Introdução à Lógica Matemática

Sergio da Silva Aguiar
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - I Seemat

1 Introdução

O que é a Lógica? O que significa estudar Lógica? Qual a sua definição? Ao iniciar este estudo, vários autores apresentam definições populares sobre o tema. Conforme [Mendelson, 1987]: *Lógica é a análise de métodos de raciocínio.* No estudo desses métodos a Lógica está interessada principalmente na forma e não no conteúdo dos argumentos. Considere os argumentos:

- Todo homem é mortal. Sócrates é um homem. Portanto, Sócrates é mortal.
- Todo cão late. Totó é um cão. Portanto, Totó late.

Do ponto de vista da Lógica, esses argumentos têm a mesma estrutura ou forma.

- Todo X é Y. Z é X. Portanto, Z é Y.

A Lógica é o estudo de tais estruturas. Alguns autores [Andrews, 1996] dizem que a lógica é essencialmente o estudo da natureza do raciocínio e as formas de incrementar sua utilização.

No livro *Convite à Filosofia* [Chauí, 2002] é apresentada a definição:

Lógica - conhecimento das formas gerais e regras gerais do pensamento correto e verdadeiro, independentemente dos conteúdos pensados; regras para demonstração científica verdadeira; regras para pensamentos não-científicos; regras sobre o modo de expor o conhecimento; regras para verificação da verdade ou falsidade de um pensamento etc.

2 Linguagens Formais

Toda linguagem é constituída de dois elementos básicos, um *alfabeto* que especifica um conjunto contável de símbolos usados na linguagem e uma *gramática* que caracteriza sua sintaxe, isto é, que especifica como estes símbolos podem ser agrupados para formar as expressões admissíveis da linguagem. O que diferencia uma linguagem formal de uma linguagem natural é que na linguagem formal a gramática é especificada precisamente, enquanto na linguagem natural quase sempre isso não é possível.

Seja Σ um conjunto contável de símbolos. Denotaremos por Σ^* o conjunto de todas as cadeias finitas em Σ, incluindo a cadeia vazia, aqui denotada por um espaço em branco. Por exemplo, se $\Sigma = \{a, b\}$, então $\Sigma^* = \{ , a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, aab, ...\}$.

Definiremos como uma linguagem L, sobre Σ, qualquer subconjunto de Σ^*.

Definição 1 *Uma linguagem formal ou simplesmente linguagem é um par $\langle \Sigma, G \rangle$, onde Σ é um conjunto contável denominado alfabeto e G é um conjunto finito de regras de derivação denominado gramática.*

Desse modo, para toda linguagem $L \subseteq \Sigma^*$, deve ser fornecida um par $\mathcal{L} = \langle \Sigma, G \rangle$ que a especifica. L é obtida algoritmicamente. Descreveremos as regras de derivação em G, por:

$\dfrac{x_1, x_2, ...x_n}{x}$, $n \in \mathbb{N}$, onde se entende que os objetos do numerador dão origem ao do denominador. No caso em que $n = 0$ estaremos gerando um elemento da linguagem L a partir do conjunto vazio de elementos de L, o qual denotaremos por $\dfrac{-}{a}$, e diremos que a é uma constante ou um axioma de L.

Exemplo 2 *Considere a seguinte linguagem formal $\mathcal{L} = \langle \Sigma, G \rangle$, onde $\Sigma = \{zero, succ, plus,), (\}$ e a gramática G é constituída das seguintes regras de derivação:*

$$g_1 : \frac{-}{zero} \qquad g_2 : \frac{t}{succ(t)},\ t \in \mathrm{L} \qquad g_3 : \frac{t_1, t_2}{t_1 plus t_2},\ t_1, t_2 \in \mathrm{L}.$$

Então, $\mathcal{L} = \langle \Sigma, G \rangle$, onde $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ especifica uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ que contém os seguintes elementos:
$zero, succ(zero), zeropluszero, succ(zero)plus(zero)$, ...

3 Lógica Proposicional

A lógica estuda como raciocinar, como deduzir das hipóteses certas conclusões. Assim, são fundamentais as noções de proposição, verdade e prova. A lógica proposicional clássica é o exemplo mais simples de lógica formal. Esta lógica leva em conta, somente os valores verdades e a forma das proposições. Quando argumentamos, isto é, quando fazemos uma prova, o fazemos em alguma linguagem. Se a linguagem estiver formalizada os argumentos podem, também, ser formalizados, resultando, assim, uma lógica formal em contarapartida a uma lógica especulativa ou informal. O argumento, objeto de estudo da lógica clássica, é uma entidae composta de entidades mais simples chamadas proposições. Uma proposição é uma asserção declarativa, ou seja, que afirma ou nega um fato e tem um valor verdade, que pode ser verdadeiro ou falso. De agora em diante, só consideraremos frases que são proposições, isto é, que são declarativas e conotam um valor verdade, verdadeiro ou falso.

3.1 A Linguagem da Lógica Proposicional

O alfabeto da linguagem da lógica proposicional Σ é constituído de três conjuntos disjuntos.

1. O conjunto V, enumerável, das variáveis e constantes proposicionais $V = \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \{true, false\}$.
2. O conjunto C dos conectivos proposicionais $C = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
3. O conjunto P dos símbolos de pontuação $P = \{,,), (\}$.

   Portanto, $\Sigma = V \cup C \cup P$.

A Linguagem Proposicional, L_P, é a linguagem sobre Σ, gerada pelas seguintes regras:

1. $\dfrac{-}{p}$, $p \in V$
2. $\dfrac{\alpha}{(\neg\alpha)}$, $\alpha \in L_P$
3. $\dfrac{\alpha, \beta}{(\alpha \wedge \beta)}$, $\alpha, \beta \in L_P$
4. $\dfrac{\alpha, \beta}{(\alpha \vee \beta)}$, $\alpha, \beta \in L_P$
5. $\dfrac{\alpha, \beta}{(\alpha \rightarrow \beta)}$, $\alpha, \beta \in L_P$
6. $\dfrac{\alpha, \beta}{(\alpha \leftrightarrow \beta)}$, $\alpha, \beta \in L_P$

   Obs.: As letras gregas minúsculas, talvez indexadas, como α e β, acima são metavariáveis. É usual nos textos clássicos de lógica denominar a linguagem proposicional de conjunto de **fórmulas bem formadas**. Para eliminar o número excessivo de parênteses podemos definir uma ordem de precedência para os conectivos.

3.2 A semântica da Lógica Proposicional

Um conceito fundamental em Lógica (ou Computação) é aquele que diferencia os objetos do seu significado.

3.2.1 Interpretação

O significado ou semântica dos elementos sintáticos da linguagem da Lógica Proposicional clássica é determinado por uma função I denominada interpretação. Esta função associa a cada fórmula da lógica Proposicional um valor de verdade "verdadeiro"ou "falso", que é representado, respectivamente, por t e f. Isso significa que, em L_P, as fórmulas possuem apenas dois tipos de significado.

Definição 3 (interpretação de fórmulas) *Dadas uma fórmula γ e uma interpretação I, então o significado de γ, indicado por $I[\gamma]$ é determinado pelas regras ou operações:*

- $I[true] = t \qquad I[false] = f$
- $I[\neg\alpha] = f$, se $I[\alpha] = t \qquad I[\neg\alpha] = t$, se $I[\alpha] = f$
- As interpretações $I[\alpha \wedge \beta]$, $I[\alpha \vee \beta]$, $I[\alpha \rightarrow \beta]$, $I[\alpha \leftrightarrow \beta]$ serão dadas pela seguinte tabela:

$I[\alpha]$	$I[\beta]$	$I[\alpha \wedge \beta]$	$I[\alpha \vee \beta]$	$I[\alpha \rightarrow \beta]$	$I[\alpha \leftrightarrow \beta]$
t	t	t	t	t	t
t	f	f	t	f	f
f	t	f	t	t	f
f	f	f	f	t	t

Obs.: Desse modo, podemos ver $I[\alpha]$ e $I[\beta]$ como funções $a : V \rightarrow \{t, f\}$, chamadas funções de atribuição e $I[\neg\alpha]$, $I[\alpha \wedge \beta]$, $I[\alpha \vee \beta]$, $I[\alpha \rightarrow \beta]$, $I[\alpha \leftrightarrow \beta]$ como funções $I : L_P \rightarrow \{t, f\}$, chamadas funções valoração ou funções semânticas.

Rigorosamente, temos que:

- $I[\neg\alpha] = \sim I[\alpha] = \sim \alpha$
- $I[\alpha \wedge \beta] = I[\alpha] \cdot I[\beta] = \alpha \cdot \beta$
- $I[\alpha \vee \beta] = I[\alpha] + I[\beta] = \alpha + \beta$
- $I[\alpha \rightarrow \beta] = I[\alpha] \Rightarrow I[\beta] = \alpha \Rightarrow \beta$
- $I[\alpha \leftrightarrow \beta] = I[\alpha] \Leftrightarrow I[\beta] = \alpha \Leftrightarrow \beta$

Exemplo 4 *Seja $\alpha \equiv (p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$. Achar $I[\alpha]$ para $a[p_1] = f$, $a[p_2] = t$ e $a[p_3] = t$.*

$I[(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3] = I[p_1 \vee p_2] \Rightarrow p_3 = (I[p_1] + I[p_2]) \Rightarrow I[p_3] =$
$(f + t) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow 1 = 1.$

Definição 5 *Seja α uma proposição de L_P. α será uma tautologia, se qualquer que seja a atribuição de valores verdade para as proposições atômicas que constituem α, o valor verdade de α é sempre t. Em outras palavras, para cada atribuição de valores verdade $a : \{p_1, \ldots, p_n\} \rightarrow \{t, f\}$, onde $p_1, \ldots, p_n$ são proposições atômicas que constituem α, $I[\alpha] = t$.*

Exemplo 6 *$p \rightarrow (q \rightarrow p)$ e $(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_2)$ são tautologias.*

Proposição 7 *Seja $Taut(L_P)$ o conjunto de todas as tautologias na linguagem proposicional L_P. Então, $Taut\,(L_P)$ é um subconjunto próprio de L_P.*
Proof. *basta exibir uma propsição de L_P que não é tautologia.* ■

Definição 8 *Chamaremos Lógica Proposicional sobre a linguagem L_P ao conjunto $Taut(L_P)$ de todas as tautologias em L_P.*

3.2.2 Propriedades semânticas de L_P.

- Fórmulas tautológicas.
- Uma fórmula α é factível ou satisfatível se, somente se, existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[\alpha] = t$.
- Uma fórmula α é contraditória se, somente se, para toda interpretação I, $I[\alpha] = f$.

A primeira vista a nossa definição de lógica proposicional como o conjunto de tautologias $Taut(L_P)$ não corresponde a nossa intuição de que "lógica é um instrumento para descobrir que uma proposição, a qual chamamos de tese, decorre de um conjunto de proposições, chamadas hipóteses". Em outras palavras, que "lógica seja usada como um aparato dedutivo". Entretanto, veremos que é possível construir esse "aparato dedutivo"a partir de $Taut(L_P)$.

Seja $P(L_P)$ o conjunto das partes de L_P e $\models \subseteq P(L_P) \times L_P$ uma relação sobre L_P que associa a um subconjunto $\Gamma \subset L_P$ uma proposição de L_P.

Definição 9 *Seja $\alpha \in L_P$ e $\Gamma \subset L_P$. Dizemos que α é uma consequência semântica de Γ (consequência lógica), cuja notação é $\Gamma \models \alpha$, se para toda atribuição de valores verdade para as proposições $\beta \in \Gamma$ tal que $I[\beta] = t$ então, também $I[\alpha] = t$.*

Nesta definição, se $\Gamma = \varnothing$, a primeira parte da definição é satisfeita, isto é, como não existe proposição em Γ, então $I[\beta] = t$ para todo $\beta \in \Gamma$. Portanto, para $\varnothing \models \alpha$ ou simplesmente $\models \alpha$, deve satisfazer a seguinte condição: o valor verdade de α é sempre t independentemente das proposições atômicas que compõem α. Ou seja, α é uma tautologia.

Exemplo 10 $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \models \beta \qquad \{\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta\} \models \neg\alpha$

Teorema 11 (Compacidade) *Se $\Gamma \models \alpha$, então existe um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \models \alpha$.*

Teorema 12 (Dedução) *Sejam α e β proposições em L_P. Então $\alpha \models \beta$ se, somente se $\models \alpha \to \beta$.*
Proof. *basta observar a tabela verdade de $\alpha \to \beta$.* ■

4 Sistemas de Dedução (Teorias)

Existem muitas maneiras de deduzirmos se uma fórmula é válida ou não. Por exemplo, podemos valer-nos de uma tabela verdade levando em consideração todos os valores possíveis das proposições que constituem a fórmula. Este sistema, porém, torna-se inviável para um número grande de variáveis proposicionais. O número de linhas da tabela cresce exponencialmente com o número de variáveis.

Outra maneira de fazermos deduções é interpretarmos as regras lógicas como operações, cujas propriedades algébricas estão de acordo com uma álgebra de

Boole. Considerando estas propriedades poderemos mostrar que uma fórmula é tautológica. Este sistema também poderá tornar-se muito custoso para fórmulas muito longas.

Portanto, apresentaremos alguns sistemas dedutivos que trabalham somente sintaticamente. Ou seja, que não leva em consideração os valores das variáveis.

4.1 Sistemas axiomáticos

Sistemas axiomáticos são sistemas de dedução que apresentam:

1. Linguagem proposicional L_P, como visto anteriormente.
2. Um conjunto de axiomas, ou regras sem antecedentes.
3. Regra(s) de inferência.

Por exemplo, poderemos apresentar o seguinte sistema (esquema) de dedução:

$$\text{Axiomas}\begin{cases} \text{A}_1\text{: } \alpha \to (\beta \to \alpha) \\ A_2 : (\alpha \to (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\ A_3 : (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta) \end{cases}$$

Regra $\quad MP : \dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$ Modus Ponens.

Obs.: É possível especificar a linguagem da lógica proposicional usando apenas os conectivos $\neg$ e $\to$, definindo os demais como seguem:

$\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \to \neg\beta)$

$\alpha \vee \beta \equiv (\neg\alpha) \to \beta)$

$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

4.2 Dedução Natural

O Sistema de Dedução Natural utiliza apenas regras de inferência.

Definição 13 *Dadas as fórmulas α, β, γ, os esquemas de regras de inferência são definidos recursivamente como:*

$$(\neg I) \quad \frac{\begin{array}{c}[\alpha] \\ | \\ false\end{array}}{\neg\alpha} \qquad\qquad (\neg E) \quad \frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

$$(\wedge I) \ \frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta} \qquad\qquad (\wedge E) \ \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

$$(\wedge I) \ \frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \qquad\qquad (\vee E) \ \frac{\alpha \vee \beta \quad \begin{array}{c}[\alpha] \\ | \\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\beta] \\ | \\ \gamma\end{array}}{\gamma}$$

$$(\to I)\ \frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ |\\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta} \qquad\qquad (\to)\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

$$(\bot I)\ \frac{\alpha, \neg\alpha}{\bot} \qquad\qquad (\bot E)\ \frac{\bot}{\alpha}$$

Exemplo 14 *Usar dedução natural para provar:*
(a) $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$
(b) $\alpha \to \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$

4.3 Sistema Tableaux

Tableaux semântico na Lógica Proposicional é uma sequência de fórmulas construída de acordo com certas regras e geralmente apresentada sob a forma de árvore.

Definição 15 *Os elementos básicos de um tableaux semântico em L_P são definidos por:*

- *O alfabeto da Lógica Proposicional*
- *O conjunto de fórmulas da Lógica Proposicional*
- *Um conjunto de regras de dedução.*

Definição 16 (regras de inferência) *Sejam α e β duas fórmulas da Lógica Proposicional. As regras de inferência do tableaux semântico são as seguintes:*

$$R_1 : \begin{array}{c}\alpha \wedge \beta\\ \alpha\\ \beta\end{array} \qquad R_2 : \begin{array}{ccc} & \alpha \vee \beta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \alpha & & \beta\end{array} \qquad R_3 : \begin{array}{ccc} & \alpha \to \beta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\alpha & & \beta\end{array}$$

$$R_4 : \begin{array}{c}\neg\neg\alpha\\ \alpha\end{array} \qquad R_5 : \begin{array}{ccc} & \neg(\alpha \wedge \beta) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\alpha & & \neg\beta\end{array} \qquad R_6 : \begin{array}{c}\neg(\alpha \vee \beta)\\ \neg\alpha\\ \neg\beta\end{array}$$

$$R_7 : \begin{array}{c}\neg(\alpha \to \beta)\\ \alpha\\ \neg\beta\end{array} \qquad R_8 : \begin{array}{ccc} & \alpha \leftrightarrow \beta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \alpha \wedge \beta & & \neg\alpha \wedge \neg\beta\end{array}$$

$$R_9 : \begin{array}{ccc} & \neg(\alpha \leftrightarrow \beta) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\alpha \wedge \beta & & \alpha \wedge \neg\beta\end{array}$$

4.3.1 Consequência lógica em Tableaux Semânticos

Os tableaux semânticos definem uma estrutura para representação e dedução de conhecimento. Utilizando regras de inferência, são construídas árvores que determinam um mecanismo de inferência.

Definição 17 (ramo fechado e aberto) *um ramo em um tableaux é fechado se ele contém uma fórmula α e sua negação $\neg\alpha$ ou contém o símbolo $false$. Um ramo é aberto quando não for fechado.*

Definição 18 (tableaux fechado) *Um tableaux é fechado quando todos os seus ramos são fechados. Caso contrário ele é aberto.*

Definição 19 (prova em tableaux semânticos) *Seja α uma fórmula. Uma prova de α utilizando tableaux semânticos é um tableaux fechado associado a $\neg\alpha$. Neste caso α é um teorema do sistema de tableaux semânticos.*

Exemplo 20 *Considere as proposições:*
P = Guga é determinado,
Q = Guga é inteligente,
R = Guga é atleta,
P_1 = Guga é um perdedor,
Q_1 = Guga é amante do tênis

Queremos provar que o argumento:
$(P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \vdash \neg P_1$ é válido.
Portanto devemos provar que:
$(P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1$ é tautologia.
Para usarmos o sistema tableaux, devemos negar esta fórmula. Portanto,
$\neg((P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1)$ deve ser um tableaux fechado.
Veja o tableaux na próxima página....

1. $\neg((P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1)$
2. $P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)$
3. $\neg\neg P_1$
4. P
5. Q
6. $(P \wedge R) \rightarrow \neg P_1$
7. $Q_1 \rightarrow R$
8. $Q \rightarrow Q_1$
9. P_1
10. $\swarrow \quad \searrow$
11. fech. $\neg Q$ $\quad$ Q_1
12. $\swarrow \quad \searrow$
13. fech. $\neg Q_1$ $\quad$ R
14. $\swarrow \quad \searrow$
15. $\neg(P \wedge R)$ $\quad$ $\neg P_1$ $\quad$ fech.
16. $\swarrow \quad \searrow$
17. $\neg P$ $\quad$ $\neg R$
18. fech. $\quad$ fech.

5 Sistema de Gentzen (sequentes)

Este sistema é também baseado na refutação da fórmula a qual queremos mostrar que é uma tautologia.

5.1 Regras Estruturais

São regras não lógicas. Listamos abaixo as principais que são:

- Inclusão (Inc)
- Enfraquecimento (Enf) (à esquerda e à direita)
- Intercâmbio (Int)
- Contração (Con) (à esquerda e à direita).

$$(Inc) : \frac{}{\Gamma, \alpha \Vdash \alpha, \Delta}$$
$$(Enf_e) : \frac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \Vdash \Delta}$$
$$(Enf_d) : \frac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash \alpha, \Delta}$$
$$(Int_e) : \frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Vdash \gamma}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \Vdash \gamma}$$
$$(Int_d) : \frac{\Gamma, \Vdash \Delta, \alpha, \beta, \Theta}{\Gamma \Vdash \Delta, \beta, \alpha, \Theta}$$
$$(Cont_e) : \frac{\Gamma, \alpha, \alpha \Vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \Vdash \Delta}$$

$$(Cont_d) : \frac{\Gamma \Vdash \alpha, \alpha, \Delta}{\Gamma \Vdash \alpha, \Delta}$$

5.2 Regras Lógicas

No cálculo de sequentes, também temos regras para os operadores lógicos, chamadas regras lógicas. Para cada um dos operadores teremos uma regra para o lado esquerdo e outra para o lado direito.

$$(\wedge d) : \frac{\Gamma \Vdash \alpha, \Delta \qquad \Gamma \Vdash \beta, \Delta}{\Gamma \Vdash \alpha \wedge \beta, \Delta} \qquad (\wedge e) : \frac{\Gamma, \alpha \Vdash \Delta \qquad \Gamma, \beta \Vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Vdash \Delta}$$

$$(\vee d) : \frac{\Gamma \Vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \Vdash \alpha \vee \beta, \Delta} \qquad (\vee e) : \frac{\Gamma, \alpha \Vdash \Delta \qquad \Gamma, \beta \Vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Vdash \Delta}$$

$$(\rightarrow d) : \frac{\Gamma, \alpha \Vdash \beta, \Delta}{\Gamma \Vdash \alpha \rightarrow \beta, \Delta} \qquad (\rightarrow e) : \frac{\Gamma, \alpha \Vdash \Delta \qquad \Gamma, \beta \Vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Vdash \Delta}$$

$$(\neg d) : \frac{\Gamma, \alpha \Vdash \Delta \qquad \Gamma \Vdash \beta, \Delta}{\Gamma \Vdash \neg\alpha, \Delta} \qquad (\neg e) : \frac{\Gamma \Vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg\alpha \Vdash \Delta}$$

Obs.: O sistema de sequentes apresenta um único esquema de axioma: $\alpha \Vdash \alpha$.

Uma prova ou dedução, neste sistema poderá ser feita de baixo para cima. Uma tautologia sempre será provada sempre que todos os ramos da árvore de dedução puder chegar a um axioma.

Exemplo 21 *Usar o sistema de sequentes para provar a tautologia:*
$\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

Referências

[Bedregal, 2002] Bedregal & Acioly. *Lógica para a Ciência da Computação*, 2002. Univ. Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

[Costa, 1988] Costa, N. C. A. & Cerrion, R. 1988. *Introdução à Logica Elementar*. Ed. da UFRGS.

[Dopp, 1970] Dopp, Joseph. 1970. *Noções de lógica formal*. Ed. Herder. São Paulo.

[Mendelson, 1987] Mendelson, E. 1987. *Introduction to Mathematical Logic*. D. Van Nostrand.

[Santo, 2003] Santo, Ricardo. 2003. *A verdade de um ponto de vista lógico-semântico*. Fundação Calouste Gulbenkian.

[Souza, 2002] Souza, João Nunes. 2002. Lógica para Ciência da Computação. Elsevier Ed. Ltda. Rio de Janeiro.

[Tarski, 1983] Tarski, Alfred. 1983. *Logic, Semantics, Metamathematics.* 2nd ed. Translated by J. H. Woodger. Indianapolis: Hackett.

[Troelstra, 1996] Troelstra A. S. and Schwichtenberg, H. 1996. *Proof Theory.* Cambridge University Press.