GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: UMA BREVE INTRODUÇÃO

Elias Santiago de Assis*

Resumo

A concepção de Geometria apresentada na educação básica tem sua origem na Antiguidade e está arraigada de influência euclidiana. Embora grande parte dos livros didáticos e até mesmo a maioria dos professores de Matemática do ensino fundamental priorizem os aspectos intuitivos da Geometria (em detrimento da estrutura sistemática formatada em axiomas e proposições), o desenvolvimento teórico desse ramo da Matemática continua imerso na herança grafada por Euclides em sua obra *Os Elementos*. É verdade que da antiguidade até os dias de hoje, o homem passou por diversas transformações, alterando seu modo de enxergar a si mesmo e ao universo. Entretanto, determinados conhecimentos ou saberes matemáticos atravessaram milênios, consagrando-se como verdades absolutas intransponíveis. Mas, será mesmo? Será, por exemplo, a Geometria de Euclides a única a descrever as demandas e possibilidades do universo? O mini-curso proposto visa analisar os desdobramentos do quinto axioma de Euclides, questionar o absolutismo dessa Geometria e estudar as principais características da Geometria Hiperbólica.

Palavras-chave: Axioma das Paralelas; Geometria Hiperbólica; Os Elementos de Euclides.

Os Elementos de Euclides

Na Matemática, os resultados incontestáveis e que servem de base para o desencadeamento de uma teoria são chamados de axiomas ou postulados. A partir deles abre-se caminho para o surgimento de novos resultados e idéias que precisam ser demonstrados de forma lógica e consistente. Não cabe apenas o resultado empírico-experimental. Uma ciência como a Matemática não pode correr o risco de cair por terra devido a incompatibilidades do seu sistema axiomático. Era exatamente essa a compreensão do célebre matemático Euclides de Alexandria.

Professor Assistente da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, UFRB.

Por volta de 332 a. C., o conquistador Alexandre, o Grande, expande seus domínios e funda a cidade de Alexandria, no Egito. Esta cidade, desde a sua fundação, foi concebida para ser o grande centro intelectual e cosmopolita da época. Acontece que naquele período os homens do saber residiam quase que em sua totalidade em Atenas, na Grécia. Era em Atenas que se localizava o Museu de Platão, unidade intelectual equivalente às universidades de hoje. Ali estavam os mais importantes matemáticos, filósofos e físicos então existentes. Assim, para dar vida aos propósitos de Alexandria e alimentar o Museu criado na cidade, o militar Ptolomeu I, sucessor de Alexandre, convida o matemático (provavelmente grego) Euclides para assumir o departamento de Matemática daquela Academia. Ao aceitar o pedido, Euclides movimenta a produção matemática de Alexandria ao reunir na obra *Os Elementos* todo o conhecimento matemático da época. Euclides foi praticamente um compilador, reunindo em seu trabalho resultados de álgebra elementar, teoria dos números e, principalmente, geometria. Até hoje esta obra de Euclides, composta por treze livros, continua sendo utilizada e difundida pelo mundo. Partindo de conceitos primitivos (isto é, ponto, reta e plano), de um grupo de axiomas e de algumas definições, o matemático grego apresenta a Geometria através de um conjunto de afirmações passíveis de demonstrações às quais denominamos proposições ou teoremas. O curioso é que para criar essa estrutura axiomática, Euclides utiliza apenas cinco axiomas. Os quatro primeiros foram facilmente aceitos pela comunidade matemática, mas o mesmo não se pode dizer do último. Sobre esta obra de Euclides, afirma Eves (EVES, 1994, pág. 167) que "nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu maior influência no pensamento científico".

O Axioma das Paralelas

O quinto postulado de Euclides, conhecido atualmente como Axioma das Paralelas (denominação devida ao matemático escocês Jonh Playfair), foi, desde a sua criação, alvo de crítica e contestação. Para muitos matemáticos, aquilo que Euclides considerava um axioma não passava de uma proposição, podendo ser provado a partir dos axiomas anteriores.

Numa versão mais contemporânea, esse axioma diz que por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada. A questão evidenciada não

era a validade deste resultado, mas a sua classificação como axioma. Iniciou-se então uma batalha no sentido de provar o Axioma das Paralelas. Batalha essa que perpassou séculos, provocando, aguçando e inquietando matemáticos do mundo inteiro. Ao longo dessa história, as controvérsias em torno do quinto postulado deram margem ao surgimento de um universo curioso e duvidoso. Trata-se do nascimento de outras geometrias diferentes daquela proposta por Euclides, obtidas a partir da negação do quinto postulado.

Grande é o número de matemáticos envolvidos nessa trama provocada pelo Axioma das Paralelas. Por questão de tempo e espaço, nos limitaremos a citar apenas alguns deles. Segundo Andrade (ANDRADE, 2008, pág. 7), "a busca pela contestação do modelo absoluto para o espaço passou a ser uma obsessão e não tardou a surgir candidatos ao Panteão".

As tentativas fracassadas

Os primeiros matemáticos que se colocaram diante do desafio de provar o referido axioma foram: Proclus Diadochus, o persa Nasir Edin e o inglês Jonh Wallis. Os três se equivocaram ao utilizar em suas respectivas provas um resultado equivalente ao quinto postulado. Um tempo depois, entre os séculos XVII e XVIII, o jesuíta italiano Giovanni Girolano Saccheri se debruçou em torno dessa questão. Detentor de um grande conhecimento de lógica, o padre Saccheri criou um quadrilátero (conhecido como quadrilátero de Saccheri) o qual possuía dois ângulos retos e dois lados opostos de mesmo comprimento. Sua idéia era provar, a partir dos quatro primeiros axiomas, que os outros dois ângulos do quadrilátero também eram retos. Isso era equivalente a provar o quinto postulado. Todavia, Saccheri só conseguiu mostrar que os outros dois ângulos eram congruentes. Em sua busca, obteve alguns resultados da Geometria Não Euclidiana, os quais, por não compreendê-los, considerou abomináveis. A verdade é que Saccheri não conseguia conceber a existência de outro tipo de Geometria. Esse excelente logicista perdeu a oportunidade de ser coroado como o pai da Geometria Hiperbólica Plana, nome dado à Geometria Não Euclidiana em questão.

> Se Saccheri tivesse suspeitado que não tinha chegado a uma contradição, simplesmente porque não havia contradição para ser encontrada, a

> descoberta da Geometria não euclidiana teria ocorrido quase um século antes. Seu trabalho é admirável e, retirados o final e alguns pequenos defeitos, o resto é uma prova inequívocada de que Saccheri possuiu grande intuição geométrica e profundo conhecimento de lógica. (BARBOSA, 2008, p. 26).

Em meados do século XVIII, o parisiense Adrien-Marie Legendre entrou na discussão. Não conseguiu provar o Axioma das Paralelas, mas destacou-se por demonstrar diversos resultados da Geometria Plana de forma rápida e clara. Com seu estilo simples e direto, renovou as bases da Geometria. Demonstrou com bastante elegância o resultado já conhecido de que a soma das medidas de dois ângulos internos quaisquer de um triângulo é menor que 180º. Também merecem louvores, as tentativas do francês Jean D'Alembert. Este matemático trabalhou em torno de um quadrilátero com três ângulos internos retos. Tentou mostrar que o mesmo ocorreria com o quarto ângulo, mas não obteve êxito.

Provavelmente estava faltando um matemático mais ousado, com pensamentos futuristas, capaz de compreender a complexidade de se tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides. Após duas décadas de tentativas, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss convenceu-se de que o Axioma das Paralelas não era uma proposição. Mais que isso, o príncipe dos matemáticos (como Gauss é atualmente reconhecido), foi o primeiro a perceber claramente a possibilidade de haver uma geometria igualmente lógica e precisa, contudo diferente daquela proposta por Euclides. Entretanto, por medo da Igreja que adotava a Geometria Euclidiana como a única e absoluta, Gauss preferiu se calar. Afinal, a inquisição era o presente recebido pelos desafetos da Igreja na época.

O nascimento de uma nova Geometria

Longe dos ambientes intelectualmente viciados, um jovem húngaro, Janos Bolyai, resolveu substituir o Axioma das Paralelas por uma de suas negações. Ao admitir que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada, Janos descobre a Geometria Hiperbólica Plana. Encantado com sua descoberta, ele comunica a novidade a seu pai, o matemático Farkas Bolyai. Janos diz ao pai que do nada havia descoberto um universo maravilhoso e igualmente estranho. Farkas apresenta os resultados de seu filho a Gauss, o qual recebe a notícia

com certo descrédito afirmando que ele mesmo já havia vislumbrando os mesmos resultados há bastante tempo. Curiosamente, outro matemático, o russo Nikolai Lobachewski, sem manter contato algum com Janos, descobre os mesmos resultados que ele. A Geometria Hiperbólica Plana nasce então com dois pais: o húngaro Janos Bolyai e o russo Nikolai Lobachewski. Este último, ao contrário do primeiro, continuou suas pesquisas nessa área, estudando inclusive as identidades trigonométricas hiperbólicas. Lobachewski tinha plena consciência da revolução que essa nova geometria iria causar, mesmo não recebendo em vida o devido reconhecimento de seus pares.

Assim, em pleno século XIX, o Axioma das Paralelas ainda não havia sido provado. Contudo, em meio a tantas tentativas, surge uma bela e intrigante geometria, apoiada nos quatro primeiros axiomas de Euclides e na negação do último. É a Geometria Hiperbólica Plana. Entre os seus os principais resultados destacam-se a inexistência de triângulos retângulos, a ausência de triângulos semelhantes e o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo o qual é inferior à 180º. Além disso, enquanto na Geometria Euclidiana as retas paralelas são eqüidistantes, o mesmo não se verifica na Geometria Hiperbólica. A verdade é que essa nova geometria exige a quebra de paradigmas e a dissolução dos preconceitos. Ela provoca fascínio e repulsa à medida que percebemos o quanto a nossa formação é euclidiana. Imagine, por exemplo, que nesse ambiente se duas retas são paralelas, elas possuem no máximo dois pares de pontos eqüidistantes. Não há, porém, contradição alguma nesse fato. Sobre a definição precisa de retas paralelas, diz Terdiman (TERDIMAN, 1989, pág. 13): “A definição não diz que as retas são eqüidistantes, isto é, não diz que a distância entre duas retas é sempre a mesma”. O fato é que estudar essa emergente geometria exige uma abertura para o novo. Eis o grande desafio.

As contribuições de Poincaré

Apesar de tudo ainda pairava uma dúvida no ar: o que garante a consistência dos resultados de Bolyai e Lobachewski? E se houver alguma contradição? Na realidade, constatou-se a necessidade de validar essa nova geometria exibindo para ela um modelo assentado numa moldura euclidiana. Deste modo, qualquer

incompatibilidade na Geometria Hiperbólica implicaria na derrocada da Geometria Euclidiana e vice-versa.

A criação de tais modelos pôs um fim na discussão acerca da prova do Axioma das Paralelas, ao mesmo tempo em que legitimou a Geometria de Bolyai-Lobachewski. Dentre esses modelos, destaca-se aquele conhecido como o *Disco de Poincaré*.

Henri Poincaré foi um brilhante matemático francês, apaixonado pelo magistério. Ao contrário de Gauss que se revelou gênio desde cedo, Poincaré aflorou para a produção científica e matemática em fase adulta. Contudo, o que ele e Gauss tinham em comum era a capacidade que ambos tinham de passear por todos os ramos da Matemática. Poincaré escreveu mais do que qualquer outro matemático do século XX. Era mesmo um gênio.

O seu modelo para Geometria Hiperbólica Plana consistia num disco euclidiano sem o bordo. Poincaré definiu reta como a interseção desse disco com qualquer círculo perpendicular a ele ou como qualquer diâmetro aberto. Introduziu nesse ambiente uma métrica, isto é, uma forma de calcular distâncias, e mostrou a validade de todos os axiomas de Geometria Hiperbólica Plana. As retas da geometria hiperbólica diferem-se bastante das euclidianas e devem ser entendidas como curvas que minimizam distâncias a partir de uma métrica conveniente. Além desse modelo, Poincaré elaborou outro, conhecido como semi-plano superior. O modelo do *Semi-plano* é tão legítimo e valioso quanto o do disco. Deve-se adotar aquele mais apropriado a depender do contexto, afinal há um isomorfismo entre tais modelos. Isto é, existe uma aplicação bijetora que preserva distâncias e leva retas de um em retas do outro.

Considerações finais

O legado deixado por Euclides é, definitivamente, uma produção matemática de excelência. As pequenas falhas apresentadas em *Os Elementos* foram contornadas pelo brilhante trabalho desenvolvido pelo matemático contemporâneo David Hilbert que estabeleceu definitivamente o conjunto completo de axiomas para a Geometria euclidiana. Conforme Perdigão (PERDIGÃO, 1987, pág. 27), “Euclides usava em seus argumentos, além dos postulados mencionados, outros fatos que eram

considerados na época como inteiramente óbvios." Daí a necessidade do primoroso trabalho de Hilbert.

A legitimidade da Geometria de Euclides e a consistência da Geometria Hiperbólica Plana são os desdobramentos centrais do Axioma das Paralelas. Nessa história de afirmações e refutações, o quinto postulado mostrou-se como a mola propulsora de uma trama que atravessou milênios desde Euclides até Hilbert. Contando ainda com a magnitude das descobertas de Poincaré, segundo o qual todas as geometrias são igualmente verdadeiras a depender da conveniência.

Referências

ANDRADE, Plácido F. **Introdução à Geometria Hiperbólica Plana:** O disco de Poincaré. Texto impresso. Fortaleza: UFC, 2006. 153 p.

BARBOSA**,** João Lucas M. **Geometria Hiperbólica**. 4ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 167 p.

CARMO, Manfredo P. Geometrias Não-euclidianas. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, IMPA, n. 6, p. 25-48, dezembro 1987.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 1ª Edição. São Paulo: Unicamp, 2002. 844 p. Título original: Introduction to the History of Mathematics.

TERDIMAN, Esther W. **A Geometria Hiperbólica e sua consistência**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 1989. 202 p.