Título: O ENCANTO DAS CÔNICAS COM RÉGUA E COMPASSO

Nome dos autores:

- Ediléia Novais Alves
- Jercino Mendes de Souza
- Tiago Cardoso Silveira

RESUMO:

A teoria das cônicas com origem no século IV a.C. desenvolveu-se ininterruptamente até os dias atuais: vários aspectos, caracterizações, propriedades, relações com outras áreas do conhecimento foram sendo estudadas ao longo dos tempos.

E, associado à história dessas curvas, temos Apolônio que nasceu na cidade de Perga, região da Panfília (atualmente Turquia) por volta de 262 a.C. e viveu, aproximadamente, até 190 a.C.

O estudo das cônicas foi obtido seccionando um cone circular reto de uma folha com um plano perpendicular a uma geratriz do cone, obtendo três tipos distintos de curvas, conforme a seção meridiana do cone fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso.

Este trabalho abordará a construção destas através da ferramenta mais utilizada em nossos estudos, régua e compasso, que é capaz de oferecer condições de construir, testar, validar hipóteses, analisando passo a passo da construção.

Palavras-chave: Cônicas; régua e compasso.

ASPECTOS HISTÓRICOS E A IMPORTÂNCIA DAS CÔNICAS

As seções cônicas são conhecidas antes da época de Euclides (□ 325-265 a.C.).

Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes que viveu, aproximadamente, entre 287 a.C. e 212 a.C. e, juntamente com Euclides, formam a tríade considerada como sendo a dos maiores matemáticos gregos da antigüidade. Sua obra prima é **Seções Cônicas** composta por 8 volumes (aproximadamente 400 proposições!).

Apolônio foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as seções cônicas na antiguidade. Mostrando que as seções eram obtidas seccionando um cone circular reto de uma folha com um plano perpendicular a uma geratriz do cone, obtendo três tipos distintos de curvas, conforme a seção meridiana do cone fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou

um ângulo obtuso, conceituando-as de elipse, hipérbole e parábola

Estudadas a mais de dois milênios, essas curvas têm aplicações importantes até hoje. Esses estudos de Apolônio sobre as cônicas dificilmente pode ser questionada.

As Cônicas de Apolônio também tiveram forte influência nos estudos de Kepler. O interesse de Kepler pelas cônicas surgiu devido às suas aplicações à óptica e à construção de espelhos parabólicos, e também explica o fenômeno que ocorre em câmaras de sussurro.

A elipse ganhou relevo na Astronomia, desde que Kleper (1571-1630) estabeleceu que as órbitas dos planetas do sistema solar são elípticas, sendo que em 1.609, ele edita a **Astronomia Nova**, onde apresenta a principal lei da astronomia: "os planetas descrevem órbitas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos". A propósito, a palavra foco é devida a Kepler e provém da forma latinizada foccus cujo significado é fogo, lareira.

A parábola tem propriedades que são úteis na fabricação de espelhos de faróis de automóveis, de refletores de longo alcance e de antenas parabólicas, que não recebem esse nome por acaso.

Outra aplicação prática aparece na obra de Galileu (1.632), onde "desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola". Galileu se reporta à componente horizontal e à componente vertical de uma parábola. Foi a Matemática pura de Apolônio que permitiu, cerca de 1.800 anos mais tarde, os "Principia" de Sir Isaac Newton. A lei da gravitação de Newton matematizou as descobertas empíricas de Kepler e, a partir do século dezessete, possibilitou o estudo analítico das cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço, este, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível.

Também não podemos deixar de falar em aplicações práticas usuais recentes como nos receptores parabólicos, telescópios, navegação LORAN, etc.

Coube a Pierre de Fermat (1.601-1.665) a descoberta das equações cartesianas da reta e da circunferência, e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole.

Ele aplicou uma transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2° grau à sua forma mais simples.

Propriedades refletoras das cônicas e aplicações

Na física Clássica, os raios de luz e as ondas sonoras propagam-se no espaço em linha reta e radialmente a partir de sua fonte. Além disso, se a fonte está muito distante de seu destino, essas ondas chegam ao destino formando um feixe praticamente paralelo, como é o caso das ondas de rádio ou as luminosas provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planetas, etc).

Chegando em linha reta elas refletem num ponto de uma superfície suave na mesma direção que refletiriam num plano que é tangente à superfície nesse ponto. Ou seja, seguindo a lei da Física: "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão". Por causa da relação especial entre o foco de uma cônica suave e suas tangentes (superfícies refletoras (espelhos, antenas, etc)) com o formato de uma superfície de rotação, geradas pela rotação de uma parábola em torno de seu eixo, ou de uma elipse ou hipérbole em torno de seu eixo focal, têm propriedades refletoras que são úteis em várias aplicações tecnológicas. Abaixo apresentamos algumas delas.

Formas de representação das cônicas utilizando régua e compasso

As construções geométricas eram feitas pelos gregos com o uso de compasso e régua não graduada. A seguir temos o processo de construção das cônicas: parábola, elipse e hipérbole.

Parábola

Dados uma reta d e um ponto $F \notin d$, a *parábola* de foco F e diretriz d é o L.G. dos centros P das circunferências que passam por F e são tangentes a d ou, equivalentemente, dos pontos P tais que as distâncias de P a F e de P a d são iguais.

p

x

f

Elipse

Dados uma circunferência γ de centro F e raio 2a>0 e um ponto F' no interior dessa circunferência com FF' = 2c < 2a, a elipse de focos F e F' e excentricidade e = c/a<1 é o lugar geométrico dos centros P das circunferências tangentes a γ que passam por F', ou, equivalentemente, dos pontos P tais que PF+PF' = 2a.

Construção de elipse, ponto a ponto, com régua e compasso

Para cada ponto $X \in \gamma$, traçamos os segmentos *XF* e *XF′* e a mediatriz de *XF′* que encontra *XF* num ponto *P* da elipse.

Elipse determinada por 2 circunferências

Vejamos outra caracterização de elipse por meio de duas circunferências concêntricas γ e γ', de centro *O* e raios *a* e *b*, com *a>b*.Para cada ponto *(x,y')* de γ considere os pontos *(x',y)*€ γ', no segmento que une *(x,y')* ao centro *O,* e *P =(x,y).*

O lugar geométrico dos pontos *P* assim obtidos, quando *(x,y')* percorre γ, é a elipse dada por *x*2 /*a*2 + ψ2/β 2 = 1.

De fato, por semelhança de triângulos, tem-se que| *x* |/| *x*' |=| ψ€|/| ψ|=α/β e, portanto, *x*2 + (*y*')2 = *a*2 Þ *x*2 + *a*2*y*2/*b*2 = *a*2 Þ *x*2/*a*2 + *y*2/*b*2 = 1.Reciprocamente, se um ponto *(x,y)* obedece essa equação, tem-se |*x*|≤*a,* |*y*|≤*b* e pontos *(x',y)*€γ' e *(x,y')*€γ com *xx'≥0* e *yy'≥0* que determinam *(x,y).*

Hipérbole

Dados uma circunferência γ de centro F e raio 2a>0 e um ponto F' no seu exterior com FF'=2c, c>a, a hipérbole de focos F e F' e excentricidade e=c/a>1 é o L.G. dos centros P das circunferências tangentes a γ, que passam por F', ou, seja, dos pontos P tais que |PF-PF'|=2a.

Construção de hipérbole, ponto a ponto, com régua e compasso

A definição de hipérbole leva à sua construção, ponto a ponto, com régua e compasso. Dado X€γ, traçamos o segmento XF' e sua mediatriz encontrando a reta FX no ponto P. O conjunto dos pontos P que podem ser assim obtidos quando X varia em γ é a hipérbole. Nos dois pontos X€γ para os quais XF' é tangente à circunferência, a mediatriz de XF' é paralela à reta XF e, portanto, não fica determinado ponto da hipérbole. Essas duas mediatrizes são chamadas de assíntotas. Marque na circunferência γ os conjuntos dos pontos X que descrevem cada um dos ramos da hipérbole.

Caracterização das cônicas pelas diretrizes e focos

Do mesmo modo como a parábola, a elipse e a hipérbole podem ser definidas em termos de um ponto, chamado foco, de uma reta chamada diretriz e de um número e>0.

Uma elipse (hipérbole) é o L.G. dos pontos cuja razão entre as suas distâncias ao foco e à diretriz é uma constante e<1 (e>1).

Dada uma elipse x2 / a2 +ψ2 /β 2 = 1 com excentricidade e=c/a, isto é, com b2=a2 c2=a2(1-e2) para o foco F'=(-c,0) procuramos uma reta x=d tal que e | x - d |= √(x + c)2 + y2, "(x, y) / x2/ a2 + y2/b2 =1, ou, equivalentemente tal que (1- e2)x2 + 2x(c + e2d) + y2 = e2d2 - c2, "(x, y) / (1- e2)x2 + y2 = a2 - c2 .

Como temos que ter 2x(c + de2) = e2d2 - a2, basta escolher d = - c/e2 e, portanto, a reta diretriz r é dada por x = - c /e2. Do mesmo modo, para o foco F=(c,0) obtemos a diretriz dada por x = c/e2 .

Reciprocamente, dados um ponto F=(c,0), uma reta x=d e um número 0<e<1, você pode verificar que os pontos P=(x,y) tais que e | x - d |=√ (x - c)2 + y2 , estão numa elipse. Para isso basta elevar essa equação ao quadrado e depois completar quadrados.

Considere, agora, uma hipérbole dada por x2 /a2 − ψ2 / β 2 = 1 com excentricidade e=c/a, isto é, com b2= c2-a2= a2(e2-1). Para o foco F=(-c,0), procuramos uma reta x=d tal que e | x - d |= √ (x + c)2 + y2, "(x, y) / x2 /a2 - y2 /c2 - a2 =1, obtendo x = d = - c /e2 . Para o foco F=(c,0), obtém-se a reta x = c /e2 . Como no caso anterior, vale a recíproca.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAMARGO, Ivan de. & BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. 3ª edição. Renovada e ampliada – São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- LEHMANN, Charles H. **Geometria Analítica**; tradução de Ruy Pinto da Silva Sieczkowski. – 9ª Ed. – São Paulo: Globo, 1998.
- NEVES, M. A. F. **Geometria I** - Matemática 10º ano: parte 1. Porto: Porto Editora.
- SALLUM, Elvia Mureb. **Aparatos que desenham curvas - Matemática** - IME-USP;
- Disponível em: < www.educ.fc.ul.pt/icm98/icm33/historia.htm.> Acesso em 20/02/2010.
- Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/index.html>. Acesso em 23/02/2009