenções quando necessário. Além disso, é uma boa oportunidade para revisar conceitos de Geometria e propor aos alunos uma outra forma de se obter a Probabilidade teórica, a Probabilidade Geométrica.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de Probabilidade a passos lentos vem sendo reconhecido nas aulas de Matemática, apesar disso, há uma resistência em desmistificar que o conteúdo é a mera aplicação de fórmulas, definições e propriedades. Para desfazer essa mentalidade é necessário que trabalhos sejam escritos, principalmente Sequências Didáticas e que ainda os professores da educação básica tenham acesso a esses trabalhos e também os professores em formação inicial.

Na análise do livro didático identificamos que dos 11 capítulos do livro, um é referente ao bloco Tratamento da Informação. Os conteúdos trabalhados neste bloco são: Processo estatístico (relacionado à coleta de dados, organização e agrupamento), Determinação de Parâmetros (Moda, Média e Mediana), Construção de Gráficos e Probabilidade. É dada ênfase para Construção de Gráficos, enquanto que a seção Probabilidade possui apenas duas páginas incluindo os pré-requisitos (Experimento aleatório, Espaço Amostral e Evento). No livro analisado, as atividades propostas e os exemplos resolvidos são frequentemente utilizadas situações que em geral não fazem parte do contexto dos alunos, jogos de azar.

Probabilidade possui uma possibilidade muito grande de aplicação em várias áreas do conhecimento, além disso, podem ser utilizados vários recursos didáticos para que as aulas se tornem mais significativas. Sendo eles, jogos, simulações e experimentos, tecnologia, história da Matemática, dentre outras. Apesar disso, esses recursos são pouco explorados no ensino de Probabilidade.

Nesse sentido, propomos a Sequência Didática como uma nova maneira de introduzir o conteúdo, fazendo uso de situações contextualizadas, simulações e tecnologia através do *software* GeoGebra. Como professoras, sabemos que a sequência didática deve atender às necessidades do professor, sendo de fácil entendimento e acessível a ele. Desde que o professor tenha acesso às tecnologias em sua escola (podem ser utilizados computadores, *tablets* ou celulares) ele poderá aplicar essa sequência. Este dispositivo experimental foi

criado para atender também a profissionais que não conhecem a ferramenta, mas que poderão seguir o passo a passo e aplicar em sala de aula. Por isso que no trabalho fizemos uma breve instrução de como utilizar o GeoGebra, não foi possível abordar todas as suas possibilidades, mas foi apresentado o que consideramos que seria proveitoso para professores do 9º ano do Ensino Fundamental II.

Além disso, optamos ainda por explorar o conceito de Probabilidade Geométrica que é dificilmente explorada, os livros didáticos geralmente apresentam apenas a definição clássica (Combinatória), enquanto que há outras possibilidades, uma delas também é a frequentista. A Probabilidade Geométrica pode ser abordada em toda a educação básica, pois a sua definição envolve conceitos simples, como por exemplo, o cálculo de área, conhecidos pelos alunos desde as séries iniciais do Ensino Fundamental II. Com isso, esperamos que esse trabalho possa contribuir na prática pedagógica de professores de Matemática.

No decorrer do trabalho identificamos que algumas alterações na solução do GeoGebra podem ser feitas para melhorar o trabalho. Como o GeoGebra na área de Estatística é pouco explorado tivemos dificuldades para utilizar os recursos dessa ferramenta, além disso ,não encontramos nenhum material que dê suporte para essa área no GeoGebra. Por isso, a nossa solução foi melhorada, de forma que ela ficou mais automática, já que se trata de uma simulação. Na primeira solução, o aluno teria que digitar o comando de ponto aleatório 60 vezes (seis jogadores e cada um tinha 10 chances), na segunda o aluno não precisa fazer isso. Além disso, tínhamos o problema de que os pontos aleatórios mudavam de posição quando o *software* era atualizado e a planilha teria que ser alterada manualmente. Fica a critério do professor qual das duas soluções irá utilizar, a segunda solução está disponível em anexo.

A partir desse trabalho surgiram algumas possibilidades de pesquisa, dentre elas, a aplicação da sequência didática em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental II para que sejam analisados os seus resultados, análise do livro didático de outras séries tanto do Ensino Fundamental II como também do Ensino Médio, a elaboração de outras sequências didáticas explorando o GeoGebra no ensino da Estatística e Probabilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL (1998). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998. 148 p.

BRASIL (2017). **Programa Nacional do Livro Didático 2017. Guia de livros didáticos ensino fundamental anos finais.** Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental,Matemática, 2017. 155 p.

CAZORLA, Irene Mauricio; KATAOKA, Verônica Yumi; SILVA, Cláudia Borim. **Trajetória e perspectivas da Educação Estatística no Brasil: Um olhar a partir do GT12**. **In**. LOPES, Celi Espasandin Lopes; COUTINHO, Cileda de Queiroz Silva; Almouloud, Sadelo Ag (Org).**Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010.

CHAER, Galdino; DINIZ, Rafael Rosa Pereira; RIBEIRO, Elisa Antônia. **A técnica do questionário na pesquisa educacional**. Disponível em: < http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/sociologia_artigos/pesqusia_social.pdf> Acesso em : 25 de janeiro de 2018.

COUTINHO, Cileda de Queiroz Silva.; ALMOULOUND, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. **O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do Geogebra: um estudo com professores de matemática.** Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 246-265, 2012.

COUTINHO, Cileda de Queiroz Silva. **Introdução**. In. COUTINHO, Cileda de Queiroz Silva (Org). **Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística da educação básica**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática/**Howard Eves; Tradução: Hygino H. Domingues- Campinas-SP: Editora da UNICAMP,2004.

HENRIQUES, Afonso. **Reflexões sobre Análise Institucional e Sequência Didática: O caso do Ensino e Aprendizagem de Integrais Múltiplas**. Artigo elaborado junto ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas DCET – UESC, destinado ao processo de progressão de carreira do Magistério Superior (de Adjunto a Titular), Ilhéus – BA, 2001.

HENRIQUES, Afonso; NAGAMINE, André; NAGAMINE, Camila Macedo Lima. **Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas** (NO PRELO, BOLEMA, 2012).

LOPES,Celi Espasandin. **Os desafios para educação Estatística no currículo de Matemática**. **In**. LOPES, Celi Espasandin Lopes; COUTINHO, Cileda de Queiroz Silva; Almouloud, Sadelo Ag (Org).**Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010.

LOPES, Celi Espassandin; MEIRELLES, Elaine. **Estocática nas séries iniciais**. In: Encontro regional de professores de Matemática, XVIII, 2005, Campinas. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf>. Acesso em: 28 de agosto de 2017.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. São Paulo: IME-USP,2004.

MERCADO LIVRE. **Jogo Tiro ao alvo**. Disponível em: <https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-928050602-tiro-ao-alvo-brinquedo-arco-e-flecha-kit-_JM>. Acesso em 27 de outubro de 2017.

MORETTIN, Luiz Gonzaga. **Estatística Básica-Probabilidade.** 7 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, v. 1, 1999.

NOVAES, Diva Valério; COUTINHO, Cileda de Queiroz Silva. **Estatística para educação profissional e tecnológica**. 2 ed. São Paulo: Atlas, 2013.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about?ggbLang=pt_BR >.Acesso em 31 de agosto de 2017.

PATERLINI, Roberto Ribeiro. **O problema do jogo dos discos.** Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 48, p. 13-20, 2002.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: Compreensão e prática**. 3ed. São Paulo: Moderna, 2015.

VIALI, Lorí; OLIVEIRA, Paulo Iorque Freitas de. **Uma análise de conteúdos de Probabilidades em livros didáticos do Ensino Médio**. **In**. LOPES, Celi Espasandin Lopes; COUTINHO, Cileda de Queiroz Silva; Almouloud, Sadelo Ag (Org). **Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010.

ANEXOS

I- Questionário do professor

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGICAS

Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática

QUESTIONÁRIO

Prezado (a) Professor (a) da Escola:

_____

O presente questionário tem por objetivo fornecer elementos de pesquisa ao trabalho de conclusão de curso intitulado: Análise Institucional para o ensino de Probabilidade com a presença de ambientes computacionais de aprendizagem. Assim, solicitamos que nos responda as seguintes questões:

1. Tem laboratórios de informática nessa escola?

Sim [ ] Quantos [ ] Não [ ]

2. A escola tem quantos Professores de matemática? [ ]

3. Quais os conteúdos têm maior interesse e preferência de lecionar?

_____

_____

_____

4. Qual a importância dos conteúdos de Estatística e Probabilidade no ensino fundamental?

_____

_____

_____

5. Quais as dificuldades encontradas no ensino de Estatística e Probabilidade?

6. Quais as estratégias elaboradas para ensinar tais conteúdos?

7. A ordem do conteúdo do livro didático escolhido pela escola é rigorosamente seguida?

8. O que você acha sobre o conteúdo e exercícios propostos no livro didático?

9. Você faz uso ou conhece algum software que possa ser utilizado para o ensino e aprendizagem dos conteúdos de Estatística e Probabilidade?

Obrigado pela Vossa atenção.

II- Questionário respondido

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA-UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGICAS
Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática

QUESTIONÁRIO

Prezado (a) Professor (a) da Escola:

O presente questionário tem por objetivo fornecer elementos de pesquisa ao trabalho de conclusão de curso intitulado: Análise Institucional para o ensino de Probabilidade com a presença de ambientes computacionais de aprendizagem. Assim, solicitamos que nos responda as seguintes questões:

1. Tem laboratórios de informática nessa escola?

Sim [ ] Quantos [ ] Não [X]

2. A escola tem quantos Professores de matemática? [5]

3. Quais os conteúdos têm maior interesse e preferência de lecionar?

Algebra
Equações

4. Qual a importância dos conteúdos de Estatística e Probabilidade no ensino fundamental?

Tem uma importância significativa para o desenvolvimento dos alunos.

5. Quais as dificuldades encontradas no ensino de Estatística e Probabilidade?

Maior dificuldade é que o aluno não apresenta os pré-requisitos necessarios para o desenvolvimento do conteúdo e a carga horaria não permite o cumprimento do conteúdo.

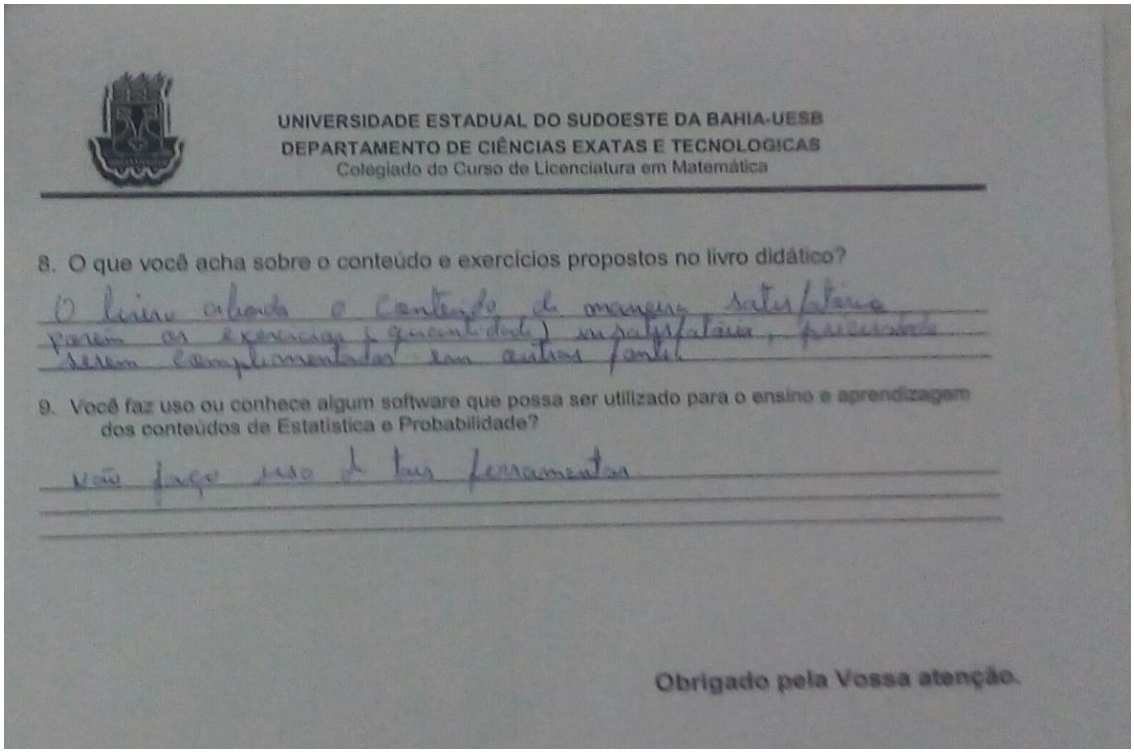
6. Quais as estratégias elaboradas para ensinar tais conteúdos?

Atraves dos exercicios oferecido no livro didático

7. A ordem do conteúdo do livro didático escolhido pela escola é rigorosamente seguida?

não, devido as dificuldades encontradas pelos alunos no desempenho das atividades, não é possivel cumprir com o conteúdo abordado no livro, e escolhido de acordo com a necessidade para o ensino medio

1



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA-UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGICAS
Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática

8. O que você acha sobre o conteúdo e exercícios propostos no livro didático?

O livro aborda o conteúdo de maneira satisfatória porém os exercícios (quantidade) insatisfatórios, precisando serem complementados em outras fontes.

9. Você faz uso ou conhece algum software que possa ser utilizado para o ensino e aprendizagem dos conteúdos de Estatística e Probabilidade?

Não faço uso de tais ferramentas

Obrigado pela Vossa atenção.

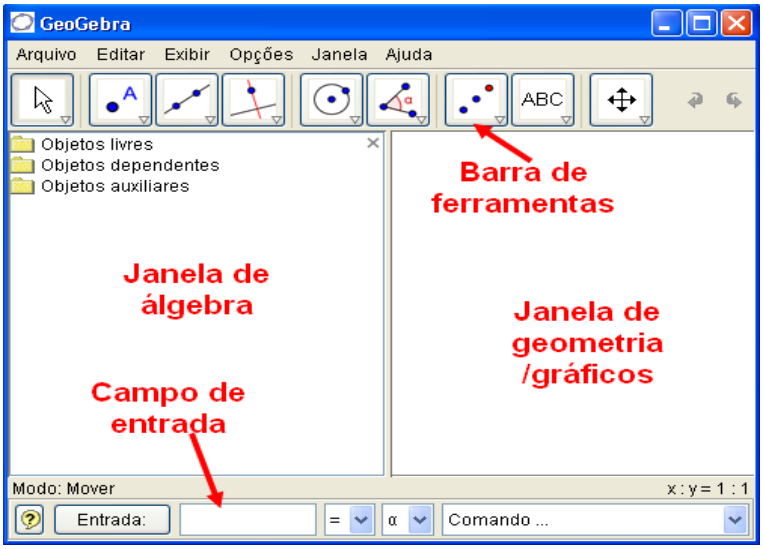
II- Manual GeoGebra

A seguir apresentamos algumas características e funções do *software* GeoGebra. Essas informações podem ser obtidas no endereço eletrônico http://www.geogebra.org.

A principal ferramenta de utilização do GeoGebra é o mouse, pois é por meio dele que iremos produzir a maioria das construções possíveis ao *software* através da barra de ferramentas. Já as coordenadas e equações correspondentes são mostradas na janela algébrica. Nela podemos escrever coordenadas, equações, comandos e funções diretamente e estes são mostrados na área de trabalho logo após pressionamos a tecla Enter.

Ao abrir o *software*, visualizamos a seguinte tela:

Figura 19: Interface do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelos autores

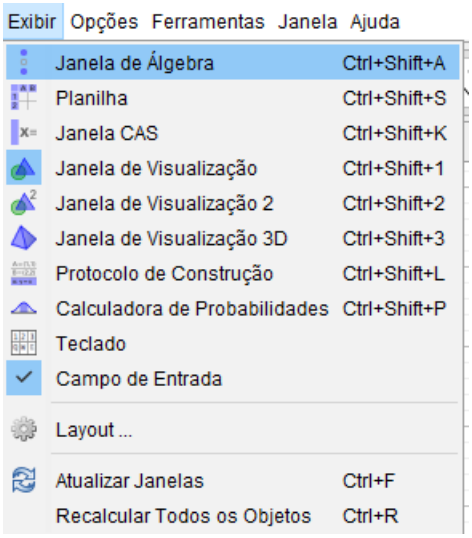
Temos acima a barra de ferramentas do programa, à esquerda a Janela de Álgebra e a direita a Janela Geométrica, onde serão expostos os gráficos e desenhos realizados. Abaixo temos o campo de entrada.

Através da *Barra de Ferramentas*, podemos construir na *Janela Geométrica*. Simultaneamente, as coordenadas dos pontos, as equações das retas, etc., são visualizadas na *Janela Algébrica*. Introduzindo coordenadas, equações, comandos, no *Campo de Entrada*, os objetos geométricos são desenhados na *Janela Geométrica*.

No GeoGebra podemos observar duas janelas: a *Janela Algébrica* e a *Janela Geométrica*. A *Janela Algébrica* pode ser fechada, clicando no x que aparece em seu canto

direito superior, conforme podemos observar na figura anterior. Para exibi-la novamente, clique em *Exibir* (no alto da tela) e selecione *Janela Algébrica*, conforme figura a seguir:

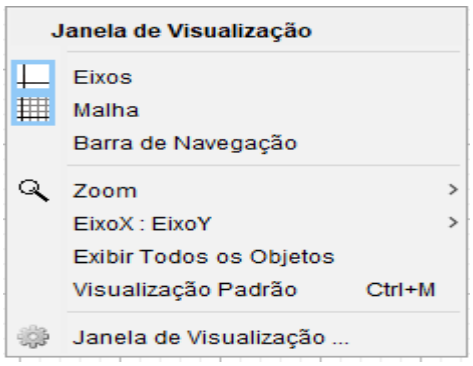
Figura 20: Janela de álgebra



Fonte: Elaborada pelos autores

Algumas alterações podem ser feitas também clicando com o botão direito do mouse sobre a janela geométrica. Isso faz abrir uma caixa com algumas opções, conforme figura a seguir: opção *Eixo*, para aparecer os eixos cartesianos na *Janela Geométrica*. Se desejar que a janela fique quadriculada, selecione *Malha*.

Figura 21: Alterações de malha



Fonte: Elaborada pelos autores

Nos itens abaixo, descrevemos algumas opções encontradas na barra de botões:

Figura 22: Barra de botões

Fonte: Elaborada pelos autores

Em todos os botões aparece uma seta no canto inferior direito. Esta, ao ser clicada, permite visualizar as opções existentes.

Clicando na seta do botão , visualizamos as seguintes opções: *Ponto, Ponto em Objeto, Vincular/Desvincular Ponto, Interseção de dois objetos, Ponto Médio ou Centro, Número Complexo, Otimização e Raízes*. Conforme a imagem abaixo.

Figura 23: Ícone de pontos

Fonte: Elaborada pelos autores

Selecionando *Ponto* e clicando na *janela geométrica*, cria-se um novo ponto. Quando um ponto é criado, suas coordenadas aparecem na *janela algébrica*. Clicando em um segmento, em uma reta ou em uma cônica, cria-se um ponto nesse objeto.

Para utilizar *Ponto médio ou centro*, clique em: i) dois pontos para obter seu ponto médio; ii) em um segmento para obter seu ponto médio; iii) em uma seção cônica para obter seu centro.

Interseção de dois objetos pode ser criado de duas maneiras: i) selecionando dois objetos: dessa forma todas as interseções existentes são marcadas (a ordem na qual clicamos nos dois objetos é indiferente); ii) clicando em uma interseção desses objetos: somente esse ponto de interseção será marcado. *Ponto em objeto* permite que um ponto seja criado em um

objeto. Para utilizar a função *Vincular/Desvincular objeto* clique em ponto e em um objeto para vincular.

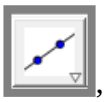
Clicando na seta do botão  , visualizamos as seguintes opções:

Figura 24: Ícone reta

Fonte: Elaborada pelos autores

Reta definida por dois pontos: Marcando-se dois pontos, traça-se a reta definida por eles. *Segmento* definido por dois pontos: Marcando-se dois pontos, determinam-se as extremidades do segmento a ser traçado. Na *Janela algébrica* é mostrado o comprimento do segmento traçado.

Segmento com comprimento fixo a partir de um ponto: Marca-se a origem do segmento e digita-se a medida desejada para o mesmo, em uma janela que se abre automaticamente.

Semirreta definida por dois pontos: Traça-se uma semirreta a partir do primeiro ponto determinado, contendo o segundo ponto marcado.

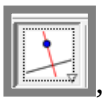
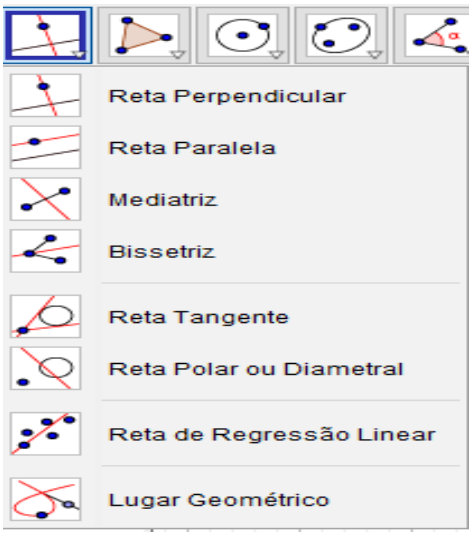
Clicando na seta do botão  , visualizamos as seguintes opções:

Figura 25: Relações entre retas



Fonte: Elaborada pelos autores

Clicando-se em uma reta e um ponto fora dela, constrói-se uma *Reta Perpendicular* à reta considerada, passando pelo referido ponto. O mesmo pode ser feito considerando-se um segmento de reta, ou semirreta. A ordem na qual clicamos nos objetos (reta e ponto ou ponto e reta) é indiferente. Clicando-se em uma reta e em um ponto fora dela, constrói-se uma *Reta Paralela* à reta considerada, passando pelo referido ponto. O mesmo pode ser feito considerando-se um segmento de reta, ou semirreta. A ordem na qual clicamos nos dois objetos é indiferente. Para construir uma *Mediatriz* clique nas extremidades de um segmento de reta, construa uma reta perpendicular a este passando pelo seu ponto médio. Marcando-se três pontos A, B e C, constrói-se a *Bissetriz* do ângulo $A\hat{B}C$ clicando-se sobre duas linhas concorrentes, já traçadas, constrói-se as bissetrizes dos ângulos determinados pelas linhas.

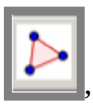
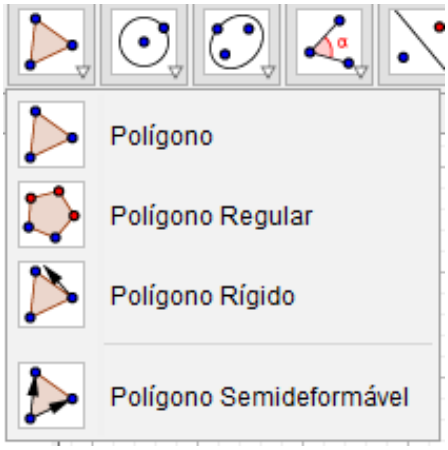
As *Tangentes* a uma cônica podem ser construídas de duas maneiras: i) selecionando-se um ponto A e uma cônica c (nesse caso, são traçadas todas as *tangentes* a c por A); ii) selecionando-se uma linha g e uma cônica c (nesse caso, constrói-se todas as *tangentes* a c, que são paralelas a g). Clicando na seta do botão  , visualizamos as seguintes opções:

Figura 26: Polígonos



Fonte: Elaborada pelos autores

Para construir um *Polígono*, marca-se ao menos três pontos e clica-se no primeiro ponto novamente (para "fechar" o polígono). A *janela algébrica* mostrará a área do polígono construído. Para construir um *Polígono Regular* de n lados, marcam-se dois vértices do Polígono e, na janela que se abrirá após a marcação do segundo ponto, digita-se o valor de n.

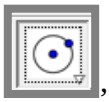
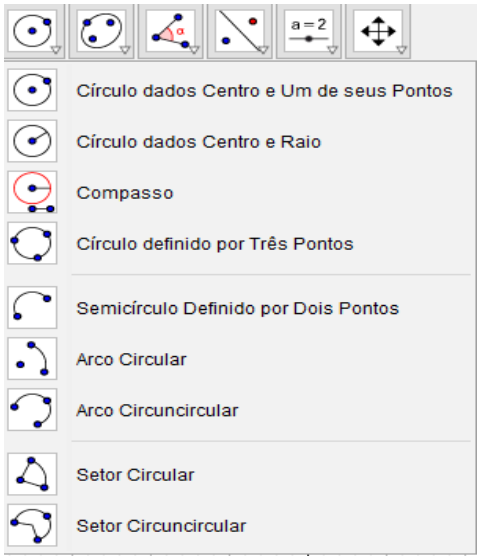
A janela algébrica mostrará a área do polígono construído. Clicando na seta do botão  , visualizamos as seguintes opções:

Figura 27: Círculo



Fonte: Elaborada pelos autores

Para construir *Círculo dados centro e um de seus pontos* marque um ponto A e um ponto B, trace o círculo com centro A, passando por B. *Círculo dados centro e raio* marque o centro A e digite a medida desejada para o raio, em uma janela que se abre automaticamente. Devem ser seguidos esses passos para o *Círculo definido por três pontos*: Marcando-se três pontos não-colineares traça-se o círculo que passa por eles: Marcando-se dois pontos A e B, traça-se o semicírculo de diâmetro AB, com isso construímos o *Semicírculo dados dois pontos.* Para o *Arco circular dados o centro e dois pontos:* Marque três pontos A, B e C, trace o arco circular com centro A, começando no ponto B e terminando no ponto C (obs.: o arco é traçado mesmo que o ponto C seja marcado fora do arco).

O *Arco circuncircular dados três pontos* permite traçar um arco circular por três pontos não colineares. *Setor circular dados o centro e dois pontos* deve-se marcar três pontos A, B e C, traçar o setor circular com centro A, começando no ponto B e terminando no ponto C (obs.: o arco é traçado mesmo que o ponto C seja marcado fora do setor). Para criar o *Setor circuncircular dados três pontos*, marque três pontos não colineares, trace um setor circular por esses pontos. Marcando-se cinco pontos constrói-se a cônica que passa por eles (a cônica só será definida se quaisquer quatro dos cinco pontos não forem colineares).

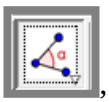
Clicando na seta do botão  , visualizamos as seguintes opções:

Figura 28: Ângulo

Fonte: Elaborada pelos autores

Com a ferramenta *Ângulo* traçam-se ângulos: i) entre três pontos; ii) entre dois segmentos; iii) entre duas retas (ou semirretas); iv) entre dois vetores; v) interiores de um

polígono. *Ângulo com amplitude fixa*, marcam-se dois pontos e digita-se a medida desejada para o ângulo, em uma janela que se abre automaticamente. *Distância, Comprimento e Perímetros*, essa ferramenta fornece, na janela algébrica, a distância entre: i) dois pontos; ii) duas linhas; iii) um ponto e uma linha. A ferramenta *Área* fornece a área de um polígono, círculo ou cônica, na janela geométrica. A *Inclinação* é fornecida na janela algébrica, o coeficiente angular da reta traçada e na janela geométrica destaca o triângulo que possibilita o cálculo do coeficiente angular.

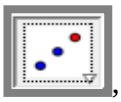
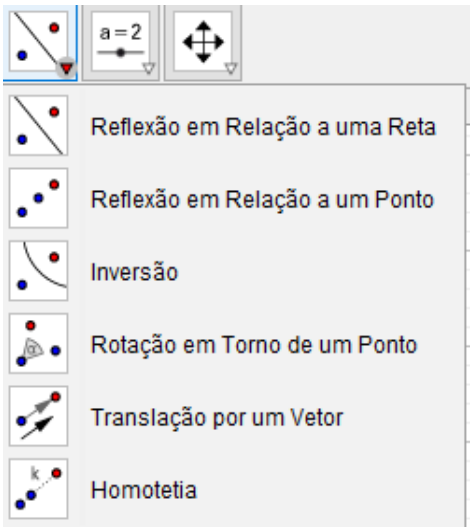
Clicando na seta do botão  , visualizamos as seguintes opções:

Figura 29: Reflexões de retas e pontos



Fonte: Elaborada pelos autores

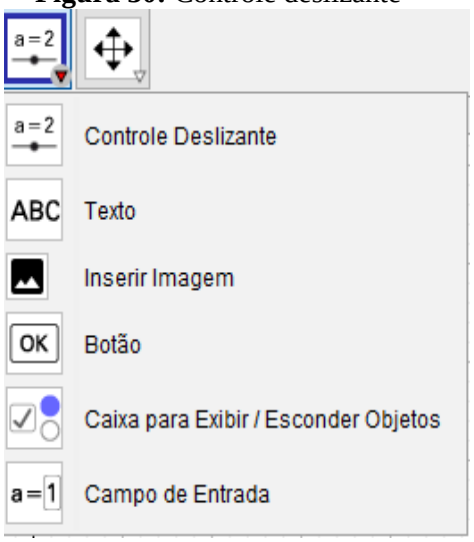
Reflexão em relação a uma reta: Essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a uma reta. Clique no objeto a ser

Reflexão com relação a um ponto: Essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a um ponto. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser refletido e, a seguir, clique no ponto através do qual ocorrerá a reflexão. A ferramenta *Rotação em torno de um ponto por um ângulo* desenha um objeto rotacionado em relação a um ponto. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser rotacionado, e, a seguir, clique no ponto que funcionará como centro da rotação. Aparecerá uma janela na qual você especificará a medida do ângulo de rotação, em graus. *Homotetia* de um ponto por um fator: Essa ferramenta desenha o objeto ampliado ou reduzido a partir de um ponto por um determinado fator. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser transportado e, a seguir, clique no

ponto que funcionará como centro da homotetia. Abrirá uma janela na qual você especificará o fator da homotetia.

Clicando na seta do botão , visualizamos as seguintes opções:

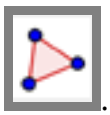
Figura 30: Controle deslizante



Fonte: Elaborada pelos autores

Para utilizar o *Controle deslizante* seleciona-se essa ferramenta e clicando sobre qualquer lugar na janela geométrica com o botão esquerdo do mouse, você cria um seletor para um número ou para um ângulo. Aparecerá uma janela na qual você especificará o intervalo [min, max] do respectivo número ou ângulo e a largura do seletor (em pixel). Um seletor nada mais é do que uma representação gráfica de um número ou ângulos livres.

Para *Inserir texto* clicando com o botão esquerdo do mouse, na área de trabalho, o texto que você digitar, na janela que será aberta, aparecerá neste local. A ferramenta *Inserir imagem* permite acrescentar uma imagem numa construção. O ponto onde você clicar, com o botão esquerdo do mouse, será o vértice inferior esquerdo da imagem. Após o clique na tela uma caixa de diálogo será aberta na qual você selecionará a imagem a ser inserida

Exibir ou esconder objeto: clique na janela geométrica, com o botão esquerdo do mouse, para criar uma caixa de seleção. Ex.: trace um triângulo qualquer usando a ferramenta  . Selecione a ferramenta e clique com o botão esquerdo do mouse sobre a janela geométrica. Na janela que se abrirá, digite T para a legenda e selecione o Triângulo poly1. Isso fará aparecer na área de trabalho um quadradinho com um T do lado. Clique sobre

o T (junto ao quadrado) com o botão direito do mouse e selecione *Propriedades.* Na janela que se abrirá, selecione a aba *Avançado* e, então, digite uma condição para aparecer esse quadradinho (e o T) e clique em *Fechar.* Por exemplo, digite a condição poly1 < 3. Movimente um dos vértices do Triangulo poly1 de modo a mudar sua área e observe que o quadradinho é exibido/escondido.

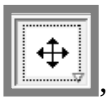
Clicando na seta do botão  , visualizamos as seguintes opções:

Figura 31: Alterações de objetos

Fonte: Elaborada pelos autores

Mover janela de visualização possibilita arrastar a área de trabalho ou os eixos. Para *Ampliar*, ao clicar, com o botão esquerdo do mouse, sobre qualquer lugar da área de trabalho, essa ferramenta produz um zoom de aproximação. *Reduzir*, ao clicar, com o botão esquerdo do mouse, sobre qualquer lugar da área de trabalho, essa ferramenta produz um zoom de afastamento. Ao selecionar a ferramenta *Exibir ou esconder objeto* e clicar, com o botão esquerdo do mouse, sobre um objeto ou mais, você o(s) estará selecionando para ser (em) escondido(s). Porém, isso só ocorrerá, de fato, quando você selecionar outra ferramenta qualquer. Você poderá voltar a exibir os objetos ocultos, selecionando novamente a ferramenta mas ao mudar de ferramenta os objetos voltarão a ficar ocultos. Caso deseje exibir, de fato, um objeto, clique com o botão direito do mouse, na janela algébrica, sobre este objeto e selecione a opção *exibir objeto.*

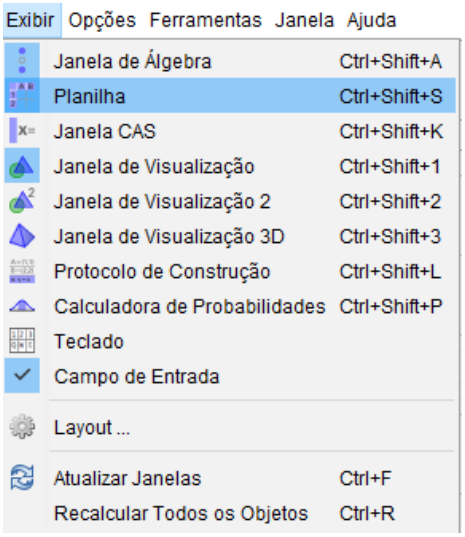
Exibir ou esconder rótulo, clique com o botão esquerdo do mouse, no rótulo do objeto para escondê-lo e no objeto para voltar a exibi-lo. *Copiar estilo visual* proporciona a cópia das propriedades visuais como cor, dimensão, estilo de reta e dentre outras, a partir de um objeto,

para vários outros objetos. Escolha o objeto cujas propriedades você quer copiar. A seguir clique em todos os outros objetos que devem adotar essas propriedades. Quando for necessário *Apagar objetos* clique com o botão esquerdo do mouse, sobre qualquer objeto que ele será apagado.

As ferramentas e funções que podem ser utilizadas para o ensino e aprendizagem dos conceitos de Estatística estão apresentados a seguir:

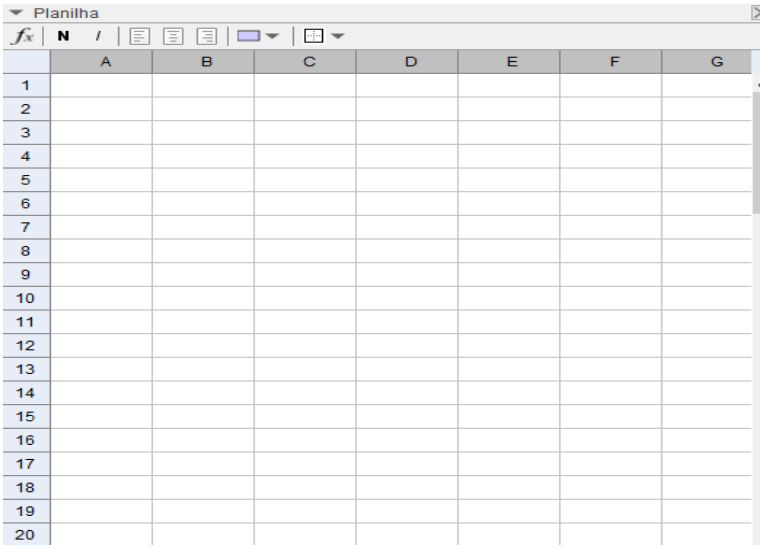
Para utilizar a *Planilha* selecione Exibir e depois disso a Planilha e imediatamente abrirá na tela conforme a figura 33.

Figura 32: Como abrir a planilha



Fonte: Elaborada pelos autores

Figura 33: Planilha



Fonte: Elaborada pelos autores

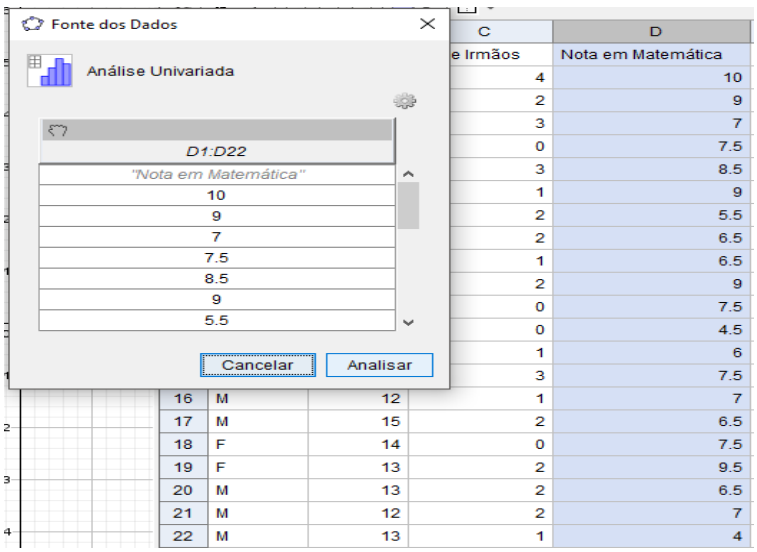
Através de um banco de dados digitados na planilha do GeoGebra, podemos fazer a análise desses dados, calculando medidas descritivas e construir gráficos. Ao clicar na planilha aparecerá a seguinte aba:

Figura 34: Análise de dados

Fonte: Elaborada pelos autores

Essa ferramenta permite fazer as análises dos dados dispostos na planilha, sendo elas *Análise Univariada* (uma variável), *Análise Bivariada (*duas variáveis), *Análise Multivariada* (mais de duas variáveis) e *Calculadora de Probabilidades.* Para fazer essas análises utilizamos os seguintes dados de alunos: Gênero, Idade, quantidade de irmãos e notas em Matemática e Português. A *Análise Univariada* permite analisar os dados de uma coluna, sendo assim, selecionamos as notas desses alunos em Matemática conforme a figura abaixo:

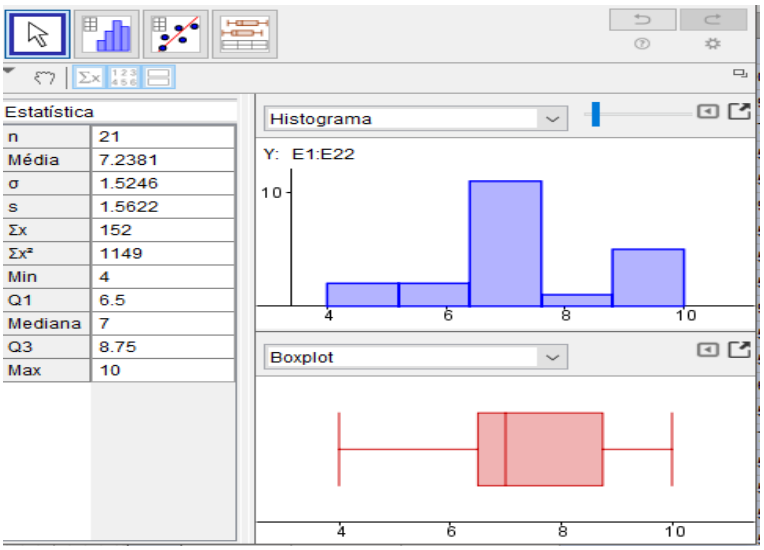
Figura 35: Análise Univariada



Fonte: Elaborada pelos autores

Depois de selecionar a coluna desejada e clique em *Análise Univariada*, aparecerá uma nova janela e a seguir selecione *Analisar*. E então teremos o gráfico e alguns dados estatísticos como Média, Desvio padrão, Variância, Mediana, dentre outros, conforme a figura abaixo.

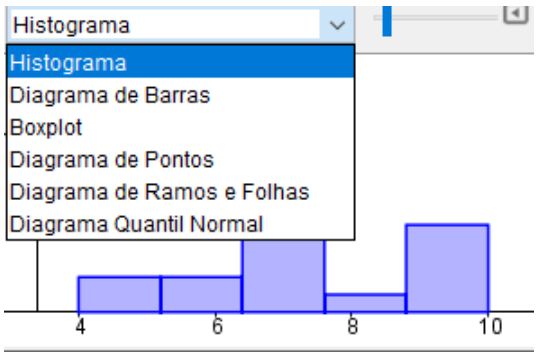
Figura 36: Gráficos da análise univariada



Fonte: Elaborada pelos autores

Os tipos de gráfico também podem ser selecionados de acordo com a figura abaixo:

Figura 37: Tipos de gráfico



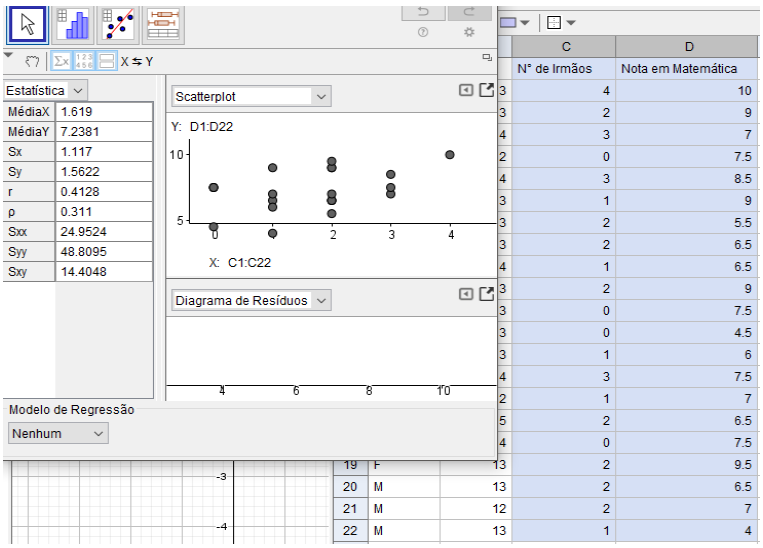
Fonte: Elaborada pelos autores

Dentre os gráficos fornecidos pelo GeoGebra temos: Histograma, Diagrama de Barras, BoxPlot, Diagrama de Pontos, Diagrama de Ramo e Folhas, Diagrama Quantil Normal que pode ser selecionado de acordo com a necessidade de cada situação.

Para fazer a *Análise Bivariada* basta selecionar duas colunas em que se deseja fazer a comparação dos dados. E depois disso, clique em *Análise Bivariada*, aparecerá uma nova

janela e ao clicar em Analisar aparecerão os dados estatísticos referentes aquelas informações e, além disso, o gráfico que pode ser selecionado da mesma forma que a figura anterior.

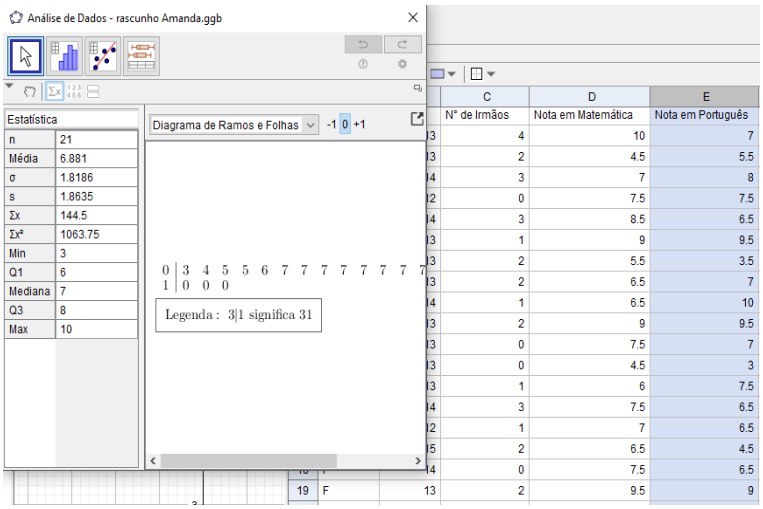
Figura 38: Análise Bivariada



Fonte: Elaborada pelos autores

Da mesma forma ocorre com a Análise Multivariada, basta selecionar mais de duas colunas. Como mostramos anteriormente na janela de *Análise de Dados* (figura 34), obtemos um resumo das Estatísticas, selecionando o símbolo $\sum x$ associadas a uma determinada variável (no exemplo, Nota em Matemática), temos algumas Medidas de Tendência Central que podem ser trabalhadas em sala utilizando os dados dos alunos, como mês que fazem aniversário, sorvete preferido, altura dos alunos, dentre outros. A partir daí podem ser explorados os diferentes tipos de gráficos como foi abordado anteriormente. Mais um exemplo de gráfico a ser explorado é o diagrama de ramo e folhas, ao selecionarmos as notas dos alunos em Português teremos o seguinte gráfico:

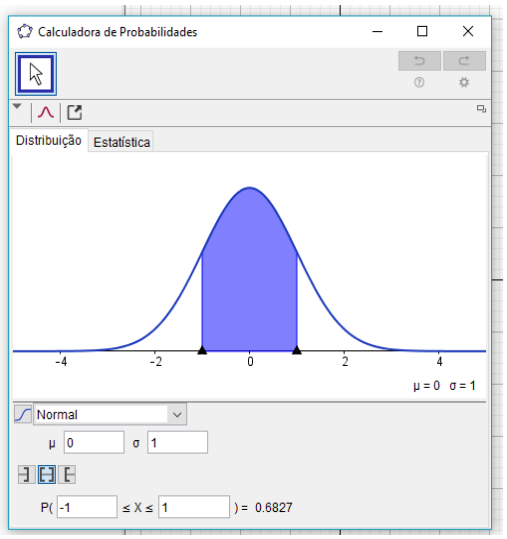
Figura 39: Medidas de Tendência Central



Fonte: Elaborada pelos autores

Na parte que envolve a Teoria de Probabilidades, podemos efetuar o Cálculo de Probabilidades da Distribuição Normal inserindo os dados desejados.

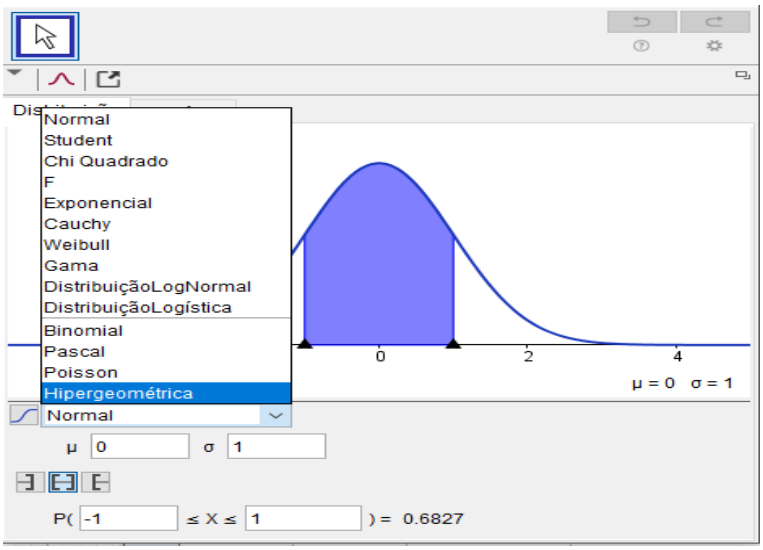
Figura 40: Cálculo de Probabilidades



Fonte: Elaborada pelos autores

Essa ferramenta permite variar a amplitude dessa distribuição, basta clicar nas setas pretas e arrastar para onde se quer alterar, tornando desta forma a visualização dinâmica. Além de ser possível de selecionar o tipo de distribuição, conforme na figura 41.

Figura 41: Tipos de distribuição



Fonte: Elaborada pelos autores

IV- Sequência Didática

O presente instrumento contém as atividades da sequência que vamos trabalhar junto com vocês e, está dividido em quatro seções. Cada seção contém no mínimo duas atividades. Durante e ao final da realização de cada atividade, favor registrar os arquivos gerados e anotar no papel todas as informações inerentes ao tratamento da atividade.

Nome do professor:	
Escola:	
Local:	Data: / /

Sequência Didática: Probabilidade usando o Software GeoGebra

Objetivo Geral: A sequência didática: "Aprendendo Probabilidade" é apresentada como um suporte para o ensino de Probabilidade usando os recursos do *software* GeoGebra, mais especificamente, (colocar os conceitos que serão trabalhados) . O objetivo da Sequência é ensinar de maneira simples como usar os recursos do GeoGebra para calcular Probabilidades explorando conceitos elementares de Probabilidade e Estatística referente a ementa abordada no 9º ano do Ensino Fundamental II.

Adaptado do artigo de Paterlini

SEÇÃO 1 – TRABALHANDO OS CONCEITOS DE PROBABILIDADE

Atividade 1: A vida útil de um *tablet* é um Experimento Aleatório ou Determinístico? Justifique a sua resposta.

Atividade 2: Dois *tablets* são retirados de uma linha de produção. Cada *tablet* é classificado como bom (B) ou defeituoso (D). Qual é o Espaço Amostral Ω para esse experimento?

Atividade 3: Considerando a situação da atividade 2, escreva os seguintes eventos:

A: Um *tablet* defeituoso e o outro bom;

B: Apenas *tablets* bons.

SEÇÃO 2 - TRABALHANDO DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DE PROBABILIDADE

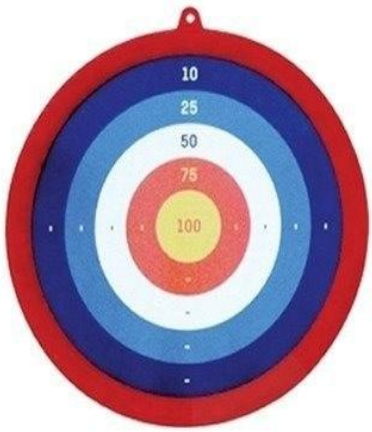
Atividade 1: Em uma caixa possui 15 picolés, sendo que 5 são de chocolate, 5 de morango e 5 de creme. Cada picolé tem a mesma chance de ser retirado?

Atividade 2: Considere a mesma situação da atividade 1. Qual a probabilidade de retirar da caixa um picolé de creme?

SEÇÃO 3 - A PROBABILIDADE NO COTIDIANO

Gustavo em um feriado prolongado estava entediado com as horas passadas em frente ao celular, videogame e televisão, então resolveu dar um pause nas tecnologias. Ao mexer nos seus brinquedos e jogos, encontrou um jogo que era dos seus pais, na caixa estava escrito Tiro ao alvo. Gustavo começou a ler as regras, pois não conhecia esse jogo. Ele percebeu que para ter uma melhor pontuação teria que acertar com uma flecha o círculo amarelo (menor), a pontuação variava de dez a cem pontos conforme a figura 42 abaixo:

Figura 42: Tiro ao alvo



Fonte: Site Mercado Livre, 2017

Gustavo havia combinado com cinco amigos para fazer uma disputa de videogame à tarde e teve a ideia de propor a eles para jogarem Tiro ao alvo, já que videogame eles jogam todos os

dias, imaginou que seria uma forma de diversificar as brincadeiras. Como é uma competição, ele pensou em estabelecer a regra que cada jogador terá a chance de 10 lançamentos.

Mas, o problema é que Gustavo é muito competitivo e se deparou com a seguinte situação:

- Qual a chance que eu tenho de acertar o alvo e garantir 100 pontos? Estou achando muito difícil!

Vamos ajudar Gustavo a verificar a possibilidade de acerto dele, porque a partir dessas informações ele irá decidir se vai propor para os colegas ou não.

Atividade 1: Ao lançar a seta o que é mais provável ter uma pontuação entre 10 a 75 pontos ou a de 100 pontos? Justifique.

Atividade 2: Qual a probabilidade de acertar o alvo? Tem alguma possibilidade de Gustavo ganhar? Justifique.

SEÇÃO 4 - PROBABILIDADE NO GEOGEBRA

A seção 4 tem como objetivo utilizar o contexto da seção 3 e aplicar no *software* GeoGebra para solucionar cada atividade.

No GeoGebra construa a figura 24 acima, considerando os raios *r* dos círculos azul escuro, azul claro, branco, amarelo e vermelho,r = 5, r = 4, r = 3, r = 2 e r = 1, respectivamente.

Atividade 1: Faça a simulação do campeonato de Gustavo no GeoGebra e verifique de 10 lançamentos de cada jogador, quantos tiveram sucesso? Faça uma tabela, considerando que n é a quantidade de lançamentos e a a quantidade de acertos e $\hat{p}$ a Estimativa, ou seja, $\hat{p} = \frac{a}{n}$.

Atividade 2 : A área dos círculos influencia nos acertos? Considerando círculos de raio=5 e o de raio=1, calcule a Probabilidade de acertar o alvo (utilize o conceito de Probabilidade Geométrica). Depois disso, na tabela complete uma coluna utilizando a Probabilidade Geométrica.

Atividade 3: A partir dos dados da tabela construa um gráfico que compare a Estimativa $\hat{p}$ com a Probabilidade Geométrica P.

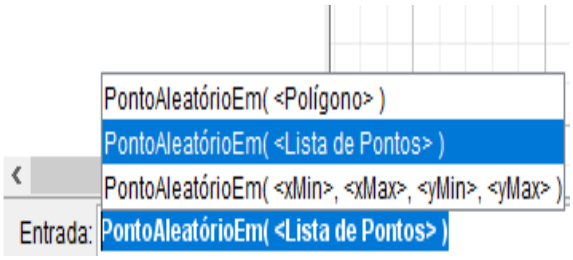
Atividade 4: Analisando o gráfico, o que você pode concluir a respeito da diferença entre a estimativa da Probabilidade e a Probabilidade teórica (Geométrica)?

Atividade 5: Na sua opinião, você aconselharia Gustavo a promover esse campeonato? Ele teria chance de vencer? Justifique.

V- Segunda Solução da Sequência Didática

Na segunda solução da Sequência Didática são feitos os processos da primeira solução referentes a construção dos círculos concêntricos. Depois disso é feita a simulação do lançamento das flechas de maneira automática. Para isso, iremos utilizar o recurso de pontos aleatórios na caixa de entrada, veja na figura:

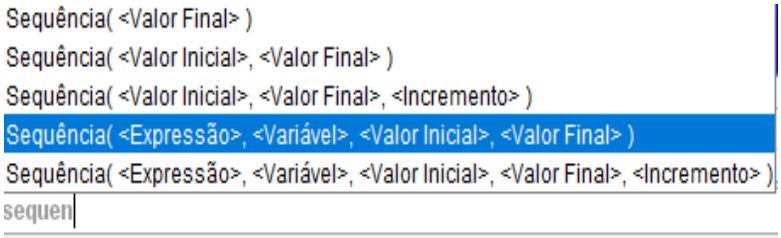
Figura 43: Ponto aleatório



Fonte: Elaborada pelos autores

No lugar de lista de pontos iremos colocar o círculo maior, no nosso caso é o c. Mas como cada jogador tem direito a 10 lançamentos, iremos utilizar o recurso sequência:

Figura 44: Sequência de pontos aleatórios



Fonte: Elaborada pelos autores

No comando da figura anterior iremos substituir expressão pelo *PontoAleatórioEm(c)*, a variável qualquer, valor inicial 1 e final 10. Desta forma, o comando ficará da seguinte forma: *Sequência(PontoAleatórioEm(c), i, 1, 10)*. Esse procedimento será repetido por seis vezes já que são seis jogadores, utilizamos a notação A_1 para o primeiro participante, A_2 para o segundo e assim sucessivamente.

Deve ser reforçado ao aluno o que se trata ponto aleatório, se o aluno lançasse a flecha esse fenômeno também seria aleatório, podendo acertar o alvo como os demais círculos. Nessa simulação será considerado que cada participante terá 10 chances, então *n=10* e os acertos chamaremos de *a*.

Depois disso, o comando *Sequência(PertenceARegião(Elemento(A_1, i), q), i, 1, 10)*, novamente o procedimento deverá ser repetido por seis vezes alterando apenas o participante

A_1(A_1). Nesse comando foram utilizados três comandos, um deles *elemento (lista, posição do elemento)* que nesse caso a lista são os lançamentos feitos pelos participantes, ou seja, A_1, A_2,... O outro comando pertence a região tem esse formato: *PertenceARegião(<Ponto>, <Região>)* o ponto foi substituído pelo elemento e a região é o círculo menor que no nosso caso é q. Por fim, como se trata de 10 lançamentos utilizamos novamente o comando sequência em expressão substituímos por *PertenceARegião(Elemento(A_1, i), q)* variando de 1 a 10 (quantidade de lançamentos).

O comando pertence a região irá criar uma lista dizendo se o ponto pertence a região ou não, a lista L_1 ficará da seguinte forma:

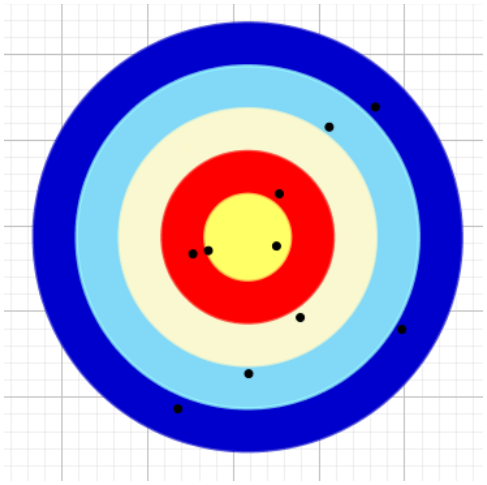
Figura 45: Lista

L_1 = {false, true, false, false, false, true, false, false, false, false}
L_2 = {false, false, false, false, false, false, false, true, false, false}
L_3 = {false, false, true, true, false, false, false, false, false, false}
L_4 = {false, false, false, false, false, true, false, true, false, false}
L_5 = {true, false, true, false, true, false, false, true, false, true}
L_6 = {false, false, false, false, false, false, false, false, true, false}

Fonte: Elaborada pelos autores

O tiro ao alvo ficará da seguinte forma

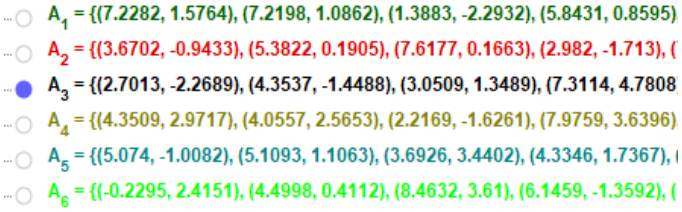
Figura 46: Simulação A_3



Fonte: Elaborada pelos autores

Para que o aluno visualize cada simulação basta selecionar na janela de álgebra, conforme a figura:

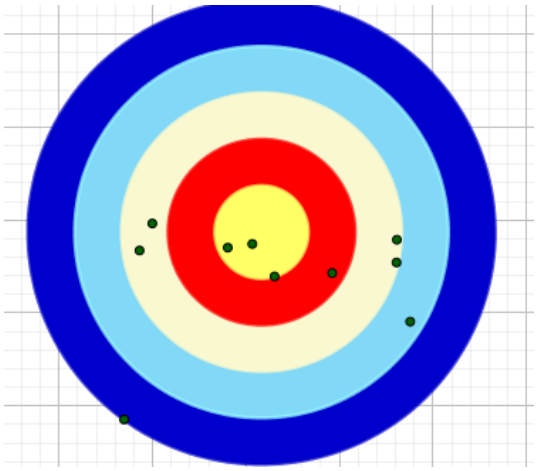
Figura 47: Simulações



Fonte: Elaborada pelos autores

Por exemplo, ao selecionarmos A_3 teremos 3 acertos no nosso caso, veja:

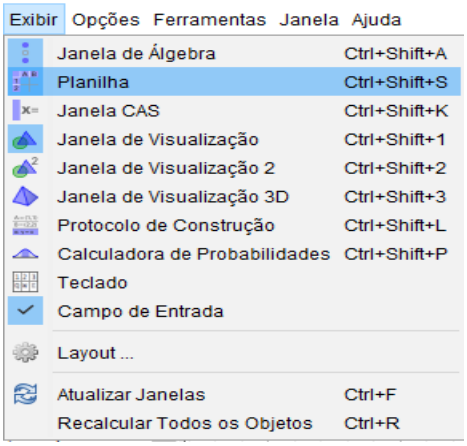
Figura 48: Simulação A_1



Fonte: Elaborada pelos autores

O aluno deverá fazer os registros na planilha. Para criar essa planilha, clica-se em *exibir* na barra de ferramentas e selecione *Planilha*, conforme a figura abaixo.

Figura 49: Planilha contendo os lançamentos



Fonte: Elaborada pelos autores

Ao a Planilha ser criada, oriente o aluno a preencher a planilha, considerando a primeira coluna com os alunos $(A_1, \dots, A_6)$, segunda quantidade de lançamentos n , a terceira com os acertos a , e a quarta será a estimativa da probabilidade chame de $\hat{p}$ e será $\hat{p} = \frac{a}{n}$, observe a figura.

Figura 50: Visualização da planilha

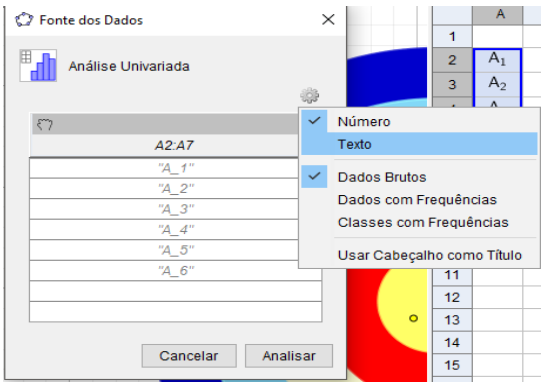
	A	B	C	D
1		lançamentos	acertos	acertos/lançamentos
2	A_1	10	3	0.3
3	A_2	10	2	0.2
4	A_3	10	2	0.2
5	A_4	10	2	0.2
6	A_5	10	2	0.2
7	A_6	10	2	0.2
8		Total		

Fonte: Elaborada pelos autores

Como são seis jogadores e cada um terá dez chances, a primeira coluna será preenchida por 10. Na quarta coluna, oriente o aluno a fazer a divisão utilizando os seguintes comandos para facilitar: Em D2, digite *=C2/B2* e basta clicar ao lado de D2 e arrastar até D7 para que a fórmula valha até essa linha. Na coluna C, os acertos aparecem na coluna automaticamente se for utilizado o comando *=ContarSe(x $\stackrel{?}{=}$ true, L_1)*, ou seja serão verificadas apenas os pontos que estão no círculo menor a partir da lista L_1 criada, basta arrastar esse comando até C7 para que valha em todos os casos. Vale ressaltar ao professor que a qualquer atualização no GeoGebra os valores da planilha serão modificados, já que os pontos são aleatórios.

Depois que todas as planilhas estiverem preenchidas, pode ser feito o gráfico. Basta selecionar a primeira coluna e clicar em *análise univariada* e então aparecerá a seguinte janela:

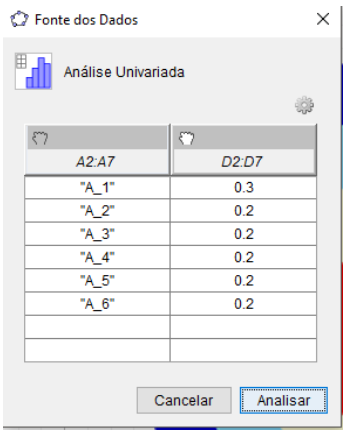
Figura 51: Análise univariada



Fonte: Elaborada pelos autores

Selecione a opção texto e depois dados com frequência, depois disso selecione a coluna das estimativas e clique na mão da segunda coluna que aparece na janela, conforme a figura abaixo:

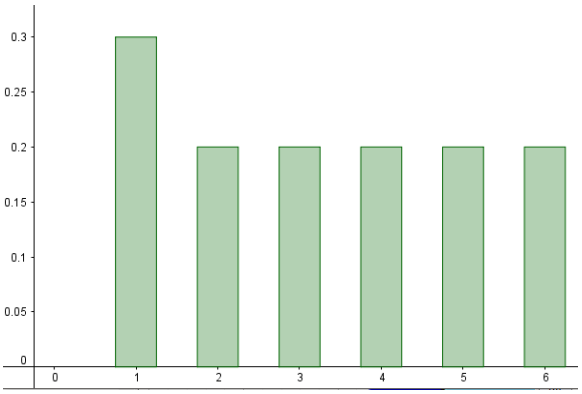
Figura 52: Construção do gráfico



Fonte: Elaborada pelos autores

Então basta analisar, com isso surgirá na tela o gráfico

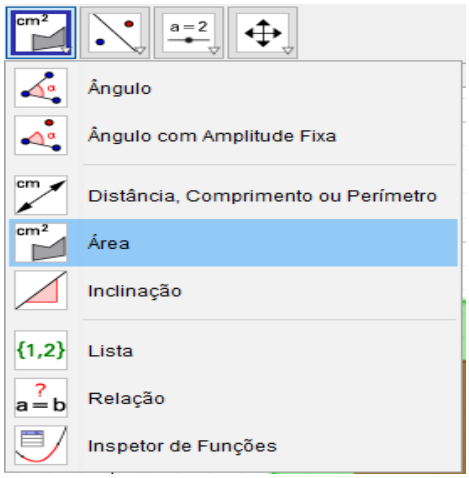
Figura 53: Gráfico



Fonte: Elaborada pelos autores

Para que o aluno encontre a Probabilidade Geométrica é necessário que se tenha as áreas dos círculos, para isso pode ser utilizada a ferramenta área em que basta clicar em área e depois selecionar o círculo da seguinte forma:

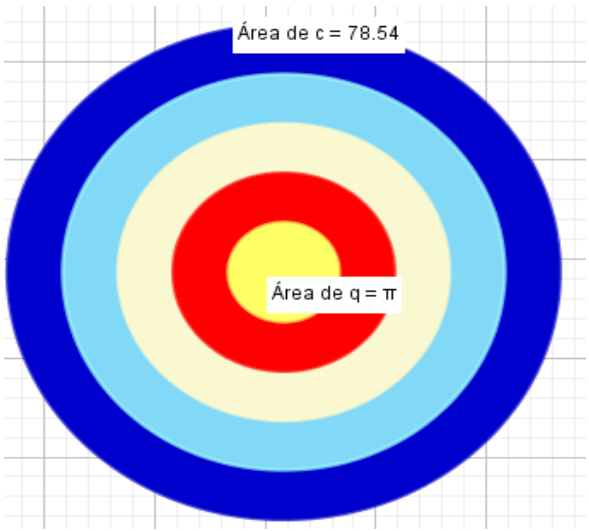
Figura 54: Áreas dos círculos



Fonte: Elaborada pelos autores

Desta forma teremos as áreas de todos os círculos, veja a figura 55, e então para encontrar a Probabilidade de acertar ao alvo considerando o círculo azul (escuro), teremos P= $\frac{\text{área do círculo azul escuro}}{\text{área do círculo amarelo}}$, logo P = $\frac{\pi}{78{,}54}$ = 0,0399 (aproximadamente).

Figura 55: Visualização das áreas dos círculos



Fonte: Elaborada pelos autores