UNIVERSIDADE ESTATUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

JOÃO DA CRUZ NEVES SILVA NETO

"A BAHIA JÁ ME DEU RÉGUA E COMPASSO": O USO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PARA O (RE)DESENHO DA PINTURA FLOR DO CANGAÇO

Vitória da Conquista

2017

JOÃO DA CRUZ NEVES SILVA NETO

“A BAHIA JÁ ME DEU RÉGUA E COMPASSO”: O USO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PARA O (RE)DESENHO DA PINTURA FLOR DO CANGAÇO

Trabalho de concussão de curso de graduação em licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Roberta D’Angela Menduni Bortoloti

Vitória da Conquista

2017

TERMO DE APROVAÇÃO

JOÃO DA CRUZ NEVES SILVA NETO

“A BAHIA JÁ ME DEU RÉGUA E COMPASSO”: O USO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PARA O (RE)DESENHO DA PINTURA FLOR DO CANGAÇO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Colegiado do Curso de Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

_____

Roberta D’Angela Menduni Bortoloti
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

_____

Márcio Antonio de Andrade Bortoloti
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

_____

Cleusiane Vieira Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Vitória da Conquista, _____ de Agosto de 2017

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer às forças superiores, os Orixás. Que nesse universo paralelo me manteve seguro, me protegeu, iluminou meus caminhos e me deram força para superar qualquer obstáculo. Toda a natureza a favor, Asè ó!

Às minhas mães Cristiane e Maria que, com paciência e sabedoria, me deram o alicerce para a vida através dos ensinamentos de responsabilidade, dedicação e amor, me orientando em todos os problemas que surgiram. Os seus estímulos de persistências que me possibilitaram permanecer nos meus objetivos. Aos meus pais João Neves, João Mário e Argemiro, que se fizeram presentes nos incentivos de pai e pelo apoio incondicional.

À minha família e aos meus amigos com toda luz, brilho e purpurina que nunca faltou. Em especial Avós, Yanne, Camila, Suellen, Marlua, Anna, Naira, Tânia, Mércia, Will, Bianca, Amanda, Fernanda, Gandarela e Jessica, que me fizeram sorrir sempre, principalmente quando meu semblante não estava tão iluminado assim. Deram-me conforto e ouvidos para os meus desabafos e proporcionaram momentos incríveis de alegria. Além dos momentos de estudo e seriedade tanto dentro quanto fora da universidade.

À minha professora orientadora Roberta, que me ouviu, discutiu, deu “puxões de orelha” e me respeitou nas mais diversas sugestões. Obrigado por encarar esse trabalho com a sua dedicação e carinho, pois sabemos das dificuldades que encontramos. Não poderia ser outra orientadora. Agradeço também por me oportunizar novos conhecimentos e liberdade de nos conhecer como pessoas também, firmando um laço também de amizade.

À professora Ana Paula por me incentivar e me apoiar durante toda pesquisa e toda a graduação com sua contribuição acadêmica e pela amizade. Obrigado por me oportunizar publicar uma parte deste trabalho como comunicação científica e ministrar um minicurso de mesmo caráter, pois se não fosse todo seu cuidado, carinho e atenção eu não teria concluído tudo isso. Meus sinceros e calorosos agradecimentos às Rainhas do curso. Aos professores Nino e Eliana, que me apoiaram nas diversas propostas de atividades nos estágios, além de me incentivarem quanto ao estudo da matemática vinculada a arte.

Aos professores Márcio e Cleusiane, que aceitaram o convite para participar da banca, é um prazer tê-los na banca examinadora. Márcio, obrigado por abrir as portas do

mundo da geometria pra mim, pois depois que adentrei nesse mundo tudo ficou mais harmônico. É um símbolo do conhecimento e o educador que a gente se espelha e deseja ser um pouco parecido. À professora Cleusiane, infelizmente não pude ser seu aluno, mas também acredito que as suas contribuições são de grande importância para este trabalho. Além disso, desejo que possamos ainda nos encontrar nesse fantástico mundo da matemática. A todos vocês e aqueles que não citei, mas sempre doaram um pouquinho de atenção, conhecimento e amor... “Aquele abraço”! (Gilberto Gil)

RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido em torno da temática de Educação Matemática e Arte por meio das Construções Geométricas. Temos como principal objetivo (re)desenhar a pintura Flor do Cangaço por meio de conceitos e definições da geometria euclidiana plana. A partir o do objetivo do trabalho e com base em Fiorentini e Lorenzato (2006), alegamos que esta pesquisa é do tipo descritiva, pois descrevemos detalhadamente o processo de (re)desenho da Flor do Cangaço, a partir da observação e análise rigorosa da pintura. Para isso, refletimos em como se dá e executamos o processo de leitura de imagem e, ressaltamos sua importância na Educação Matemática. Além disso, buscamos entender sobre as construções geométricas com régua e compasso e como pode auxiliar no entendimento de propriedades e demonstrações matemáticas. No (re)desenho da obra, identificamos dificuldades e pontos críticos no processo de construção do (re)desenho. Consideramos o termo "dificuldades" para as situações em que a partir do conhecimento geométrico, por exemplo, pudéssemos identificar as soluções. E, o termo "pontos críticos" para os casos em que assumimos condições estratégicas para desenvolver a construção, de forma que não fugissem da proposta do desenho original. O (re)desenho, presente nesse texto, pode ser uma estratégia para o ensino de geometria por meio da arte, pois possibilita ao aluno alternativas e caminhos diferentes para sanar os problemas encontrados no decorrer do (re)desenho. Nesse processo, o aluno recorre a conhecimentos de Geometria e outras áreas da Matemática para resolvê-los. E nesta busca de alternativas, ele pode observar a formação do seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Construções Geométricas. Régua e Compasso. (Re)desenho. Leitura de Imagem. Arte.

ABSTRACT

This work was developed around the theme of Mathematics Education and Art through Geometric Constructions. We have as main objective to (re)design the painting Flor do Cangaço through concepts and definitions of flat euclidean geometry. Based on the objective of the study and based on Fiorentini and Lorenzato (2006), we affirm that this research is descriptive, since we describe in detail the process of (re)design of Flor do Cangaço, based on the observation and rigorous analysis of the painting. For this, we reflect on how the image reading process is and we emphasize its importance in mathematics education. In addition, we seek to understand geometric constructions with ruler and compass and how it can help in understanding properties and demonstrations. In the (re) design of the work, we identify difficulties and situations in which decisions were made regarding the development of the design. We consider the term "difficulties" for situations in which from the geometric knowledge, for example, we could identify the solutions. And, the term "critical points" for the cases that we assumed the strategic conditions to develop the construction, so that it did not escape the proposal of the original design. In this paper they will be presented and discussed in the light of geometry teaching. The (re) design, present in this text, can be a useful strategy as a tool for the teaching of geometry through art, because these situations can cause the student to look for alternatives and different ways to heal the problems encountered. In this process, students use geometry and others áreas of mathematics to solve them. And in this search for alternatives, they can observe in the formation of their knowledge.

Keywords: Geometric Constructions. Ruler and Compass. (Re)drawing. Image Reading. Art

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 8

2. LEITURA DE IMAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 11

3. AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E O ENSINO DE MATEMÁTICA.... 18

4. ESTRATÉGIA METODOLÓGICA 20

5. (RE)DESENHO: FLOR DO CANGAÇO DE J. CUNHA 22

5.1. J. CUNHA: ARTISTA BAIANO 22
5.2. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO 24
5.3. (RE)DESENHO DA PINTURA COM RÉGUA NÃO GRADUADA E COMPASSO E SEU RESULTADO 31
5.4. DISCUSSÃO DE POSSÍVEIS RESULTADOS GERADOS NO (RE)DESENHO 54

6. POTENCIALIDADES DA LEITURA DE IMAGEM NESSE (RE)DESENHO 56

7. LIMITAÇÕES DA PESQUISA E POSSIBILIDADES DE PESQUISAS FUTURAS 59

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS 60

REFERÊNCIAS 62

1. INTRODUÇÃO

Nessa introdução apresentarei como se deu o processo do desenvolvimento do tema, Educação Matemática e Arte por meio das Construções Geométricas, a partir da minha trajetória, enquanto estudante. Para isso, aponto minha relação com as artes, cultura, Matemática/Geometria e Educação Matemática para então chegar a uma conexão, com vistas à consolidação do objeto de pesquisa, que discorrerei mais adiante. Estamos considerando por Geometria uma área da Matemática que estuda o espaço e as formas que o compõe, enquanto que por Matemática, as outras áreas dela como por exemplo a Álgebra.

Desde a infância, minha relação com as artes é de dependência. Sempre estive envolvido nos mais diversos campos artísticos, como: música, dança, desenho, pinturas, fotografia, sendo essa a forma que eu encontro para demonstrar o que eu sinto e penso, além de provocar emoções e reflexões aos que ouvem e veem minha arte. A partir desse meu processo de desenvolvimento pessoal e cultural um conceito de arte foi se formando para mim.

Esse conceito, de arte, com base nas experiências vividas por mim, estava pautado em toda e qualquer manifestação que expõe sentimento, instiga pensamentos, promove emoções e registros, seja através da Estética[1] e/ou da Comunicação. Em contato com crianças e adolescentes nos Estágios, percebi que a arte também é uma ferramenta complementar para a Educação, inclusive no ensino de matemática.

Ainda na perspectiva da minha trajetória, descendente de índios e negros, acredito na importância de assegurar nossa referência étnica e cultural. Assumir o cabelo crespo ou cacheado, as vestes e conhecer costumes desses povos são exemplos disso. Essa minha identificação e execução dos valores culturais que está ligado à forma em que eu me entendo e me expresso culturalmente é tão relevante que influencia na minha prática docente, porque lido também com a formação sociocultural do aluno enquanto professor educador[2].

O Brasil tem uma diversidade cultural ampla por ser formado por diferentes povos e pela sua extensão. Então, conhecer a história desmitificada do nosso povo, especificamente índios e negros, entender a formação cultural do Brasil e valorizá-la, é

[1] Estética é uma área da filosofia que procura estudar a natureza do belo e as bases da arte. (SANTANA, 2017)

[2] Entendo que professor educador além de ter a incumbência de compartilhar o seu conhecimento, tem o compromisso com a formação social e cultural do aluno.

o mínimo que pode ser feito diante de tamanha imposição cultural branca sofrida. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apontam “a necessidade de a escola instrumentalizar-se para fornecer informações mais precisas à questões que vêm sendo indevidamente respondidas pelo senso comum, quando não ignoradas por um silencioso constrangimento.” (BRASIL, 1998, p.123) Estas questões são referentes ao contexto sociocultural e histórico de determinado povo, que a sociedade agrega significados incoerentes, como por exemplo, como era trabalhada a matemática de outros povos? É a mesma matemática que nos trabalhamos hoje? Entre outras questões. Além disso, vivemos em um país ainda muito preconceituoso, em diversos ambientes, até mesmo nas escolas, diretamente ou indiretamente, encontramos práticas discriminatórias. Portanto, a escola deve buscar alternativas para valorizar as diferenças étnicas e culturais, de modo a tornar a diferença, conhecimento complementar e não segregador, na qual a cultura seja estimulada para se relacionar e se manifestar com liberdade e respeito.

Minha paixão pela docência, em especial de Matemática e Geometria, foi despertada ainda quando criança, pois adorava brincar de escolinha com minha irmã e meus primos, além disso, tinha uma certa habilidade para jogos de raciocínio lógico. Durante a adolescência, desejei cursar arquitetura ou moda (especificamente voltadas para as artes) porque acreditava que poderiam me proporcionar uma condição financeira futura melhor. Contudo, esses cursos eram ofertados apenas em faculdade particular na minha cidade e não tive como prestar vestibular para estudar fora. Por isso, condicionado a prestar vestibular para a graduação em licenciatura em matemática na qual passei logo na primeira tentativa, aos dezessete anos de idade. Quando era dito às pessoas que eu estava cursando matemática, a surpresa e incompreensão por parte delas eram sempre notadas por mim, quando geralmente me questionavam: “Mas você não é da área artística?”. E eu sempre respondia: “Sim, continuo sendo da área artística, pois matemática é arte e vice versa!”. Naturalmente, durante a graduação, estive na tentativa de traçar uma comunicação entre a arte e a matemática.

E foi no curso, especialmente de geometria euclidiana plana, que me encantei pela geometria em si. Percebi sua perfeição a partir da ordem das demonstrações e sua presença em nosso cotidiano, porém, a geometria está quase afastada da sala de aula da educação básica. Justifico esta afirmação, por um lado com base nos estudos desenvolvidos por Lorenzato (1995), que apontaram como uma das principais causas, o professor não possuir o conhecimento geométrico básico para o ensino de geometria e

em Zago (2010). Este último autor aponta que a Matemática em si é vasta para a exploração e por isso não se deve restringir seu ensino apenas à resolução de problemas. Isto cabe também ao ensino de Geometria, levando em consideração que ela é mais visual e mais perceptível no dia a dia. Além disso, o que vivenciei, durante minha experiência nos estágios em 2015 e 2016, em que a geometria era naturalmente ignorada pela escola e professores, que alegavam falta de tempo para o ensino de conteúdos geométricos. Enquanto futuro professor, mas já consciente da importância da geometria na Educação, procurei diminuir nas turmas que estagiei esta defasagem por meio de trabalhos manipulativos, sempre relacionando outros conteúdos da matemática com a geometria.

É imprescindível o estudo de geometria desde os anos iniciais, pois a partir dela desenvolvemos habilidades que nos permitem raciocinar geometricamente e visualmente. Lorenzato (1995, p.05) aponta que "Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida." Isto se dá porque ela está presente em nosso dia a dia mesmo que indiretamente, ou seja, constantemente estabelecemos um contato com formas, figuras e para compreender ou solucionar problemas do dia a dia.

Diante do exposto, contextos que abrangem arte, cultura, geometria, permeando o que eu gosto e o que eu sou, escolhi a pintura "Flor do Cangaço" de José Antônio Cunha, publicada no livro Universo de J. Cunha, como objeto de estudo para essa pesquisa. Esse artista é baiano, e carrega em suas obras uma referência especial: promove o encontro entre culturas e sociedades, pois, suas obras são mais do que estéticas, são comunicativas, trazem consigo valores socioculturais, histórico e político. Além disso, seu trabalho é marcado pelas cores fortes e pelos traços geométricos, com um refinamento simétrico e harmônico. (MUNANGA, 2016)

A escolha pela pintura "Flor do Cangaço", símbolo de pureza e proteção, pode trazer uma discussão do cangaço e do nordeste. Além disso, esta obra é marcada por curvas exclusivamente simétricas, formas geométricas diversas contemplando estruturas da geometria euclidiana plana. Dessa forma, neste trabalho, temos[3] por objetivo *(re)desenhar a pintura Flor do Cangaço por meio de conceitos e definições da geometria euclidiana plana*. Entendemos o (re)desenho como uma (re)apresentação da

[3] A partir deste ponto do texto irei usar a 1ª pessoa do plural porque o texto foi criado a partir de discussões entre mim e minha orientadora.

pintura de forma diferente do original. Uma das possíveis formas de (re)apresentar a obra é o (re)desenho utilizando apenas régua não graduada[4] e o compasso.

Salientamos que essa estratégia pode ser útil como uma ferramenta para o ensino de geometria por meio da arte. De modo que o aluno participe da construção do pensamento geométrico e comprove-o por meio das respectivas demonstrações. Além disso, independente da pintura, o aluno exercita o pensar geométrico. Consideramos pensamento geométrico a habilidade que o aluno tem de fazer comparações, visualizar e representar, raciocinar a partir dos conceitos e propriedades da geometria. (BRASIL, 2002)

Afim disso será apontado inicialmente um estudo sobre leitura de imagem e sua potencialidade na Educação Matemática, pois o (re)desenho de uma obra requer uma leitura de imagem. Logo em seguida, uma abordagem a respeito das construções geométricas com régua e compasso. Com isso podemos desenvolver o (re)desenho e discutir o resultados encontrados. Por fim, apresentaremos as potencialidades desse (re)desenho na Educação Matemática, identificando-o como uma possível estratégia para ser aplicada na sala de aula.

2. LEITURA DE IMAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Diariamente estamos expostos a diversos tipos de imagens, que geralmente traz alguma mensagem implícita ou explícita. Entretanto, nem sempre sabemos interpretar essas imagens e isto implica que aspectos relevantes acabam passando despercebidos. Temos como exemplo as propagandas de imagens, na maioria das vezes trazem consigo um discurso persuasivo com os quais não sabemos lidar ou não fazemos leituras de forma crítica. Por isso, Barbosa (1998, p. 17) afirma que “a Educação deveria prestar atenção ao discurso visual”, ou seja, nos tornarmos conscientes nas mais diversas leituras.

As imagens também marcam presença significativa na arte e fazer leituras dessas imagens também pode ser uma potencialidade para o ensino. Nesta perspectiva e também de acordo com Alves (2007), há uma grande bagagem cultural na arte e, por meio dela, as imagens representadas na Matemática podem ser visíveis por meio de combinações de cores, traços e formas que foram desenvolvidas ao longo de séculos.

[4] A partir deste ponto do trabalho, toda referência à régua está associada à régua não graduada.

Ou seja, a arte é um ambiente de discussão cultural, social, político e uma forma de representação de pensamento em que pode ser explorada matematicamente e/ou geometricamente. Vale salientar, que entendemos "representação de pensamento" como uma forma de materializar o que se está pensando.

Para a elaboração dessa pesquisa, foi necessário definir o que é arte de modo mais formal. Em conformidade com Braida (2011), arte é tudo que "tem sentido, que é fictício, que é um ludíbrio, que é iterável, reflexivo, e que estiliza. Em suma, isso é um modo singular de manifestação do traço que distingue o humano do inumano." (BRAIDA, 2011, p.32). Sendo assim, arte é uma representação de percepções, sentimentos e ideias que serve como uma ponte de interação e comunicação entre o artista e quem consome arte. São essas possibilidades que diferenciam o humano do inumano. Além da compreensão, a partir dessa definição, e o contato com crianças e adolescentes nos Estágios, percebi que a arte também é uma ferramenta complementar para a educação, inclusive no ensino de matemática. Um trabalho que também nos inspirou para a discussão da conexão da arte com a matemática foi o de Fainguelert e Nunes (2016), com o livro intitulado "Fazendo arte com a matemática".

É válido salientar que o artista, ao fazer sua obra, não se preocupa necessariamente com a matemática ou a geometria. Além disso, no processo de visualização da obra, é possível sugerir discussões para além da geometria e matemática, como por exemplo questões sociais e culturais que podem ser relacionadas à obra. Com essa interação, o aluno não se limita apenas ao conteúdo proposto pelo professor, pois o conhecimento matemático se entrelaça com outros conhecimentos, de modo a ampliar a interdisciplinaridade. Para a fomentação dessas discussões é preciso que o observador faça leituras e interpretações dos objetos envolvidos de maneira adequada, ou seja, saber ler e interpretar para processar e organizar todo conhecimento (artístico, social, cultural, político, geométrico) identificado. Assim afirma Santos (2006, p. 10), "A leitura e interpretação de imagens visuais são indispensáveis para a apreensão dos conhecimentos artísticos, culturais e estéticos, pois, possibilitam o desenvolvimento da percepção, crítica, imaginação, fantasia e sentimentos".

Então, de acordo com a importância da leitura e interpretação de imagens, proponho a seguir discutir o que estamos considerando como leitura e imagem. Com isso, avançar para o que vem a ser leitura de imagem.

Na maioria das vezes, quando pensamos em leitura nossa interpretação imediata ainda é muito superficial, geralmente entendemos como identificar cada

palavra que está organizada em formato de texto. Entretanto, a leitura vai além de apenas decodificar palavras. Leffa (1996) exemplifica isso da seguinte forma:

> Embora a leitura, na acepção mais comum do termo, processa-se através da língua, também é possível a leitura através de sinais não lingüísticos. Pode-se ler tristeza nos olhos de alguém, a sorte na mão de uma pessoa ou o passado de um povo nas ruínas de uma cidade. Não se lê, portanto, apenas a palavra escrita mas também o próprio mundo que nos cerca. (LEFFA, 1996, p.10)

Então, a leitura não se restringe a grupos de palavras organizadas, nós estamos praticando o processo de leitura a todo o momento a partir dos nossos sentidos, ou seja, através da visão, tato, audição, olfato e paladar. A partir deles entramos em contato com aquilo que está sendo lido, fazendo nossa leitura de mundo. Consoante com Leffa (1996, p.10), "a verdadeira leitura só é possível quando se tem um conhecimento prévio desse mundo". Isso se dá porque precisamos de alguma referência para que haja um confronto ou julgamento do que está sendo lido com o que temos como conhecimento.

Dessa forma, a leitura se torna dependente desse conhecimento prévio do leitor, das suas experiências. Isto implica que um objeto (aquilo que está sendo lido) pode ter leituras diferentes a depender dos leitores. Podemos exemplificar da seguinte forma: se o objeto em questão for árvores, poderá existir diferentes leituras a depender do leitor que observa o objeto. Por exemplo, um latifundiário poderá fazer uma leitura consumista, o engenheiro florestal uma leitura em relação ao meio ambiente, o marceneiro uma leitura comercial entre outros.

Leffa (1996, p.15) afirma que "riqueza da leitura não está necessariamente nas grandes obras clássicas, mas na experiência do leitor ao processar o texto", ou seja, o produto da leitura não está estritamente no texto, mas em tudo que ele proporciona ao leitor. Assim, Leffa (1996, p.14) afirma que "a compreensão não começa pelo que está na frente dos olhos, mas pelo que está atrás deles".

Nesse contexto, Leffa (1996) valida a importância de perceber o processo dessa compreensão, os caminhos e descaminhos que o leitor precisou fazer para dar sentido ao texto. Depois de discutir possíveis conceitos para a leitura, ele chega a conclusão que:

> Ler é um fenômeno que ocorre quando o leitor, que possui uma série de habilidades de alta sofisticação, entra em contato com o texto, essencialmente um segmento da realidade que se caracteriza por refletir um outro segmento. Trata-se de um processo extremamente complexo, composto de inúmeros subprocessos que se encadeiam de modo a estabelecer canais de comunicação por onde, em via dupla, passam inúmeras informações entre o leitor e o texto. (LEFFA, 1996, p.24)

Nesse sentido, o processo de compreensão da leitura considera-se a função que o leitor tem a partir do seu conhecimento prévio sobre o texto e a função que o texto tem sobre o leitor, visto que eles se encontram num estado de interação produzindo o que entendemos também como interpretação.

O sentido da palavra interpretação sugere vários conceitos e para entendê-la, recorreremos aos estudos de Santos (2006), que faz uma análise a partir de autores estudados por ele. Nesse contexto, esse autor aponta que a interpretação

> [...] é vista como uma explicação. Interpretar neste sentido é o mesmo que explicar, comentar, entender sejam um texto, uma situação, uma imagem ou ainda uma obra de arte, interpretar também é dar sentido ao que se está vendo, sentindo. (SANTOS, 2006, p. 14)

Nesse sentido, a interpretação faz parte do processo de leitura, na qual uma complementa a outra e são suficientes para dar sentido ao que está sendo lido. Isto significa que elas caminham juntas e a leitura pode ser explicada quando há interpretação, ou seja, por meio da explicação atribuímos um sentido.

Além disso, quando estamos interpretando uma obra, na tentativa de identificar o que está implícito através de análises e comparações, de algum modo estamos fomentando conceitos (SANTOS, 2006). Pois, o processo de interpretação é também de criação quando atribuímos conceitos e o explicamos estamos sugerindo um sentido.

Após essa reflexão à respeito de leitura e interpretação, podemos dar continuidade com a apresentação de como estamos entendendo o que é imagem neste trabalho, para enfim, ser discutido a leitura de imagem.

Existem várias definições para a palavra imagem, mas geralmente ela tem conexão com a linguagem, ou seja, as imagens mediam a comunicação entre o locutor e o interlocutor, pois através delas estes sujeitos interagem entre si. O que indica a importância da imagem atualmente, já que o mundo está excessivamente visual.

Em conformidade com Ferreira (*Apud* SANTOS, 2006, p.17), “imagem é toda representação gráfica, plástica, ou fotografia de pessoas ou objetos”. Além disso, Houaiss e Villar (*Apud* SANTOS, 2006, p.17) afirmam a imagem como “representação da forma ou do aspecto de ser ou objeto por meio artístico, desenhada, gravada, pintada, esculpida”.

Esses autores tratam a imagem como representação de algo, pessoa ou objeto. Santos (2006) complementa essa ideia ao apontar também que a imagem tem a função

de atribuir significados a diversas situações e corporizar o que é abstrato por meio da criatividade.

Então, a imagem é também uma representação do pensamento de forma material e associada à algum significado. Nesse sentido, Flores indica a imagem como "lugares que se põe em prática modos de pensar, onde se exercitam visualidades." (FLORES, 2016, p.502).

Dessa forma, a imagem pode ser entendida, aqui neste trabalho, como representações materiais significativas de algo, objeto ou pessoas criadas a partir dos modos de pensar, de forma que estas representações proporcionem a prática de estimular o pensamento daquele que faz a leitura.

Com a ideia de leitura e imagem já apresentadas, temos propriedade para entender o sentido de leitura de imagem e suas potencialidades na Educação Matemática.

Como já foi dito, a todo o momento estamos em contato com diferentes tipos de imagem, entretanto nem sempre sabemos como ler e interpretá-la. Sabemos que uma determinada imagem pode conter inúmeras informações e é importante conhecê-las, para então fazermos uma leitura da imagem.

Santos (2006) afirma que ler uma imagem é:

> fazer inúmeras perguntas a ela, mesmo quando não se dá conta de que está-se interpretando, perguntando algo. Compreender uma imagem é de certa forma ter as respostas respondidas por ela. As perguntas são feitas mesmo inconscientemente. O ser humano tem necessidade de interpretar, de fazer perguntas, de responder as perguntas, de dar sentido e significado ao mundo. (SANTOS, 2006, p. 22)

Assim, a definição de leitura não se aplica somente a textos verbais, mas também a textos não verbais, como no caso das imagens. A diferença é que geralmente os textos verbais tem um grau de objetividade maior, ou seja, existem menos possibilidades de diferentes interpretações, a não ser que seja de intenção do autor. Enquanto que, geralmente as imagens tem um grau maior de subjetividade, o que dá margem para várias interpretações. Santos complementa esse processo afirmando que a leitura de imagem:

> não é apenas decifrar. Ler é muito mais, é compreender, descrever, decompor, recompor, comparar, fazer relações, interpretar e assim conhecer o objeto que esta sendo lido. Pois ao se trabalhar com leituras de imagens e criação, mobiliza saberes, instiga a fantasia, aperfeiçoa o repertório conceitual e imagético. (SANTOS, 2006, p. 23)

A leitura de imagem não é só decodificação, com a prática e o exercício da leitura, ela passa a ser aplicada de modo muito natural. Santos afirma também que “ler imagem é problematizar, descrever, fazer relação com o cotidiano, perceber mudanças e transformações que a imagem provoca ou provocou e ainda refletir, fazer julgamentos, agir criticamente” (SANTOS, 2006, p.25). Desta forma, ler uma imagem é estabelecer um diálogo com ela, em que os questionamentos fomentados serão respondidos ou não por nós mesmo. Isto se dá a partir da relação que estabelecemos da leitura com a imagem a partir do que vivemos, das comparações e críticas que fazemos, de como a imagem estimula nossos sentidos e por fim, de sermos capazes de descrever esse processo.

Reconhecendo o poder da imagem podemos fazer uso dela como recurso interdisciplinar na sala de aula, inclusive na disciplina de matemática e geometria. Nesse sentido, Barbosa (*apud* SILVA, 2014, pg. 4) afirma que “a leitura de imagens no contexto escolar, permitiria que os discentes assimilassem um arcabouço necessário para o entendimento de uma gramática visual das mais variadas concepções imagéticas”. Segundo este autor, o contínuo processo de leitura de imagem na sala de aula orientado pelo professor, habilita o aluno para realizar leitura de outras imagens, contribuindo, dessa forma, com um sujeito mais crítico.

A leitura de imagem é um processo de criação. Quando o aluno se apodera de certa imagem e ele a interpreta, ele está produzindo sentido. Nesta perspectiva, Barbosa afirma que, tanto fazer arte quanto ler e interpretá-la são formas de desenvolver a criatividade. Pois, no momento em que buscamos sentindo a partir do conhecimento prévio, nos acabamos desconstruindo para reconstruir de acordo com nossa necessidade, e isto é criar. (BARBOSA, 2010)

Ainda nessa lógica, Santos alega que a leitura, inclusive a de imagem, “é uma atividade que complementa a produção, neste caso o aluno se apropria do objeto, representa e interpreta; sendo a leitura aquela que possibilita a compreensão, a apreensão e reconstrução do objeto.” (SANTOS, 2006, p.23) Além disso, Alves (2007) complementa que no processo de leitura de imagem, nós a descontruímos para reconstruir. É diante dessa reconstrução que o sentido é estabelecido.

Com efeito, a leitura de imagem no contexto da educação na sala de aula, especificamente no ensino de geometria e matemática, pode ser um recurso significativo, pois podem ser explorados o espaço, formas, proporções, distância, simetria, volume, relações, perspectiva e outros, que estão geralmente presentes nas

técnicas de construção das imagens. (FLORES, 2016) Além disso, a matemática e a geometria são predominantemente visuais e representativas, ou seja, é possível representar a maioria dos conteúdos através de imagens.

Como vimos, o processo de leitura de imagem é criacionista, pois fazemos análises, reconstruímos, caracterizamos e comparamos até identificar e compreender o sentido ou significado desejado. Se esta leitura for atrelada e/ou mediada para um conteúdo matemático ou geométrico, o aluno pode desenvolver o seu próprio pensamento geométrico.

Então o processo de leitura de imagem no contexto da sala de aula pode ser muito enriquecedor no desenvolvimento do conhecimento do aluno. Entretanto, o professor deve estar preparado para trabalhar com imagem, pois como vimos, elas têm o poder de estimular diferentes pensamentos e interpretações. Nesse sentido, Santos (2006) aponta que apesar de não existir uma leitura correta ou incorreta, o professor pode desenvolver e problematizar várias metodologias apropriadas para o trabalho com leituras de imagem.

De fato, torna-se necessário que o professor domine o processo de leitura e interpretação de imagem e conheça como um todo o objeto que será lido, pois o interessante não é que esse objeto seja lido apenas esteticamente.

À vista disso, o professor vai sempre precisar fazer a mediação no processo de leitura de imagem, ou seja, ele vai estimular que a leitura dos alunos seja direcionada para aquilo que ele deseja discutir. (SILVA, 2014)

Portanto, de modo geral e em conformidade com Santos (2006), trabalhar com a alfabetização visual no contexto da educação possibilita que o aluno faça reflexões do mundo com questões que envolvem a sociedade. O aluno então, poderá desenvolver e amadurecer seus "argumentos, seu conhecimento, se expressando com autonomia. Porque interpretar é o mesmo que explicar, compreender, comentar, decodificar, criar, perceber e julgar". (SANTOS, 2006, p. 10)

Nesse contexto, Zago (2010) afirma que a importância das imagens no contexto educação matemática é mais do que representação de algum conceito, pois é um instrumento de ensino que possibilitará a construção do conhecimento. Assim, o aluno compreende o que a imagem está representando e identifica as características geométricas presentes na obra. Sendo assim, uma forma de "aprender a ver". (FLORES apud Zago, 2010, p. 47)

3. AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E O ENSINO DE MATEMÁTICA

As construções com régua e compasso tiveram grande importância para o desenvolvimento da Matemática grega desde o século V a.C, no período dos pitagóricos. Segundo Wagner (1993), os antigos gregos conseguiam representar apenas os números inteiros, enquanto que as frações eram vistas como razões entre números inteiros, o que dificultava as resoluções de problemas que envolviam medidas de grandezas. Como a ideia de número real ainda não tinha sido criada, durante a época de Euclides (séc. III a.C), foi assumida a ideia de relacionar estas grandezas à segmentos de reta ao invés de números e por isso, a utilização de métodos geométricos.

Euclides em Os Elementos, apresenta postulados da geometria que enuncia "construções" permitidas, dentre elas: traçar uma reta por dois pontos; prolongar uma reta limitada continuamente em linha reta; escrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio (JESUS, 2008). Apesar de Euclides ainda não utilizar o termo "compasso" e nem apresentar como as construções deveriam ser feitas (EVES *apud* JESUS, 2008), já existia a ideia de como proceder as construções geométricas com régua e compasso, ou seja, a existência de "regras específicas" para as construções com régua (não graduada) e compasso.

A partir dos postulados apresentados acima como construções permitidas com régua e compasso, é permitido também traçar novas retas e circunferências a partir de pontos encontrados por meio de intersecções de retas, intersecções de circunferências e intersecções de retas com circunferências (GUERRA, 2011). Segundo Eves (1994), os gregos apreciavam as construções geométricas como jogos com regras e eram considerados jogos atraentes, talvez porque estimulavam o pensamento.

O uso das construções geométricas com régua não graduada e compasso foi fundamental para a solução de problemas, como exemplo: "a bissecção de um ângulo ou um segmento, a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto". (GUERRA, 2011, pg. 23)

Entretanto não é possível solucionar todos os problemas matemáticos com o uso da régua e do compasso, ou seja, havia problemas cujas soluções eram impossíveis com o uso desses instrumentos. Estes ficaram conhecidos como problemas clássicos da geometria: duplicação do cubo, quadratura do círculo e trissecção de um ângulo qualquer. (GUERRA, 2011)

Neste trabalho estamos considerando construções geométricas como Jesus (2008): um conjunto de ferramentas que auxiliam e complementam o ensino e aprendizagem de geometria, em particular, as demonstrações da Geometria Euclidiana Plana. Assumimos também que as construções feitas, utilizando apenas régua não graduada e compasso, são a partir das propriedades das figuras, cujas demonstrações podem ser justificadas por meio da Geometria Euclidiana Plana.

Já o desenho geométrico é entendido como uma disciplina que ensina essas construções (JESUS, 2008) e pode ser visto também como um saber mais técnico do que teórico (ZUIN, 2001). O saber técnico se refere a realização das construções geométricas apenas como um roteiro de construção, não levando em consideração o saber teórico que são as demonstrações fundamentadas na geometria euclidiana plana, que dão sustentação às construções.

Segundo Wagner (1993), os problemas de construções geométricas são estimulantes, despertam curiosidades e podem proporcionar descoberta de novas propriedades. O que os tornam educativos, pois se faz necessário uma análise do problema, estudo, organização e execução da construção e por fim, conclusão da quantidade de soluções distintas e validade dos dados.

Putnoki apud Jesus (2008) afirma a importância do ensino de construções geométricas ser associado com justificativas que às fundamentem, e para isso, podemos utilizar a Geometria Euclidiana Plana. Nesse sentido, ele complementa afirmando que:

> O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de "concretização". Vejo a régua e o compasso como instrumentos que permitem "experimentar". Isso, por si só, dá uma outra dimensão aos conceitos e propriedades geométricas. (PUTNOKI apud ZUIN, 2001, p.177)

É nesse sentido que as construções com régua e compasso contribuem para o ensino de geometria e matemática, pois é visualizar a teoria na prática. Durante o processo de construção, os argumentos (conceitos e propriedades – teoria) geométricos podem ser testados e validados (prática), o que facilita uma melhor compreensão acerca desses argumentos.

Os PCN's (BRASIL, 1998) propõem que as definições em matemática e geometria sejam trabalhadas numa perspectiva de resolução de problemas, tendo em vista que esses problemas não tenham soluções imediatas. Dessa forma, as proposições não serão pontos de partida na atividade e sim o próprio problema com carência de

provas ou demonstrações. Isto faz com que o aluno participe diretamente da formação dos seus conceitos.

O documento salienta também, no bloco espaço e forma, que o professor trabalhe a investigação de situações que envolvam as construções geométricas com régua e compasso, como forma de visualização e verificação de propriedades.

Assim como Jesus (2008), acreditamos que as situações-problema envolvendo construções geométricas com régua não graduada e compasso sejam trabalhadas a partir do sexto ano, de forma progressista. Entendemos por forma progressista quando o grau de dificuldade e complexidade dos problemas se desenvolve a partir da evolução do pensamento geométrico do aluno.

Outros trabalhos com essa proposta de ensinar matemática e geometria com construções geométricas com régua e compasso também foram desenvolvidos. Algumas delas nos serviram de inspiração e contribuíram para nossa reflexão no decorrer do trabalho. São algumas delas: Almeida (2007), com a tese com título "Identificando rupturas entre significados e significantes nas construções geométricas: um estudo em traçados de lugares geométricos bidimensionais, envolvendo pontos, retas e circunferências"; Jesus (2012), também com a tese intitulada "As construções geométricas e a gênese instrumental: o caso da mediatriz"; Oliveira (2015), seu artigo com título "As construções geométricas e demonstrações nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental";

4. ESTRATÉGIA METODOLÓGICA

De acordo com o objetivo desse trabalho: (re)desenhar a pintura Flor do Cangaço por meio de conceitos e definições da Geometria Euclidiana Plana, alegamos que esta pesquisa é do tipo descritiva (FIORENTINI; LORENZATO, 2006), pois descrevemos detalhadamente o processo de (re)desenho da Flor do Cangaço, a partir da observação e análise rigorosa da pintura.

Compreendemos a pintura Flor do Cangaço como uma imagem, pois como dito anteriormente, uma imagem pode ser a representação material significativa de algo ou objeto de modo que esta representação possibilite o estímulo do pensamento. (SANTOS, 2006; FLORES, 2016).

A seguir, apresentamos a pintura Flor do Cangaço de J. Cunha:

Figura 1:Flor do Cangaço

Fonte: Universo de J.Cunha, pg. 78, 2016.

A análise da pintura foi fundamentada no processo de leitura de imagem porque nos possibilitou compreendê-la especificamente em seu aspecto técnico entendido também por suas características físicas, as quais falaremos a seguir para estabelecermos os critérios do (re)desenho.

Primeiramente, desejávamos que o (re)desenho fosse proporcional à imagem original, que por sua vez media *65 x 50 cm²* (informação obtida no livro Universo de J. Cunha). Enxergamos que a pintura é formada por retas paralelas e perpendiculares, por retângulos e quadrados, por triângulos equiláteros e triângulos retângulos, por circunferências e arcos e por trapézios. Além disso, assumimos que a pintura completa possui dois eixos de simetria (os dois segmentos perpendiculares que dividem a pintura ao meio e não são as diagonais) e que a região limitada pela circunferência maior possui quatro eixos de simetria (além desses dois eixos já citados, tem também os segmentos que ligam as extremidades da pétala e que passam pelo centro da pintura). Para o (re)desenho preservamos os detalhes em relação a posição e quantidade das formas geométricas e que dois segmentos de reta tangenciam a circunferência maior de acordo a Figura 1.

O (re)desenho está fundamentado em construções geométricas elementares utilizando régua e compasso, que de acordo com Wagner (1993), as construções elementares também são: Reta Perpendicular, Bissetriz, Mediatriz, Divisão de segmento em partes iguais. Como vimos anteriormente, “regras específicas” são adotadas para desenvolver uma construção com régua e compasso. Para esse (re)desenho, as regras utilizadas foram: traçar uma reta por dois pontos; prolongar uma reta limitada continuamente em linha reta; escrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio; traçar novas retas e circunferências a partir de pontos encontrados por meio de intersecções de retas, intersecções de circunferências e intersecções de retas com circunferências; transpor abertura de compasso, ou seja, repetir a mesma abertura para outra construção como por exemplo.

Para o (re)desenho da pintura Flor do Cangaço com o uso da régua não graduada e do compasso, utilizamos o software Geogebra para facilitar a captura das imagens e não perder precisão ao apresenta-las, o que, não interferiu no (re)desenho usando apenas os instrumentos mencionados acima. Vale ressaltar que não utilizamos os recursos do software, como por exemplo, encontrar bissetriz e mediatriz, para facilitar o processo de (re)desenho, pois as construções seguiram as “regras” utilizando apenas régua não graduada e compasso.

5. REDESENHO: FLOR DO CANGAÇO DE J. CUNHA

Esta seção está organizada em quatro subseções. Iniciamos apresentando quem é o autor da Flor do Cangaço. Em seguida trazemos cinco proposições necessárias para realizar o (re)desenho da Flor do Cangaço. Na terceira subseção desenvolvemos o processo de construção do (re)desenho e por último discutimos os possíveis resultados gerados no (re)desenho.

5.1. J. Cunha: Artista Baiano

José Antônio Cunha nasceu em Salvador, no final da década de 40. Era filho de pescador, o que também lhe proporcionava um contato intrínseco com a natureza local, os mistérios e movimento do mar, o vento, a bonança, cujas dificuldades encontradas para sobrevivência faziam parte do seu dia a dia (CORRUPIO, 2016).

Além disso, ele tinha um contato muito forte com a fé e os encantamentos. Existia uma harmonia entre os orixás e caboclos com os santos católicos ao relacionar Nossa Senhora de Monte Serrat com Iemanjá e os anjos com o Erês. Dessa forma ele

pôde viver no contexto do real e do mítico de forma que a diversidade não estabelecesse limites. (CORRUPIO, 2016)

J. Cunha iniciou seus estudos aos dezoito anos no curso livre de pintura da Escola de Belas Artes da Universidade Federal da Bahia. Entretanto, mesmo depois da academia e de ser reconhecido por ela pelo seu trabalho artístico, ele ainda mantinha seu contato com os espaços populares para representar diversidade da cultura, como por exemplo: feiras livres e festas de largo.

Desde sua infância, J. Cunha fazia parte do mundo das artes e pode ser considerado um artista múltiplo, pois realizou vários trabalhos com pinturas, objetos, ilustrações, estampas, cartazes, capas de discos, figurinos, instalações, marcas e logotipos, ou seja, ele pode ser considerado como artista plástico, figurinista, cenógrafo, designer. (CONDURU, 2016)

Vários foram os motivos para que J. Cunha fosse o artista escolhido para este trabalho. Um deles foi pelos valores culturais e sociais que suas obras trazem ao nosso povo, pois seu trabalho é marcado pela essência regional. O que dá possibilidades de explorar o contexto cultural que ele engloba. Afinal, segundo Munanga, Doutor em Ciências Sociais e Antropólogo Cultural, as obras de arte de J. Cunha "trazem além do estético, mensagens humanas, sociais, educativas, históricas e políticas; o que o projeta no tempo histórico e no espaço físico e social do mundo e da sociedade a qual pertence" (MUNANGA, 2016, p. 20).

É através da sua arte que J. Cunha consegue difundir e representar diferentes culturas e sociedades, fazendo referência africana, indígena, europeia e outras, caraterística marcante na formação do povo brasileiro. Nesse sentido, suas obras possuem vários conhecimentos sobre o Brasil e o mundo. Um segundo motivo, também relevante, é em relação às cores fortes, os traços geométricos, as curvas, linhas retas, zigues-zagues que também caracterizam o trabalho de J. Cunha.

Portanto em J. Cunha, analisando a sua obra, percebemos um material educacional além de artístico que pode ser explorado. Ou seja, além de objetos de enfeite e de admiração, acreditamos na possibilidade de ensino, em particular o ensino de geometria e matemática. Além disso, o estímulo da valorização da cultura por meio da arte.

5.2. Construções Geométricas com Régua e Compasso

Nesta seção, apresentaremos as demonstrações de algumas construções geométricas elementares utilizadas no objeto de estudo e por sua vez, fundamentando a construção do mesmo. Como uma forma de ressaltar a confiabilidade no processo de construção do (re)desenho, ou seja, utilizar argumentos da geometria euclidiana plana (saber teórico) para justificar os procedimentos escolhidos para (re)desenhar a flor do cangaço.

Vale ressaltar que a forma de demonstrar algumas dessas construções geométricas não é única. Nesse sentido, a subseção está organizada da seguinte forma: enunciaremos a proposição, resolveremos a partir da construção com régua não graduada e compasso e por fim, mostraremos porque essa construção é verdadeira.

Nota:

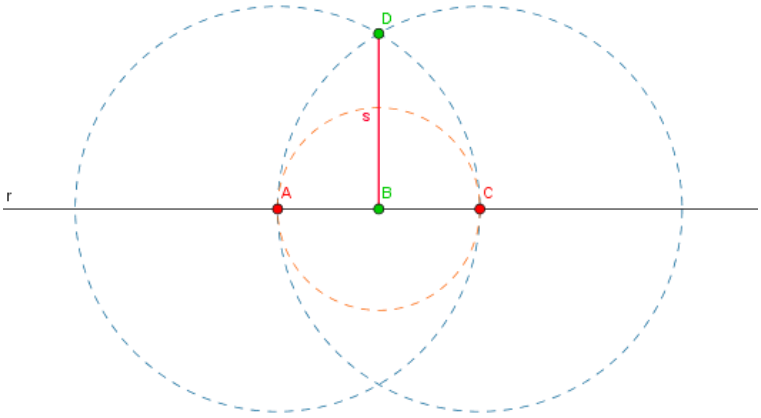
Um segmento de reta com extremidades A e B será representado por AB. Diremos que $AB = \{X; X = A\ ou\ X = B\ ou\ A - X - B\}$. Se dois segmentos $AB\ e\ CD$ são congruentes, então escreveremos $AB = CD$. Vamos considerar o símbolo Δ sempre que formos nos referir a um triângulo.

Problema I: Construção do segmento perpendicular à uma reta *r* e que passa por um ponto *B*.

Hipótese: Considerando a reta r e o ponto B pertencente a ela, construa uma circunferência (tracejado laranja) de centro em B e raio qualquer que intercepta a reta r nos pontos A e C. Construa as circunferências de centro em A e C e raio AC (tracejados azuis).

Tese: Seja D um dos pontos de intersecção dessas circunferências, a reta perpendicular procurada é a que contém o segmento BD como mostra a figura 2:

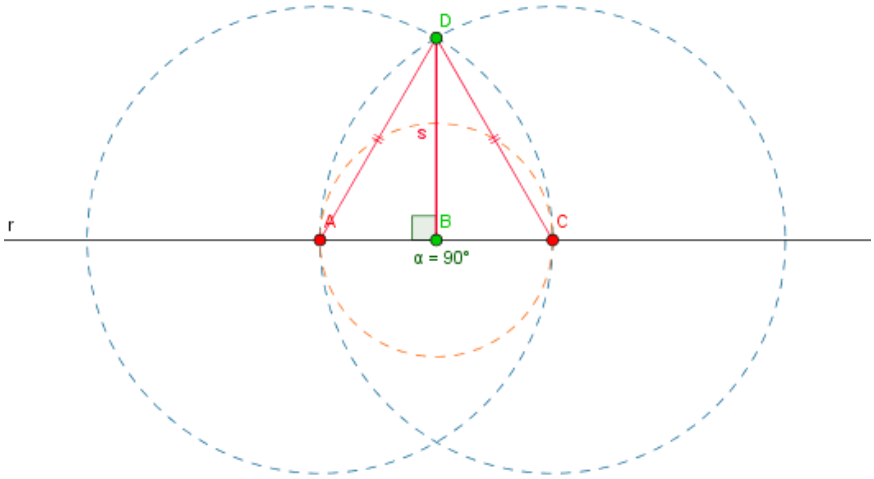
Figura 2: Reta Perpendicular



Fonte: Construído pelo autor

Agora podemos demonstrar porque o segmento BD é perpendicular à reta r. Sendo assim, basta construirmos o ΔADC e notar que o ΔADB e o ΔCDB são congruentes pelo caso LLL (um dos casos de congruência de triângulos que aponta que se os lados respectivos de triângulos forem congruentes, então esses triângulos são congruentes), pois $AD = CD = AC$ que são raios das circunferências de tracejado azul, $AB = BC =$ t e BD é comum em ambos os triângulos. Sendo assim, se estes triângulos são congruentes, então os ângulos internos correspondentes também são congruentes, como $D\hat{B}A = D\hat{B}C$ e $D\hat{B}A + D\hat{B}C = 180°$, segue que $D\hat{B}A = D\hat{B}C = 90º$. O que mostra que o segmento BD é perpendicular à reta r conforme a figura 3.

Figura 3: Prova do segmento perpendicular.

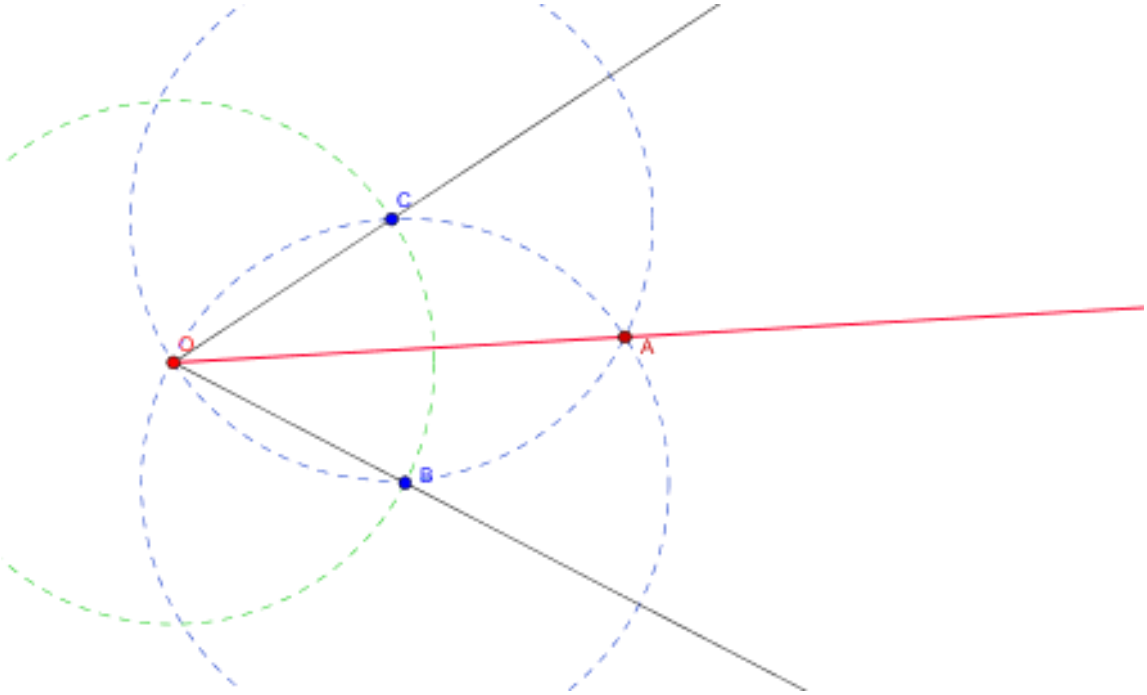


Fonte: Construído pelo autor.

Problema II: Construção da bissetriz de um ângulo qualquer

Hipótese: Seja $B\hat{O}C$ um ângulo qualquer, construa uma circunferência de centro em O e raio r (tracejado verde da figura 4) que intercepta as semirretas do ângulo nos pontos B e C. Construa as circunferências de centro em B e C de raio r (tracejado azul da figura 4).
Tese: Seja A o outro ponto de intersecção dessas circunferências, a bissetriz procurada é a semirreta $\overrightarrow{OA}$.

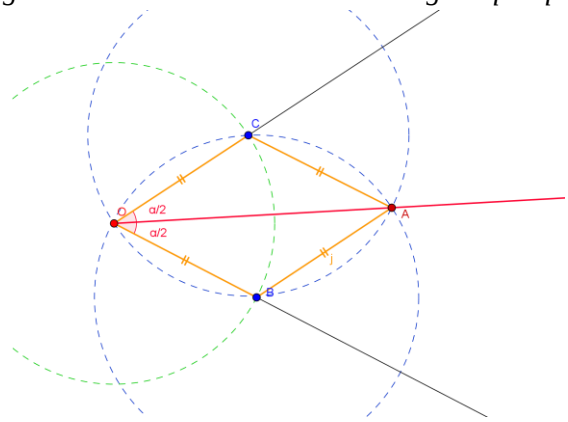
Figura 4: Bissetriz de um ângulo qualquer.



Fonte: Construído pelo autor.

Agora devemos mostrar porque a semirreta $\overrightarrow{OA}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$. Para isso, basta construir os segmentos AB e AC e perceber que ΔOCA e ΔOBA são congruentes pelo caso LLL, pois $OC = OB = AB = AC = r$ que são raios das circunferências de tracejado azul e OA é comum em ambos os triângulos. Sendo assim, os ângulos internos correspondentes também são congruentes, logo $A\hat{O}C = A\hat{O}B$, como a bissetriz é a semirreta que divide determinado ângulo em duas partes iguais, segue que a semirreta $\overrightarrow{OA}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$, como mostra a figura 5.

Figura 5: Prova da bissetriz de um ângulo qualquer.



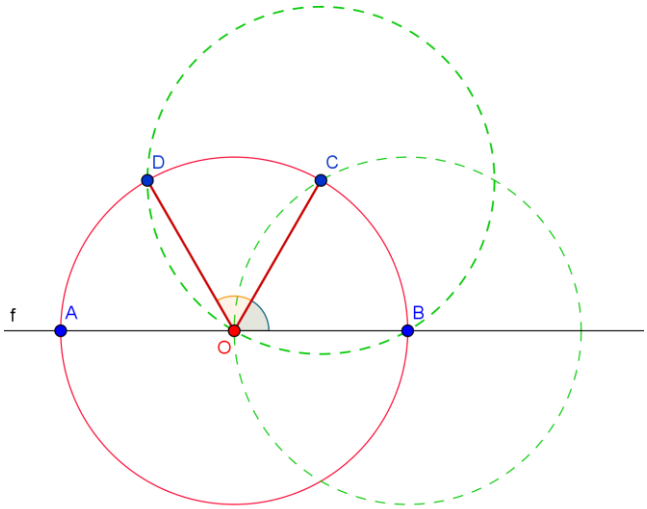
Fonte: Construído pelo autor.

Problema III: Construção dos ângulos de 60° e 120°

Hipótese: Seja uma reta f e um ponto O sobre ela, seja C1 a circunferência de centro em O e raio r que intercepta f nos pontos A e B. Seja C2 a circunferência de centro em B com raio r. Seja C uns dos pontos de intersecção dessas circunferências como mostra a figura 5. Agora construa C3 a circunferência de centro em C e raio r. Seja D um dos pontos de intersecção de C1 com C3 como mostra a figura 6.

Tese: Construa o segmento OC formando assim o ângulo B$\hat{O}C$ de 60°. Agora trace o segmento OD formando ângulo B$\hat{O}D$ de 120°.

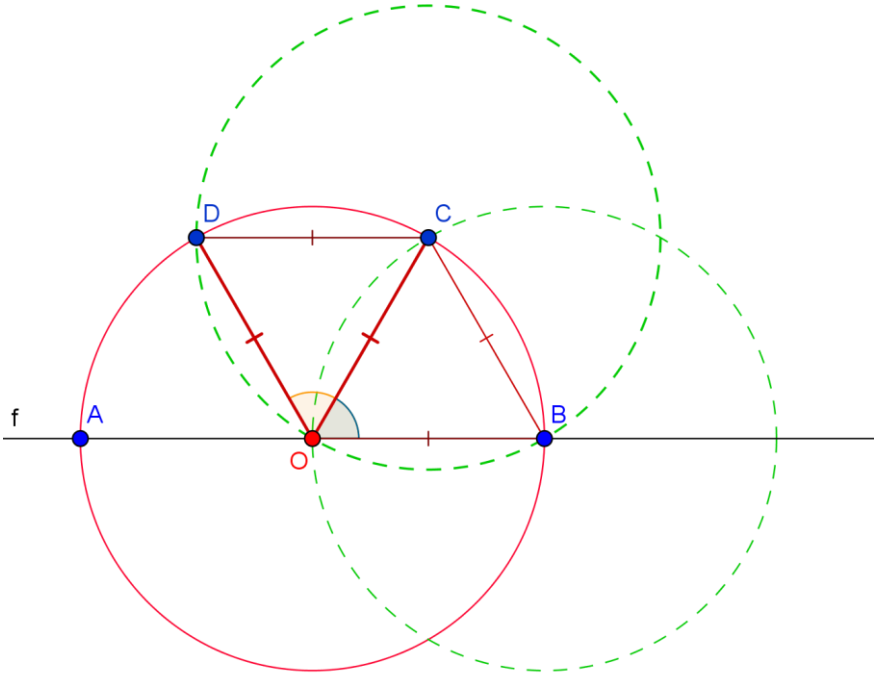
Figura 6: Divisão de um ângulo de 60º e 120º.



Fonte: Construído pelo autor.

Agora podemos mostrar porque o ângulo B$\hat{O}C$ mede 60º e o ângulo B$\hat{O}D$ mede 120º. Para isso basta construir os segmentos BC e CD. Agora note que os triângulos ΔBOC e ΔCOD são equiláteros, pois todos seus lados são raios das circunferências, que por sua vez, têm o mesmo raio. Como esses triângulos são equiláteros, então seus ângulos internos medem 60º. Sendo assim o ângulo B$\hat{O}C$ mede 60º e o ângulo B$\hat{O}D$ mede 120º como mostra a figura 7.

Figura 7: Prova dos ângulos de 60º e 120º.



Fonte: Construído pelo autor.

Problema IV: Construção do Ponto Médio e Mediatriz

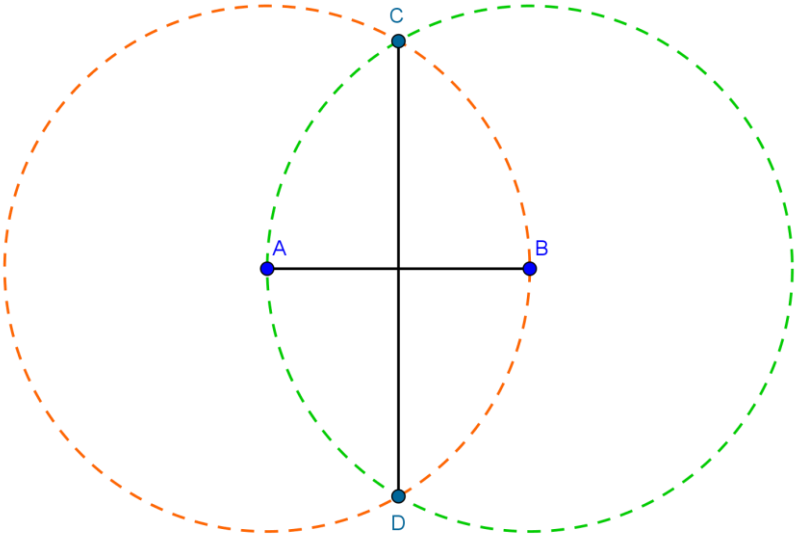
Definição de Ponto médio: dado um segmento AB e um ponto C, C é o ponto médio de AB se, e somente se, $AC = CB$.

Definição de Mediatriz: dado segmento qualquer, a mediatriz desse segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.

Hipótese: Sejam as circunferências de centro em A e B com raio AB. Sejam os pontos C e D a intersecção dessas circunferências.

Tese: Trace o segmento CD e queremos mostrar que ele é a mediatriz do segmento AB pois passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular a AB conforme a figura 8.

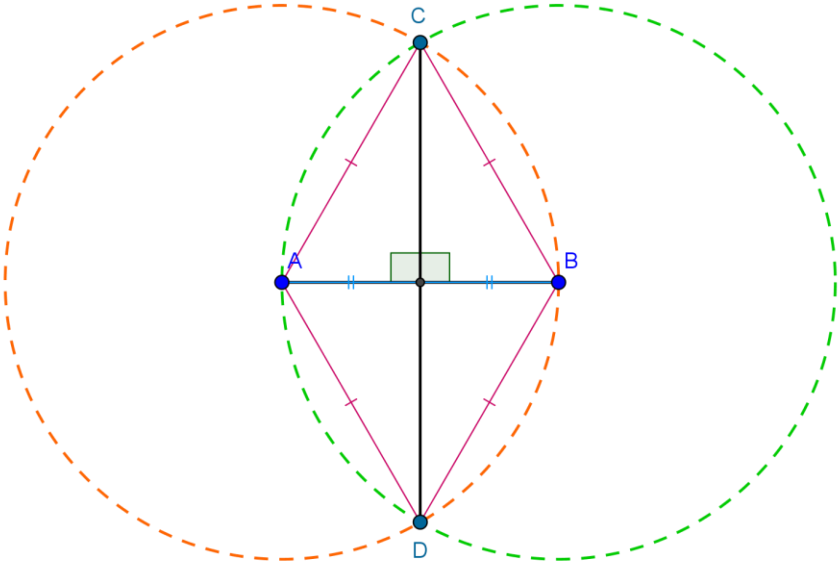
Figura 8: Ponto médio e mediatriz.



Fonte: Construído pelo autor.

Vamos mostrar por que CD é a mediatriz de AB. Para isso, basta construir os segmentos AC, CB, BD e DA formando assim o quadrilátero $ACBD$. Agora note que $AC = CB = BD = DA = AB$, pois são raios das circunferências. Sendo assim o quadrilátero $ACBD$ é um losango e temos que, por propriedade desse tipo de quadrilátero, as diagonais de um losango são perpendiculares e se interceptam em seu ponto médio. Então, CD é a mediatriz de AB como mostra a figura 9.

Figura 9: Prova do ponto médio e mediatriz.



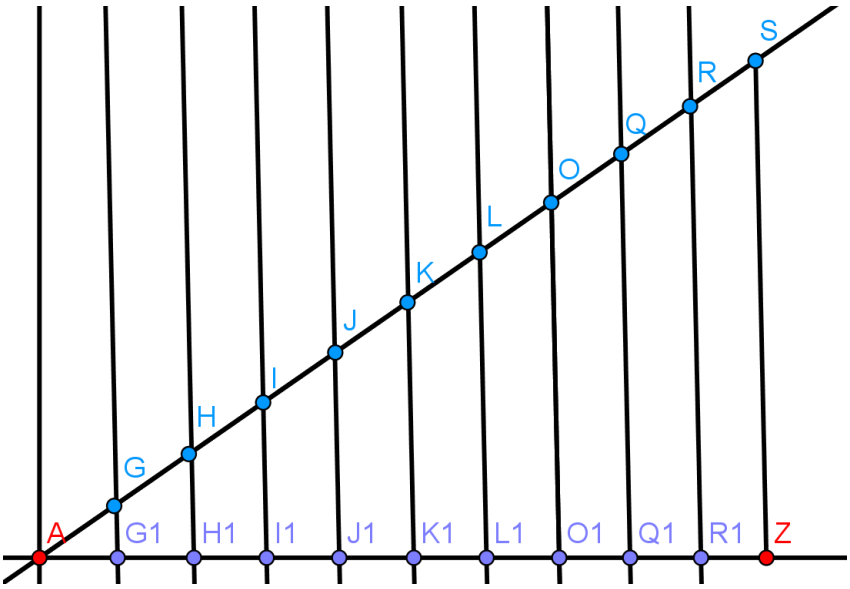
Fonte: Construído pelo autor.

Proposição V: Dividir o segmento AZ em dez partes iguais

Hipótese: Seja a semirreta $\overrightarrow{AS}$ concorrente à reta que contém AZ e sobre ela, construímos com a mesma abertura do compasso os segmentos adjacentes e congruentes AG, GH, HI, IJ, JK, KL, LO, OQ¸ QR, RS. Segmentos adjacentes são segmentos que são consecutivos e colineares simultaneamente, ou seja, se eles possuírem um ponto em comum e estiverem contidos em uma mesma reta.

Tese: As retas paralelas à SZ e que passam pelos pontos *G, H, I, J, K, L, O, Q* e *R* divide o segmento AZ em 10 partes iguais. (Figura 10)

Figura 10: Divisão de um segmento em partes iguais



Fonte: Construído pelo autor

Podemos justificar essa construção com base no teorema de Tales que é determinado a partir de retas paralelas e transversais que formam segmentos proporcionais. Nesse caso, as retas que contém os segmentos AZ e AS são transversais e as retas que contém os segmentos GG_1, HH, II_1 JJ_1, KK_1, LL_1, OO_1, QQ_1, RR_1, SS_1 e SZ_1 são as paralelas. De acordo com o Teorema de Tales, segue que:

$$\frac{AG}{GH} = \frac{AG_1}{G_1H_1}\text{, como por construção } AG = GH\text{, então } \frac{AG}{GH} = 1$$

$$\text{Dessa forma, segue que } \frac{AG_1}{G_1H_1} = 1\text{, então } AG_1 = G_1H_1$$

Isso é análogo para os outros segmentos. Então temos que $AG_1 = G_1H_1 = H_1I_1 = I_1J_1 = J_1K_1 = K_1L_1 = L_1O_1 = O_1Q_1 = Q_1R_1 = R_1Z$.

5.3. (Re)desenho da pintura com régua não graduada e compasso e seu resultado

No processo de (re)desenho surgiram situações que foram identificadas como dificuldades e pontos críticos. Consideramos *dificuldades* situações cujas soluções não fossem imediatas, mas através da geometria ou da matemática conseguimos solucionar. Nos casos em que não houve soluções, assumimos condições estratégicas para desenvolver a construção de forma que não fugissem da proposta do desenho original. Isto configurou, então, o que destacamos como *pontos críticos*.

Vale ressaltar que o (re)desenho foi realizado considerando somente o conhecimento prévio do autor. Em nenhum momento livros e adjacentes foram recorridos para esclarecer dúvidas de conteúdos e/ou da própria construção, como por exemplo na construção do comprimento de (re)desenho que será abordado mais adiante. Todas as situações que ocorreram nesse processo foram apresentadas e discutidas a luz do ensino de geometria.

A seguir, apresentaremos o passo a passo da construção do (re)desenho com as principais dificuldades e pontos críticos que ocorreram, de acordo com a construção. Para informar as dificuldades identificadas utilizaremos a cor laranja, sempre que citada pela primeira vez. Da mesma forma faremos para os pontos críticos na cor azul.

Para melhor organizar esse passo a passo, decidimos dividir essa seção em duas subseções: retas e curvas.

Primeiramente, para o (re)desenho de uma imagem, precisamos decidir qual o área do novo desenho (1º Passo e 1º ponto crítico). Para isso, como queremos que o (re)desenho seja o mais próximo possível do original, optamos fazer a área proporcional à pintura. A pintura mede *65 x 50 cm²*, ou seja, está numa razão de $\frac{65\ cm}{50cm} = 1{,}3$.

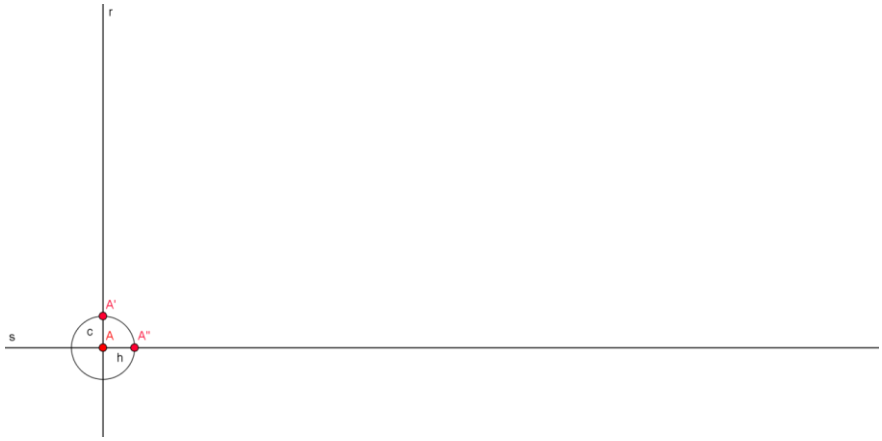
Nesse momento, precisamos escolher por onde começar: pelo centro ou pelas laterais (2º Passo e 2° ponto crítico). Optamos iniciar pelas laterais porque temos que os triângulos são retângulos ou equiláteros. Enquanto que iniciar pelo centro, neste trabalho, ainda não foi testado. Assumimos então, o comprimento da altura desses triângulos com uma determinada abertura *h* do compasso (3º passo e 3º ponto crítico).

5. 3. 1. Retas

4º Passo: Construir o comprimento e a largura do (re)desenho:

Construa duas retas *r* e *s* perpendiculares no canto esquerdo inferior, tal que o ponto A seja a intersecção delas, seja *r* a largura e *s* o comprimento do (re)desenho. Considerando a altura *h*, com a ponta seca do compasso em A e abertura *h*, marque nas retas *r* e *s* os respectivos pontos A' e A''. Conforme a figura 11.

Figura 11: Comprimento e largura do (re)desenho 1.



Fonte: Construído pelo autor.

Em seguida trace a reta *s'* que passa por A' e é paralela à *s* e trace também a reta *r'* que passa por A'' e é paralela à *r*, tal que A''' seja a intersecção de *r'* e *s'*. Formando assim o quadrado $AA''A'''A'$. Conforme a figura 12.

Figura 12: Comprimento e largura do (re)desenho 2.

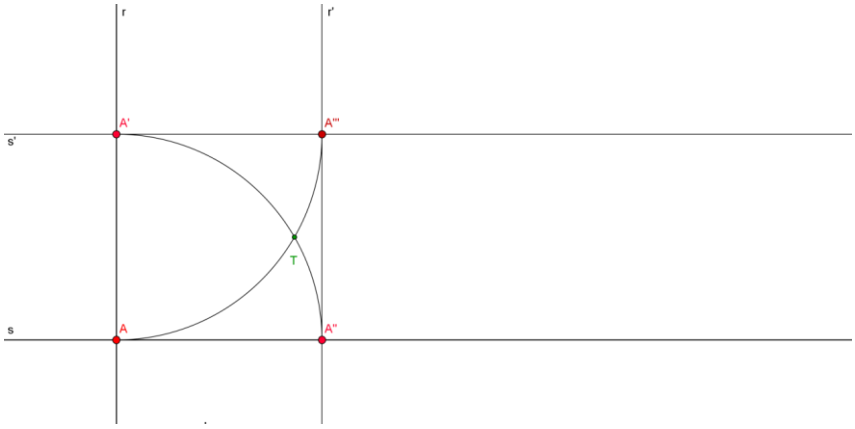
Fonte: Construído pelo autor.

5º Passo: Encontrar o lado do triângulo equilátero de altura *h*.

Precisamos nesse momento encontrar o lado do triângulo equilátero de altura *h*. Para isso, sabemos que quadrado possui quatro ângulos de 90º e o triângulo equilátero tem três ângulos de 60º, então podemos encontrar o segmento que divida o ângulo reto em dois ângulos de 30º e 60º respectivamente conforme foi demonstrado na página 26.

Sendo assim, com a ponta seca do compasso em A' e abertura *h*, construa a quarta parte da circunferência de A até A'''. Com a mesma abertura e com a ponta seca do compasso em A marque o ponto T na circunferência recém criada. Como mostra a figura 13.

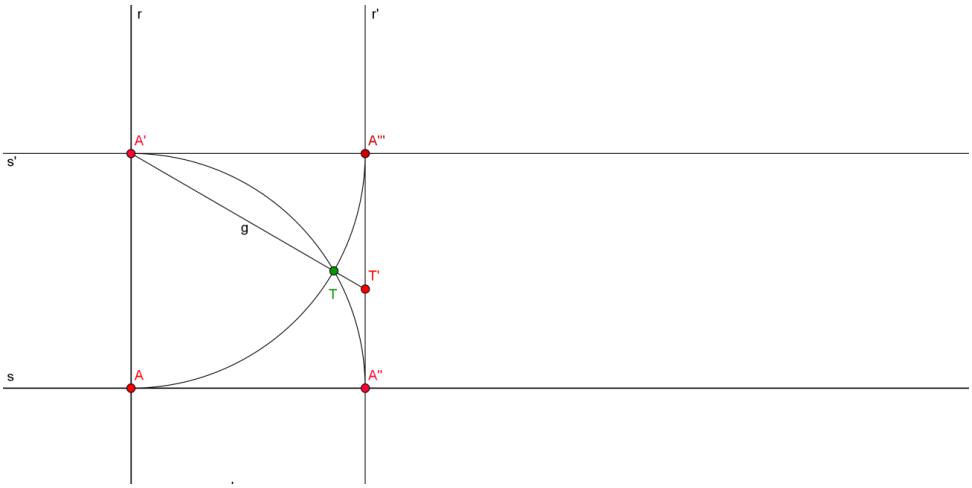
Figura 13: Encontrar o lado do triângulo equilátero de altura h.



Fonte: Construído pelo autor

Com o auxílio da régua, construa o segmento $A'T'$ de forma que $A' - T - T'$ e $T' \in r'$. Conforme a figura 14:

Figura 14: Encontrar o lado do triângulo equilátero de altura h.

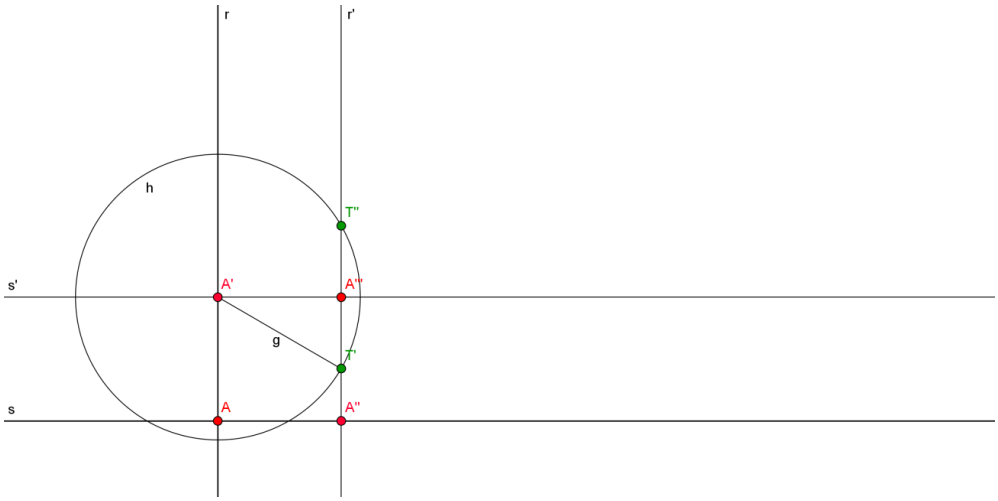


Fonte: Construído pelo autor.

6º Passo: Delimitar e preencher a largura do (re)desenho

Com a ponta seca do compasso em A′ e abertura $A'T'$, marque o ponto T'' na outra intersecção desta circunferência com a reta *r'*.

Figura 15: Delimitando a largura do (re)desenho.



Fonte: Construído pelo autor.

A partir de *T''* construa seis segmentos consecutivos e colineares $T''O$, OO', $O'O''$, $O''P$, PP', $P'P''$ de tamanho $A'T''$ na reta *r'* e construa $P''B'''$ de tamanho $A'''T''$, como na figura 16. Agora a partir de A' construa sete segmentos consecutivos $A'M$ MM', $M'M''$, $M''N$, NN', $N'N''$, $N''B'$ de tamanho $A'T'$ na reta *r*. Construa também o segmento $B'B$ com B ϵ *r* e $B'''B''$ com B'' ϵ *r'* e ambos de tamanho *h*. (Figura 17)

Figura 16: Preenchendo a largura do (re)desenho.

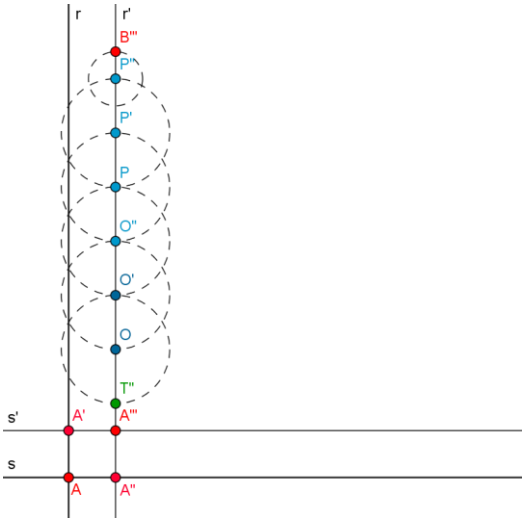
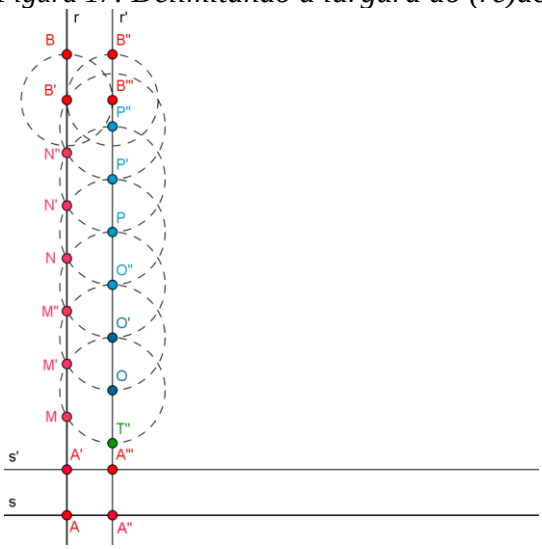


Figura 17: Delimitando a largura do (re)desenho.



Fonte: Construído pelo autor.

Basta construir os segmentos que liguem esses pontos: $A'T''$, $T''M$, MO, OM', $M'O'$, $O'M''$, NP, PN', $N'P'$, $P'N''$, $N''P''$, $P''B'$ formando assim dez triângulos equiláteros, conforme a figura 18.

Figura 18: Formação dos dez triângulos equiláteros da lateral

Fonte: Construído pelo autor

O quarto ponto crítico encontrado, foi no que se refere à área do trapézio hachurado (4º ponto crítico) da figura 19. Por construção, assumimos que sua área teria a mesma medida da área de três triângulos equiláteros de altura *h*, pois se aproxima do desenho original e tem uma relação proporcional com o (re)desenho.

Figura 19: Área do trapézio hachurado

Fonte: Construído pelo autor

Agora podemos construir as semirretas $\overrightarrow{B'B'''}$ e $\overrightarrow{BB''}$, delimitando a largura conforme a figura 20. A partir disso, conseguimos definir o comprimento do mesmo através da proporcionalidade já mencionada.

Figura 20: Delimitando a largura do (re)desenho.

Fonte: Construído pelo autor.

Em relação à área do trapézio no sentido horizontal da pintura (Figura 1), não precisamos assumir e nem adaptar convenções, pois sua área foi obtida com a construção do comprimento do (re)desenho e, não assumiu uma relação com os triângulos equiláteros. Daí surgiu a primeira dificuldade do (re)desenho, no momento da construção do comprimento do mesmo. Foi necessário um tempo para pensar em como proceder essa construção, diferente das outras etapas que geralmente não se expressavam como dificuldade porque era imediata sua solução. De modo mais específico, a dificuldade em questão era como construir o comprimento do (re)desenho apenas com régua e o compasso. Contudo, sabendo apenas a medida da largura e a área original da pintura? (1ª dificuldade encontrada)

7º Passo: Delimitar o comprimento do (re)desenho

A princípio observamos com um olhar exclusivamente geométrico, ou seja, na busca de construções geométricos a fim de auxiliar na resolução. Entretanto, a análise dessa forma não foi bem sucedida. A partir daí, decidimos observar a dificuldade em termos algébricos, pois é uma estrutura composta numericamente e literalmente. Temos

a equação de proporcionalidade $\frac{Comprimento}{Largura} = 1{,}3$ (proporção da pintura original), então segue que:

$$Comprimento = 1{,}3 * \ Largura$$

$$Comprimento = \frac{13}{10} * \ Largura$$

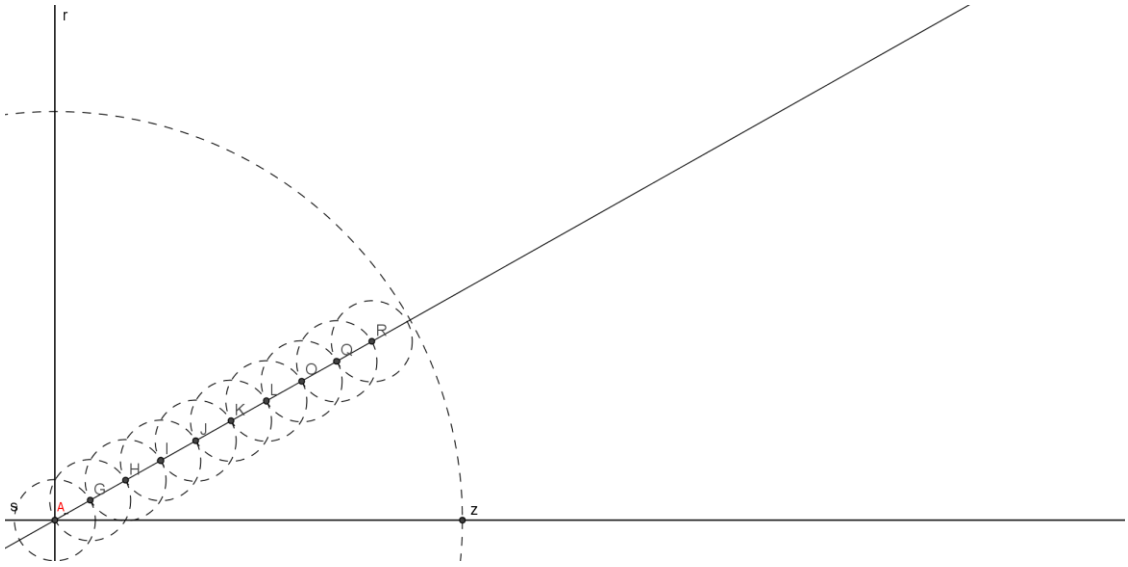
$$Comprimento = \ 13 * \frac{Largura}{10}$$

$$Comprimento = \ Largura + 3 * \frac{Largura}{10}$$

Dessa forma, podemos construir a medida do comprimento como a medida da largura adicionado três partes da largura dividida por dez. A partir dessa percepção, podemos então construí-lo utilizando da construção geométrica a divisão de segmentos em partes iguais.

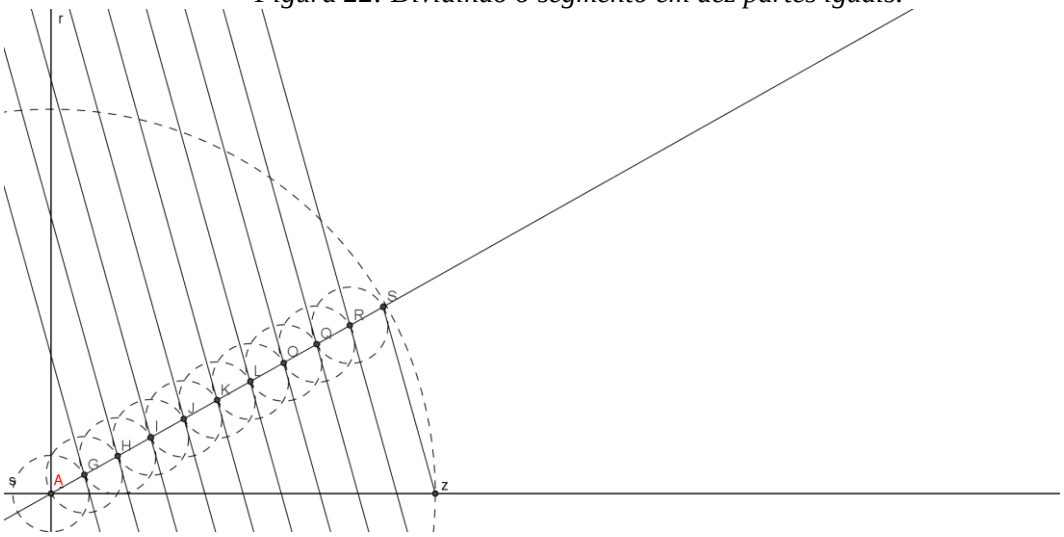
Com o compasso, construa dois segmentos consecutivos e colineares a partir de A de medida $A''O''$ na reta s, formando o segmento AZ de tamanho 2*$A''O''$ que é a largura do desenho. A partir disso, iremos dividir o segmento AD em 10 partes iguais (figura 21 e 22) conforme foi demonstrado na página 24. Após encontrar a décima parte da largura, construa mais três segmentos consecutivos em s a partir de Z: ZZ', $Z'Z''$, $Z''D$. Sendo assim o comprimento do (re)desenho será o do tamanho AD. (figura 23)

Figura 21: Dividindo o segmento em dez partes iguais.



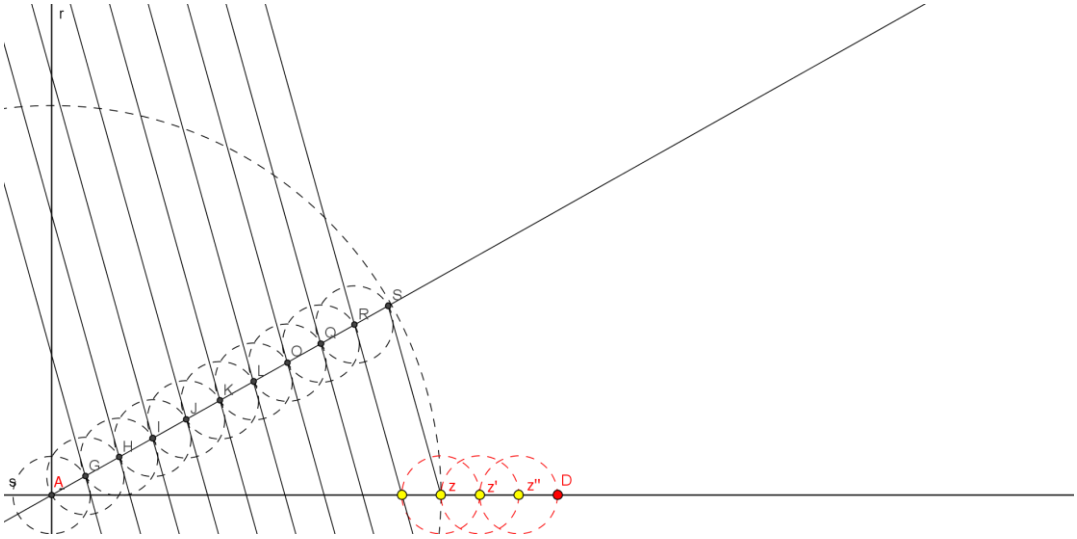
Fonte: Construído pelo autor.

Figura 22: Dividindo o segmento em dez partes iguais.



Fonte: Construído pelo autor.

Figura 23: Dividindo o segmento em dez partes iguais.

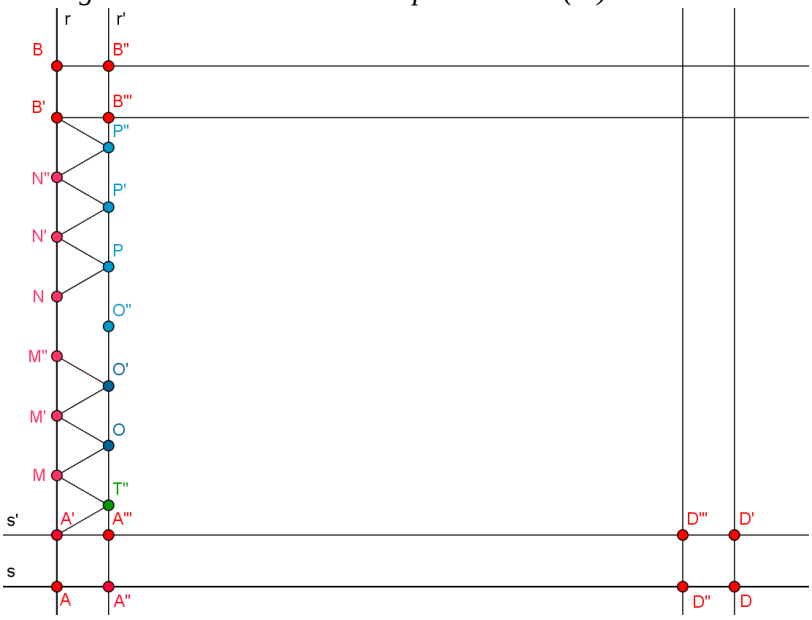


Fonte: Construído pelo autor.

Com a ponta seca do compasso em D e abertura AA'' marque o ponto D'' em s tal que $A'' - D'' - D$.

Nesse momento, esboçamos as semirretas $\overrightarrow{D''D'''}$ e $\overrightarrow{DD'}$ tal que $D''', D' \in s'$. Como mostra a figura 24.

Figura 24: Delimitando o comprimento do (re)desenho.

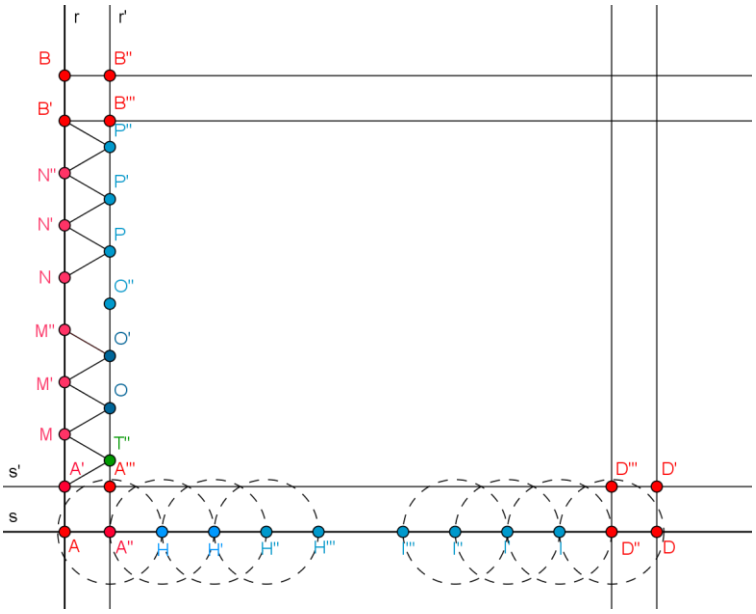


Fonte: Construído pelo autor.

8º Passo: Construir os triângulos que compõem o comprimento do (re)desenho

A partir de A'' construa quatro segmentos consecutivos $A''H$, HH', $H'H''$, $H''H'''$ de tamanho $A'T''$ na reta s tal que $A'' - H - H' - H'' - H'''$. Agora construa a partir de D'' quatro segmentos consecutivos ID'', $I'I$, $I''I'$, $I'''I''$ de tamanho de tamanho $A'T''$ na reta s tal $I''' - I'' - I' - I - D''$. Conforme a figura 25.

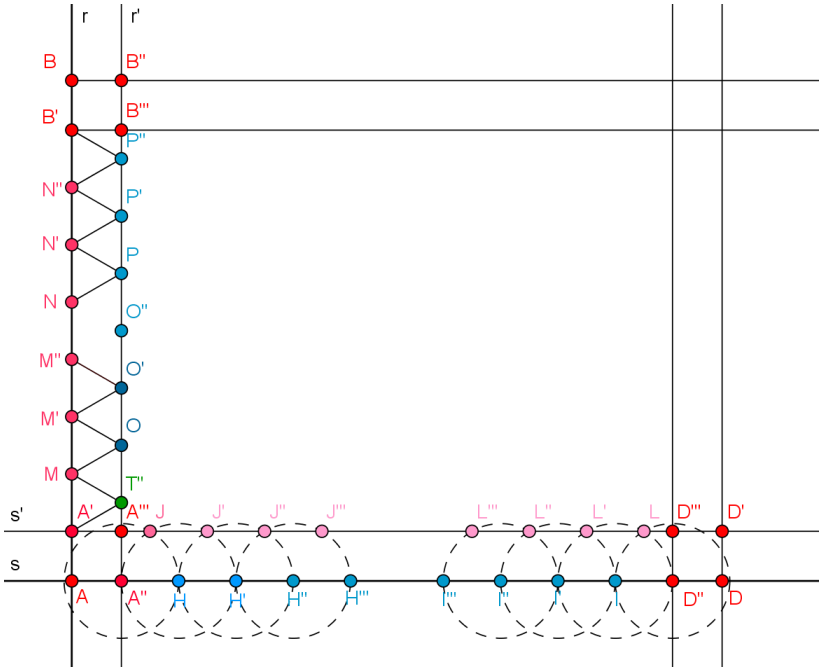
Figura 25: Construção dos triângulos que compõem o comprimento do (re)desenho.



Fonte: Construído pelo autor.

Com a ponta seca em A$'''$ e abertura $A'''T''$, marque o ponto J em *s'* tal que $A' - A''' - J$. A partir de J construa três segmentos consecutivos e colineares JJ', $J'J''$, $J''J'''$ de tamanho $A'T'$ na reta *s'*. Com a ponta seca em D$'''$ e abertura $A'''T''$, marque o ponto L em *s'* tal que $L - D''' - D'$ Com a ponta seca do compasso em L, esboce três segmentos consecutivos e colineares LL', $L'L''$, $L''L'''$ de tamanho $A'T'$ na reta *s'* tal que $L''' - L'' - L' - L$. Como mostra a figura 26.

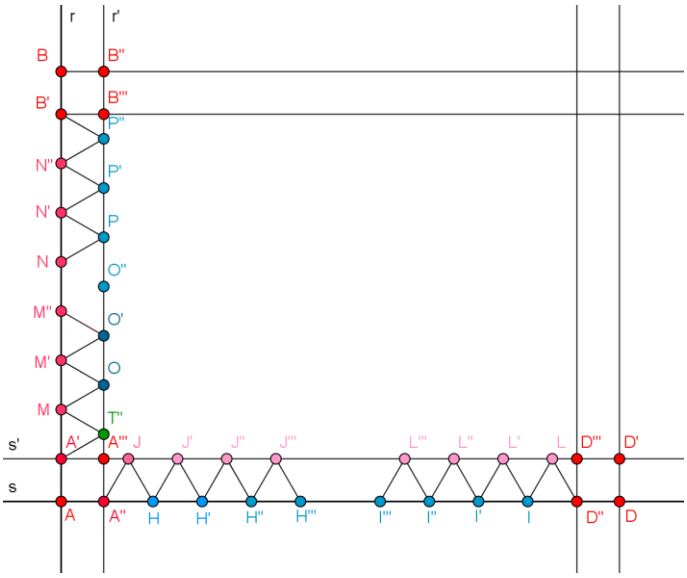
Figura 26: Construção dos triângulos que compõem o comprimento do (re)desenho.



Fonte: Construído pelo autor.

Basta construir os segmentos que liguem esses pontos: $A''J$, JH, HJ', $J'H'$, $H'J''$, $J''H''$, $H''J'''$, $J'''H'''$, $I'''L'''$, $L'''I''$, $I''L''$, $L''I'$, $I'L'$, $L'I$, IL, LD'' formando assim quatorze triângulos equiláteros. Como na figura 27.

Figura 27: Construção dos triângulos que compõem o comprimento do (re)desenho.

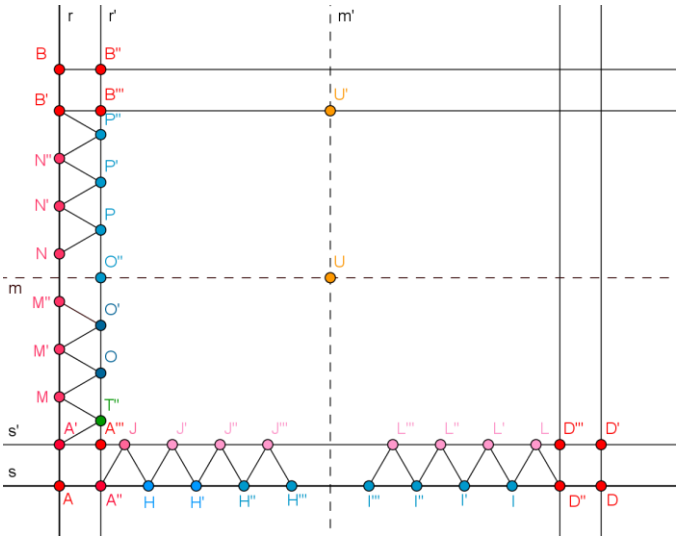


Fonte: Construído pelo autor.

9º Passo: Encontrar o centro do (re)desenho

Nesse momento, precisamos definir o centro do (re)desenho, ou seja, a intersecção da mediatriz da largura com a mediatriz do comprimento. Pois, a mediatriz é a reta perpendicular a um segmento de reta que passa pelo seu ponto médio, conforme demonstrado na página 27. Percebemos que, por construção, O'' é o ponto médio de $A''B''$ que é a largura do (re)desenho, sendo assim, seja *m* a mediatriz de $A''B''$ e *m'* a mediatriz de $J'''L'''$ que é a mesma mediatriz de AD. Marque o ponto U na intersecção de *m* e *m'*, U′ na intersecção de *m'* e $\overrightarrow{B'B'''}$. Como mostra a figura 28.

Figura 28: Definindo o centro do (re)desenho.

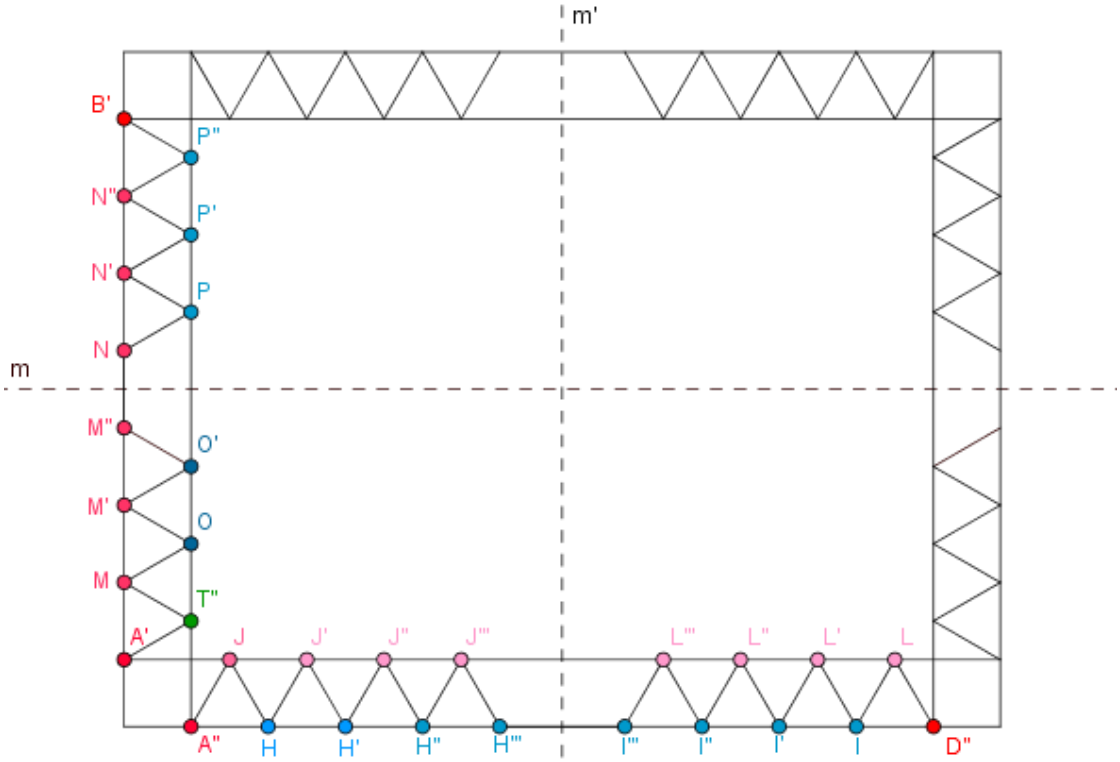


Fonte: Construído pelo autor.

10º Passo: Preencher as laterais do (re)desenho

Ao observarmos o (re)desenho, percebemos que ele é simétrico em relação às retas *m* e *m'*. Sendo assim, seguem os mesmos passos para a construção das laterais direita e superior do desenho. Ou podemos utilizar a reflexão dos segmentos $A'T''$, $T''M$, MO, OM', $M'O'$, $O'M''$, NP, PN', $N'P'$, $P'N''$, $N''P''$, $P''B'$ em relação a reta *m'*. Agora fazendo a reflexão dos segmentos $A''J$, JH, HJ', $J'H'$, $H'J''$, $J''H''$, $H''J'''$, $J'''H'''$, $I'''L'''$, $L'''I''$, $I''L''$, $L''I'$, $I'L'$, $L'I$, IL, LD'' em relação à reta *m*. Como mostra a figura 29.

Figura 29: Preenchendo as laterais do (re)desenho

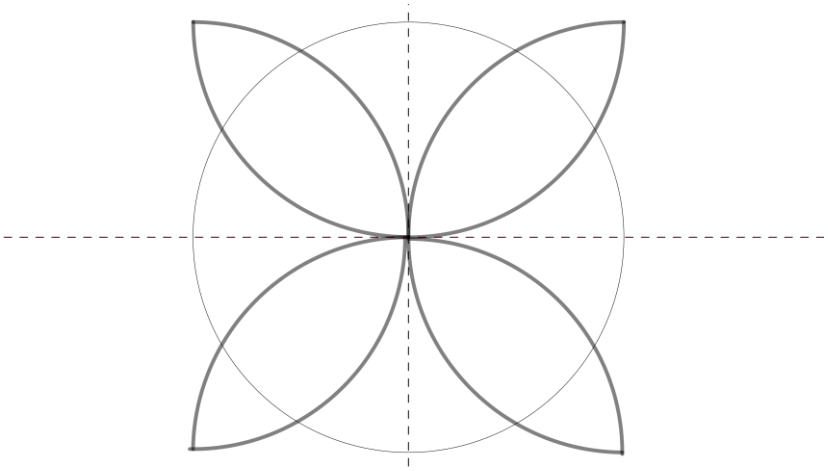


Fonte: Construído pelo autor

5. 3. 2. Curvas

A fase de construção da região central do (re)desenho apresentou a segunda dificuldade. Primeiramente foi construída a circunferência maior da pintura, porém, da forma como construímos as "pétalas" da flor, elas ultrapassariam a *circunferência maior*. Como mostra a figura 30.

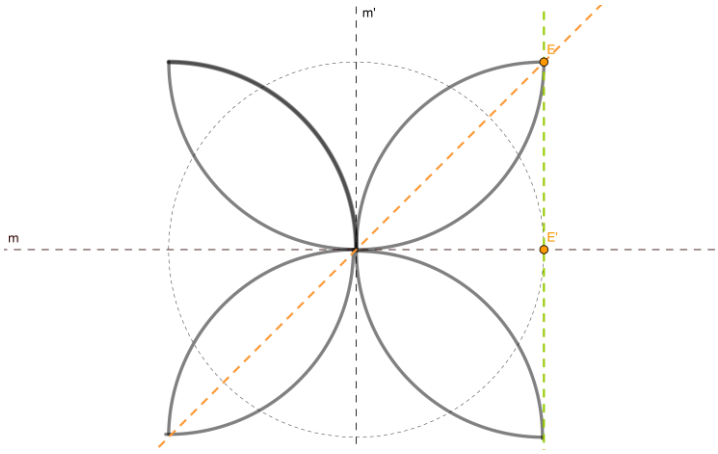
Figura 30: Construção da região central do (re)desenho.



Fonte: Construído pelo autor.

A partir daí, percebemos que precisávamos encontrar um ponto E' na reta m que fosse equidistante do centro e do ponto E, este ponto seria então o centro das circunferências que formariam as pétalas. Ou seja, fazer o processo inverso do anterior. Para isso, bastava notar que a reta que passa pelo centro $(m \cap m')$ e pelo ponto E (bissetriz do ângulo reto, tracejado laranja da figura 31) e a perpendicular a m que passa pelo ponto E (tracejado verde da figura 31) auxiliam para encontrar o ponto E'. Com o ponto E', podemos fazer a construção da *circunferência menor* e das pétalas a partir da *circunferência maior*. Isto porque decidimos construir a partir das laterais do (re)desenho. O que delimita a *circunferência maior*, pois duas das retas horizontais a tangenciam, como mostraremos mais adiante. Esse procedimento será apresentado nos próximos passos.

Figura 31: Construção da região central do (re)desenho.

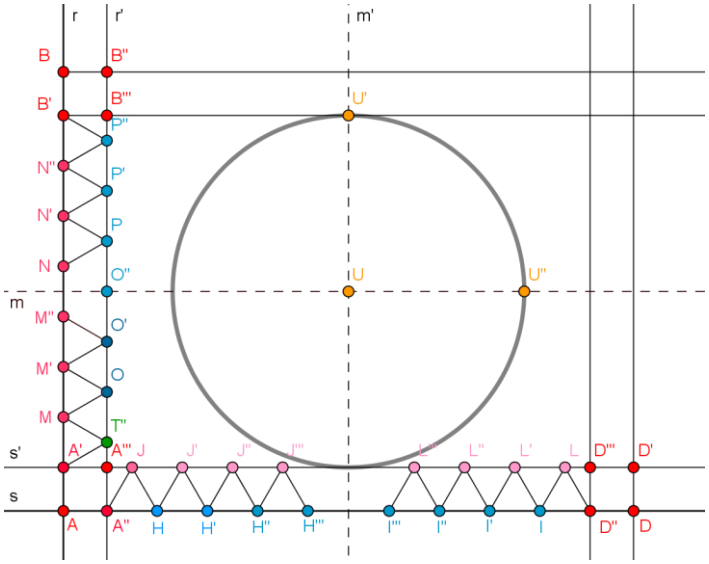


Fonte: Construído pelo autor.

11º Passo: Delimitar a circunferência maior do (re)desenho

Com o compasso, construa a *circunferência 1* de centro em U e raio UU'. Seja U'' a intersecção da *Circunferência 1* com *m* tal que $O'' - U - U''$. Conforme a figura 32.

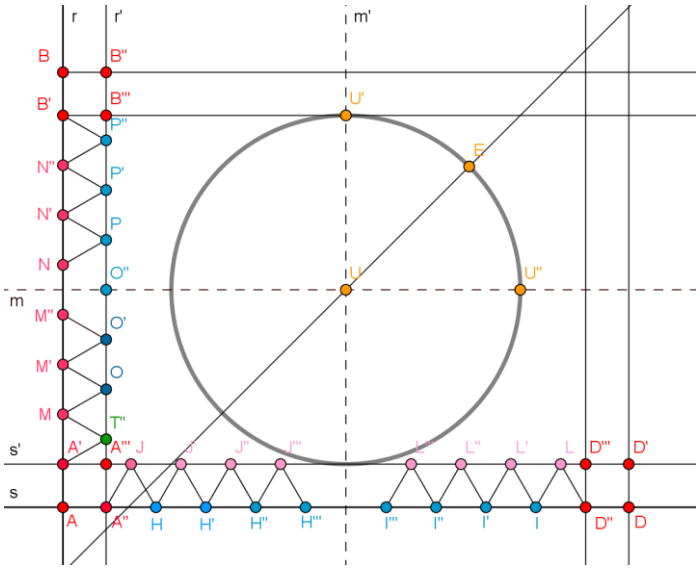
Figura 32: Delimitando a circunferência maior do (re)desenho.



Fonte: Construído pelo autor.

Agora trace a bissetriz do ângulo $U'\hat{U}U''$ que intercepta a circunferência1 no ponto E, de acordo com a figura 33.

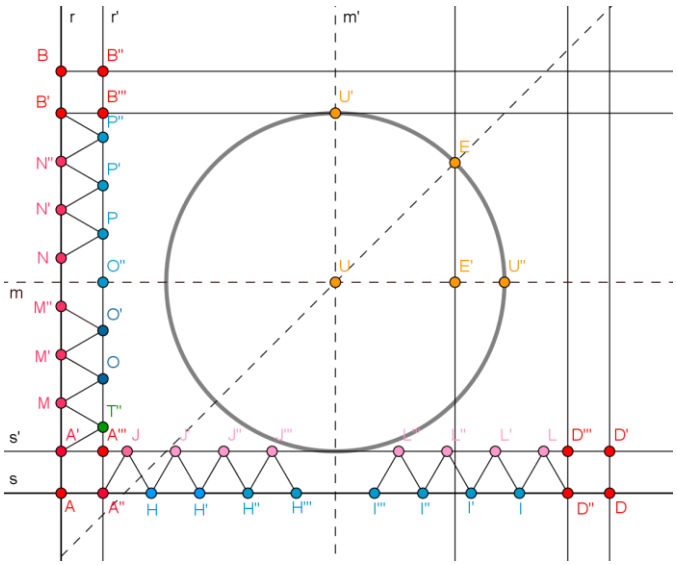
Figura 33: Bissetriz do ângulo



Fonte: Construído pelo autor

Agora podemos traçar a perpendicular à *m* que passa por E e intercepta *m* no ponto E′, conforme figura 34.

Figura 34: Reta perpendicular

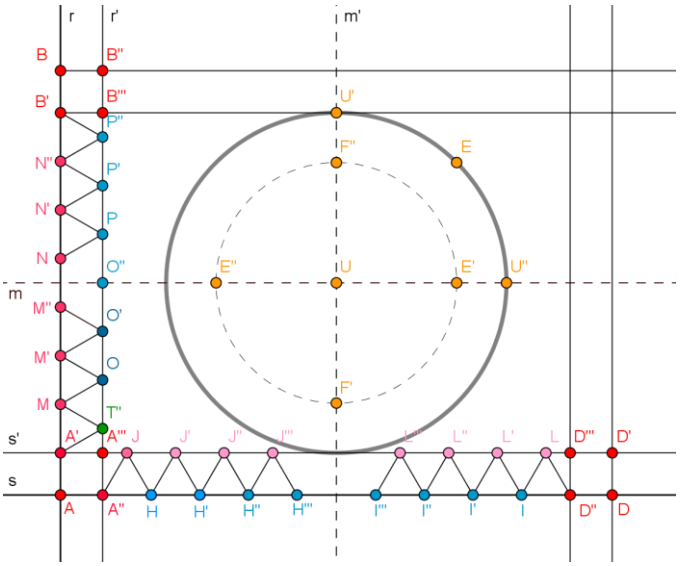


Fonte: Construído pelo autor

12º Passo: Construir as pétalas do interior do (re)desenho

Construa a *Circunferência 2* de centro em U e raio EE'. Sejam os pontos F' *e* F'' pontos das intersecções de *m'* com a *Circunferência 2* tal que $F' - U - F''$. E E'' a outra intersecção de *m* com a *Circunferência 2* tal que $E'' - U - E'$, como pode ser visto na figura 35.

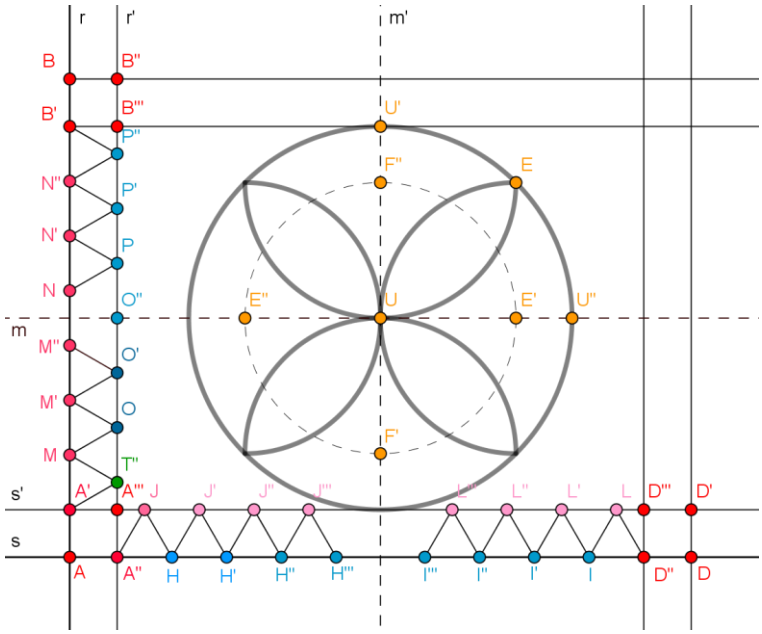
Figura 35: Construindo as pétalas do interior da circunferência1.



Fonte: Construído pelo autor.

Construa as semicircunferências de centro em E', F', E'' e F''com raio EE'. Considerando apenas o desenho que está interno à *Circunferência 1*. Como mostra a figura 36.

Figura 36: Construindo as pétalas do interior do (re)desenho.



Fonte: Construído pelo autor.

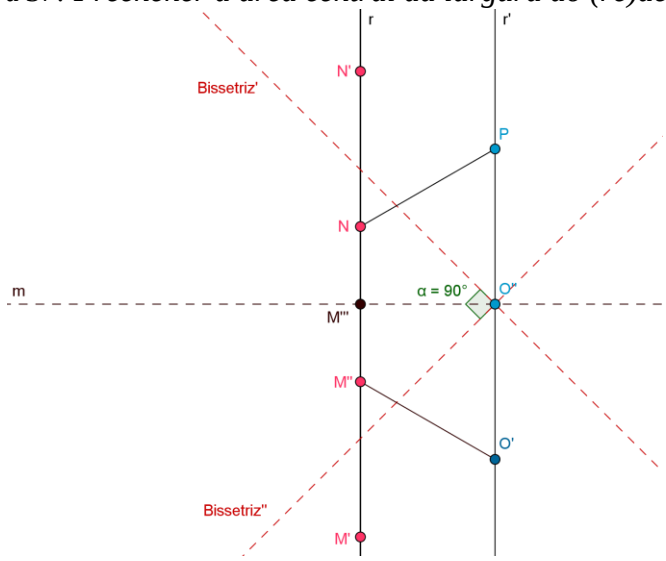
13º Passo: Preencher a área central da largura do (re)desenho

Para (re)desenhar o que está na pintura em relação a área dos trapézios (5º ponto crítico) presentes nas laterais, fizemos convenções também, o que constituiu nosso quinto ponto crítico.

Podemos assumir a construção dessa área baseada na mesma construção das pétalas, pois eles são parecidos. Observe que as primeiras pétalas foram construídas no interior de uma abertura de 90º, como por exemplo: a construção de uma pétala no interior do ângulo $U'\hat{U}U''$ da figura 36.

Primeiramente precisamos encontrar esse ângulo reto a partir de O''. Para isso, seja M''' o ponto de intersecção de m e r. Trace a $Bissetriz'$ do ângulo $M'''\hat{O}''P$ e $Bissetriz''$ do ângulo $M'''\hat{O}''O'$, obtendo assim o ângulo reto desejado como mostra a figura 37.

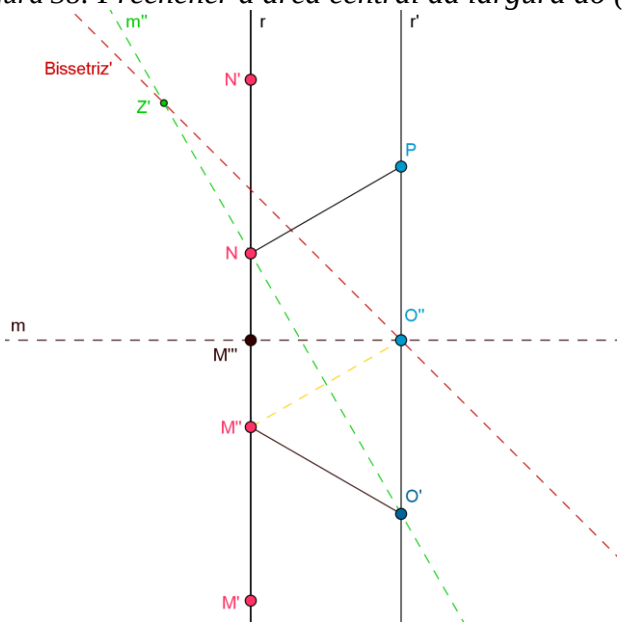
Figura 37: Preencher a área central da largura do (re)desenho.



Fonte: Construído pelo autor.

Agora construa o segmento $M''O''$ e seja m'' sua mediatriz. Marque o ponto Z' na intersecção de m'' e $Bissetriz'$. Assim temos que Z' é equidistante de M'' e O''. Conforme a figura 38.

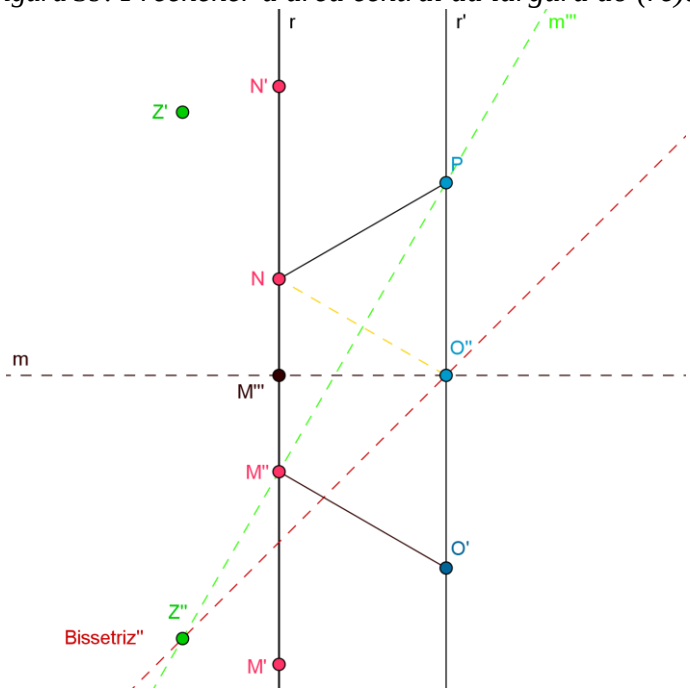
Figura 38: Preencher a área central da largura do (re)desenho.



Fonte: Construído pelo autor.

Agora construa o segmento NO'' e seja m''' sua mediatriz. Marque o ponto Z'' na intersecção de m''' e $Bissetriz''$. Assim temos que Z''é equidistante de N e O'', conforme a figura 39.

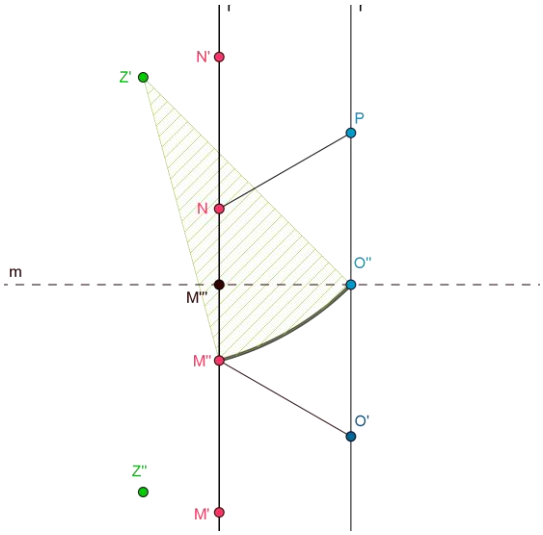
Figura 39: Preencher a área central da largura do (re)desenho 3.



Fonte: Construído pelo autor.

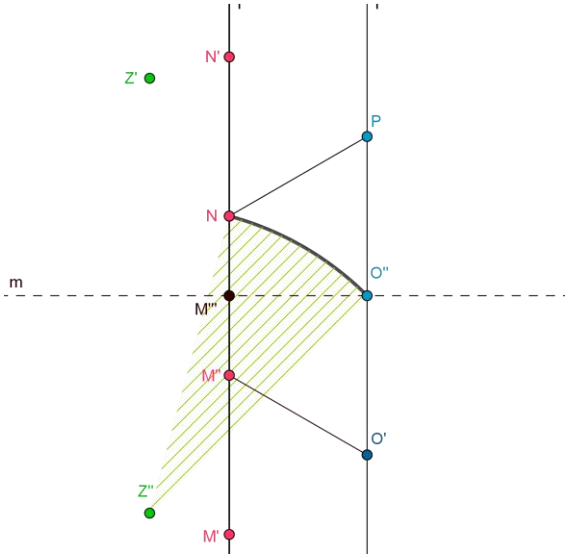
Com a ponta seca do compasso em Z' construa o arco $\widehat{M''O''}$ e com a ponta seca do compasso em Z'' construa o arco $\widehat{M''O''}$, como mostram as figuras 40 e 41.

Figura 40: Preencher a área do trapézio.



Fonte: Construído pelo autor.

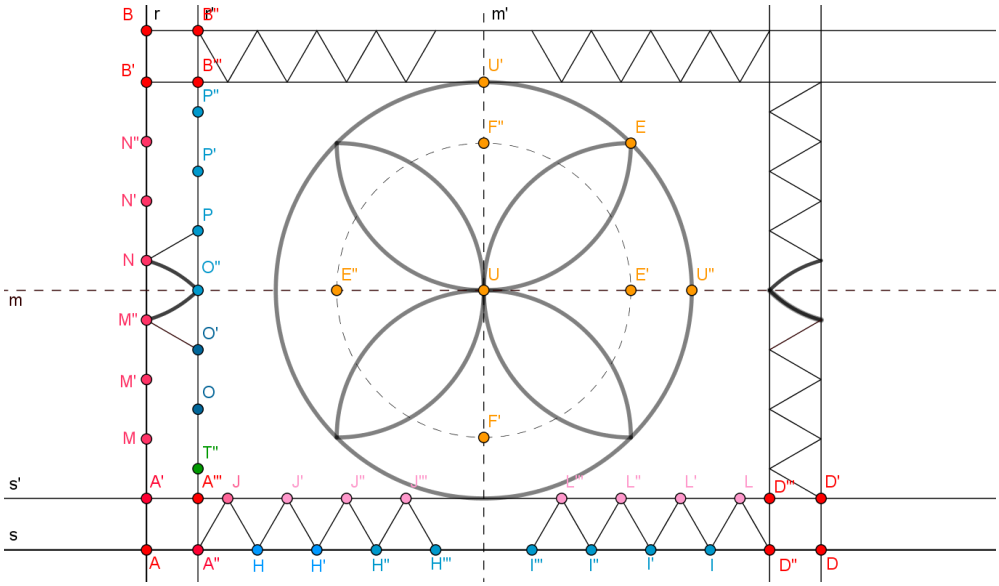
Figura 41: Preencher a área do trapézio.



Fonte: Construído pelo autor.

O procedimento para o preenchimento da área central da largura do lado direito é análogo a esse passo a passo, como mostra a figura a 42.

Figura 42: Área central da largura do lado direito.

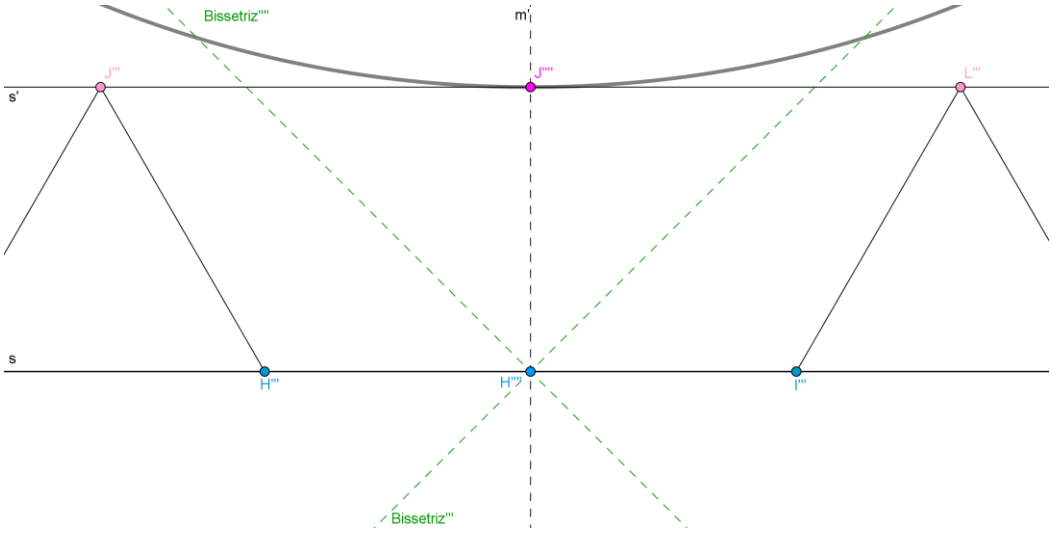


Fonte: Construído pelo autor.

14º Passo: Preencher a área central e inferior do comprimento

Marque o ponto J'''' na interseção de s' com m' e o ponto H'''' na interseção de s com m'. Agora trace a $Bissetriz'''$ do ângulo $J''''\widehat{H''''}I'''$ e a $Bissetriz''''$ do ângulo $J''''\widehat{H''''}H'''$, como mostra a figura 43.

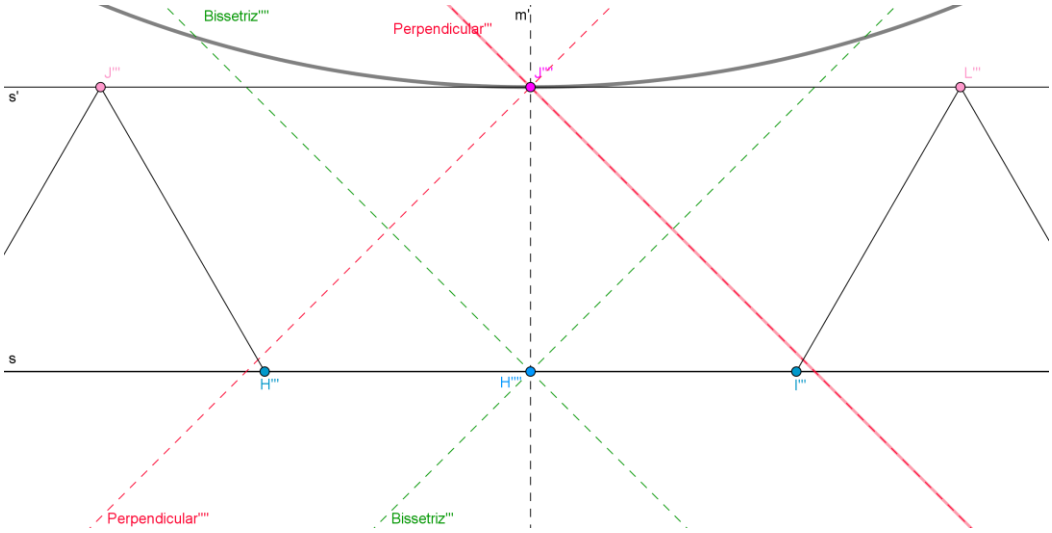
Figura 43: Preenchendo a área central e inferior do comprimento1.



Fonte: Construído pelo autor.

Agora trace a reta $Perpendicular'''$ à $Bissetriz'''$ que passa pelo ponto J'''' e trace também a reta $Perpendicular''''$ à $Bissetriz''''$ que passa pelo ponto J'''', conforme a figura 44.

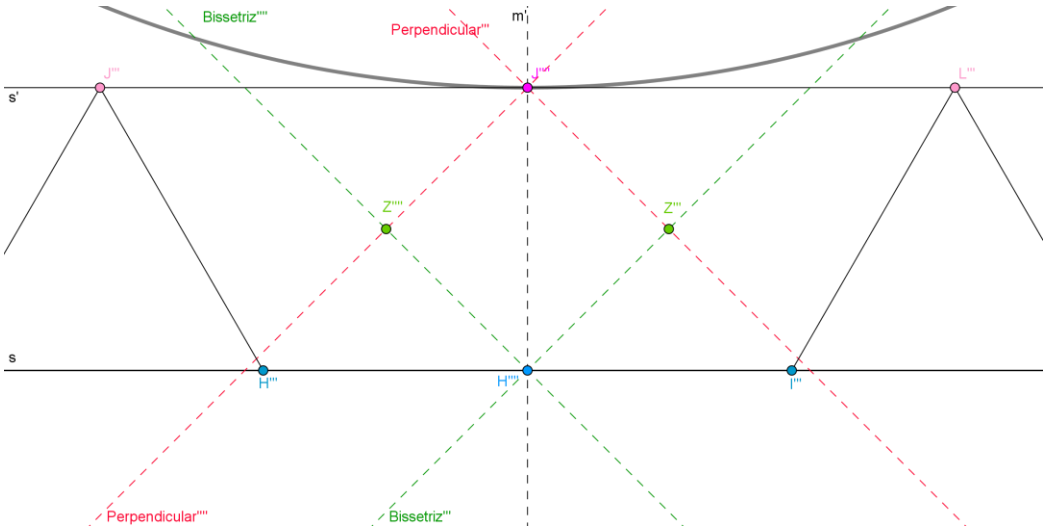
Figura 44: Preenchendo a área central e inferior do comprimento 2.



Fonte: Construído pelo autor.

Marque o ponto Z''' na interseção de $Perpendicular'''$ com $Bissetriz'''$ e o ponto Z'''' na interseção de $Perpendicular''''$ com $Bissetriz''''$. (Figura 45)

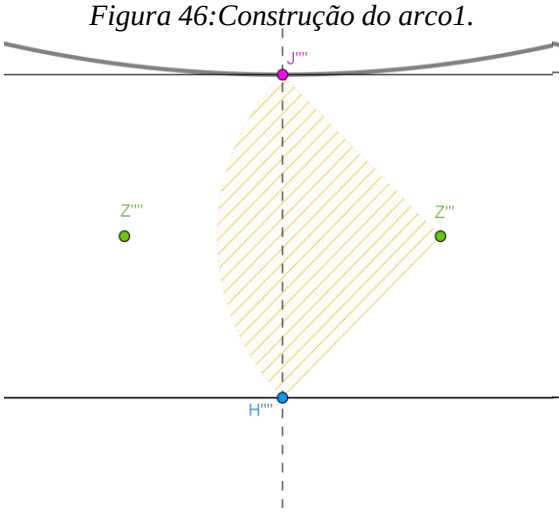
Figura 45: Preenchendo a área central e inferior do comprimento 3.



Fonte: Construído pelo autor.

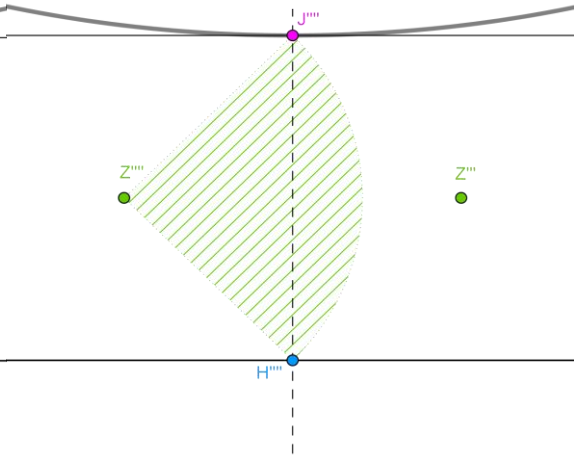
Com a ponta seca do compasso em Z''' construa o arco1 $\widehat{H''''J''''}$. Com a ponta seca em Z'''' construa o arco2 $\widehat{H''''J''''}$. Como mostra a figura 46 e 47.

Figura 46:Construção do arco1.



Fonte: Construído pelo autor.

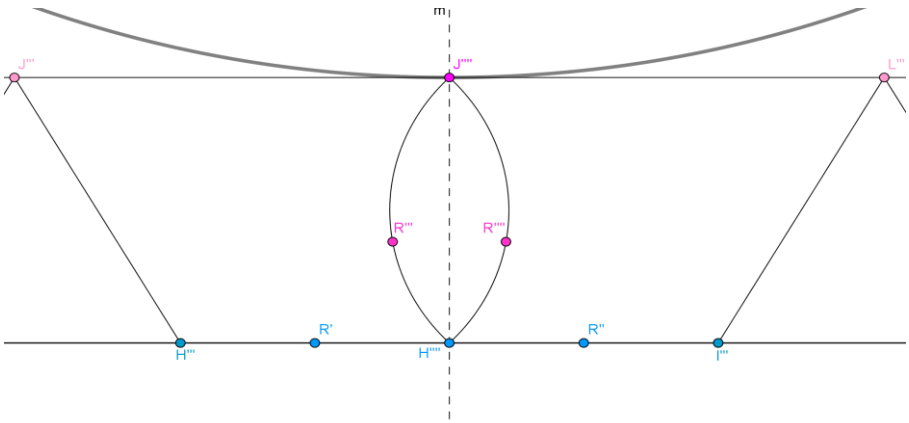
Figura 47: Construção do arco1.



Fonte: Construído pelo autor.

Sejam os pontos R' e R'' pontos médios dos segmentos $H'''H''''$ e $H''''I'''$. Com a ponta seca do compasso em R' e abertura $R'H'''$, marque o ponto R''' no arco1 $\widehat{H''''J''''}$. E com a ponta seca do compasso em R'' e abertura $R''I'''$, marque o ponto R'''' no arco2 $\widehat{H''''J''''}$. Assim como na figura 48.

Figura 48: Preenchendo a área central e inferior do comprimento 4.



Fonte: Construído pelo autor.

Agora marque o arco $\widehat{H'''R'''}$ de centro R' e o arco $\widehat{I'''R''''}$ de centro R''. E desconsidere o arco $\widehat{H''''R''''}$ de centro em Z''' e o arco $\widehat{R'''H''''}$ de centro em Z''', conforme a figura 49.

Figura 49: Preenchendo a área central e inferior do comprimento 5.

Fonte: Construído pelo autor.

O desenho da parte central do comprimento superior é análogo e pode ser visto na figura 50.

Figura 50: Preenchendo a área central e inferior do comprimento superior

Fonte: Construído pelo autor

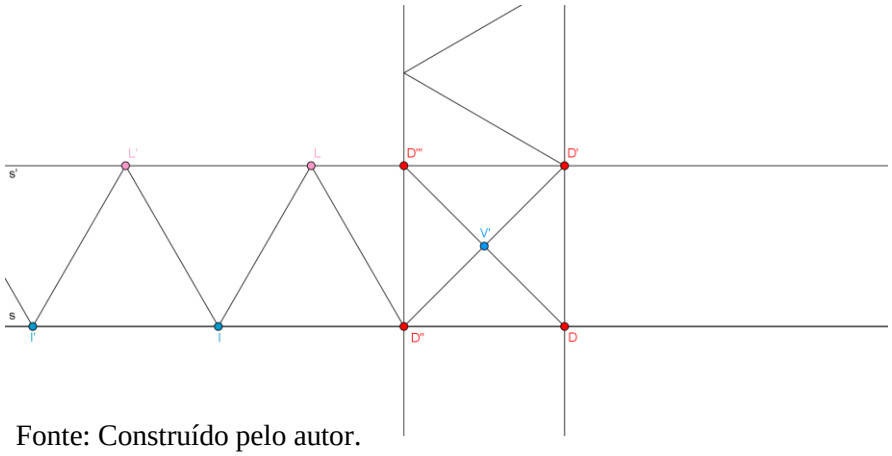
15º Passo: Construir o "miolo" da flor

Na construção do "miolo" da flor, foi preciso fazer adaptação porque até o momento não encontramos uma relação de proporcionalidade direta com o restante do (re)desenho. Por isso, estabelecemos uma relação proporcional entre o "miolo" e (re)desenho (6º ponto crítico).

Nós iremos assumir uma relação desse miolo com o (re)desenho. Que por sua vez, tem sua área equivalente a área de uma circunferência que circunscreve o quadrado de lado *h*.

Nessas condições, para encontrar o raio dessa circunferência, basta construirmos os segmentos $D'''D$ e $D''D'$ e, considerar o ponto V' interseção desses segmentos, como mostra a figura 51.

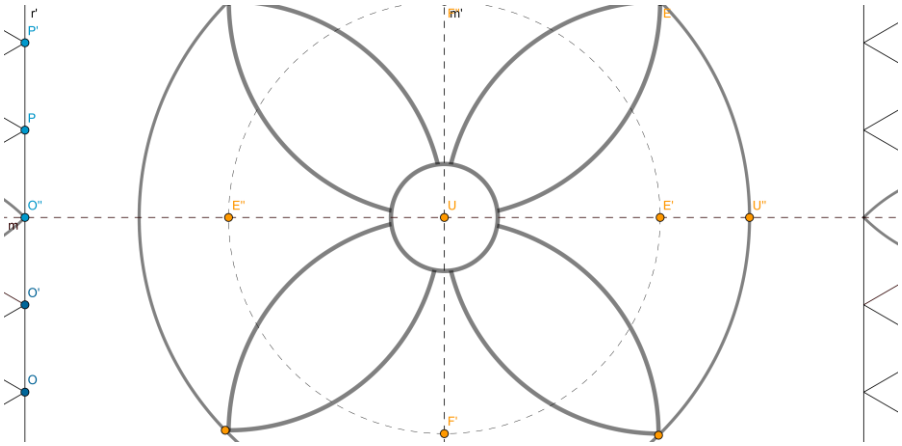
Figura 51: Construindo o "miolo" da flor.



Fonte: Construído pelo autor.

Agora, construa a circunferência de centro em U e raio $\overline{DV'}$, como mostra a figura 52.

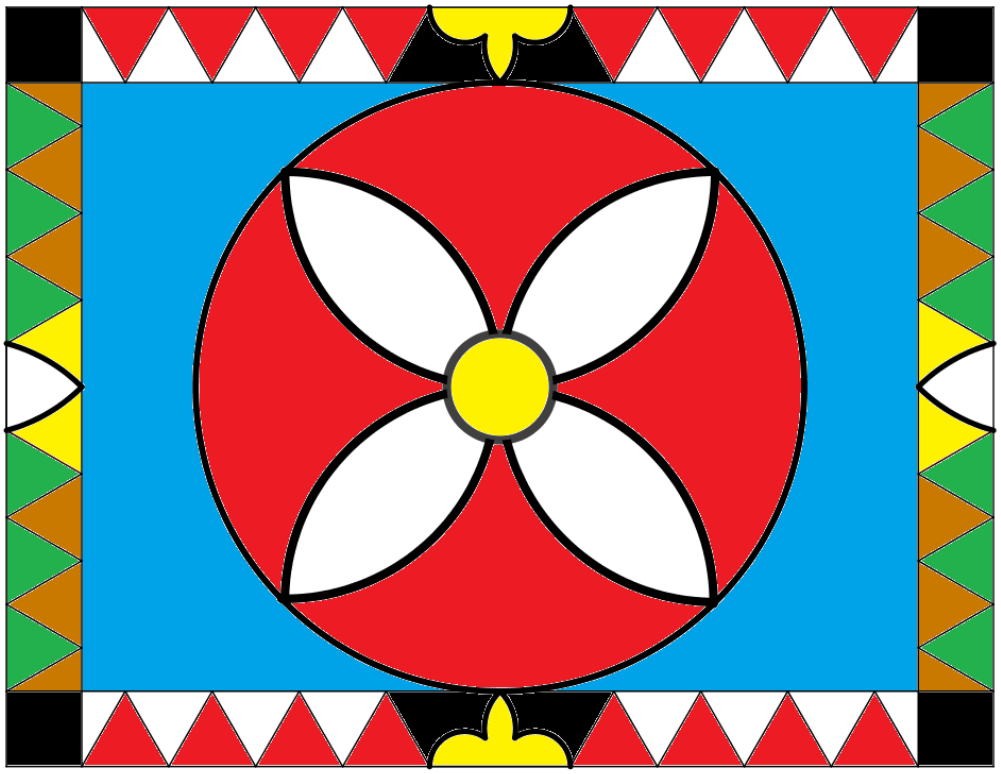
Figura 52: Construindo o "miolo" da flor 2



Fonte: Construído pelo autor

Salientamos que este (re)desenho foi realizado com base no que era suficiente para alcançar o objetivo deste trabalho. Embora, existam alguns detalhes na obra original, como por exemplo, as linhas interiores aos triângulos, circunferência 1, pétalas e trapézios, não julgamos necessários para o (re)desenho. Como as imagens foram realizadas com o auxílio do computador, então utilizamos esse recurso também para colorir e a figura 53, constituindo assim o (re)desenho da Flor do Cangaço.

Figura 53:(Re)desenho final.



Fonte: Criado pelo autor.

5.4. Discussão de possíveis resultados gerados no (re)desenho

Como dito anteriormente, buscamos que essa construção fosse o mais próximo visualmente da pintura original e que no procedimento do (re)desenho surgiram algumas dificuldades e pontos críticos, conforme foram pontuados na seção anterior. Nessas condições, é válido salientar e perceber a diferença entre dificuldade e ponto crítico.

Consideramos o termo “dificuldades” para as situações em que a partir do conhecimento geométrico, por exemplo, pudéssemos identificar as soluções. E, o termo “pontos críticos” para os casos em que assumimos condições estratégicas para desenvolver a construção, de forma que não fugissem da proposta do desenho original.

No processo de ensino e/ou aprendizagem é possível confundir ou adotar uma dificuldade como um ponto crítico, o que pode acarretar em uma perda de precisão do (re)desenho, como é possível verificar no exemplo a seguir.

A primeira dificuldade que surgiu foi na construção do comprimento da pintura. Percebemos que era possível sanar essa dificuldade conforme a equação de proporcionalidade vista anteriormente, que por sua vez não interfere na perda de

precisão. Entretanto, quando essa dificuldade se manifestou, caso assumíssemos como um ponto crítico, poderíamos estabelecer uma condição: (re)desenhar o comprimento a partir da quantidade de triângulos da pintura original e supor uma área para o retângulo da lateral inferior, como fizemos na construção da lateral esquerda. Contudo, se fizéssemos dessa forma, não teríamos a garantia de que o desenho seria proporcional a pintura original.

Outro ponto a ser refletido é que o (re)desenho pode assumir um processo de construção diferente, a partir do momento que as dificuldades e os pontos críticos forem solucionados de outra forma. Isso dependerá do conhecimento geométrico formal/informal de quem fizer o (re)desenhar.

O momento mais relevante do processo de (re)desenho é encontrar diferentes caminhos e possibilidades de construções com régua e compasso a partir das dificuldades e pontos críticos identificados. Corroborando com Alves (2007, p. 48) podemos "considerar outros caminhos refletindo e ponderando suas possibilidades pode levar-nos a conhecer e compreender territórios que nos são incógnitos". Apesar de Alves (2007) fomentar essa reflexão no contexto da formação de professores, podemos transpô-la para o ambiente da aprendizagem dos alunos. Isso porque o processo de (re)desenho oportuniza ao aluno conhecer e reconhecer como analisar, avaliar e alterar as estratégias para encontrar as possíveis respostas, relatar esse processo e ainda ser capaz de discernir o conhecimento que ele domina e o que ele ainda precisa aprender.

Mediante as considerações expostas, o (re)desenho pode se configurar em uma estratégia de ensino e aprendizagem, na qual os alunos são agentes ativos da formação e desenvolvimento do seu próprio pensamento geométrico. De acordo com isto, Zago e Flores (2010, p. 351) afirmam que "a arte e a matemática podem se relacionar ao se considerar a arte como o lugar onde se coloca em prática formas de olhar e de pensar" matemática. Sendo assim, o pensamento geométrico do aluno pode se formar ao se deparar com suas dificuldades e pontos críticos e aprimorar estas formas de olhar e pensar o processo de (re)desenho.

6. POTENCIALIDADES DA LEITURA DE IMAGEM NESSE (RE)DESENHO

O processo de leitura de imagem pode contribuir na realização do (re)desenho porque pode fornecer um maior nível de compreensão da imagem. É nesse sentido que a leitura é importante, pois interpretá-la, pode ser agregar significados, entender seu contexto histórico e a técnica que foi utilizada para sua criação, para, a partir daí, desenvolver o seu (re)desenho. Dessa forma, no processo de leitura e (re)desenho de imagem é como se a imagem fosse desconstruída para ser reconstruída. Assim, Alves afirma que "desconstruí-la seria compreendê-la técnica e historicamente, e reconstruí-la envolve compreender-se em meio à sociedade atual". (ALVES, 2007, pg. 52)

Nesta perspectiva, o (re)desenho da imagem "Flor do Cangaço" foi realizado conforme o processo de leitura de imagem, ou seja, desconstruí-la seria compreendê-la tecnicamente, no contexto histórico que foi criada e como foi materializada. Nesse trabalho, entendemos que a flor do cangaço significa pureza e proteção, era também um símbolo que os cangaceiros utilizavam em suas indumentárias (MILAN, 2010). Esta imagem sugere um contexto histórico relacionado com o cangaço, o nordeste, a resistência do nordestino às condições sociais, físicas e econômicas em relação à região. Vale ressaltar que esses significados são possibilidades. No (re)desenho esse significado não necessariamente muda, pois a essência da imagem continua a mesma.

Em relação à parte técnica, apesar de não ter contato físico com a imagem, sabemos que ela foi pintada com tinta acrílica sobre uma tela de tecido. Em adição, do ponto de vista matemático e geométrico, nos parece que o artista teve a intenção de transmitir a ideia de simetria e regularidade, de forma a deixar a obra mais harmônica, podemos notar outras características, como por exemplo, a quantidade de triângulos, quadrados, trapézios, as retas que são paralelas e tangenciam a circunferência maior. A imagem completa tem dois eixos de simetria enquanto que a parte do círculo maior e seu interior possuem quatro eixos de simetria.

Depois de ler a imagem compreendendo-a histórica, técnica e matematicamente, podemos dar início ao processo de (re)construção. A imagem é (re)construída dentro de um conjunto de regras assumidas, à exemplo de a imagem do (re)desenho ser o mais simétrico possível. Logo, a partir dos elementos característicos

que conseguimos abstrair da imagem, através do processo de leitura, podemos começar a pensar em como (re)desenhar.

Desse modo, o processo de leitura de imagem e (re)desenho pode potencializar o ensino de matemática em uma perspectiva interdisciplinar e contextualizada. Primeiramente, a imagem deve ser escolhida de acordo com a turma a ser trabalhada, que contenha uma proposta ou um tema (social, político, cultural e outros) para discussão e, se possível, que entrelace com outras áreas de conhecimento. O professor terá o papel inicial de estimular a leitura e interpretação dessa imagem pelos alunos, conforme o seu objetivo e fomentar essa discussão, seja através de produções textuais e/ou debates. Neste caso, o professor pode fazer um trabalho juntamente com professores das disciplinas de artes, história e geografia para discutir questões acerca do nordeste brasileiro, das dificuldades que o povo nordestino enfrenta cotidianamente, a história e influência do cangaço.

Após essa contextualização, o professor pode propor aos alunos que identifiquem as principais características da imagem e sugerir como essa imagem pode ter sido criada. Assim, estabelecer um conjunto de regras sob o qual o (re)desenho será desenvolvido. Neste trabalho, essas regras gerais foram: fazer o (re)desenho apenas com régua não graduada e compasso e tornar a imagem o mais simétrica possível, logo, a construção foi feita em torno disso.

Para tornar a imagem mais simétrica possível, o (re)desenho foi projetado com base nas construções geométricas (regras específicas). Para isso, o professor pode iniciar o trabalho matemático demonstrando as construções geométricas elementares, que fundamentam o (re)desenho, com a régua e o compasso. Em seguida, o professor estimula os alunos a pensarem em possibilidades de como fazer as construções do (re)desenho. Neste processo, o professor pode enfatizar os conteúdos que ele deseja ensinar, desenvolvendo o trabalho com as definições, propriedades, relações entre as figuras e a desconstrução de conceitos errados. Vale ressaltar que o professor deve deixar o aluno a vontade para tentar (re)desenhar de acordo com o conhecimento prévio que ele tem, a partir disso o professor media a atividade, deixando o aluno reconhecer que tipo de conhecimento ele esta utilizando. O trabalho também pode se desenvolver de acordo os *pontos críticos* e *dificuldades* encontradas no processo de (re)desenho, feito pelo professor anteriormente.

A seguir apresentamos um quadro com possíveis conteúdos da geometria plana, de acordo com a série que podem ser estudados a partir do (re)desenho.

Quadro 1: Conteúdos de Geometria por séries

Série	Conteúdos
6º ano	• Ponto, Reta e Plano • Polígonos • Retas paralelas e perpendiculares • Ângulos • Medidas de Área e Perímetro
7º ano	• Ângulos (Bissetriz) • Polígonos • Proporcionalidade • Transformação de Figuras e Simetria
8º ano	• Polígonos (soma das medidas dos ângulos internos e externos) • Semelhança • Triângulos • Quadriláteros • Círculos e circunferências • Medidas de Área e Perímetro
9º ano	• Semelhança • Teorema de Tales • Ângulos (polígonos e circunferência) • Teorema de Pitágoras
Ensino Médio	• Semelhança • Teorema de Tales • Propriedades de Figuras Geométricas • Triângulo Retângulo • Teorema de Pitágoras

Fonte: Criado pelo autor

Observando o quadro acima, percebemos que este (re)desenho bem como sua leitura podem se adequar para qualquer nível de ensino, pois pode ser explorado por meio de vários conteúdos da geometria plana. Para isso, o professor precisa ler na imagem o que ele deseja trabalhar e como será feito este estudo de acordo com os alunos envolvidos.

7. LIMITAÇÕES DA PESQUISA E POSSIBILIDADES DE PESQUISAS FUTURAS

No que se refere ao processo de (re)desenho, o presente estudo tem algumas restrições e alguns encaminhamentos.

Sobre as restrições citamos a interpretação da pintura “Flor do Cangaço”, na visão do próprio autor, pois não houve a oportunidade de entrevistá-lo, na tentativa de esclarecer os principais significados da obra e como foi criada. Como também, se o autor se apropriou ou não de algum conhecimento geométrico para a realização da pintura.

Embora a Flor do Cangaço possa gerar uma discussão substancial sobre o cangaço e o nordeste, visto que foi seu contexto de criação, nós não a fizemos devido ao tempo para conclusão deste trabalho. Por esse mesmo motivo não testamos se o (re)desenho seria proporcional a pintura original se o iniciássemos pelo seu comprimento a partir da quantidade de triângulos e supondo uma área para o trapézio da lateral inferior.

Outra restrição foi em consideração ao (re)desenho feito no papel. Percebemos que ao utilizar os instrumentos (régua e compasso) o desenho perdia um pouco de precisão. Além disso, para digitalizá-los também implicava em perda de precisão, por isso consideramos a possibilidade de (re)desenhar com o auxílio do software Geogebra considerando a construção apenas com a régua não graduada e o compasso.

No decorrer do desenvolvimento do presente trabalho surgiram algumas questões que acreditamos serem possibilidades para pesquisas futuras, como por exemplo, (re)desenhar a Flor do Cangaço iniciando pelo centro e não pela lateral, como fizemos. Nesse caso, acreditamos que novas situações surgiriam e por isso, novas condições seriam estabelecidas.

Outra situação a ser investigada seria: Qual possibilidade e procedimento do (re)desenho se fosse considerado que a pintura tivesse outras formas geométricas, como por exemplo o que foi considerado como circunferência fosse elipse e ao invés de triângulos equiláteros fossem triângulos isósceles?

Além disso, pode-se verificar a possibilidade de realizar o (re)desenho com base no uso de funções e seus respectivos gráficos com o auxílio do software geogebra. E pode-se também realizar um estudo em busca de relações proporcionais no próprio (re)desenho.

Outra possibilidade de pesquisa é aplicar essa estratégia de (re)desenho em uma sala de aula e estimular os alunos a desenvolverem as construções. Espera-se que nesta aplicação sejam observadas as principais dificuldades dos alunos e quais estratégias eles desenvolvem para solucionar os problemas decorrentes do processo. Além disso, que esta atividade possa ser lúdica e interativa.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A princípio, tínhamos muitas dúvidas quanto ao desenvolvimento da pesquisa já que haviam muitas incertezas e não sabíamos o que aconteceria no processo de (re)desenho. Entretanto, com o suporte de leituras e dedicação, conseguimos atingir nosso objetivo, que por usa vez, foi (re)desenhar a pintura Flor do Cangaço por meio de conceitos e definições da geometria euclidiana plana.

A importância do uso da régua e do compasso é destacada em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), que recomendam que o professor de Matemática aborde situações que recorram a construções geométricas com régua e compasso. Essa prática pode fomentar questões acerca dos processos de construções de modo a perceber propriedades matemáticas que sustentam esses processos, como afirma Jesus (2008).

Além disso, na mesma linha de raciocínio de Santos (2006), o trabalho desenvolvido com alfabetização visual no contexto da educação, estimula o aluno fazer reflexões do mundo com questões que envolvem a sociedade. O aluno pode desenvolver e amadurecer seus argumentos e conhecimentos com independência por meio da leitura de imagem, pois interpretar é também explicar, entender, discutir, decodificar, criar e criticar. (SANTOS, 2006)

Salientamos então, que o (re)desenho presente nesse texto, pode ser uma estratégia útil como uma ferramenta para o ensino de geometria por meio da arte. Pois, como afirma Zago, “uma maneira de ensinar geometria pode estar na relação entre matemática e arte quando se considera o olhar não apenas como meros olhos observadores, mas olhos que veem além, que criam, inventam, pensam e compreendem o que estão vendo” (ZAGO, 2010, pg. 340). Possivelmente, o momento em que o aluno tende aprimorar esse olhar é quando ele for estimulado a isso. A própria (re)construção é uma forma de estimula-los, especificamente quando tiverem que resolver as dificuldades e os pontos críticos, pois essas situações fazem com que o aluno busque

alternativas e caminhos diferentes para satisfazer os problemas encontrados. Nesse processo, o aluno recorre ao conhecimento de geometria e outras áreas da matemática para resolvê-los. E nesta busca de alternativas, ele pode participar da formação do seu próprio conhecimento.

Dessa forma, encontramos uma maneira singular de explorar o ambiente da arte para melhorar o ensino de matemática e geometria de modo a contextualizar e facilitar o conhecimento dos conteúdos dessa disciplina. Nesse sentido, os elementos matemáticos e geométricos podem ser alicerce no contexto das pinturas.

Não temos a intenção de relacionar esta pesquisa a um "manual" para aplicação na sala de aula. Esperamos que ela seja uma forma de fomentação e discussão de ideias, na qual o professor se habilite e desenvolva sua prática docente por meio de atividades criativas que tenha como ambiente de exploração o campo da arte. Essa habilidade está relacionada à percepção do professor quanto as leituras das obras artísticas e do reconhecimento da geometria presente nelas.

Deste modo, o aluno fica livre, desde que respeite as regras gerais, para desenvolver sua criatividade e imaginação de construção do (re)desenho, de forma que a geometria e a matemática sejam compreendidas como um suporte que alicerça o processo de (re)desenho.

Portanto, a pesquisa pôde contribuir para meu desenvolvimento enquanto educador de matemática, pois tive a oportunidade de participar tanto no papel do professor (mediando a própria construção) quanto no papel do aluno no processo de (re)desenho. Nessa experiência, foi perceptível o quanto o aluno pode ter inúmeras dificuldades e bloqueios durante qualquer atividade e como o professor deve estar preparado para essas situações. Então o processo de (re)desenho é também isso, é conhecer e reconhecer o que você sabe e o que não sabe. Além disso, a contribuição de criar um elo entre a geometria e a arte de modo a contextualizar o ensino de geometria e tornar as aulas de geometria mais atraentes.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, I. A. C. **Identificando rupturas entre significados e significantes nas construções geométricas:** um estudo em traçados de lugares geométricos bidimensionais, envolvendo pontos, retas e circunferências. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco – Centro de Educação, Recife, 2007.

ALVES, M. L. **Muito além do olhar:** um enlace da matemática com a arte. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2007.

BARBOSA, A M. **A Imagem no Ensino da Arte:** anos 80 e novos tempos. São Paulo : Editora Perspectiva, 2ª ed. 1998

BARBOSA. A. M. **Arte/educação contemporânea:** consonâncias internacionais. 3 ed. São Paulo: Cortez, 2010.

BARBOSA. J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana** – Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Rio de Janeiro: SBM, 1985.

BRAIDA, C. R. **A forma e o sentido da frase "Isso é arte".** 2011 Disponível em < https://www.academia.edu/22641141/A_forma_e_o_sentido_da_express%C3%A3o_isso_%C3%A9_arte_?auto=download_> Acesso em 05 de janeiro de 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Matemática – 5ª a 8ª séries - Secretaria do Ensino Fundamental.. Brasília: MEC/SEF, 1998, v. 3.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental Proposta Curricular para a educação de jovens e adultos : segundo segmento do ensino fundamental: 5a a 8a série : introdução / Secretaria de Educação Fundamental, 2002. 240 p.: il. : v. 3

CONDURU, R. Reflexão e Exterioridade. In: CUNHA, J. A. **Universo de J.Cunha**.1. ed. Salvador:1 Corrupio, 2016.

CORRUPIO, E**.** J. Cunha. In: CUNHA, J. A. **Universo de J.Cunha**.1. ed. Salvador:1 Corrupio, 2016.

CUNHA, J. A. **Universo de J.Cunha**.1. ed. Salvador:1 Corrupio, 2016.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Tradução de Higino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1994.

FAINGUELERT, E. K; NUNES, K. R. A. **Fazendo arte com a matemática.** Porto Alegre: Artmed, 2006.

FIORENTINI, D. LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Coleção formação de professores, Campinas, SP, 2006.

FLORES, C. R. **Arte e Visualidade:** outros olhares para a visualização matemática. Seminário de Pesquisa, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC-SP, março, 2016

GUERRA, V. C. **Impossibilidades em Construções Geométricas:** Aspectos Históricos e Matemáticos. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal De São Carlos, São Carlos, Brasil, 2011.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 5a Edição. IMPA. Rio de Janeiro 2008, p. 194.

JESUS, G. B. **Construções Geométricas:** uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada. 2008. 226 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

JESUS, G. B. **As construções geométricas e a gênese instrumental**: o caso da mediatriz. 2012. 162 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

LEFFA, V. J. **Aspectos da Leitura.** Porto Alegre: Sagra: DC Luzzatto, 1996.

LORENZATO, S. **"Porque não ensinar geometria?"** Educação matemática em revista, vol. 4. São Paulo: SBEM, 1995.

MILAN, P. **A moda de Lampião**. 2010. Disponível em: < http://www.gazetadopovo.com.br/vida-e-cidadania/a-moda-de-lampiao-26ohoct3wvy2p0942qutg2pu6> Acesso em: 16 de julho de 2017.

MUNANGA, K. Um encontro com o artista. In: CUNHA, J. A. **Universo de J.Cunha**.1. ed. Salvador:1 Corrupio, 2016.

OLIVEIRA. S. G. S. **As construções geométricas e demonstrações nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. VIDYA, v. 35, n. 2, p. 129-145, jul./dez, Santa Maria, 2015. Disponível em < http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/603/559> Acesso em 07 de janeiro de 2017.

SANTANA, A.L. **Estética**. 2017. Disponível em:< http://www.infoescola.com/artes/estetica/> Acesso em: 14 de março de 2017

SANTOS, L. I. **A leitura de imagens visuais como recurso pedagógico no ensino da arte:** uma experiência com alunos do Ensino fundamental. Monografia (Pós Graduação em Ensino da Arte), Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, Brasil, 2006.

SILVA, J. C. **A arte como aliada no ensino da geometria plana.** Universidade Católica de Brasília. Disponível em: < https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/JulianaCruzdaSilva.pdf > Acesso em 07 de agosto de 2017.

SILVA, A. J. **Leitura de imagens e significação:** um estudo sobre conceitos matemáticos. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2014.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 1993.

ZAGO, H. da S. **Ensino, Geometria e Arte:** Um olhar para as obras de Rodrigo de Haro. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2010.

ZAGO, H; FLORES, C. R. **Uma proposta para relacionar arte e educação matemática**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 13, núm. 3, noviembre, 2010, p. 337-354.

ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001. f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.