BIOMATEMÁTICA: a modelagem dos fenômenos da vida

João Frederico da C. A. Meyer
Clique para editar o estilo do subtítulo mestre
IMECC - UNICAMP

2 SEEMAT - UESB, Vitória da Conquista

BIOMATEMÁTICA

O processo de matemáticos interagirem
com a Biologia, e com os biólogos,
com a Natureza, e com os ecólogos:
com a Vida...

E, nessa interação, aprender!

BIOMATEMÁTICA : definições que convêm...

uso do instrumental matemático
para formular, estudar, analisar, entender
e, em alguns casos, aproximar soluções de
problemas da Biologia.
“Biologia” entendida como
fenômenos da vida

Tudo bem, mas a Biologia **quer/precisa** essa ajuda da Matemática?

- quantificar
- medir
- avaliar
- multar

- decidir...

Tudo bem, mas **qual** a Matemática que a Biologia quer?

- estatística?
- equações diferenciais?
- equações de diferenças?
- sistemas de EDP?
- métodos numéricos?
- sistemas lineares?
- tabuada do 7?

Simplificação

Entendendo o problema, avaliando suas características, escolhendo as principais.

Formulação

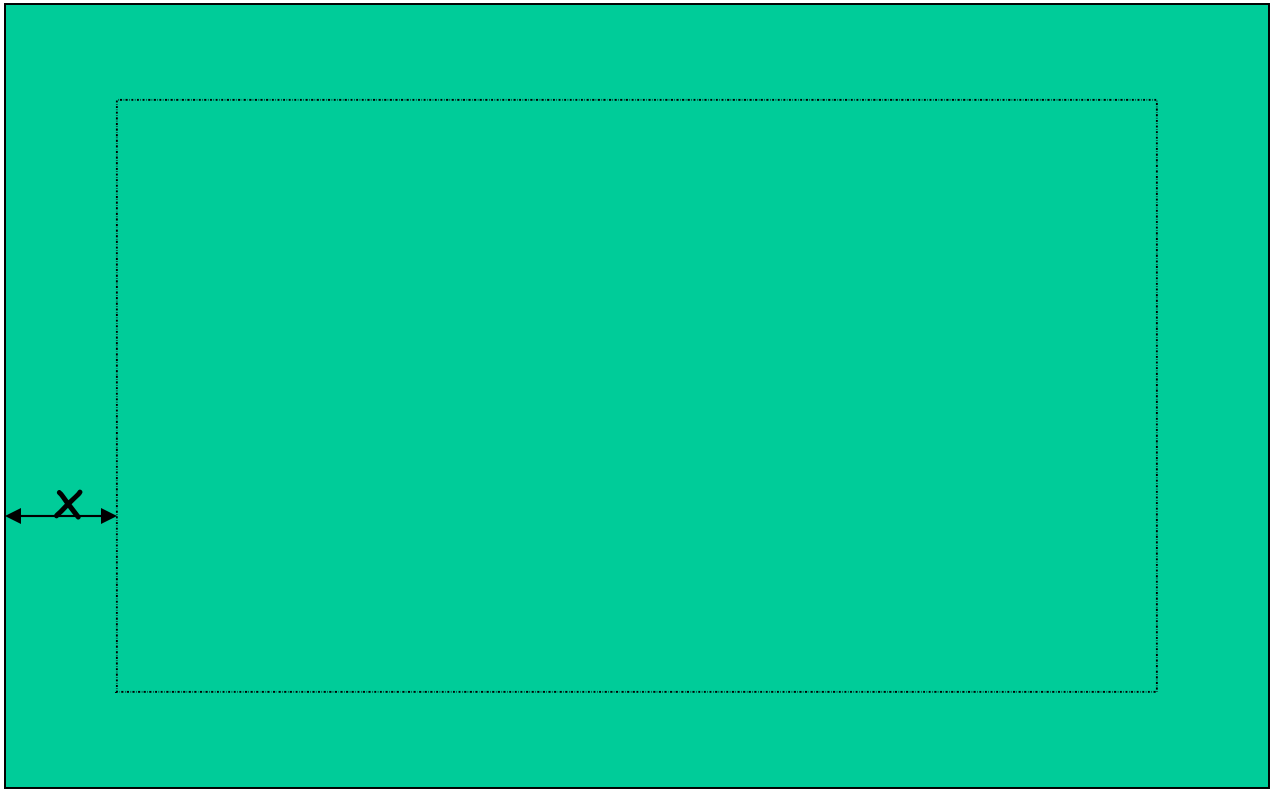
Expressando matematicamente o problema, isto é: descobrindo ***matematicamente, qual é a pergunta***!

Um exemplo prático:

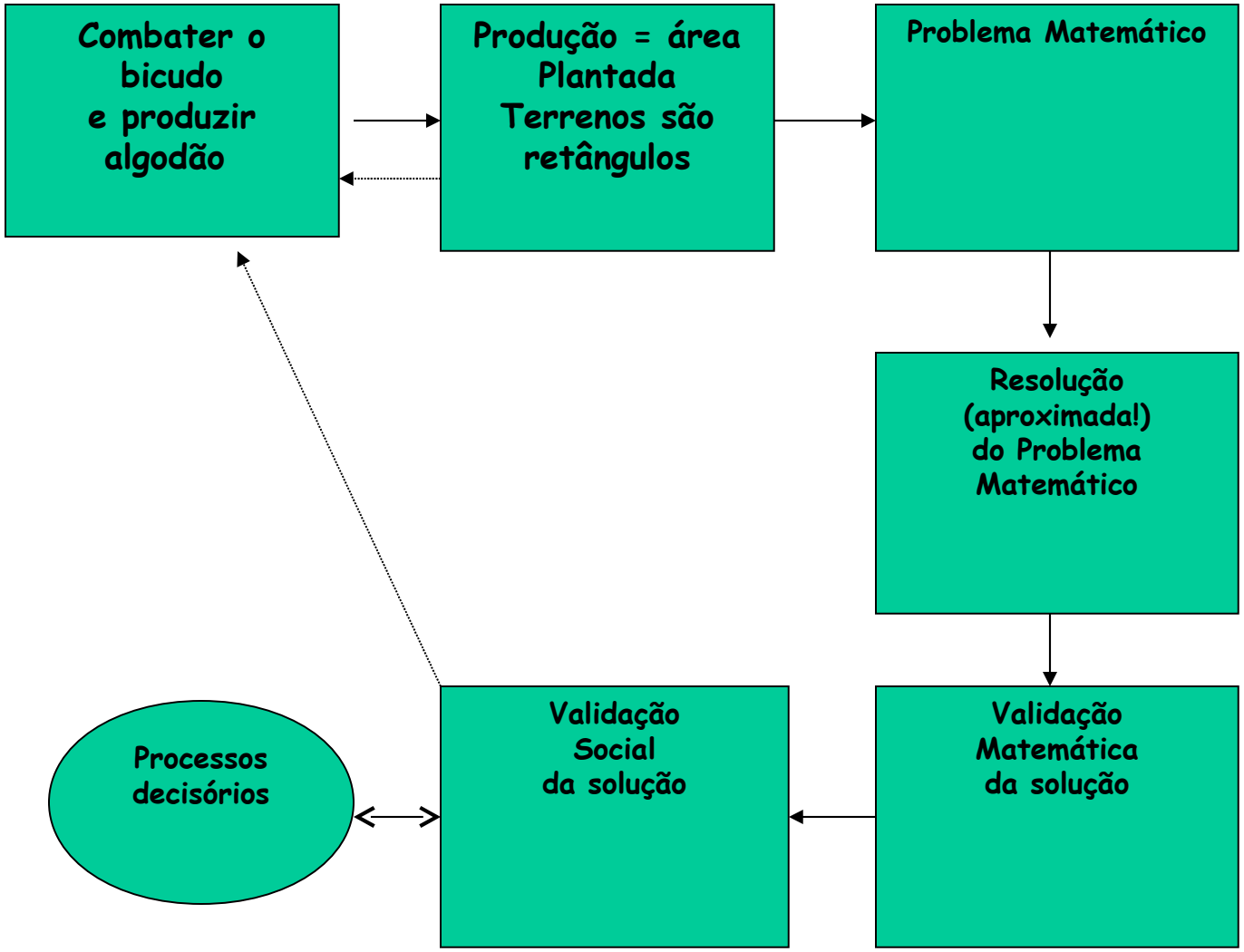
O problema real: como eliminar o “bicudo” do algodoeiro, <u>sem</u> eliminar outras espécies, necessárias ao cultivo do algodão.

Uma possibilidade efetiva: o plantio de uma faixa precoce de algodão, mas com uma perda de menos de 4,3% da colheita.

Questões: de que tamanho deve ser essa faixa? Qual/quais as formas geométricas para ela?



Dadas as dimensões do campo, x = ?


Combater o bicudo e produzir algodão
Produção = área Plantada Terrenos são retângulos
Problema Matemático
Resolução (aproximada!) do Problema Matemático
Validação Matemática da solução
Validação Social da solução
Processos decisórios

Consideramos as dimensões do campo como sendo L (largura) e H (altura): Simplificação

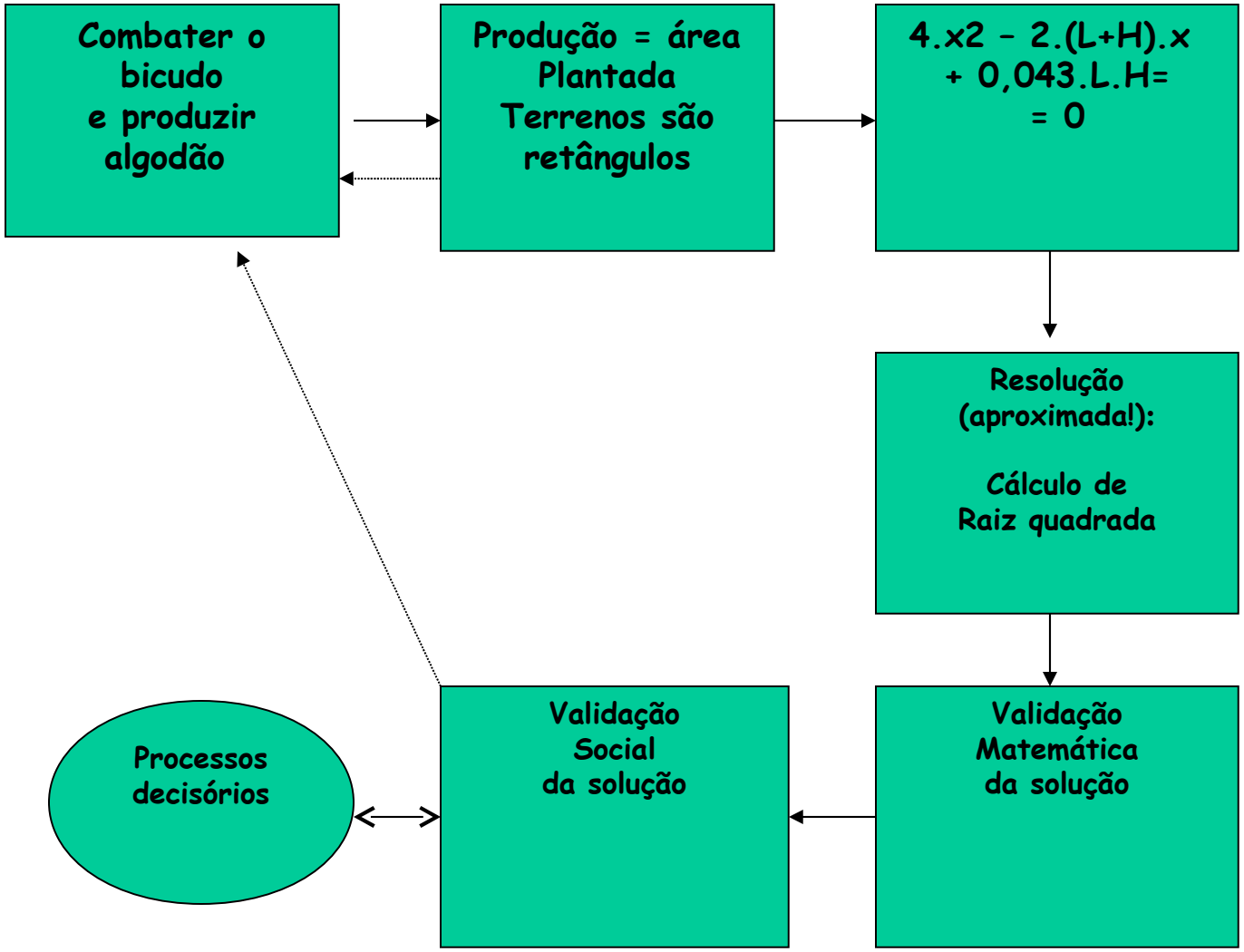
O retângulo de dentro terá como dimensões, na largura, L-2.x e, na altura, H-2.x.

A área deverá ser de 100% - 4,3% = 95,7% da área total, ou seja:

$(L-2x).(H-2x)=0,957.L.H$ ou, ainda,

$L.H – 2.(L+H).x + 4.x2 = 0,957.L.H$ o que dá:

$4.x2 – 2.(L+H).x + 0,043.L.H = 0$


Combater o bicudo e produzir algodão
Produção = área Plantada Terrenos são retângulos
4.x2 – 2.(L+H).x + 0,043.L.H= = 0
Resolução (aproximada!):
Cálculo de Raiz quadrada
Validação Matemática da solução
Validação Social da solução
Processos decisórios

O problema matemático
$4.x2 - 2.(L+H).x + 0,043.L.H = 0$

- Valores para L e para H?
- Cálculos necessários: $\sqrt{}$ raíz quadrada...
- Obtenção de raízes: operações matemáticas
- Escolha de uma das raízes...

  x1 = valor pequeno

  x2 = valor maior do que (L+H)/2

O problema matemático, com valores...
4.x2 – 2.(L+H).x + 0,043.L.H = 0

- Para L = 80 e H = 50,
- x2 – 65.x + 43 = 0.
- Obtenção de raízes: operações matemáticas
- Escolha de uma das raízes...

  x1 = 0.6684

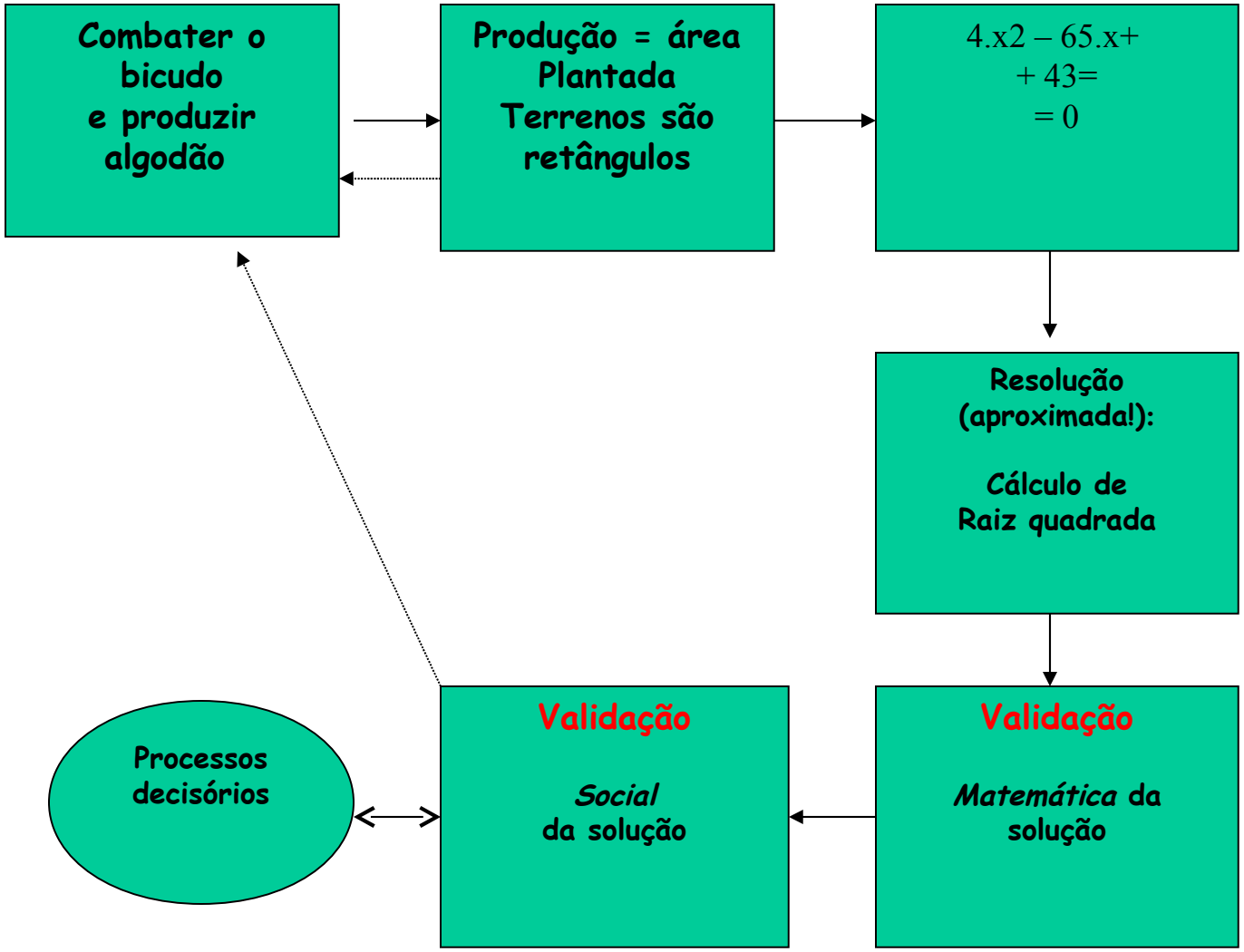
  x2 = 64.3316

Validações

x, a largura, da faixa, **não** pode ser maior do que H/2 = 25

Assim, o plantador pode descartar ou mudar o valor verdadeiro da matemática.

O valor maior é, então, descartado pela matemática, e sobra x = 66.84cm.

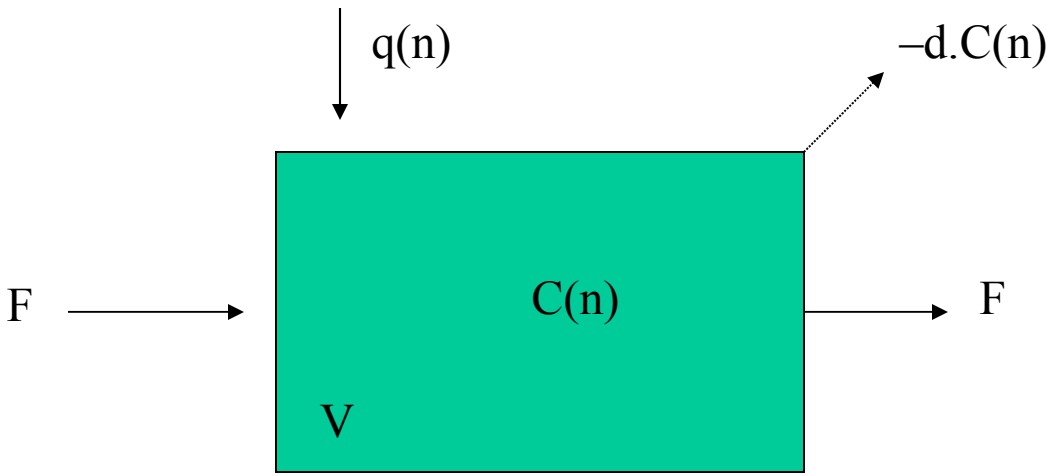

Combater o bicudo e produzir algodão
Produção = área Plantada Terrenos são retângulos
4.x2 – 65.x+ + 43= = 0
Resolução (aproximada!): Cálculo de Raiz quadrada
Validação Matemática da solução
Validação Social da solução
Processos decisórios

E, escolhida a solução válida (do ponto de vista da matemática...), essa solução **serve** para a Biologia?

... depende: no caso do bicudo, não serviu.

A Matemática do Impacto Ambiental

- Poluição de corpos aquáticos: lagos, represas, rios, estuários, mares costeiros.
- Poluição do ar: efeitos aerossóis de usinas, de concentrações de indústrias, de centros urbanos.
- Poluição do solo: lixões, lençóis freáticos, vazamentos em depósitos de produtos tóxicos.
- Combinações dos anteriores.



A figura é de uma represa.
Aporte semanal: q unidades de poluente nessa represa.
O volume: V unidades de volume, e
o fluxo do rio que entra (e sai) da represa é de F unidades de volume por semana.
Ainda, esse poluente pode degradar-se.

Um (possível) modelo:

A quantidade de poluente na semana que vem =

= a quantidade de poluente desta semana –

– a quantidade que sai com o fluxo do rio –

– a quantidade que se degrada +

+ o aporte semanal.

Em palavras da matemática:

$$
\begin{aligned}
C(n+1) &= \\
&= C(n) - \\
&\quad - F.\ C(n)\ /V - \\
&\quad\quad - d.\ C(n) + \\
&\quad\quad\quad + q
\end{aligned}
$$

Ou seja:

$$C(n+1) = C(n) - F.\,C(n)/V - d.\,C(n) + q$$

O que significa

$$C(n+1) = C(n).(1 - F/V - d) + q$$

Fazendo $\square = 1 - F/V - d$,

teremos:

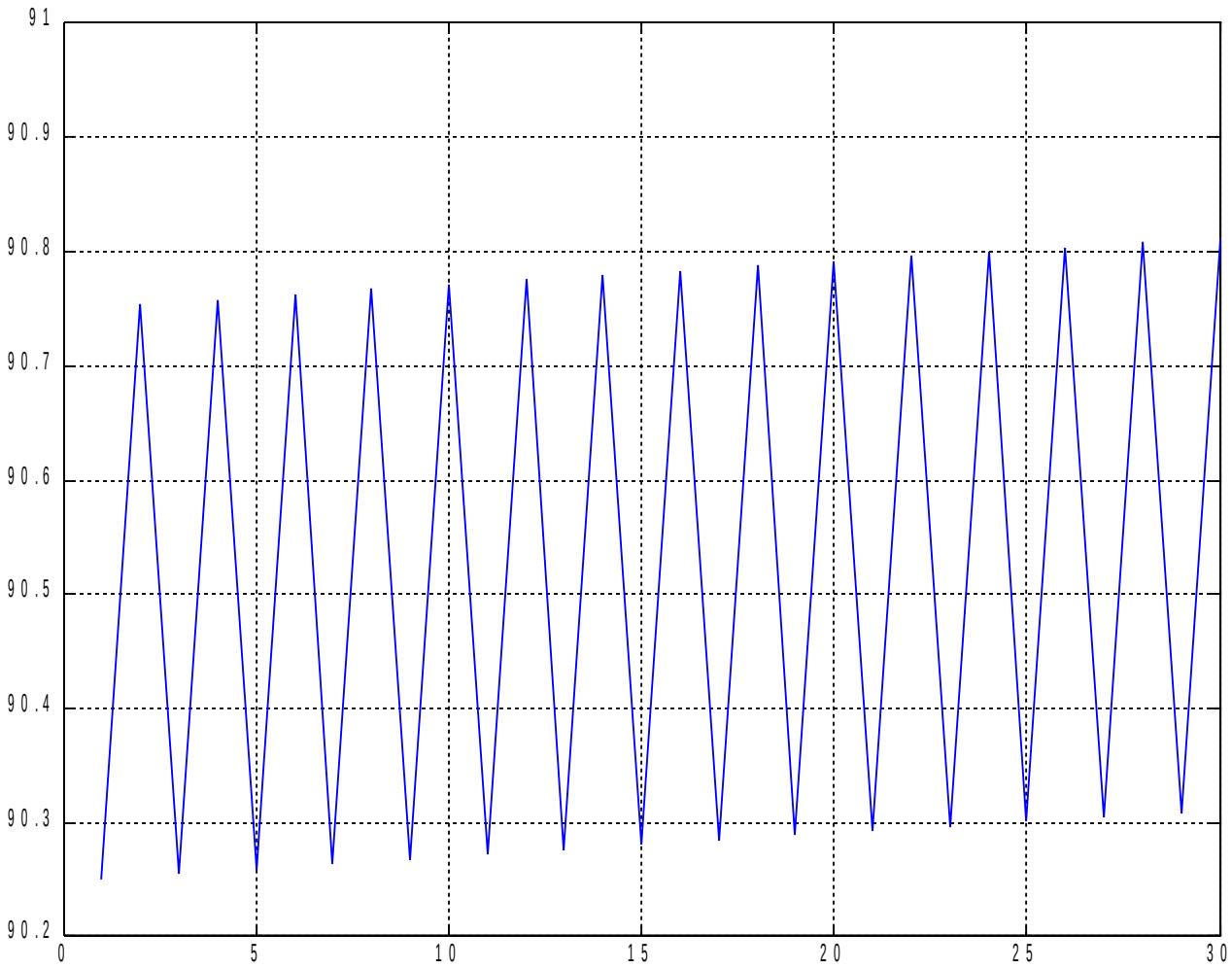
$$C(n+1) = \square \,.\, C(n) + q(n)$$

Parte PG, parte PA

Além desta minha fala, isto serve para alguma coisa?

Tentativas: como se comporta o acúmulo de contaminante se o aporte se der semana sim, semana não?

... Matlab ou alguma planilha.


91
90.9
90.8
90.7
90.6
90.5
90.4
90.3
90.2
0
5
10
15
20
25
30

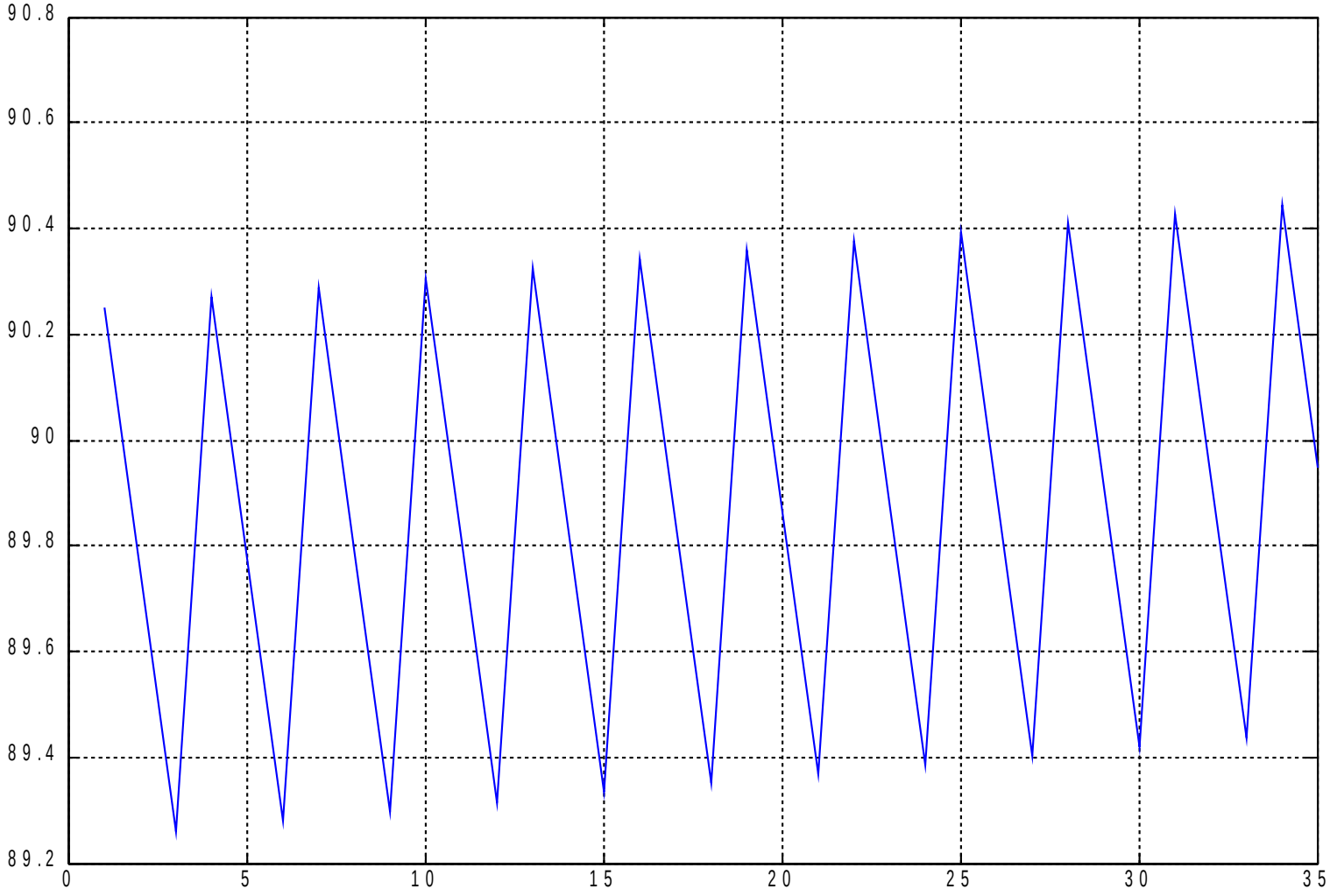
E se fosse duas semanas não, a outra semana sim?

Em outras palavras, teríamos nessa simulação:

$$C(n+1) = C(n) - F.\ C(n)/V - d.\ C(n) + q(n)$$

Sendo $q(n) = q$ com n múltiplo de três e $q = 0$ caso contrário

Aporte a cada três semanas



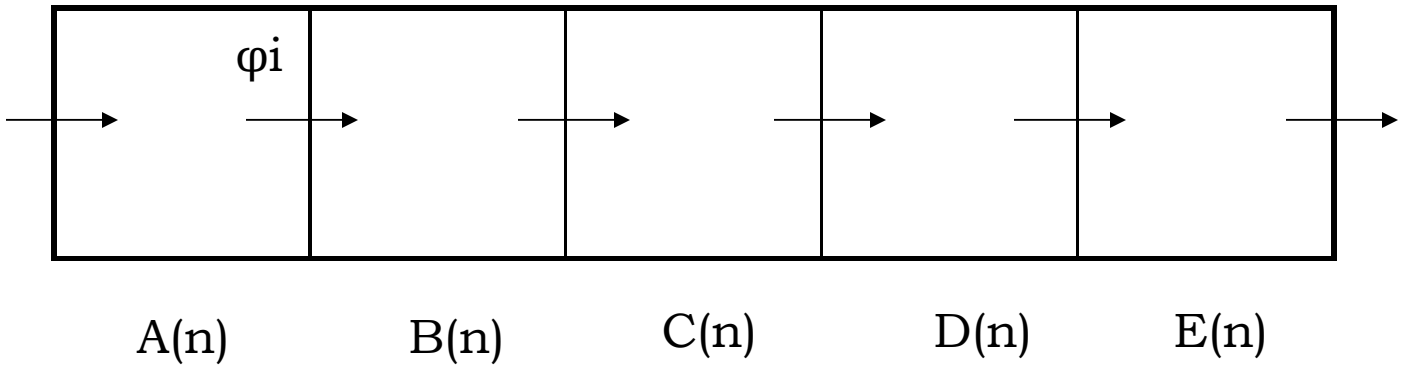
Outra possibilidade: um contaminante que “demora” para começar a degradar-se: 1 semana

$$C(n+1) = C(n) - F.\,C(n)/V - d.\,C(\mathbf{n-1}) + q$$

uma equação de diferenças ainda linear de <u>segunda</u> ordem: envolve duas semanas.

Nos ensaios, F<<V. O que aconteceria se isto não fosse assim?

É o caso de um rio...



O que temos, então, é um sistema, em que o que sai de um compartimento entra no seguinte:

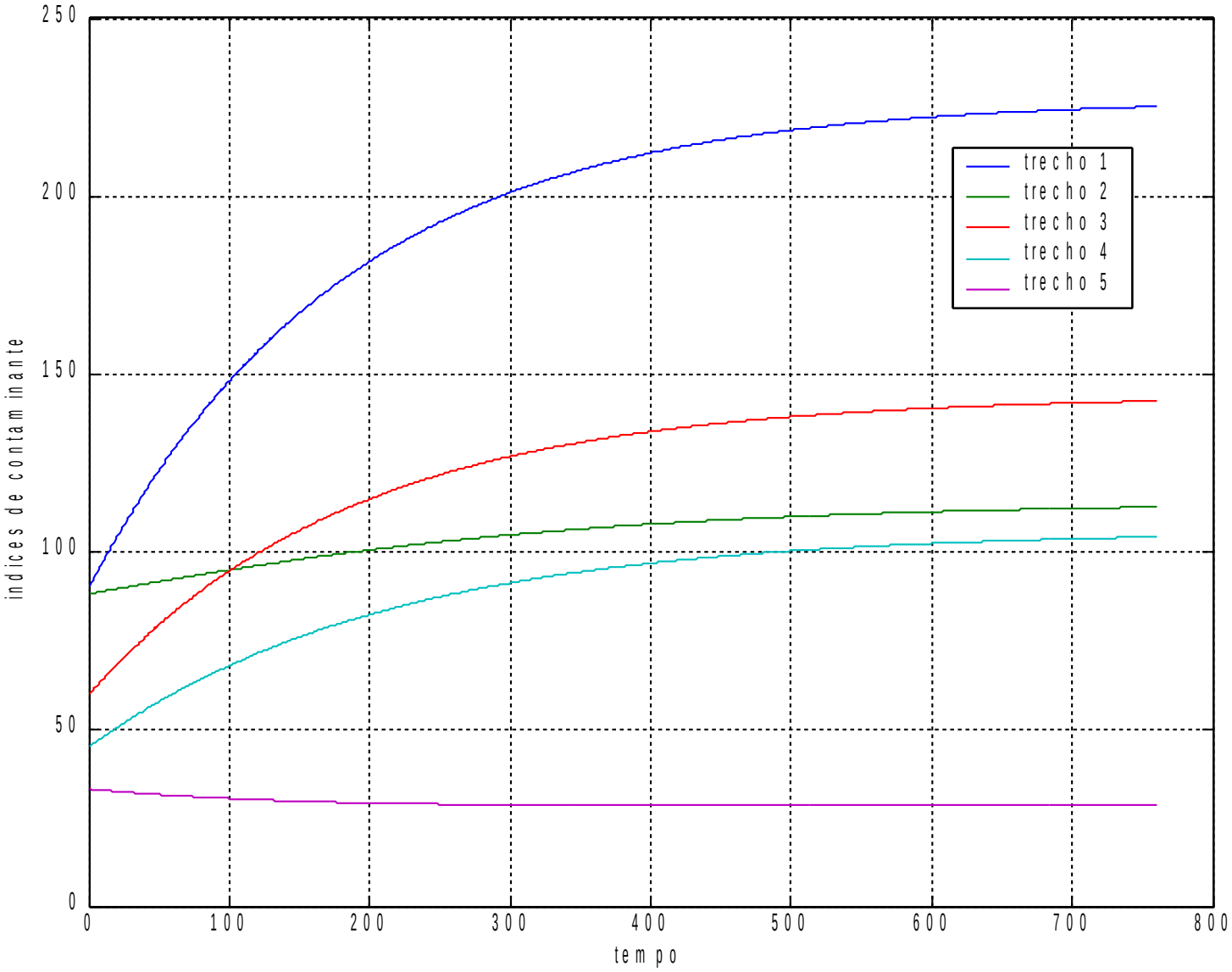
$$A(n+1) = A(n).(1 - \varphi 1 - d1) + q1$$

$$B(n+1) = A(n).\ \varphi 1 + B(n).(1 - \varphi 2 - d2) + q2$$

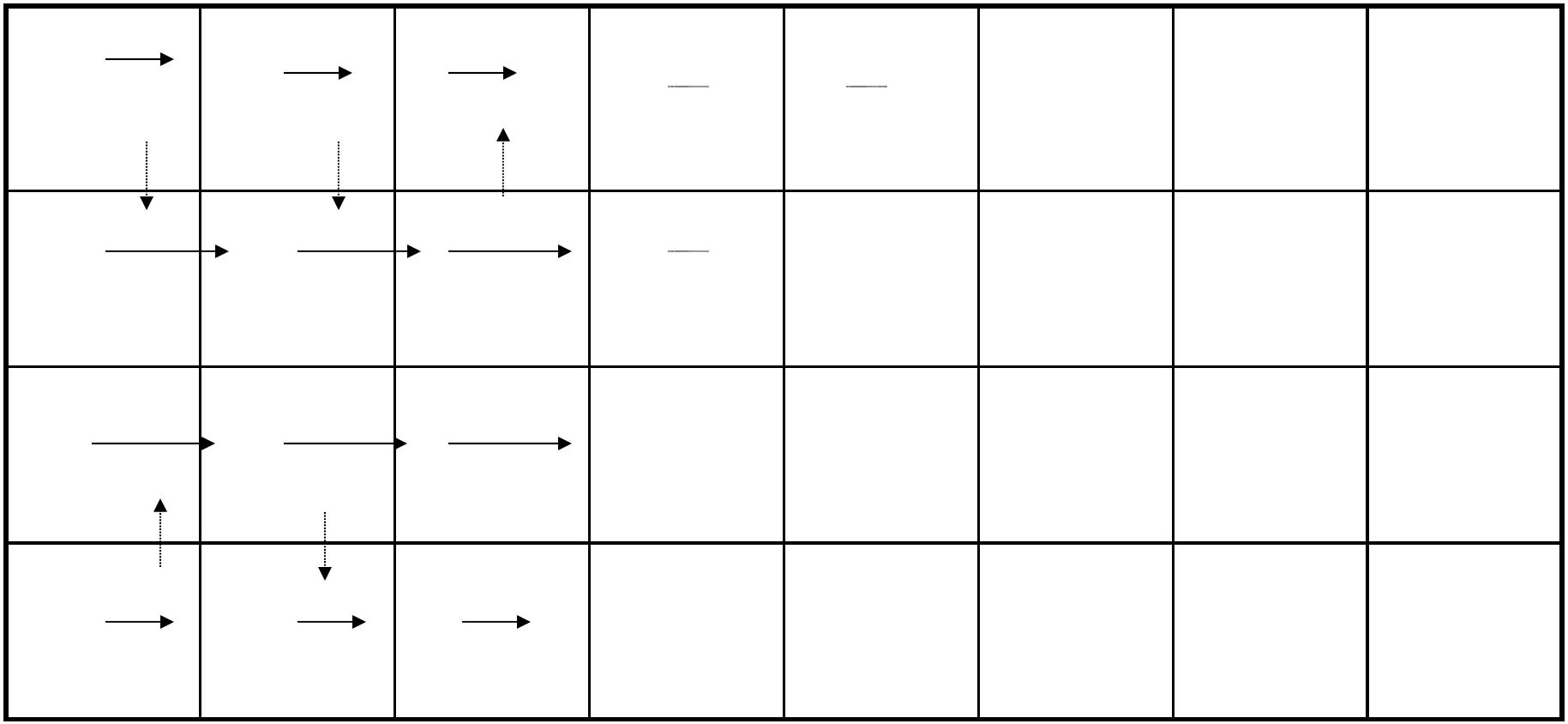
$$C(n+1) = B(n).\ \varphi 2 + C(n).(1 - \varphi 3 - d3) + q3$$

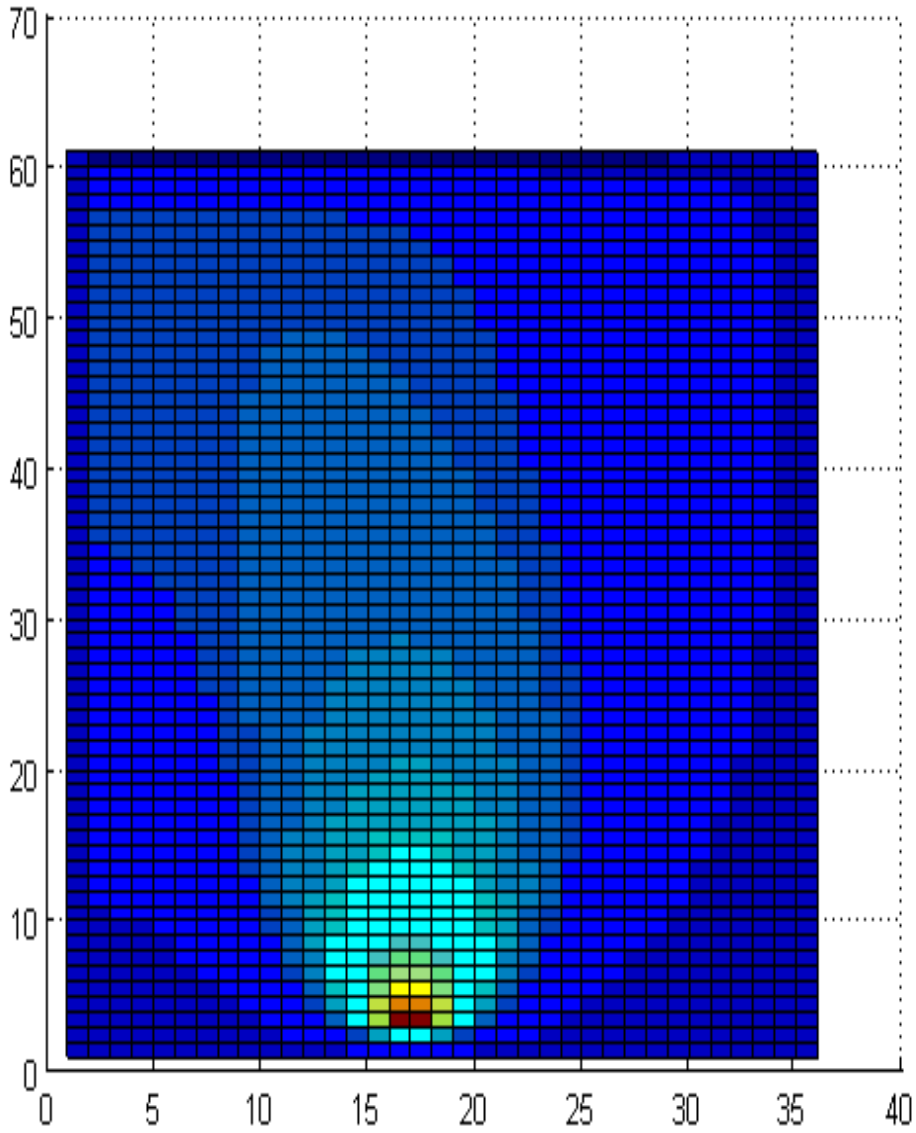
$$D(n+1) = C(n).\ \varphi 3 + D(n).(1 - \varphi 4 - d4) + q4$$

$$E(n+1) = D(n).\ \varphi\ 4 + E(n).(1 - \varphi 5 - d5) + q5$$


250
200
150
100
50
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
tempo
indices de contaminante
trecho 1
trecho 2
trecho 3
trecho 4
trecho 5

E, se em vez de um córrego, fosse um rio de ‘verdade’?




70
60
50
40
30
20
10
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40

Moral da História

A Matemática é aquela que

dá conta do problema,

E, a partir daí,

cuidadosamente ajeitar...

É um problema (!) ...

Não temos mais
contas de chegar,
nem probleminhas de sala de aula:

"... Ao vivo é muito pior!"

Igual não pode ficar...

O que entra:

Tentativa-e-erro

Experimentação

Números aproximadores

Verdade relativa

Hemiêmites

O que sai:

Tentativa-e-erro

Experimentação

Números aproximadores

Verdade relativa

Hemiêmites

Então perdeu-se a beleza?

...de jeito nenhum!

Ganhou-se o **desafio.**

E também:

E vive-se o **calafrio!**

Por exemplo, poderia ser contínuo e, então, teríamos uma equação dada por:

$$dC/dt = -(F/V).C(t) - d.C(t) + q$$

cuja solução pode ser dada por:

$$C(t) = C0.e^{-\lambda t} + \frac{q.V}{F + d.V}.\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

Repetindo os passos...

- Poluentes que ‘demoram’ a degradar-se: EDO com retardo;
- Poluentes cuja degradação não é linear: EDO’s não-lineares;
- Rio em vez de represas: sistemas de EDO’s lineares ou não; e
- Rios realmente grandes: sistemas bem maiores...

Mas um poluente pode variar no espaço, além de variar no tempo!

Então, em vez de d(.)/dt,

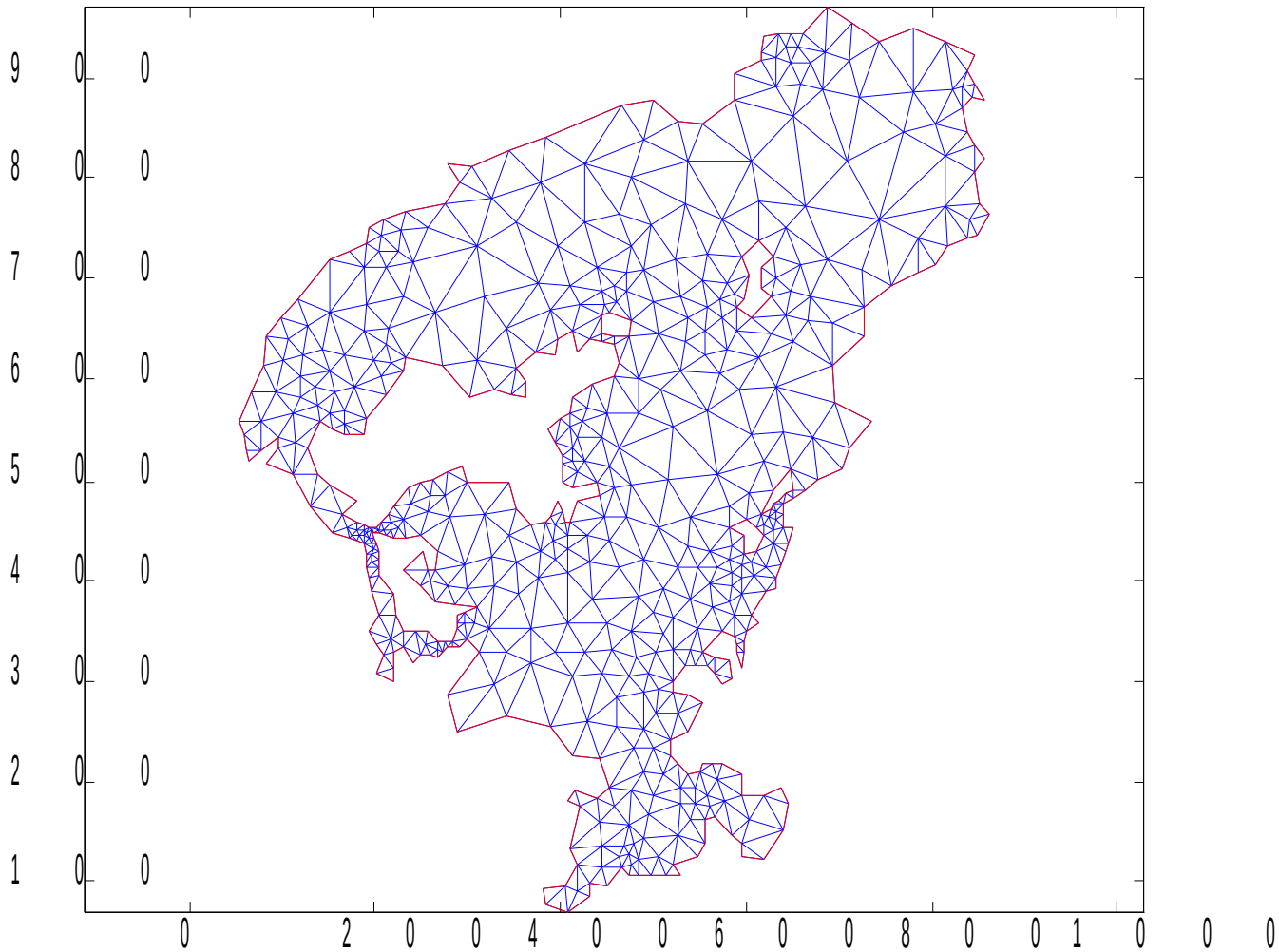
deveríamos ter: □(.)/□x, □(.)/□y e □(.)/□z, além de □(.)/□t .

Ou seja, em vez de EDO's, EDP's!

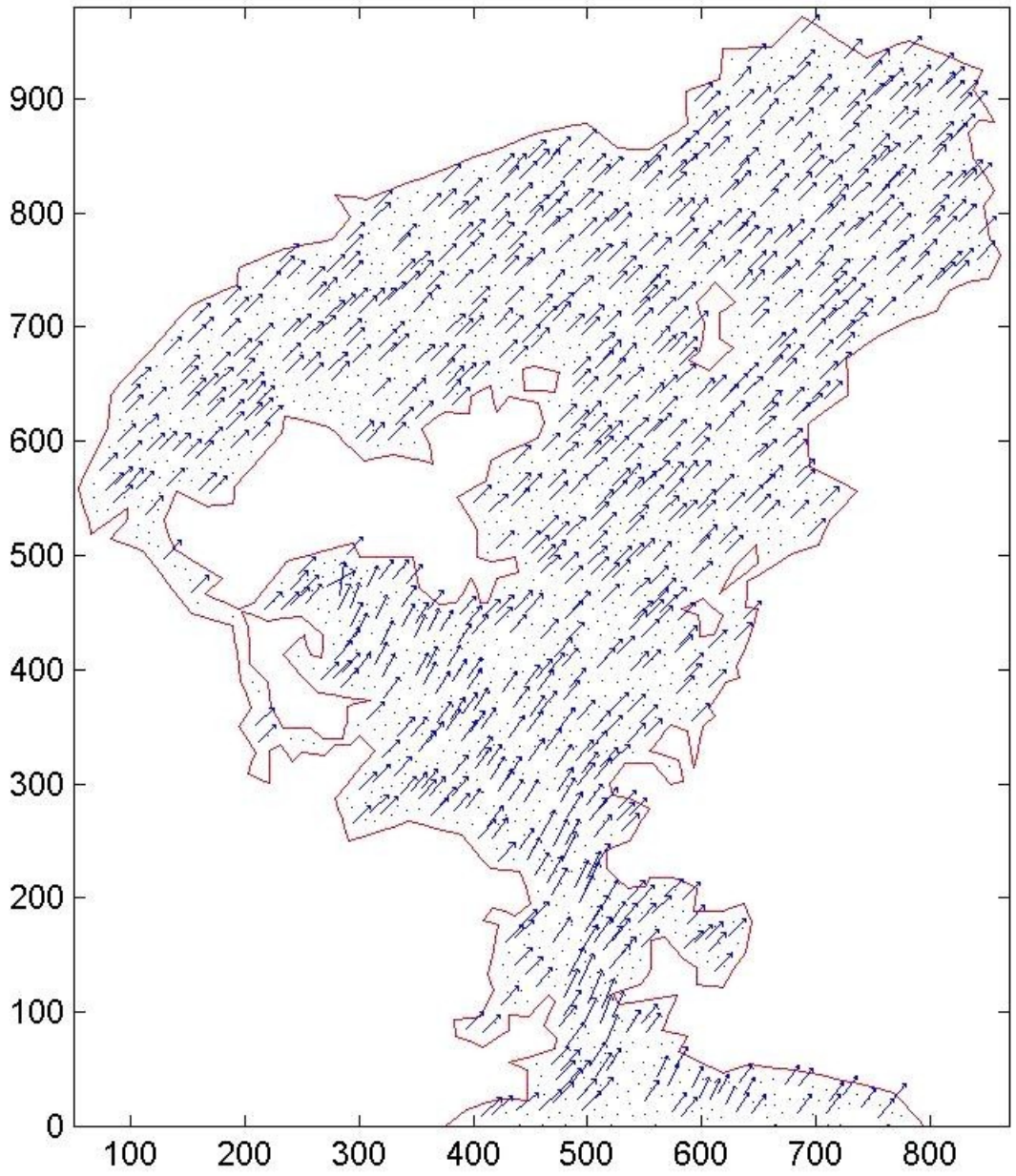
E, já que recorremos ao maravilhoso mundo das EDP's, usar e abusar!

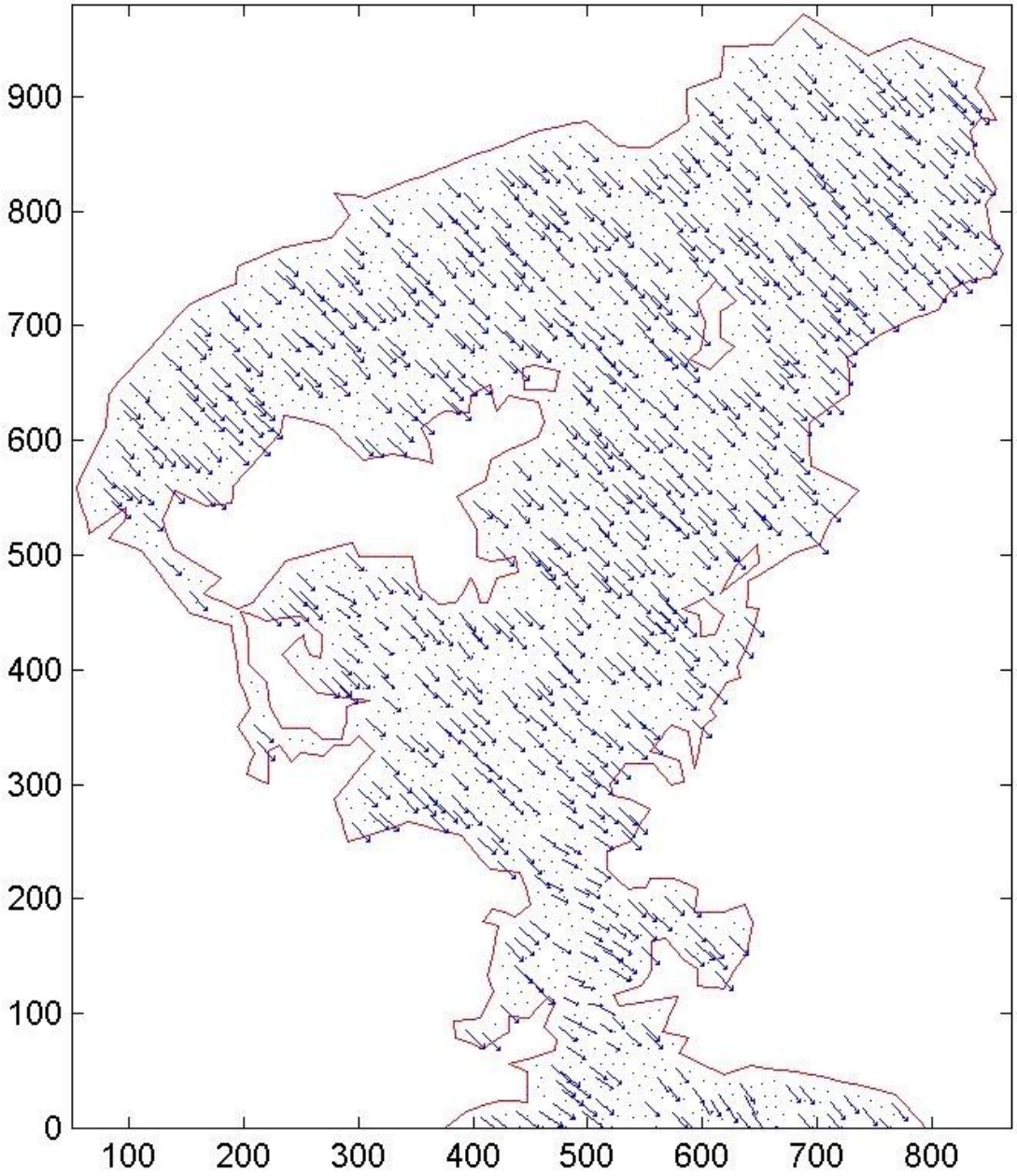
1. Descrever o domínio com G.A.;
2. aproximar resolução de Stokes para descrever o mapa de circulação;
3. Aproximar a resolução da EDP evolutiva de reação-difusão.

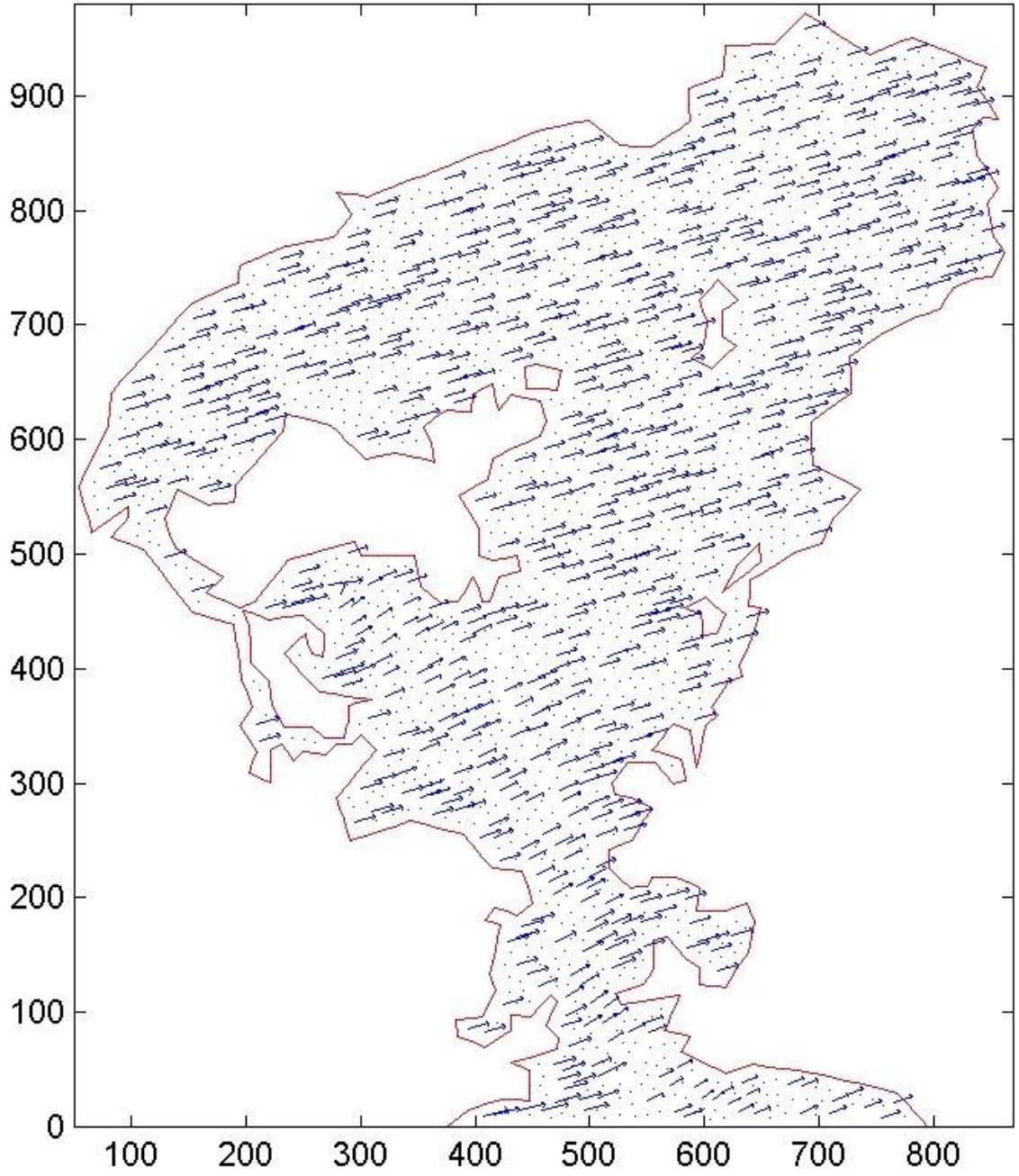
Baía de Guanabara - Malha de EF

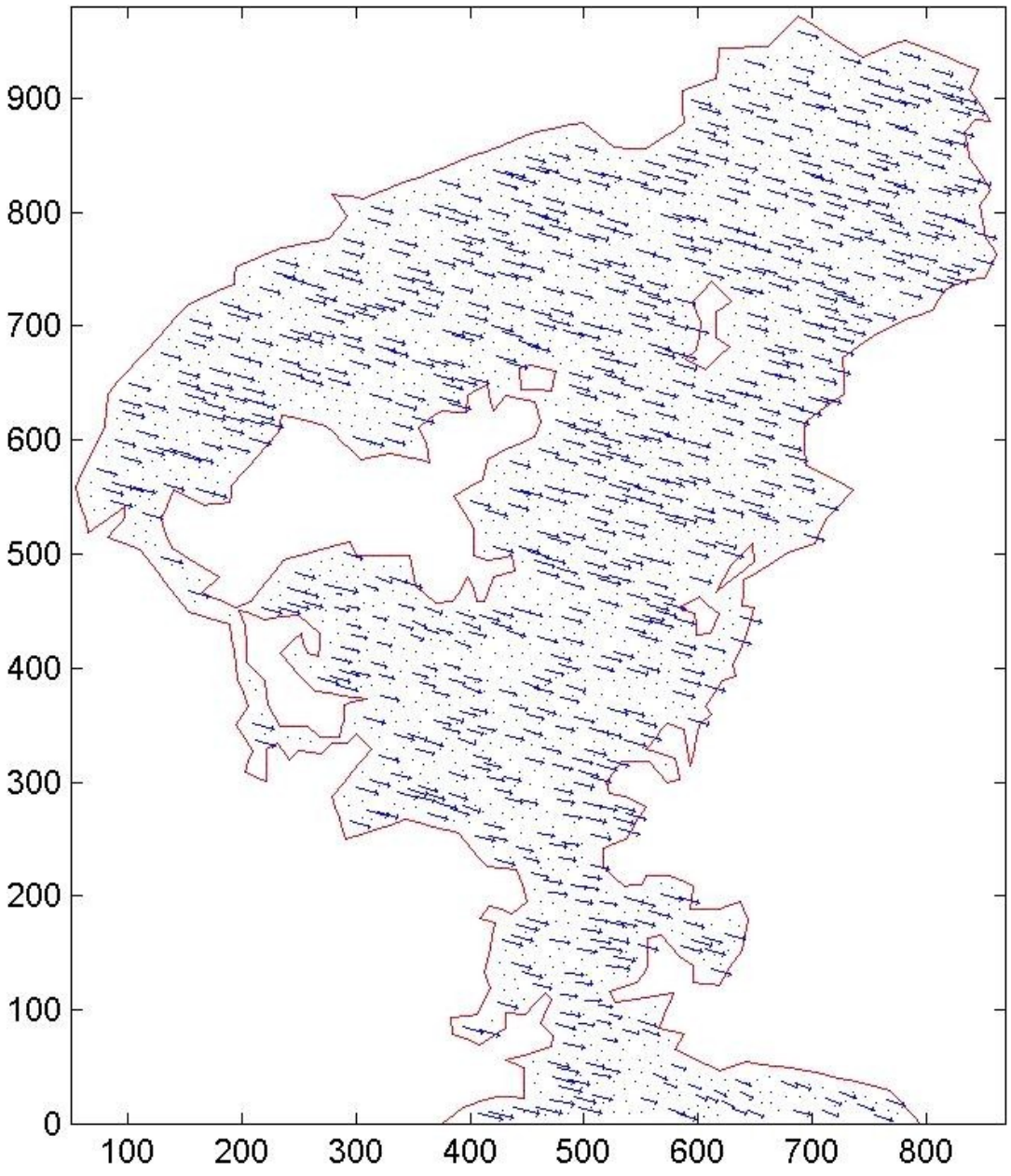


Gerado por triangle © 1996 - Jonathan Richard Shewchuk

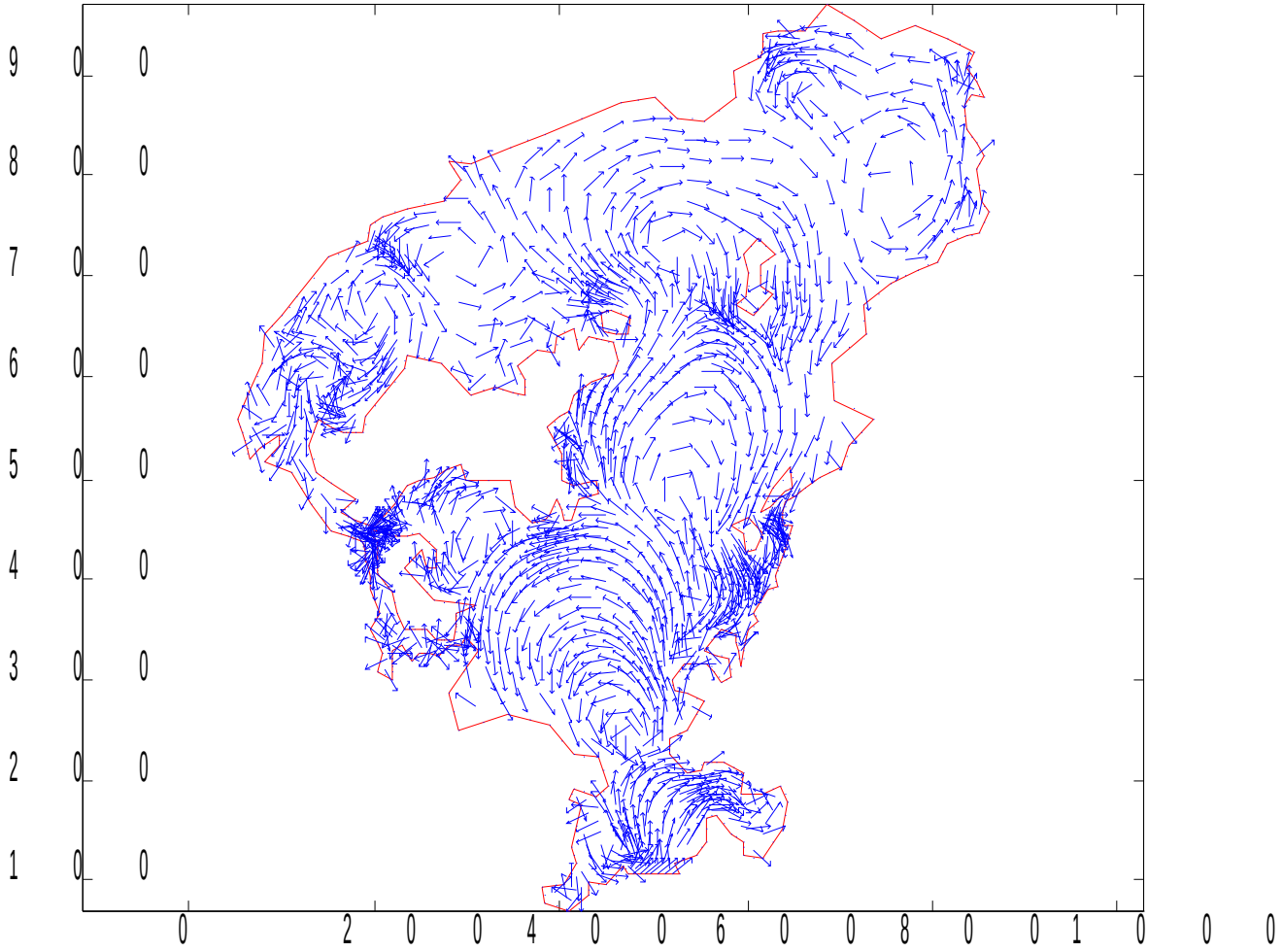

900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
100
200
300
400
500
600
700
800


900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
100
200
300
400
500
600
700
800


900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
100
200
300
400
500
600
700
800

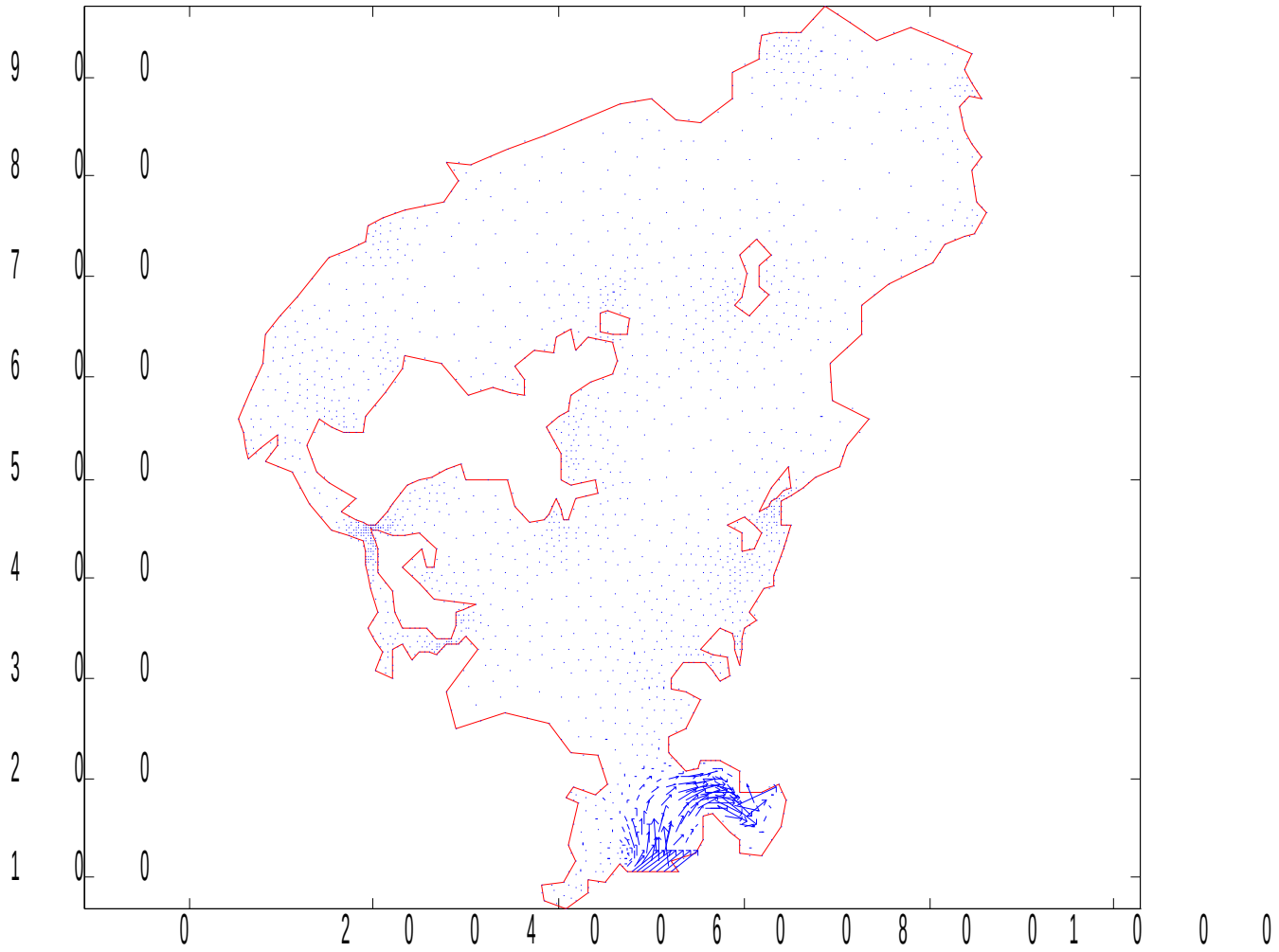

900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
100
200
300
400
500
600
700
800

Baía de Guanabara - Circulação



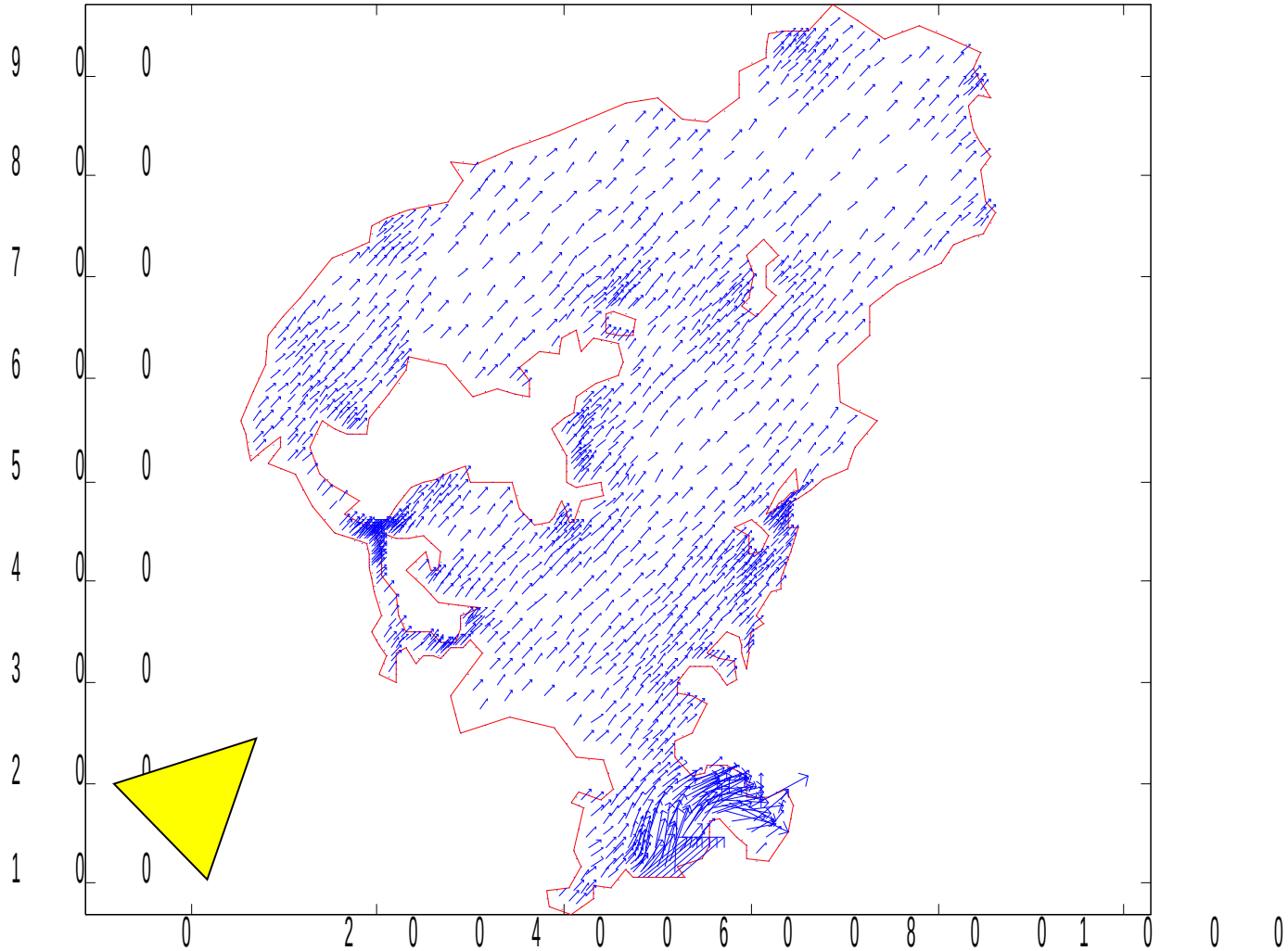
Visualização sem normalização, sem efeito do vento

Baía de Guanabara - Circulação



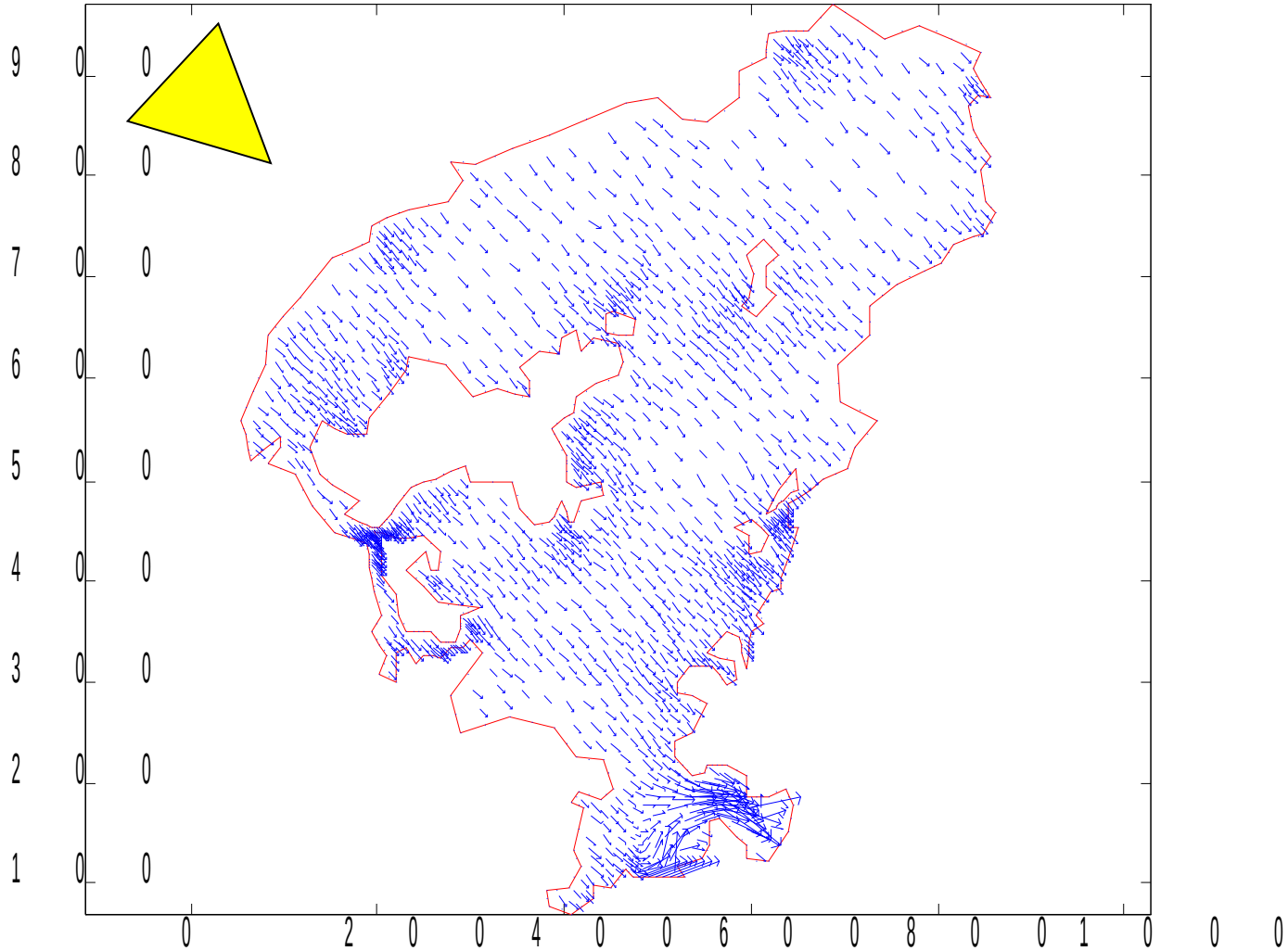
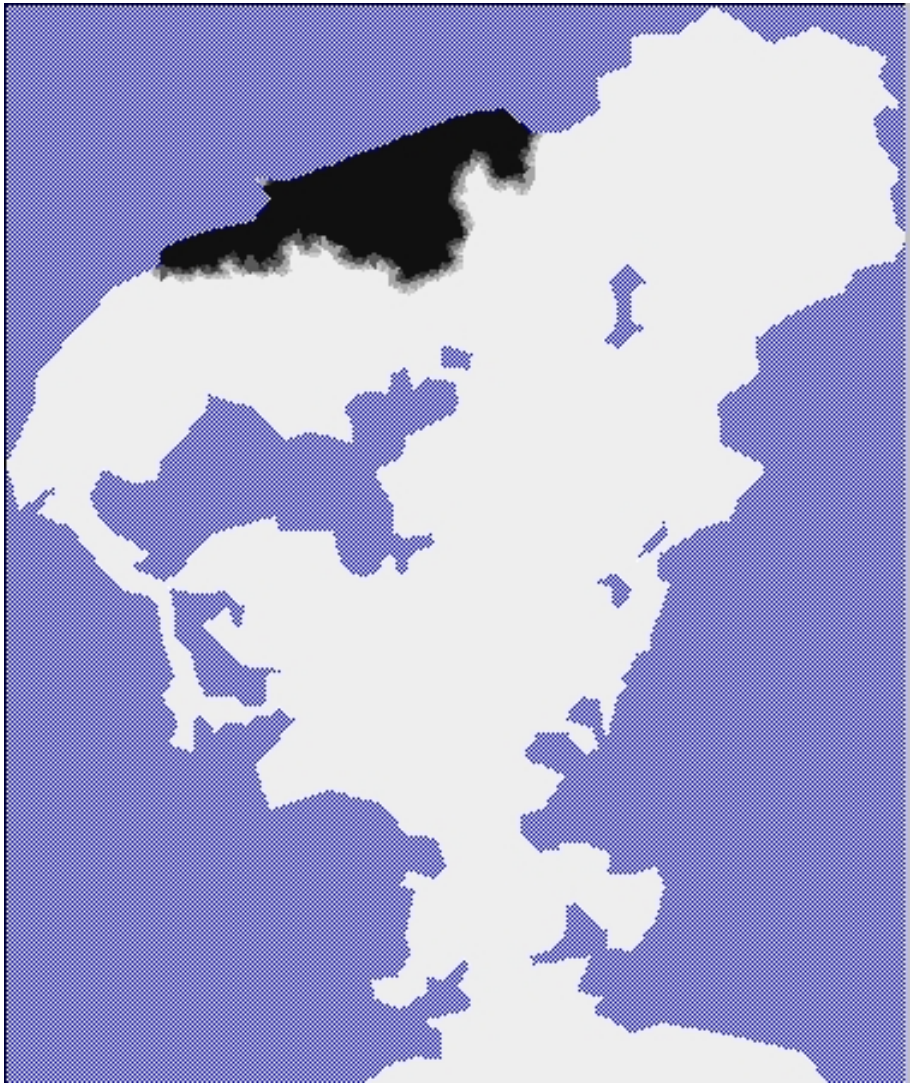
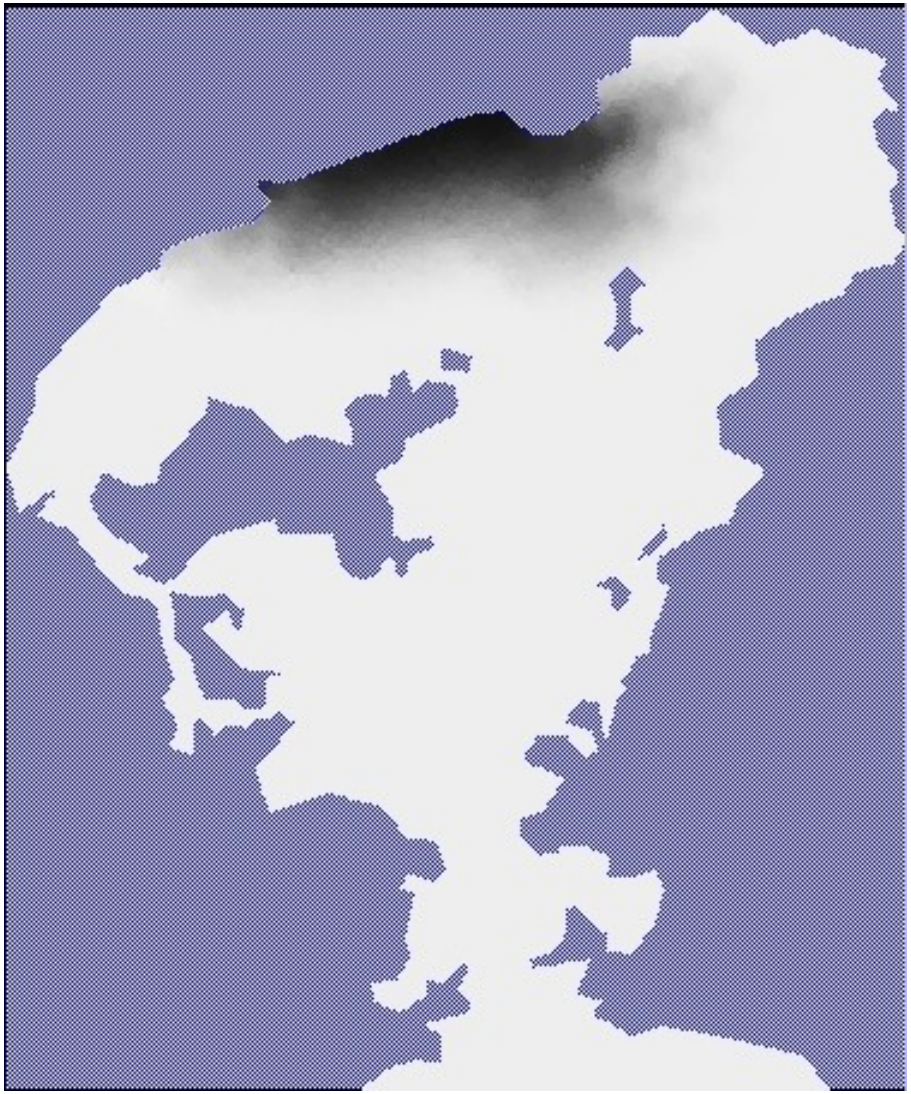
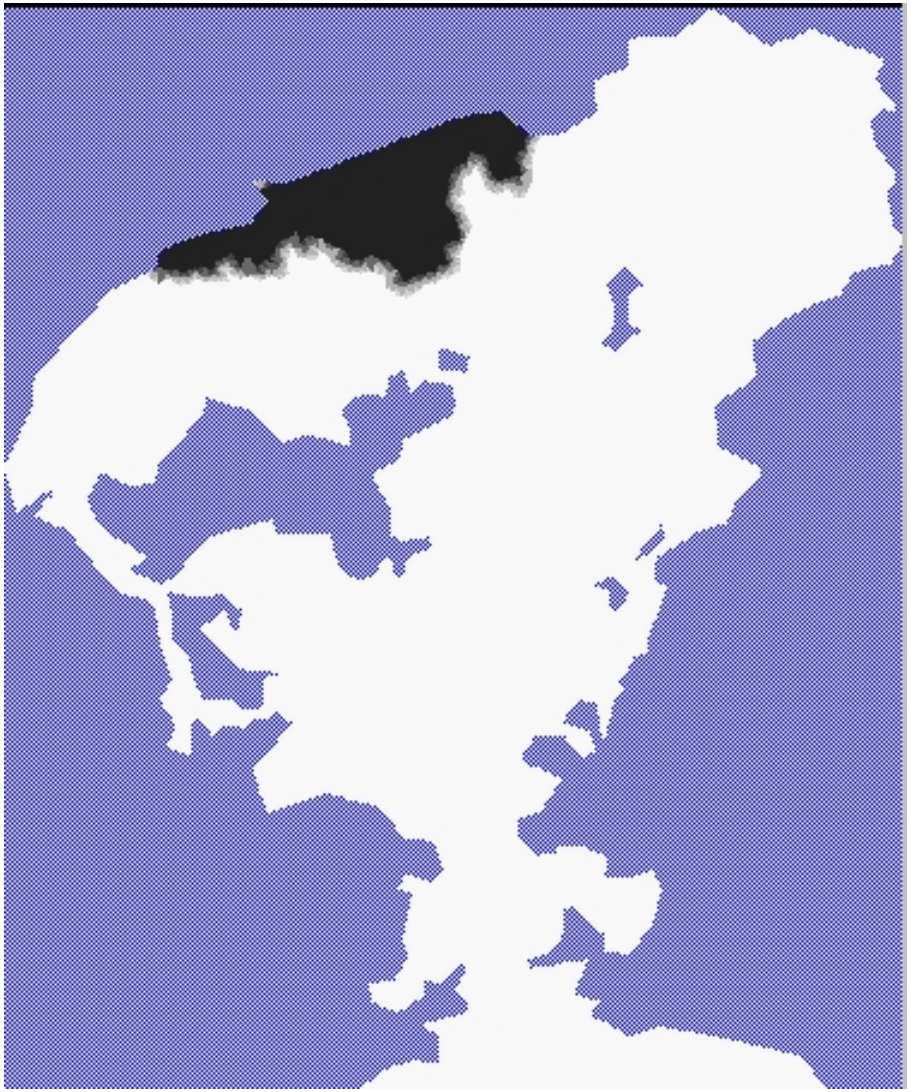
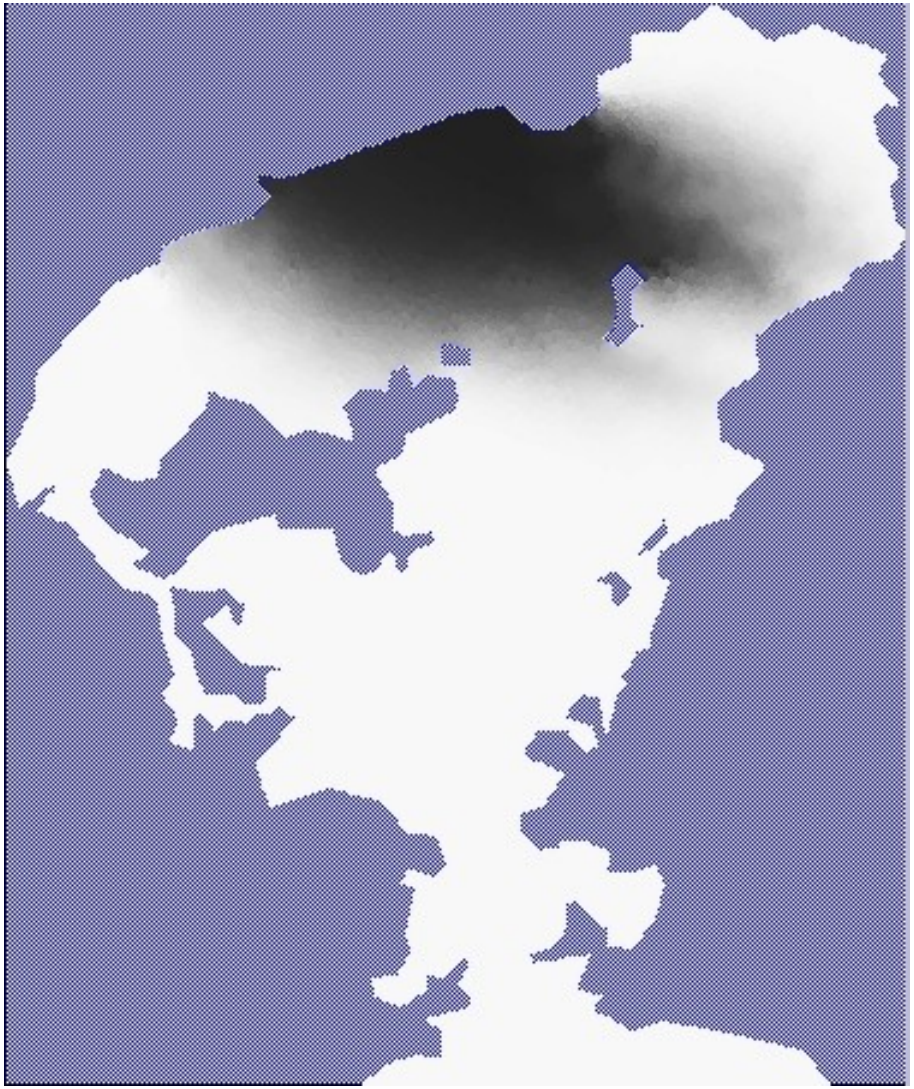
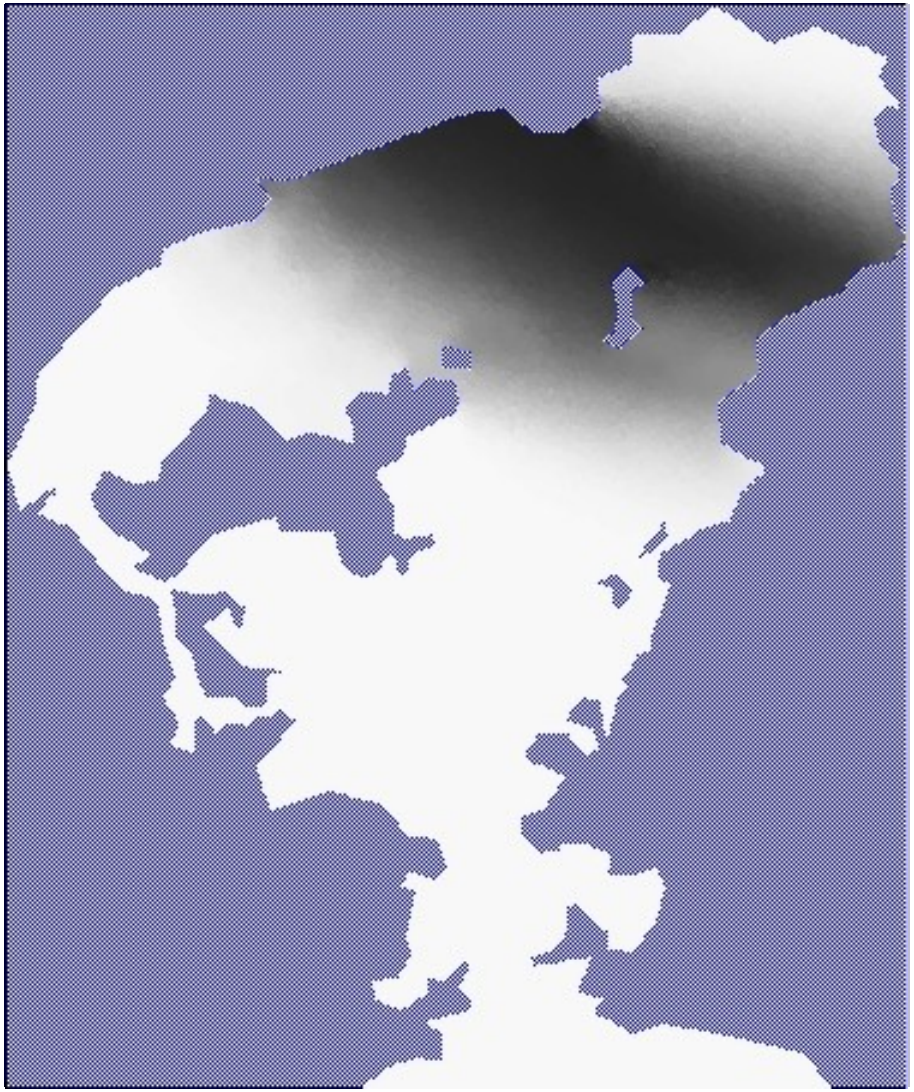
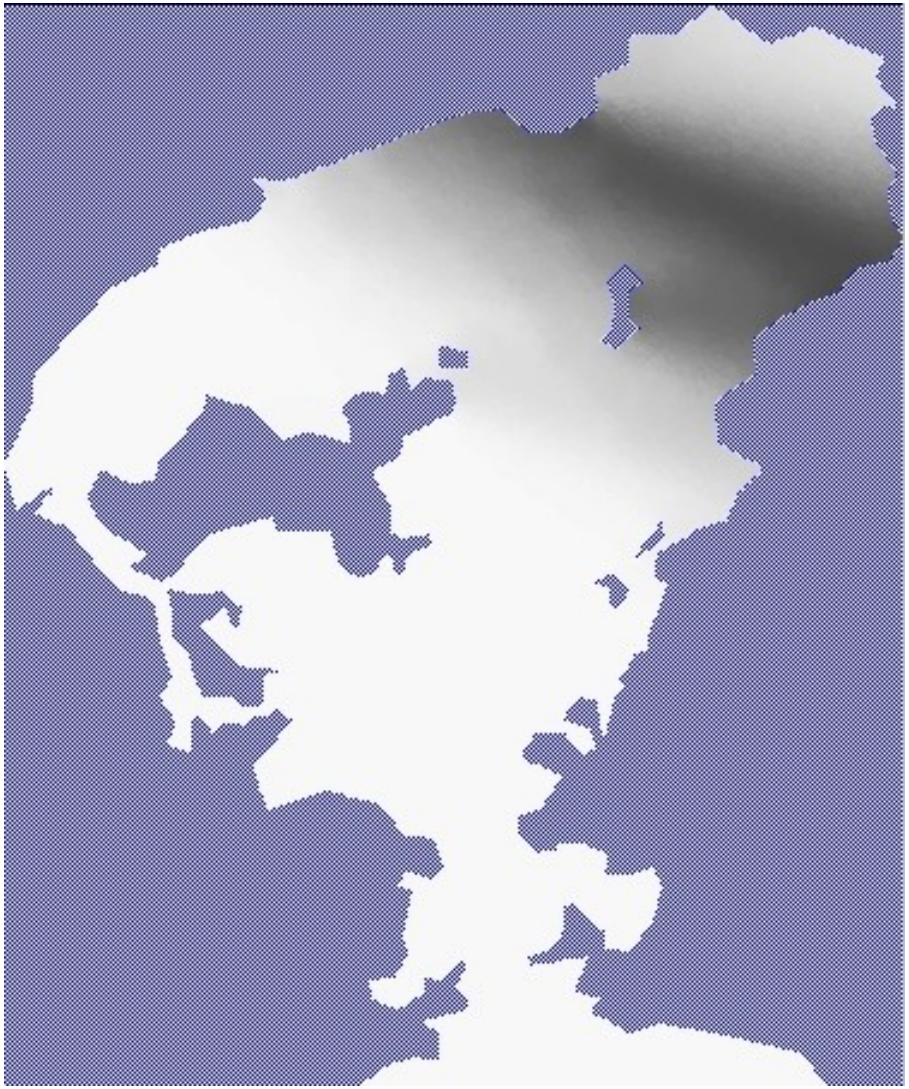
Visualização com normalização, sem efeito do vento

Baía de Guanabara - Circulação e Ventos



Visualização com normalização, com efeito do vento

Baía de Guanabara - Circulação e Ventos



Visualização com normalização, com efeito do vento