I SEMANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UESB

MINI-CURSO: *HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA*

MINISTRANTE: M.Sc *ALEXSANDRA OLIVEIRA ANDRADE*

HISTÓRIA 1

Beremiz Samir, O Homem que Calculava, conta a história de sua vida.

Chamo-me Beremiz Samer e nasci na pequenina aldeia de Khói, na Pérsia, à sombra da pirâmide imensa formada pelo Ararat. Muito moço ainda, empreguei-me como pastor, a serviço de um rico senhor de Khamat.

Todos os dias, ao nascer do sol, levavam para o campo o grande rebanho e era obrigado a trazê-lo ao abrigo antes de cair a noite. Com receio de perder alguma ovelha tresmalhada e ser, por tal negligência, severamente castigado, contava-as várias vezes durante o dia.

Fui, assim, adquirindo, pouco a pouco, tal habilidade em contar que, por vezes, num relance calculava sem erro o rebanho inteiro. Não contente com isso passei a exercitar-me contando os pássaros quando, em bandos, voavam, pelo céu afora. Tornei-me habilíssimo nessa arte.

Ao fim de alguns meses - graças a novos e constantes exercícios- contando formigas e outros pequeninos insetos, cheguei a praticar a proeza incrível de contar todas as abelhas de um enxame! Essa façanha de calculista, porém, nada viria a valer, diante das muitas outras que mais tarde pratiquei! O meu generoso amo possuía, em dois ou três oásis distantes, grandes plantações de tâmaras e, informado das muitas habilidades matemáticas, encarregou-me de dirigir a venda de seus frutos, por mim contados nos cachos, um a um. Trabalhei, assim, ao pé das tamareiras, cerca de dez anos. Contente com os lucros que obteve, o meu bondoso patrão acaba de conceder-me quatro meses de repouso e vou, agora, a Bagdá, pois tenho desejo de visitar alguns parentes e admirar as belas mesquitas e os suntuosos palácios da cidade famosa. E para não perder tempo, exercito-me durante a viagem, contando às árvores que ensombram esta região, as flores que a perfumem, os pássaros que voam, no céu, entre as nuvens.

-Aquela árvore, por exemplo, tem duzentos e oitenta e quatro ramos. Sabendo-se que cada ramo tem, em média, trezentos e quarenta e sete folhas, é fácil concluir que aquela árvore tem um total de noventa e oito mil quinhentas e quarenta e oito folhas! Estará certo, meu amigo.

-Que maravilha! – exclamei atônito. – É inacreditável possa um homem contar, em rápido volver d'olhos, todos os galhos de uma árvore e as flores de um jardim. Tal habilidade pode proporcionar, a qualquer pessoa, seguro meio de ganhar riquezas invejáveis!

- Como assim? – estranhou Beremiz, - Jamais me passou pela idéia que se pudesse ganhar dinheiro, contando aos milhões folhas de árvores e enxames de abelhas! Quem poderá interessar-se pelo total de ramos de uma árvore ou pelo número do passaredo que cruza o céu durante o dia?

- A vossa admirável habilidade - expliquei - pode ser empregada em vinte mil casos diferentes. Numa grande capital, como Constantinopla, ou mesmo Bagdá, sereis

auxiliar precioso para o governo. Podereis calcular populações, exércitos e rebanhos. Fácil vos será avaliar os recursos do país, o valor das colheitas, os impostos, as mercadorias e todos os recursos do Estado. Asseguro-vos – pelas relações que mantenho, pois sou bagdali – que não vos será difícil obter lugar de destaque junto ao glorioso califa Al-Motacém (nosso amo e senhor). Podeis, talvez, exercer o cargo de vizir-tesoureiro ou desempenhar as funções de secretário da fazenda muçulmana.

- Se assim é, ó jovem – respondeu o calculista – não hesito. Vou contigo para Bagdá.

E sem mais preâmbulos, acomodou-se como pôde em cima do meu camelo (única que possuíamos), e pusemo-nos a caminhar pela larga estrada em direção à gloriosa cidade.

E daí em diante, ligados por este encontro casual em meio da estrada agreste, tornamo-nos companheiros e amigos inseparáveis.

Beremiz era de gênio alegre e comunicativo. Muito moço ainda – era dotado de inteligência extremamente viva e notável aptidão para a ciência dos números.

Formulava, às vezes, sobre os acontecimentos mais banais da vida, comparações inesperadas que denotavam grande agudeza de espírito e raro talento matemático. Sabia também, contar histórias e narrar episódios que muito ilustravam suas palestras, já de si atraentes e curiosas.

Ás vezes punha-se várias horas, em silêncio, num silêncio maníaco, a meditar sobre cálculos prodigiosos. Nessas ocasiões esforçava-me por não o perturbar. Deixava-o sossegado, a fim de que ele pudesse fazer, com os recursos de sua memória privilegiada, descobertas retumbantes nos misteriosos arcanos da Matemática, a ciência que os árabes tanto cultivaram e engrandeceram.

Comentário

Foi notável a contribuição dos árabes para o progresso da matemática. Não só pelas traduções e larga divulgação das obras de Euclides, de Menelau, de Apolônio, etc, como também pelas notáveis renovações metodológicas no cálculo numérico (sistema indo-arábico).

A invenção do zero, por exemplo, é atribuído a um árabe, Mohammed Ibn Ahmad(do Século X), que aconselhava em seu livro Chave da Ciência: "*Sempre que não houver um número para representar as dezenas, ponha um pequeno círculo para guardar o lugar*". Cf. JACQUES C. PISLER, La Civilisation Árabe – Paris, 1955, pág 151.

Os árabes colaboraram prodigiosamente para o progresso da Aritmética, da Álgebra, da Astronomia e inventaram a Trigonometria Plana e a Trigonometria Esférica.

Será muito difícil avaliar o que a nossa civilização deve aos árabes nos amplos domínios do progresso científico.

Os filósofos Frederico Enriques e G. de Santilana, no livro Pequena História do Pensamento Científico (São Paulo, 1940) exaltam sem exagero, mas com judiciosos argumentos, o papel notável que os árabes realizaram para o engrandecimento moral e material da Humanidade.

Aos árabes devemos, acima de tudo o advento da Renascença, no período histórico em que se realizou.

Vejamos o que dizem os sábios Santilana e Enriques:

"*Se os árabes fossem bárbaros destruidores como o foram os mongóis, nossa renascença teria sido, pelo menos, gravemente retardada. Mas os estudantes mulçumanos não hesitam*

ante longas e `custosas pesquisas com o fito de consultar e colecionar os preciosos textos antigos".

E já naquele tempo (1234), construíram os árabes uma Universidade:

"*.. verdadeira cidade dos estudos onde se provia de tudo às necessidades dos estudantes....*"

A primeira grande obra orientada dentro do pensamento democrático (e isso muita gente ignora) foi o Alcorão:

"*Aceitavam o Alcorão, mas queriam que fosse lícito interpretá-lo de forma compatível com um sistema de pensamento lógico. Os pontos sobre os quais se discutia podem parecer atualmente bagatelas, mas sobre eles se escondiam problema filosóficos de vasto alcance, como o de eternidade do mundo, da casualidade, do tempo, da razão suficiente*."

Enquanto entre os cristãos, pontificavam os astrólogos e embusteiros, com suas charlatanices, entre os árabes os astrônomos pesquisavam o céu e procuravam descobrir as leis que regem os infinitos de Allah:

"*Numa época em que do céu só vinham obscuros terrores e presságios, o único ponto do mundo em que o observam com precisa intenção científica era o observatório de Al Batani ou de Nassir Eddin."*

O povo árabe, não reta dúvida, pelo seu amor ao estudo das Ciências, especialmente da Matemática e da Astronomia foi o povo que mais colaborou para o progresso moral e material da Humanidade.

HISTÓRIA II

Onde é narrada a singular aventura dos 35 camelos que deveriam ser repartidos por três árabes

Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz , com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontramos, perto de um antigo caravançará meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:

- Não pode ser!

- Isto é um roubo!

- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informa-se do que se tratava.

- Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?

- É muito simples – atalhou o Homem que calculava. – Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!

Neste ponto, procurei intervir na questão:

- Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem se ficássemos sem o camelo?

- Não se preocupes com o resultado, ó Bagdá!! – replicou-me em voz baixa Beremiz. – Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal, que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

- Vou, meus amigos- disse ele, dirigindo-se aos três irmãos – fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como vêem, em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

- Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saístes lucrando com esta divisão!

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu, Hamed Namir, deverás receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao moço:

- E tu, jovem, Hamir Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35. Isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro é igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

E concluiu com a maior segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir – partilha em que todos os três saíram lucrando – couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá o resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto dois. Um pertence ao amigo e companheiro, outro toca a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

- Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos três irmãos – Acertamos nossa partilha na certeza de que foi feita justiça e equidade!

E o astucioso Beremiz – o Homem que Calculava – tomou logo posse de um dos mais belos “jamales” do grupo e disse-me entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

- Poderás agora, meu amigo, continuara viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro especialmente para mim!

E continuamos nossa jornada para Bagdá.

Comentário:

Para o problema dos 35 camelos podemos apresentar uma explicação muito simples.

O total de 35 camelos, de acordo com o enunciado da história, deve ser repartido, pelos três herdeiros, do seguinte modo:

O mais velho deveria receber a metade da herança, isto é, 11 camelos e meio:

O segundo deveria receber um terço da herança, isto é, 11 camelos e dois terços;

O terceiro, o mais moço, deveria receber um nono da herança, isto é, 3 camelos e oito nonos.

Feita a partilha, de acordo com as determinações do testador, haveria uma sobra.

$$17\frac{1}{2}+11\frac{2}{3}+3\frac{8}{9}=33\frac{1}{18}$$

Observe que a soma das três partes não é igual a 35, mas sim a $33\frac{1}{18}$.

Há, portanto, uma sobra.

Essa sobra seria de um camelo e $\frac{17}{18}$ de camelo.

A fração $\frac{17}{18}$ exprime a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ frações que representam as pequenas sobra.

Aumentando-se de $\frac{1}{2}$ a parte do primeiro herdeiro, esta passaria a receber a conta certa de 18 camelos; aumentando-se de $\frac{1}{3}$ a parte do segundo herdeiro, este passaria a receber um número exato de 12; aumentando-se de $\frac{1}{9}$ a parte do terceiro herdeiro, este receberia quatro camelos (número exato). Observe, porém, que, consumidas com este aumento as três pequenas sobras, ainda há um camelo fora da partilha.

Como fazer o aumento das partes de cada herdeiro?

Esse aumento foi feito, admitindo-se que o total não era de 35, mas de 36 camelos (com o acréscimo de 1 ao dividendo).

Mas, sendo o dividendo 36, a sobra passaria a ser de dois camelos.

Tudo resultou, em resumo, do fato seguinte:

Houve um erro do testador:

A metade de um todo, mais a terça parte desse todo, mais um nono desse todo, não é igual ao todo. Veja bem:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{8}{9}=\frac{17}{18}$$

Para completar o todo, falta, ainda, $\frac{1}{18}$ desse todo. O todo, no caso, é a herança dos 35 camelos. $\frac{1}{8}$ de 35 é igual a $\frac{35}{18}$.A fração $\frac{35}{18}$ é igual a $1\frac{17}{18}$.

Conclusão: feita a partilha, de acordo com o testador, ainda haveria um sobra de $1\frac{17}{18}$.

Beremiz, com o artifício empregado, distribuiu os $\frac{17}{18}$ pelos três herdeiros (aumentando a parte de cada um) e ficou com a parte inteira da fração excedente.

Em alguns autores encontramos um problema curioso, de origem folclórica, no qual o total de camelos pode ser lido em centenas de livros de Recreações Matemáticas,

Para o total de 17 camelos a divisão é feita por meio de um artifício idêntico (o acréscimo de um camelo à herança do cheique), mas a sobra é só do camelo que foi acrescentado. No caso do total de 35, como ocorreu no episódio com Beremiz, o desfecho é mais interessante, pois a calculista obtém um pequeno lucro com a sua habilidade.

Se o total fosse de 53 camelos, a divisão da herança, feita do mesmo modo, aplicando o artifício, daria uma sobra de 3 camelos.

Eis os números que poderiam servir: 17, 35, 53, 71, etc..

HISTÓRIA III

Nossa Visita ao Suque dos Mercadores. Beremiz e o Turbante Azul

Alguns dias depois, encerrados os trabalhos que fazíamos no palácio do vizir, fomos dar um giro pelo suque e pelos jardins de Bagdá.

A cidade apresentava, naquela tarde, um movimento intenso, febril, fora do comum. É que, pela manhã, haviam chegado duas ricas caravanas de Damasco.

No bazar dos sapateiros, por exemplo, mal se podia entrar; havia sacos e caixas, com mercadorias, amontoados nos pátios das estalagens. Forasteiros damascenos, com imensos turbantes coloridos, ostentando nas cinturas suas armas, caminhavam descuidados, olhando com indiferença para os mercadores. Sentia-se um cheiro forte de incenso de quife e de especiarias. Vendedores de favas discutiam, quase se agrediam, proferindo pragas tremendas em sírio.

Um jovem guitarrista mossulense, sentado sobre grandes sacos de melancia, cantava uma toada monótona e triste:

Que importa a vida da gente,
Se a gente, por mal ou bem
Vai vivendo simplesmente
A vida que a gente tem ?

Vendedores, nas portas de suas fendas, apregoavam suas mercadorias, exaltando-as com elogios exagerados e fantasiosos, no que é fértil a imaginação dos árabes.

- Este rico tecido é digno do nosso emir!

- Amigos! Eis um delicioso perfume que lembra os carinhos de vossa esposa!

- Repara! Ó Cheique, nestas chinelas e neste lindo cafetã que os djins recomendam aos anjos!

Interessou-se Beremiz por um elegante e harmonioso turbante azul claro que um sírio, meio corcunda, oferecia por 4 dinares. A tenda desse mercador era, aliás, muito original, pois tudo ali (turbantes, caixas, punhais,pulseiras, etc.) era vendido por 4 dinares. Havia um letreiro, em letras vistosas, que dizia:

OS QUATRO QUATROS

Ao ver Beremiz interessado em adquirir o turbante azul, objetei:

- Julgo loucura comprar esse luxo. Estamos com pouco dinheiro e ainda não pagamos a hospedaria.

- Não é o turbante que me interessa – retorquiu Beremiz. – Reparem que a tenda desse mercador é intitulada “Os quatro quatros”. Há nisso tudo espantosa coincidência digna de atenção.

- Coincidência? Por quê?

- Ora, bagdali – retornou Beremiz – a legenda que figura nesse quadro recomenda uma das maravilhas do Cálculo: podemos formar um número qualquer empregando quatro quatros!

E antes que eu o interrogasse sobre aquele enigma, Beremiz explicou, riscando na areia fina que cobria o chão:

-Quer formar o zero? Nada mais simples. Basta escrever: 44-44

Estão aí os quatro quatros formando uma expressão que é igual a zero.

Passemos ao número 1. Eis a forma mais cômoda: $\frac{44}{44}$

Representa essa fração, o quociente de divisão de 44 por 44. É esse quociente é 1.

Quer ver, agora, o número 2? Podem-se aproveitar, facilmente, os quatro quatros e escrever: $\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$.

A soma das duas frações é, exatamente igual a 2 . O três é mais fácil. Basta escrever a expressão: $\frac{4+4+4}{4}$.

Repare que a soma 12, dividida por quatro dá um quociente 3. Eis, portanto, o 3 formado por quatro quatros.

- E como vai formar o próximo número 4? – perguntei.

- Nada mais simples – explicou Beremiz – o 4 pode ser formado de várias maneiras diferentes. Eis uma expressão equivalente a 4: $4+\frac{4-4}{4}$

Observe que a segunda parcela $\frac{4-4}{4}$ é nula, e que a soma fica igual a quatro. A expressão escrita equivale a 4+0 ou 4.

Notei que o mercador sírio acompanhava atento, sem perder palavra, a explicação de Beremiz, como se muito lhe interessassem aquelas expressões aritméticas formadas por quatro quatros.

Beremiz prosseguiu:

- Quero formar, por exemplo, o número 5. Não há dificuldade. Escreveremos: $\frac{4x4+4}{4}$

Exprime esse arranjo numérico a divisão de 20 por 4. E o quociente é 5. Temos desse modo, o 5 escrito com quatro quatros.

A seguir passemos ao 6, que apresenta uma forma muito elegante: $\frac{4+4}{4}+4$

Uma pequena alteração nesse interessante conjunto conduz ao resultado 7. $\frac{4+4}{4}-4$

É muito simples a forma que pode ser adotada para o número 8, escrito com quatro quatros: 4+4+4-4

O número 9 não deixa de ser também interessante: $4+4+\frac{4}{4}$.

Eis agora uma expressão, muito elegante, igual a 10, formada com quatro quatros: $\frac{44-4}{4}$

Nesse momento o corcunda, dono da tenda, que estivera a acompanhar a explicação do calculista em atitude de respeitoso silêncio e interesse, observou:

- Pelo que acabou de ouvir, o senhor é exímio nas contas e nos cálculos. Dar-lhe-ei de presente o belo turbante azul se souber explicar certo mistério encontrado numa soma, que há dois anos me tortura o espírito.

E o mercador narrou o seguinte:

- Emprestei, certa vez, a quantia de 100 dinares, sendo 50 a um cheique de Medina e outros 50 deu a um judeu do Cairo.

O medinense pagou a divida em quatro parcelas, do seguinte modo: 20, 15,10 e 5. Assim: Pagou 20 ficou devendo 30
Pagou 15 ficou devendo 15
Pagou 10 ficou devendo 5
Pagou 5 ficou devendo 0
Soma 0 Soma 50

Repare, meu amigo, que tanto a soma das quantias pagas, como a dos saldos devedores é igual a 50.

O judeu cairota pagou, igualmente, os 50 dinares em quatro prestações, do seguinte modo: Pagou 20 ficou devendo 30
Pagou 18 ficou devendo 12
Pagou 3 ficou devendo 9
Pagou 9 ficou devendo 0
Soma 50 Soma 51

Convém observar , agora que a primeira soma é 50 (como no caso anterior), ao passo que a outra dá um total de 51.

Não sei explicar essa diferença de 1 que observa na segunda forma de pagamento. Bem sei que não fui prejudicado (pois recebi o total da dívida), mas como justificar o fato de ser a segunda soma igual a 51 e não a 50?

- Meu amigo- esclareceu Beremiz- isto se explica com poucas palavras. Nas contas de pagamento, os saldos devedores não têm relação alguma com o total da dívida. Admitamos que uma dívida de 50 fosse paga em três prestações: a 1ª de 10, a segunda de 5 e a terceira de 35, eis a conta, com os saldos:

Pagou 10 ficou devendo 40
Pagou 5 ficou devendo 35
Pagou 35 ficou devendo 0
Soma 50 Soma 75

Neste exemplo, a primeira soa é ainda 50, ao passo que a soma dos saldos é, como se vê, 75; podia ser 80,90,100, 260,800 ou um número qualquer. Só por acaso dará exatamente 50 (como no caso do cheique) ou 51 (como no caso do Judeu)

O mercador alegrou-se por ter entendido a explicação dada por Beremiz e cumpriu a promessa feita, oferecendo ao calculista o turbante azul que valia quatro dinares.

HISTÓRIA IV

Ouvimos Beremiz discorrer sobre as formas geométricas.

Mostrou-se Beremiz satisfeitíssimo ao receber o belo presente do mercador sírio.

- Está muito bem arranjado-disse, revidando o turbante e examinando-o de um lado e de outro, cuidadosamente. – Tem, entretanto, ao meu ver, pequeno defeito que poderia ser evitado. A sua forma não é rigorosamente geométrica!

Fite-o sem saber disfarçar a surpresa que sua palavra me levavam ao espírito.

Aquele homem, além de ser original calculista, tinha a mania de transformar as coisas mais vulgares de modo a dar forma geométrica até aos turbantes dos mulçumanos.

- Não se admire, meu amigo – prosseguiu o inteligente persa – de que eu queria ver turbantes com formas geométricas. A Geometria existe por toda parte. Procure observar as

formas regulares e perfeitas que muitos corpos apresentam. As flores, as folhas e incontáveis animais revelam simetrias admiráveis que nos deslumbrem o espírito.

A Geometria, repito, existe por toda parte. No disco do sol, na folha da tamareira, no arco-íris, na borboleta, no diamante, na estrela-do-mar e até num pequenino grão de areia. Há, enfim, infinita variedade de formas geométricas espalhadas pela Natureza. Um corvo a voar lentamente pelo céu descreve, com admiráveis; o sangue que circula nas veias do camelo não foge aos rigorosos princípios geométricos: a pedra que se atira no chacal importuno desenha, no ar, uma curva perfeita. A abelha constrói seus alvéolos com a forma de prismas hexagonais e adota essa forma geométrica, segundo penso, para obter a sua casa com maior economia possível de material.

A Geometria existe como já disse o filosofo, por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.

O beduíno rude vê as formas geométricas, mas não as entende; o sunita entende-as mas não as admira; o artista, enfim, enxerga a perfeição das figuras, compreende o belo e admira a Ordem e a Harmonia! Deus foi o grande geômetra. Geometrizou a Terra e o Céu.

Existe, na Pérsia, uma planta muito apreciada como alimento, pelos camelos e ovelhas e cuja semente....

E sempre discorrendo, com entusiasmo, sobre as múltiplas belezas da Geometria, foi Beremiz caminhando pela extensa e poeirenta estrada que vai do suque dos mercadores até a Ponte da Vitória. Eu o acompanhava, em silêncio, ouvindo embevecidos os seus curiosos ensinamentos.

Depois de cruzarmos a Praça Muazém, também chamada Refúgio dos Cameleiros, avistamos a velha Hospedaria das Sete Penas, muito procurada, nos dias quentes, pelos viajantes e beduínos vindo de Damasco e de Mossul.

A parte mais pitoresca dessa Hospedaria das Sete Penas era o seu pátio interno com boa sombra para os dias de verão e cujas paredes se apresentam totalmente cobertas de plantas coloridas, trazidas das montanhas do Líbano. Sentia-se, ali, um ar de tranqüilidade e repouso.

Em velha tabuleta de madeira (junto à qual os caravaneiros amarravam seus camelos) podíamos ler, em letras bem talhadas, o título:

Sete Penas

- Sete Penas! – murmurou Beremiz, observando a tabuleta. – É curioso! Conheces, por acaso, ó bagdali, o dono dessa hospedaria?

- Conheço-o muito bem – respondi – um velho cordeiro de Trípoli, cujo pai serviu nas forças do sultão Queruã. É apelidado o Tripolitano. É bastante estimado por ser de natureza tão simples e comunicativa. É homem honrado e prestativo. Dizem que foi ao Sudão numa caravana de aventureiros sírios, e trouxe, das terras africanas, cinco escravos negros que lhe servem com incrível fanatismo. Ao regressar do Sudão, deixou o seu ofício de cordeiro e montou esta hospedaria, sempre auxiliado pelos cinco escravos.

- Com escravos, ou sem escravos- retorquiu Beremiz – esse homem, o Tripolitano, deve ser bastante original. Ligou o nome de sua hospedaria ao número sete foi sempre, para todos os povos, mulçumanos, cristãos, judeus, idólatras ou pagãos, um número sagrado, por ser a soma do número três (que é divino) com o número quatro (que simboliza o mundo material). E dessa relação resultam muitas coleções notáveis que totalizam sete:

Sete as Portas do Inferno;
Sete os Dias da Semana

Sete os Sábios da Grécia;
Sete os Céus que Cobrem o Mundo;
Sete os Planetas;
Sete as Maravilhas do Mundo.

Ia o eloqüente calculista prosseguiu em suas estranhas observações sobre o Número Sagrado, quando avistamos,à porta da hospedaria, nosso dedicado amigo o cheique Salém Nasair, que acenava, repetidas vezes, chamando por nós.

- Sinto-me feliz por tê-lo encontrado agora, ó Calculista! – disse risonho o cheique quando dele nos aproximamos. – Sua chegada, não só para mim, como para três amigos que se acham nesta hospedaria, foi altamente providencial.

E acrescentou, com simpatia e visível interesse:

- Venham! Venham comigo, que o caso é muito sério.

Levou-nos a seguir, para o interior da hospedaria. Conduziram-nos por um corredor meio escuro, úmido, até o pátio interno, acolhedor e claro. Havia ali cinco ou seis mesas redondas. Junto a uma dessas mesas achavam-se três viajantes que me pareceram estranhos.

Os homens, quando o cheique e o calculista deles se aproximaram, levantaram-se fiz\eram o salã. Um deles parecia muito moço era alto, magro, tinha os olhos claros e ostentava belíssimo turbante amarelo cor de ovo com uma barra branca, onde cintilava uma esmeralda de rara beleza; os dois outros eram baixos, ombros largos e tinham a pele escura como beduínos da África.

Disse o cheique, apontando para os três mulçumanos:

- Aqui estão ó Calculista, os três amigos. São criadores de carneiros, em Damasceno. Enfrentam agora um dos problemas mais curiosos que tenha visto. E esse problema é o seguinte:

- Como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdá, uma partida de vinho, muito fino, composta de 21 vasos iguais, sendo:

7 cheios
7 meio-cheios e
7 vazios

Querem, agora, dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho.

Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade, a meu ver, esta em repartir o vinho sem abrir os vãos, isto é, conservando-os exatamente como estão. Será possível, ó calculista, obter uma solução para este problema?

Beremiz, depois de meditar, em silêncio, durante dois ou três minutos, respondeu:

- a divisão dos 21 vasos, que acabais de apresentar, ó Cheique, poderá ser feita sem grandes cálculos. Vou indicar a solução que me parece mais simples.

Ao primeiro sócio caberão:
3 vasos cheios
1 meio-cheio
3 vazios
Receberá, desse modo, um total de 7 vasos.

Ao segundo sócio caberão:
2 vasos cheios
3 meio-cheios
2 vazios

Esse receberá, também, 7 vasos.

A cota que tocará ao terceiro sócio será igual à do segundo, isto é:
2 vasos cheios
3 meio-cheios
2 vazios
Segundo a partilha que acabo de indicar, cada sócio receberá 7 vasos e a mesma porção de vinho.

Com efeito. Chamemos 2 (dois) a porção de vinho de um vaso cheio, e 1 a porção de vinho do vaso meio-vazio.

O primeiro sócio, de acordo com a partilha, receberá: 2+2+2+1 e essa soma é , também, igual a 7 unidades de vinho. E isso vem provar que a divisão, por mim sugerida, é certa e justa. O problema que na aparência, é complicado, não oferece a menor dificuldade quando resolvido numericamente.

A solução apresentada por Beremiz foi recebida com muito agrado, não só pelo cheique, como também pelos seus amigos damascenos.

- Por Allah! – exclamou o jovem da esmeralda. – Esse calculista é prodigioso! Resolveu de improviso um problema que nos parecia dificílimo.

E, voltando para o dono da hospedaria, perguntou em tom de muita camaradagem:

- Quantos gastamos aqui nesta mesa, ó Tripolitano?

Respondeu o interpolado:

- A despesa total, com a refeição, foi de trinta dinares!

O cheique Nasair declarou que queria pagar sozinho. Os damascenos não concordaram. Estabeleceu-se pequena discussão, troca de gentilezas, durante a qual todos falavam e protestavam ao mesmo tempo. Afinal ficou resolvido que o cheique Nasair, tendo sido convidado para a reunião, não deveria contribuir para a despesa. E cada um dos damascenos pagou dez dinares. A quantia total de 30 dinares foi entregue a um escravo sudanês e levada ao Tripolitano.

Momentos depois o escravo voltou para a mesa com um recado do Tripolitano.

- O patrão enganou-se. A despesa foi, apenas, de 25 dinares. Ele mandou, pois devolver estes cinco dinares!

- Esse Tripolitano – observou o cheique Nasair – tem a preocupação de ser honesto. E muito honesto.

E tomando as cinco moedas que haviam sido devolvidas, deu uma a cada dos damascenos e, assim, das cinco moedas, sobravam duas. Depois de consultar, com um olhar, os damascenos, o cheique deu, de presente, as duas moedas restantes ao escravo sudanês que os havia servido.

Nesse momento, o jovem da esmeralda levantou-se e, dirigindo-se muito sério aos amigos, assim falou:

- Com esse caso do pagamento dos trinta dinares de despesas, ao Tripolitano, surgiu uma trapalhada muito grande.

- Trapalhada? – estranhou o cheique. – Não percebo complicação alguma!

- Sim – confirmou o damasceno. – Uma trapalhada muito séria, ou um problema que parece absurdo. Desapareceu um dinar! Vejam bem. Cada um de nós pagou 10 dinares e recebeu um dinar de volta. Logo, cada um de nós pagou, na verdade, 9 dinares. Somos três. É claro que o total pago foi de 27 dinares; somando-se esses 27 dinares com os dois dinares dados, pelo cheique, ao escravo sudanês, obtemos 29 dinares. Dos 30 que foram entregues

ao Tripolitano, só 29 aparecem. Onde se encontra o outro dinar? Como desapareceu? Que mistério é esse?

O cheique Nasair, ao ouvir aquela observação, refletiu:

- É verdade, damasceno? A meu ver o teu raciocínio está certo. Estás com a razão. Se cada um dos amigos pagou 9 dinares, houve, é claro, um total de 27 dinares: com os 2 dinares dado ao escravo, resulta um total de 29 dinares. Para 30 (total do pagamento inicial), falta 1. Como explicar esse mistério?

Nesse momento Beremiz, que se mantinha calado, procurou intervir nos debates; e disse dirigindo-se ao cheique:

- Há um engano no vosso cálculo, ó Cheique! A conta não deve ser feita desse modo. Dos trinta dinares pagos ao Tripolitano pela refeição, temos:

25 ficaram com o Tripolitano
3 foram devolvidos
2 dados ao escravo sudanês

Não desapareceu coisa alguma e não pode existir em conta tão simples a menor atrapalhação. Em outras palavras: dos 27 dinares pagos (9 vezes 3), 25 ficaram com o Tripolitano e 2 foram dados, de gratificação, ao sudanês!

Os damascenos, ao ouvirem a explicação de Beremiz, expandiram-se em estrepitosas gargalhadas.

- Pelos méritos do Profeta! – exclamou o que parecia mais velho. – Esse calculista acabou com o mistério do dinar desaparecido e salvou o prestígio desta velha hospedaria! lallah!

HISTÓRIA V

A Visita de Beremiz ao Cheique Iezid, o Poeta. A Mulher e a Matemática

No último dia do Moharrã, ao cair da noite, fomos procurados na hospedaria pelo prestigioso lezid-Abul-Hamid, amigo e confidente do califa.

- Algum novo problema a resolver, ó Cheique? – perguntou sorridente Beremiz.

- Adivinhou! – respondeu o nosso visitante. – Vejo-me forçado a resolver sério problema. Tenho uma filha chamada Telassim, dotada de viva inteligência e com acentuada inclinação para estudos. Quando Telassim nasceu, consultei um astrólogo famoso que sabia desvendar o futuro pela observação das nuvens e das estrelas. Esse mago afirmou que minha filha viveria perfeitamente feliz até os 18 anos; a partir dessa idade seria ameaçada por um cortejo de lamentáveis desgraças. Havia, entretanto, meio de evitar que a infelicidade viesse esmagar-lhe tão profundamente o destino. Telassim - acrescentou o mago- deveria aprender as propriedades dos números e as múltiplas operações que com números efetuam. Ora, para dominar os números e fazer cálculos é preciso conhecer a ciência de Al-Kharismi, isto é, a Matemática. Resolvi, pois assegurar para Telassim um futuro feliz, fazendo com que ela estudasse os mistérios do Cálculo e da Geometria.

Fez o generoso cheique ligeira pausa e logo prosseguiu:

- Procurei vários ulemás da corte mas não logrei encontrar um só que se sentisse capaz de ensinar Geometria a uma jovem de 17 anos. Um deles, dotado aliás, de grande talento, tentou mesmo dissuadir-me de tal propósito. Quem quisesse ensinar canto a uma girafa, cujas cordas vocais não podem produzir o menor ruído, perderia o tempo e teria trabalho

inútil. A girafa, por sua própria natureza, não poderia cantar. Assim, o cérebro feminino, explicou esse daroês, é incompatível com as noções mais simples do Cálculo e da Geometria. Baseia-se essa incomparável ciência no raciocínio, no emprego de formulas e na aplicação de princípios demonstráveis com os poderosos recursos da Lógica e das Proporções. Como poderia uma menina, fechada no harém de seu pai, aprender fórmulas de Álgebra e teoremas da Geometria? Nunca! É mais fácil uma baleia ir a Meca, em peregrinação, do que uma mulher aprender Matemática. Para que lutar contra o impossível? Maktub! Se a desgraça deve cair sobre nós, faça-se a vontade de Allah!

O cheique, muito sério, levantou-se da poltrona em que se achava sentado, caminhou cinco ou seis passos para um lado e para o outro, e prosseguiu, com acentuada melancolia:

- O desânimo, o grande corruptor, apoderou-se de meu espírito ao ouvir essas palavras. Indo, porém, certa vez visitar o meu bom amigo Salém Nasair, o mercador, ouvi elogiosa referências ao novo calculista persa que aparecera em Bagdá. Falaram-me do episódio dos oitos pães. O caso, narrado com todas as minúcias, impressionou-me. Procurei conhecer o calculista dos oito pães e fui especialmente para esse fim à casa do vizir Maluf. Fiquei pasmado com a original solução dada ao problema dos 257 camelos, reduzidos, afinal, a 256. Lembras-te?

E o cheique lezid,, erguendo o rosto e fitando, solene, o calculista, acrescentou:

- Serás capaz, ó irmão dos Árabes, de ensinar os artifícios do Cálculo à minha filha Telassim? Pagarei, pelas lições, o preço que exigires! Poderás como tens feito até agora continuar a exercer o cargo de secretário do vizir Maluf.

- Cheique generoso! – retorqui prontamente Beremiz. – Não vejo motivo para deixar de atender vosso honroso convite. Em poucos meses poderei ensinar vossa filha todas as operações algébricas e os segredos da Geometria. Erram duplamente os filósofos quando julgam medir com unidades negativas a capacidade intelectual da mulher. A inteligência feminina, quando bem orientada, pode acolher, com incomparável perfeição, as belezas e os segredos da ciência! Fácil tarefa seria desmentir os conceitos injustos formados pelos daroês. Citam os historiadores vários exemplos de mulheres que se notabilizaram por sua cultura matemática. Em Alexandria, por exemplo, viveu Hipátia, que secionou a ciência do Cálculo a centenas de pessoas, comentou as obras de Diofante, analisou os dificílimos trabalhos de Apolônio e retificou todas as tabelas astronômicas então usadas. Não há motivos para temores e incertezas, ó Cheique! Vossa filha facilmente aprenderá a ciência de Pitágoras. Inch'Allah! Desejo apenas que determines o dia e a hora em que devereis iniciar as lições.

Respondeu-lhe o nobre lezid:

- O mais depressa possível! Telassim, já completou 17 anos, e estou ansioso por livrá-la das tristes previsões do astrólogo.

E ajuntou:

- Devo desde já, advertir-te de uma particularidade que não deixa de ter importância no caso. Minha filha vive encerrada no harém e jamais foi vista por homem algum estranho à nossa família. Só poderá, portanto, ouvir tuas aulas de matemática oculta por um espesso reposteiro com o rosto coberto por um haic e vigiada por duas escravas de confiança. Aceitas, ainda assim, minha proposta?

- Aceito-a com viva satisfação – respondeu Beremiz. – É evidente que o recato e o pudor de uma jovem valem mais que os cálculos e as fórmulas algébricas. Platão, filósofo, mandou colocar à porta de sua escola a seguinte legenda: "Não entre, se não é geômetra". Apresentou-se um dia um jovem de costumes libertinos e mostrou desejo de freqüentar a

Academia. O Mestre, porém, não o admitiu dizendo: “A Geometria é toda pureza e simplicidade. O teu despudor ofende tão pura ciência”. O célebre discípulo de Sócrates procurava desse modo, demonstrar que a Matemática não se harmonizava com a depravação e com as torpes indignidades dos espíritos imorais. Serão, pois, encantadoras as lições dadas a essa jovem que não conheço e cujo rosto jamais terá a ventura de admirar. Se Allah quiser, poderei iniciar amanhã as aulas.

- Perfeitamente – concordou o cheique. – Um dos meus servos virá buscar-te amanhã (querendo Allah!) pouco depois da segunda prece. Uassalã!

Logo que o cheique lezid deixou a hospedaria interpelei o calculista:

- Escuta Beremiz. Há nisso tudo um ponto obscuro para mim. Como poderás, afinal, ensinar Matemática a uma jovem quando na verdade, nunca estudasse essa ciência nos livros, nem freqüentasse as lições dos ulemás? O cálculo que aplicas, com tanto brilho e oportunidade, como foi aprendido? Bem sei ó Calculista, entre pastores pêras contando ovelhas, tâmaras e bando de aves em vôo pelo céu.

- Estas enganado bagdali – reconsiderou, com serenidade , o calculista. – Ao tempo em que eu vigiava os rebanhos do meu amo, na Pérsia, conheci um velho dervixe chamado Nô-Elin. Certa vez, durante violenta tempestade de areia, salvei-o da morte. Desse dia em diante o bondoso ancião tornou-se meu amigo. Era um grande sábio e ensinou-me coisas úteis e maravilhosas.

Depois das lições que recebi desse mestre, sinto-me capaz de ensinar Geometria até o último livro do inesquecível Euclides, o alexandrino.

CURIOSIDADES

1. Como surgiu o zero?

Para responder essa questão é necessário saber que os hindus foram os criadores do sistema de numeração posicional e que muitos cálculos efetuados por eles eram realizados com a ajuda de um ábaco, instrumento que para a época poderia ser considerado uma verdadeira máquina de calcular.

O ábaco usado inicialmente pelos hindus, consistia em meros sulcos feitos na areia, onde se colocavam pedras. Cada sulco representava uma ordem. Assim, da direita para a esquerda, o primeiro sulco representava as unidades; o segundo as dezenas e o terceiro as centenas. No exemplo acima temos a representação do número 203, ou seja, 2 centenas mais três unidades.

O Sulco vazio do ábaco indica que não existe nenhuma dezena. Mas na hora de escrever o número faltava um símbolo que indicasse a inexistência de dezenas.

E, foi exatamente isso que fizeram os hindus, eles criaram o tão desejado símbolo para representar o sulco vazio e o chamaram de *Sunya* (vazio). Dessa forma, para escrever o número representado no ábaco de areia, escreviam o 2 para as centenas, o 3 para as unidades e entre eles faziam o desenho do sulco vazio, para indicar que não havia no número nenhuma dezena.

Ao introduzir o desenho do sulco vazio entre os dois outros símbolos os hindus criaram o zero que, desde aquela época já se parecia com o que usamos hoje.

2. Origem do Número Negativo

Os matemáticos chineses da antiguidade tratavam os números como excessos ou faltas. Os chineses realizavam cálculos em tabuleiros, onde representavam os excessos com palitos vermelhos e as faltas com palitos pretos. Na Índia, os matemáticos também trabalhavam com esses estranhos números. Brahmagupta, matemático nascido no ano 598 d.C., afirmava que os números podem ser entendidos como pertences ou dívidas. Mas, sem símbolos próprios para que se pudessem realizar as operações, os números absurdos, como eram chamadas, não conseguiam se firmar como verdadeiros números... Depois de várias tentativas frustradas, os matemáticos conseguiram encontrar um símbolo que permitisse operar com esse novo número. Mas como a história da matemática é cheia de surpresas, não poderia de faltar mais uma: Ao observar a prática adotada pelos comerciantes da época, os matemáticos verificaram que se no início do dia, um comerciante tinha em seu armazém duas sacas de feijão de 40 quilogramas cada, se ao findar o dia ele tivesse vendido 7 quilogramas de feijão, para não se esquecer de que naquele saco faltavam 7 quilogramas, ele escrevia o número 7 com um tracinho na frente (-7). Mas se ele resolvesse despejar no outro saco os 3 quilogramas que restavam, escrevia o número 3 com dois tracinhos cruzados na frente (+3), para se lembrar que naquele saco havia 3 quilogramas a mais de feijão do que a quantidade inicial. Os matemáticos aproveitaram-se desse expediente e criaram o número com sinal: Positivo (+) ou Negativo (-).

3. Origem dos Números Fracionários

Todos os anos, no mês de julho, as águas do Rio Nilo inundavam uma vasta região ao longo de suas margens. As águas do Rio Nilo fertilizavam os campos, beneficiando a agricultura do Egito. Cada pedaço de terra às margens desse rio era precioso e tinha que ser muito bem cuidado.

Por volta do ano 3000 a.C. o Faraó *Sesóstris* repartiu essas terras entre uns poucos agricultores privilegiados.

Só que todos os anos em setembro quando as águas baixavam, funcionários do governo faziam a marcação do terreno de cada agricultor. Esses funcionários eram chamados de agrimensores ou estiradores de corda. Isso se explica pelo fato de que usavam cordas com uma unidade de medida assinalada, essa corda era esticada para que se verificassem quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Mas na maioria das vezes acontecia da unidade de medida escolhida não caber um número inteiro de vezes nos lados do terreno.

Para solucionar o problema da medição das terras, os egípcios criaram um novo número, o número fracionário, que era representado com o uso de frações.

Os egípcios entendiam a fração somente como uma unidade, portanto, utilizavam apenas frações unitárias (com numerador igual a 1).

A escrita dessas frações era feita colocando um sinal oval sobre o denominador. No Sistema de Numeração usado pelos egípcios os símbolos se repetiam com muita freqüência, tornando os cálculos com números fracionários muito complicados. Com a criação do Sistema de Numeração Decimal, pelos hindus, o trabalho com as frações tornou-se mais simples, e a sua representação passou a ser expressa pela razão de dois números naturais.

A criação dos números fracionários resulta da consideração de objetos que se podem subdividir, ou de certas grandezas contínuas, como a distância e a duração.

Os egípcios praticavam com habilidade o cálculo das frações, como nos mostra o famoso manual redigido pelo sacerdote Ahmes em uma época em que os historiadores

situam entre os anos – 2000 e 1600 – e, que faz parte da coleção Rhind, no British Museum de Londres.

Encontra-se nesse papiro, anterior a Tales de pelo menos dez séculos, uma tábua para decomposição de certas frações em somas de frações cujos numeradores são iguais à unidade. Com o seu auxílio, Ahmes resolve problemas bem complicados; aquele, por exemplo, que em linguagem moderna enunciaríamos nos seguintes termos: "Dividir 100 partes entre 5 pessoas, em partes crescendo por diferenças iguais, e de modo a que a soma das duas partes menores seja igual ao sétimo da soma das outras três".

O que caracteriza esse tratado é a ausência completa de considerações teóricas, desenvolvendo-se as operações sem justificação alguma. Se o livro de Ahmes reproduz, como tudo faz crer, o ensino dos matemáticos egípcios, a Aritmética desses não passava de uma coleção de receitas extremamente engenhosas.

Como se vê, o uso das frações vem de remota Antiguidade. Sua teoria, porém, é muito mais recente, e só nos tempos modernos foram elas tidas por verdadeiros números. A este respeito, Diofante é um precursor, cerca do ano 300 da nossa era. Os geômetras clássicos – entre eles Euclides, na sua teoria das proporções – consideravam as frações como nomes de relações entre números.

Desenvolvido mais tarde, na Índia, por volta do século IV, o cálculo das frações, foi levada ao Ocidente pelos árabes.

Só mil anos depois, entretanto, é que aparece na Aritmética de Steven (1585), uma exposição completa do cálculo dos *numeri rupti*, extensão das operações fundamentais já praticadas sobre os inteiros.

A contribuição contemporânea à teoria das frações está sobretudo na sua elaboração lógica e formal, dissipando as últimas dúvidas que a interpretação dos números fracionários constituem finalmente as duas subclasses em que se repartem os números racionais.

4. Origem do Sinal de Adição

O emprego regular do sinal + (mais) aparece na Aritmética Comercial de João Widman d'Éger publicada em Leipzig em 1489.

Os antigos matemáticos gregos, como se observa na obra de Diofante, limitavam-se a indicar a adição justapondo as parcelas – sistema que ainda hoje adota quando queremos indicar a soma de um número inteiro como uma fração. Como sinais de operação mais usavam os algebristas italianos a letra P, inicial da palavra latina *plus*.

5. Origem do Sinal de Subtração

É interessante observar as diferentes formas por que passou o sinal de subtração e as diversas letras de que os matemáticos se utilizaram para indicar a diferença entre dois elementos.

Na obra de Diofante, entre as abreviaturas que constituíam a linguagem algébrica desse autor, encontra-se a letra grega ψ indicando subtração. Essa letra era empregada pelo famoso geômetra de Alexandria como sinal de operação invertida e truncada.

Para os hindus – como se encontra, na obra de Bhaskara – o sinal de subtração constituía num simples ponto colocado sob o coeficiente do termo que servia de subtraendo.

A letra *M* – e, às vezes, também *m* – foi empregada, durante um longo período, para indicar subtração, pelos algebristas italianos. Luca Pacioli, além de empregar a letra *m*, colocava entre os termos da subtração a expressão DE abreviatura de demptus.

Aos alemães devemos a introdução do sinal – (menos), atribuído a Widman. Pensam alguns autores que o símbolo- (menos), tão vulgarizado e tão simples, corresponde a uma forma limite para a qual tenderia a letra m quando escrita rapidamente. Aliás, Viète – considerando como fundador da Álgebra Moderna – escrevia o sinal = entre as duas quantidades quando queria indicar a diferença entre elas.

BIBLIOGRAFIA

1. TAHAN, Malba. O Homem que Calculava. Rio de Janeiro . 46ª edição. Editora Record. 1998.
2. TAHAN, Malba. Matemática Divertida e Curiosa. Rio de Janeiro . 10ª edição. Editora Record. 1998.
3. GUELLI, Oscar. Contado a História da Matemática. Equação: O Idioma da Álgebra. 8ª edição. Editora Ática.
4. Revista do Professor de Matemática, nº 30.