Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Licenciatura em Matemática

Reflexões acerca do desempenho de Licenciandos de Matemática em relação à Análise Combinatória.

Por: Kamila Barros Pereira

Orientadora: Roberta D´Angela Menduni Bortoloti

Vitória da Conquista

Julho de 2012

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Licenciatura em Matemática

Reflexões acerca do desempenho de Licenciandos de Matemática em relação à Análise Combinatória.

Apresentação à Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como condição prévia para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Por: Kamila Barros Pereira

AGRADECIMENTOS

DEUS, pela força para prosseguir nesta caminhada.

Aos meus pais e irmão, que sempre ao meu lado estão.

As colegas que participaram dos encontros da orientação

e a minha dedicada orientadora Roberta D' Angela.

“Feliz o homem que encontrou a sabedoria e alcançou o entendimento,

Porque a sabedoria vale mais do que a prata, e dá mais lucro que o ouro.”

Provérbios 3, 13 – 15.

Kamila Barros Pereira

Reflexões acerca do desempenho de Licenciandos de Matemática em relação à Análise Combinatória.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 13 de agosto de 2012.

BANCA EXAMINADORA:

_____

Profª. Roberta D´Angela Menduni Bortoloti
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Orientador(a)

_____

Profª. Ana Paula Perovano dos Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

_____

Profº. Antônio Augusto Oliveira Lima
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

RESUMO

Com este trabalho compreendi as maiores dificuldades enfrentadas pelos discentes de matemática, relacionadas ao conteúdo de análise combinatória, identificando o que sabem e o que não sabem sobre os conceitos: princípio multiplicativo, permutação, arranjo e combinação. O objetivo proposto foi conhecer essas dificuldades em relação ao conteúdo usando a análise de erros. Analisar a produção escrita dos alunos é o ponto de partida do trabalho. A metodologia utilizada foi a pesquisa de campo. Os instrumentos analisados foram: teste (licenciandos em matemática do 1º e 6º semestres), entrevista (professores da educação básica) e livro didático (utilizado por esses professores). Ao analisar o teste utilizei a categorização que permitiu organizar as respostas dos alunos nas seguintes categorias: resoluções corretas, resoluções erradas e resoluções não respondidas. As resoluções erradas foram subdivididas em: princípio multiplicativo, emprego das fórmulas, enumeração de todos os eventos e não recorreram a conceitos referentes a análise combinatória. Os demais instrumentos complementaram as informações dadas pelos alunos ao responderem ao teste. Evidenciou-se que os alunos demonstraram dificuldades em relação ao princípio multiplicativo e aplicação das fórmulas. Estes resultados trazem implicações para se pensar em novas maneiras de ensinar análise combinatória.

Palavras-chave: Ensino superior. Análise de erros. Análise combinatória. Princípio multiplicativo.

Sumário

Lista de Figuras 8

1.Introdução 8

2. Revisão Bibliográfica. 12

2.2.Avaliação 16

2.3 Rápida Análise da Análise Combinatória no ensino. 17

3. Procedimentos Metodológicos 20

3.1Análise de Informações 21

4. Análise dos Resultados 25

4.1Princípio Multiplicativo 26

4.2 Emprego das fórmulas 31

4.3 Enumerar todos os eventos 34

4.4 Não recorreram a conceitos referentes ao conteúdo Análise combinatória. 36

4.5 Utilização de material lúdico. 37

5. Considerações Finais 39

6.Referência Bibliográfica 41

Anexos 44

1.Perguntas da entrevista com professor do ensino médio. 45

Lista de Figuras

Figura 1Resposta do Aluno V16X 28

Figura 2 Resolução do Professor 2 29

Figura 3 Introdução 29

Figura 4 Problemas para introduzir o conteúdo princípio multiplicativo 30

Figura 5 Resposta do Aluno V34X 32

Figura 6 Resolução do Professor 1 33

Figura 7 Resposta do livro página 283 33

Figura 8 Resposta do Aluno V4Y 35

Figura 9 Exemplo da página 276 35

Figura 10 Aluno V9X 36

1.Introdução

Hoje para avaliar um aluno ou uma turma de estudantes, são usados vários métodos de avaliação, provas, testes e trabalhos escritos ainda são os instrumentos mais utilizados no processo avaliativo pelos docentes. Quando se fala em matemática, especialmente estes instrumentos, são geralmente as únicas alternativas das quais os professores, em grande maioria do ensino médio e superior, usam para avaliação.

Hoffmann (1998) observou em um Programa de Aperfeiçoamento da Ação Pedagógica – PAAP realizado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, com professores ingressantes por concurso e em estágio probatório, no qual desenvolvia um trabalho de assessoramento quinzenal com grupos de 10 professores de diferentes unidades da universidade, discutindo principalmente a questão da avaliação no ensino superior, que muitos destes professores desconheciam medidas educacionais como elaboração e correção de testes.

Por motivos como estes, muitos professores preparavam suas avaliações tendo como real objetivo uma avaliação classificatória, como diz Hoffmann (1998), no qual, ouvir o aluno, o motivo da resposta dada, ficava em segundo plano e muitas vezes, o auxílio ao discente, a superação as dificuldades não eram realizadas.

Ao corrigir as avaliações muitos professores apontam os erros cometidos pelos alunos, simplesmente como uma observação, sem perceber que os erros podem dizer mais do que a dificuldade em resolver uma questão.

Hoffmann (1998), observa que alguns mitos são criados em relação a avaliação, um dos mitos é que : “Não se pode admitir que um estudante universitário cometa qualquer erro! Que profissional se estará formando?” (p. 77), essa visão equivocada do erro no ensino superior faz com que o erro venha ser considerado algo negativo, principalmente em cursos de licenciaturas das ciências exatas. Portanto, uma concepção preconceituosa é transferida

para a prática pedagógica dos futuros professores. Com isso, temos a ocorrência da seguinte situação:

> Os professores, mesmo os mais jovens e recém-formados, de que se espera a busca de novos caminhos, tendem a repetir os modelos dos mestres que encontram durante sua vida escolar, perpetuando exatamente o comportamento que criticaram e deploram como alunos. (HOFFMANN, 1998, pg. 87).

Os futuros professores tendem, em relação ao erro, passar a diante um pensamento negativo enquanto que o acerto continua sendo o alvo e o objetivo no qual o sistema educacional baseia-se, não levando em consideração os reais motivos que ocasionam uma resposta certa ou errada por parte dos alunos.

Visando a importância do erro no processo de ensino e aprendizagem este trabalho tem como objetivo entender o contexto das situações nas quais o erro se faz presente nas respostas dos alunos, especificamente em questões envolvendo Análise Combinatória e conhecer as dificuldades encontradas pelos discentes no determinado conteúdo.

Como base deste trabalho utilizaremos a pesquisa Análise de Erros cometidos por discentes de Curso de Licenciatura em Matemática das Universidades Baianas (BORTOLOTI, et. all, 2007)[1], pois a mesma, nos fornece material para análise, objetivando identificar quais são os tipos de erros dos estudantes das universidades estaduais baianas em relação à matemática da educação básica. O projeto buscou uma maneira de discutir as dificuldades e erros dos discentes das licenciaturas em matemática usando a análise de erros. Para isso foram aplicados dois testes investigativos aos alunos do 1º e 6º semestres, em 2010 e 2011, respectivamente.

O teste I abrangeu conteúdos como: função, conjunto, geometria plana e combinatória, e ao corrigir os testes verificou-se que entre as questões com maior índice de erros, estava a questão que envolvia o conteúdo análise combinatória, como apresenta o quadro abaixo.

QUADRO 1 – Quantificação das questões do Teste I

---

[1] Ao nos referirmos a esta pesquisa utilizaremos a sigla PAE- Projeto de Análise de Erros.

	Corretas		Erradas		Não respondidas	
	1º s.	6º s.	1º s.	6º s.	1º s.	6º s.
1ª questão (função)	0	1	30	11	7	1
2ª questão[2] (função)	3,8	5,3	8,25	4,8	26,6	3,2
3ª questão (conjunto)	12	6	25	7	0	0
4ª questão (função, geometria e operações)	3	1	13	8	21	3
5ª questão (semelhança de triângulos)	0	0	23	5	14	8
6ª questão (Análise Combinatória)	0	0	**34**	**12**	3	1

Fonte dos dados: Projeto de Pesquisa: Análise dos erros cometidos por discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas- PAE (2010).

Esses resultados fez surgir o problema que impulsionou este trabalho, que é a análise da produção escrita, em questões envolvendo análise combinatória. Principalmente no que pode-se inferir sobre o princípio multiplicativo, permutação, arranjo e combinação a partir das resoluções dos alunos do 1º e 6º semestres dos licenciandos em matemática da UESB, campus Vitória da Conquista. Com o objetivo de analisar as resoluções, identificando o que

[2] Os dados são resultado de uma média, pois essa questão apresenta cinco perguntas.

sabem e o que não sabem sobre os conceitos: princípio multiplicativo, permutação, arranjo e combinação.

Entrevistas com professores do ensino básico foram feitas e a análise do livro didático usado pelos professores entrevistados também fizeram parte deste trabalho, objetivando compreender como os professores dizem ensinar esses conceitos e a abordagem que é feita no livro didático.

O trabalho foi estruturado da seguinte maneira: na introdução tem-se o erro no processo de ensino aprendizagem, sobre os testes do PAE e seus resultados, especificamente em questões que envolvam análise combinatória. Em seguida, foi feito um rápido retrospecto sobre os precursores da análise de erro, sobre a avaliação em relação ao erro e sobre análise combinatória no ensino médio. Relato os procedimentos metodológicos empregados no Trabalho de Conclusão do Curso - TCC, precedido à análise de dados e por fim as considerações finais.

Vivenciando alguns dos muitos problemas, que diversos estudantes de cursos de licenciatura em matemática enfrentam na vida acadêmica em relação ao erro, e através do PAE, passei a entender que, o erro poderia dizer tanto ou mais do que o acerto no contexto ensino - aprendizagem. Trabalhando com este tema, estaria também superando dificuldades e quebrando velhos conceitos absorvidos ao longo dos meus anos escolares. O conteúdo de análise combinatória foi de meu interesse, pois, além de ser um conteúdo trabalhado formalmente apenas no ensino médio, como diz Pessoa e Borba (2009) ele se tornaria atraente para muitos por suas várias formas de pensamentos que faz com que possamos responder questões envolvendo análise combinatória, e como nos diz Vieira (2007) são problemas aparentemente simples mas que exigem uma organização e engenho para o encontro da solução.

2. Revisão Bibliográfica.

2.1Uma breve abordagem sobre os erros.

A análise da produção escrita, seja ela representativa de acertos e erros é uma tendência em educação matemática, esta recebeu contribuições significativas de outras áreas, como a filosofia, sociologia, psicologia, educação entre outras. A psicologia foi uma das áreas que nos "forneceu" pioneiros no trabalho com relação à análise de erros (CURY, 2008).

Cury (2008) faz uma abordagem a respeito dos principais pesquisadores para o desenvolvimento da análise de erros, começando por Thorndike e seus colaboradores, nos Estados Unidos, final do século XIX, que iniciaram investigações a respeito das dificuldades relacionadas com problemas de aritmética, quando os métodos baseados na repetição começou a ser criticado por outros psicólogos. Quando me referi aos pesquisadores: Thorndike (1936); Hadamard (1945); Krutetskii (1976); Borasi (1996) e Brousseau (1983), todos esses foram citado por Cury (2008).

Segundo Cury (2008) Hadamard ao se referir aos matemáticos, quando cometem erros, logo percebem e os corrigem. Para esta autora Hadamard é considerado um dos pioneiros da análise de erros, ele mostrou a importância da psicologia para entender os processos de criação e descoberta dos matemáticos. Krutetskii na Rússia "trilhou" um novo caminho para as pesquisas sobre a produção dos alunos, ele enfatizava o processo e não o produto final, dessa forma a análise qualitativa começou a ter mais importância na análise dos dados, assim seria possível aproveitar os erros para poder questionar e auxiliar os estudantes a repensar ou refazer o conhecimento.

Brousseau, pesquisador francês, acreditava que o erro pode ser considerado com um conhecimento que teve seu sucesso em outra situação. Ele enfocava a ideia de obstáculo com a noção de erro, o obstáculo pode ser considerado como conhecimento, assim o aluno constrói esse conhecimento e o relaciona com outros em diferentes situações, tentando adaptá-los ao novo contexto e resistindo em abandoná-lo.

Por fim, podemos falar em Borasi, que fez questionamentos importantes, a respeito de resultados considerados errados e as circunstâncias em que esses resultados poderiam ser considerados corretos. Muitas dessas concepções abordadas por esses precursores servem de base para muitas pesquisas na área de análise de erros em matemática.

Para entendermos mais a respeito das situações em que os erros se fazem presentes nas respostas dos alunos, devemos primeiramente entender o que deve ser considerado como erro.

O significado de erro segundo o Dicionário Aurélio pode ser considerado como juízo falso; desacerto, engano. Entretanto, para Cury (2008), Brousseau, diz que o erro não é efeito da ignorância, e que ele teve seu sucesso seu interesse, mas que agora se revela falso. A definição do dicionário e com o que Brousseau considerava erro, são próximas da concepção de Cury (2010, pg. 2) propondo que o erro seja entendido como o que não corresponde à produção esperada por um aluno ou professor, em determinada questão, visto que estes já tenham tido contato com o conteúdo solicitados na referida questão ou em suas estratégias de resolução.

Com a noção de erro apresentada, podemos entender um pouco mais a respeito da análise de erros. Análise da produção escrita abrange os acertos e erros, quando o enfoque é o erro podemos utilizar esse material na vertente da pesquisa e também no ensino. Como pesquisa podemos citar livros publicados abordando essa temática, exemplo Cury (2008) livro voltado principalmente para quem busca iniciar pesquisas, essa área, com metodologias, etapas de pesquisa entre outros tópicos. Já quando se fala em ensino, pode-se incluir as possibilidades de metodologias para o uso da análise de erros no ensino da matemática, por exemplo em Cury (2008, p. 87), como o erro comum aos alunos de cálculo ao derivar a função $f(x) = \frac{2x - x^2}{x - 3}$, expressando a derivada como $f'(x) = \frac{2-2x.x-3-2x-x^2.1}{(x-3)^2}$, e analisado o erro pode- se preparar atividades que façam os alunos explorarem esse erro e refletir sobre ele.

Com isso muitos professores utilizam os erros como uma alternativa para ajudar os alunos a resolverem corretamente grande maioria das questões envolvendo matemática. Pensa-se (os professores, não todos) que o aluno deva errar para que este possa construir o conhecimento por meio do seu erro, deixando o erro ocorrer sem nenhuma observação. O que acontece geralmente em correções de atividades avaliativas, é que muitos professores ao identificar questões com respostas erradas, simplesmente utilizam o sinal de errado sem tentar explicar o que realmente aconteceu para que a resposta estivesse incorreta e quais os motivos que levaram aquela determinada resposta.

Com a tentativa de solucionar o erro o professor prioriza o acerto, corrigindo as questões, sem perceber que a resposta errada pode ser ocasionada por várias razões, ou simplesmente quando detectado o erro, pretende-se explicar o conteúdo novamente, com a falsa certeza de que a repetição irá fazer, com que o erro cometido para resolver determinada questão seja eliminado e o aluno não venha a repetir o mesmo erro. Para Cury (2010) se essa ideia fosse correta, não ocorreriam os erros sistemáticos, pois se estes fossem remediados por uma nova explicação, já teriam sido extintos.

Para Pinto (2000) a sala de aula é um dos ambientes adequados para as condições de existência do erro. Em sala de aula o professor observará que o erro pode acontecer de várias maneiras, como na correção de uma atividade na qual o professor poderá verificar se o erro está relacionado há um conceito mal formulado ou a um erro banal.

Cury (2008) enfatiza que a ênfase da avaliação dos estudantes não deveria estar no produto e sim no processo, com isso os erros discutidos seriam fontes de novas aprendizagens. Alguns erros são tão comuns, que fazem parte do histórico de erros de alguns professores de matemática. Geralmente, quando tenta-se trabalhar tais erros, dificilmente focaliza-se a origem desses erros.

O trabalho com análise de erros não é uma opção fácil. Exige iniciativa e esforço por parte dos professores. Eliminar o erro não é mais suficiente, é importante que o aluno tenha consciência do erro e o confronte, mas ele não consegue fazer isso sozinho, o professor precisa intermediar, para assim aprender com o erro.

Cury (2008) coloca que os erros podem ser transformados em um novo problema e instigar os docentes e discentes para encontrar novas resoluções, fazendo com que ambos questionem seus conhecimentos, pois o simples fato de corrigir para eliminar o erro é desestimulante.

Os professores precisam desenvolver atividades que estimulem os alunos a novos desafios e que estes sempre busquem superar suas dificuldades, assim deve-se ter mais atenção aos métodos avaliativos. Erro e avaliação estão diretamente ligados, é impossível falar em avaliação sem falar em erro e vice versa. Quando se fala em avaliação, em cursos de ciências exatas, principalmente em licenciatura em matemática, muitas são as barreiras enfrentadas,

tanto para alunos como para professores, no que tange a avaliação e é sobre esse tema que passarei a discutir.

2.2.Avaliação

Na grande maioria dos cursos de licenciatura em matemática, geralmente ao término de cada unidade é aplicada uma avaliação que irá envolver os conteúdos trabalhados até determinado tempo. São estas avaliações que permitirão que os professores façam a análise do desempenho de cada aluno e ao fim da disciplina é calculada uma média das notas das avaliações aplicadas, resultando na aprovação ou reprovação do discente.

Um dos significados de avaliação, segundo dicionário Aurélio é o termo análise, e, analisar com mais precisão a produção escrita dos discentes pode ser um passo importante para identificação das maiores dificuldades dos mesmos. Devemos lembrar permanentemente que, as avaliações são mais do que procedimentos sistemáticos de avaliar a capacidade de determinado aluno em alguns conteúdos, através das avaliações os professores tem um contato mais imediato com as possíveis dificuldades dos alunos.

Esse sistema de avaliação às vezes torna-se ineficaz, pois não se faz um acompanhamento das dificuldades ou dos progressos dos alunos. Como em Hoffmann (1998), alguns cursos de licenciatura como Matemática, Física e Química, tem reprovação de 70% a 80% dos alunos em disciplinas básicas.

Deve-se entender que o avaliador, no caso o professor, carrega consigo sua formação acadêmica e suas experiências, e no caso das licenciaturas enfrenta-se a rigidez de pesquisadores sérios e altamente competentes, mas que se negam a discutir sua prática pedagógica, como nos diz Hoffmann (1998), pois essa situação poderia abalar o prestígio acadêmico.

Em outros casos, muitos professores do ensino superior não apresentam formação específica em educação e

> A maioria deles, competentes nas suas especializações desconhecem teorias de conhecimento, de currículo e outras de natureza pedagógica que embasem o seu fazer docente junto a população de jovens e adultos. (HOFFMANN,1998, p. 76)

Por isso mitos como que “somente o sistema de atribuição de notas e cálculo de medidas é justo e preciso na aferição da aprendizagem dos estudantes” (HOFFMANN, 1998, pg. 77) são perpetuados ao longo dos tempos por professores em muitas universidades.

Mas, como mudar essa situação em relação à prática avaliativa? Infelizmente não se tem uma receita pronta para uma nova prática, cada docente deve descobrir os ingredientes necessários para que sua prática possa tornar-se mais adequada às novas exigências da educação.

Muitas barreiras serão enfrentadas para a compreensão de uma nova concepção em avaliação, muitas destas barreiras se relacionam com o erro, que está presente em grande partes das produções escritas dos discentes. A análise de erros pode ser uma das muitas alternativas para fazer com que avaliação tenha um nova característica, assim diferenciando-se da tradicional.

No estudo de Pinheiro e Sá (2007), que realizaram uma investigação com a colaboração de 20 professores de Ensino Médio de Belém do Pará, no qual os pesquisadores tinham como questionamento principal: *Qual era a prática pedagógica predominante no ensino de análise combinatória no Ensino Médio*? Foi observado que a prática predominante era partir de definições e, em seguida, apresentar exemplos, propriedades e exercícios.

Como a análise combinatória para Morgado, Pitombeira de Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas, o professor ao preparar uma avaliação, uma atividade, deve levar em consideração as diversificadas formas de pensar do aluno, sem desmerecer nenhumas delas e buscar metodologias mais eficiente para a prática docente, como por exemplo a modelagem matemática. Apresento a seguir uma reflexão sobre análise combinatória que é objeto desse estudo.

2.3 Rápida Análise da Análise Combinatória no ensino.

Segundo Bianchini e Paccola (2000) a análise combinatória é um ramo da matemática que tem como objetivo o cálculo das possibilidades, com o uso de determinadas técnicas para resolução de uma determinada situação. Análise combinatória, tem origem no tempo de

Arquimedes, que possivelmente terá sido o pioneiro neste ramo da matemática, quando propôs o problema Stomachion, que consistia em determinar de quantos modos poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado. Mas análise combinatória também desenvolveu-se através de motivos como os jogos de azar e na necessidade de resolver problemas de contagem, que estão relacionados a situações que envolvam probabilidade.

A análise combinatória está presente em diversas áreas do conhecimento, como a elaboração de planos de produção, de programação linear, de estatística, biologia molecular entre outros, mas são utilizados também em problemas de matemática pura, como na teoria no estudo dos fundamentos da geometria como colocado por Pessoa e Borba (2010).

A análise combinatória está diretamente ligada à combinatória e esta é para Borba (2010) conhecida como a *arte de contar*, pois em situações que a envolvam , enumera-se maneiras possíveis de combinar dados objetos. Portanto, Pessoa e Borba (2010) colocam que a combinatória:

> Permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um. (p.2)

Essas autoras colocam que o raciocínio combinatório pode ser entendido como um tipo de pensamento que envolve a contagem, mas que certamente irá além do simples fatos de enumerar elementos de um conjunto. O desenvolvimento do raciocínio combinatório é de total importância, pois se encontra presente em situações cotidianas, como em situações classificatórias.

Conteúdos como produto cartesiano, que faz uso do raciocínio combinatório, são introduzidos desde as séries iniciais do ensino básico, por isso o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) prima que: “O raciocínio combinatório é uma das ideias da multiplicação, trabalhada desde as séries/anos iniciais, que se revela importante na continuidade dos estudos e nos cálculos probabilísticos” (BRASIL, 2008, p.122).

Na pesquisa realizada por Pessoa e Borba (2010) que faz uma análise de respostas dos alunos do ensino fundamental I e II ao ensino médio de escolas públicas e particulares com

questões que envolviam raciocínio combinatório (envolvendo produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), verificou-se que mesmo sem ter o conteúdo formalizados alunos dos anos iniciais já conseguem desenvolver o raciocínio combinatório, independentemente do tipo de escola, seja ela pública ou particular. Na educação básica, são apresentados, geralmente problemas de enumeração, sendo que os tipos de situações são determinadas pelo nível de ensino.

No ensino médio trabalha-se principalmente as permutações (todos os elementos do conjunto são utilizados, apenas a ordem da apresentação dos mesmos varia), arranjos (cuja a ordem dos elementos enumerados e escolhidos gera possibilidades distintas) e por fim as combinações (a natureza dos elementos enumerados e escolhidos gera possibilidades distintas).

As produções escritas dos discentes do 1º e 6º semestres do curso de licenciatura em matemática da UESB, na questão que envolve conteúdos de análise combinatória serão o alvo deste trabalho, no teste aplicado pelo PAE.

Ao ingressar em um curso de licenciatura em matemática, espera-se que o estudante tenha conhecimento dos conteúdos trabalhados no ensino médio, e probabilidade análise combinatória são alguns desses, pois no decorrer do curso o estudante irá se deparar com disciplinas que irá utilizar o conteúdo análise combinatória.

Porém, o que ocorre com muita frequência, é a dificuldade em resolver questões envolvendo análise combinatória. Mas, como remediar tal dificuldade e preparar os futuros professores já que as faculdades partem da suposição de que estes “conceitos” já deveriam ter sido adquiridos por estarem em um curso superior?

Pinheiro e Sá (2007) em pesquisa realizada com colaboração de professores do ensino médio de Belém do Pará, concluem uma forte tendência em apresentar fórmula e seguir a aplicação das mesmas, embora tendo professores com especialização na área de matemática ou da educação.

Quando se fala em produção escrita, especificamente tratando-se dos erros, não significa que sua origem seja falta de conhecimento e sim a expressão de conhecimentos mal formados. Assim, o erro não deve ser individualizado, não é culpa do professor e não é

culpa do aluno, deve-se analisar todo o contexto, como coloca Pinto (2000). A universidade deve ter espaço para analisar e pensar o erro como uma fonte de novos aprendizados. Na graduação podemos entender os erros e superá-los, passando a considerar os erros cometidos como fonte para uma nova forma de ensinar e utilizá-lo para ajudar os alunos no seu desenvolvimento.

3. Procedimentos Metodológicos

Esta pesquisa é qualitativa e de campo, pois segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 106) a pesquisa de campo

> é a modalidade de investigação na qual a coleta de dado é realizada no local onde o problema ou o fenômeno acontece e pode dar-se por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa ação, aplicação de questionário, testes, etc.

Justifico porque esta pesquisa é de campo, pois foi uma pesquisa cuja coleta de dados, se deu em campo, no caso no curso de licenciatura em matemática da UESB, por meio de um teste. E a entrevista que foi realizada com os professores da educação básica, ensino médio.

O campo em que foi realizada a pesquisa, foi a Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB *campus* Vitória da Conquista e os sujeitos participantes da pesquisa foram os alunos do 1º e 6º semestres com matrículas referentes aos anos 2009.1 e 2007.1, respectivamente do curso de licenciatura em matemática. No primeiro teste aplicado o número de alunos participantes foi 50 alunos, sendo 37 referentes a matrícula 2009.1 (1º semestre) identificados como alunos X, e 13 com a matrícula 2007.1 (6º semestre) identificados como alunos Y.

Também foram sujeitos desta pesquisa 02 professores do ensino médio, que identifiquei como professor 1 e professor 2. Estes foram escolhidos por trabalharem no ensino médio e consequentemente ensinar o conteúdo de análise combinatória, pois queria saber como desenvolviam este ensino.

O primeiro instrumento analisado foram os testes, pois estes nos permitiu aprofundar a respeito das dificuldades e erros dos alunos em maior profundidade. Suas resoluções foram

os guias que delimitaram os caminhos que percorremos para uma análise mais consistente sobre os erros. No primeiro teste a questão explorada foi adaptada do vestibular da UESC-Universidade Estadual de Santa Cruz (2008), seu enunciado dizia: Três estudantes chegaram juntos a uma cidade para participar de um congresso e não tento feito reservas com antecedência, constataram que em cada hotel poderiam hospedar até dois estudantes. Sabendo que há apenas quatro hotéis na cidade calcule o número máximo de possibilidades de hospedagem. Pensamento combinatório, noções sobre contagem, arranjo e combinação eram exigidos dos alunos para a resolução da questão.

Também foram utilizados como instrumentos de coleta, a entrevista com professores do ensino médio, de escolas públicas. A escolha da entrevista se deve ao fato "...de permitir uma obtenção mais direta e imediata dos dados, serve para aprofundar o estudo..." (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 121) e por também ser uma conversa mais direta com um propósito bem delimitado. O objetivo da entrevista é tentar compreender e relatar como os professores abordavam os conteúdos de análise combinatória. Estes assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido, participando voluntariamente do referido estudo.

A entrevista aplicada aos professores foi semi-estruturada, que pode ser entendida como:

> Essa modalidade é muito utilizada nas pesquisas educacionais, pois o pesquisador, pretendendo aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo, de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem dos mesmos e, inclusive, formular questões não previstas inicialmente (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 121)

Por fim, o último instrumento analisado foi o livro didático usado pela escola que os professores entrevistados ministram as aulas. Na busca de possíveis respostas para questionamentos, como: De que maneira o assunto é explicado? Como é iniciada a definição de princípio multiplicativo, permutação, arranjo e combinação? A respeito dos exercícios: Será que o livro incentiva um aprendizado baseado na memorização de fórmulas, ou busca o entendimento para a partir, disso aplicar a fórmula ou até não recorrer a elas? São problemas do cotidiano ou situações específicas?

3.1Análise de Informações

Nesta etapa do trabalho será relatado como foi feita a análise das informações. Fiorentini e Lorenzato (2006) nos coloca que deve-se ler e reler os registros atentamente com o intuito de levantar as principais informações e em seguida organizar essas informações em categorias. Para Deslandes (1994) a palavra categoria se refere a:

> Um conceito que abrange elementos ou aspectos com características comuns ou que se relacionam entre si. Essa palavra está ligada à ideia de classe ou série. As categorias são empregadas para se estabelecer classificações. (p.70).

As categorias do teste já haviam sido estabelecidas pelo PAE, segue o esboço das categorias definidas para a análise da 6ª questão:

1- *Resoluções Corretas:* Entendemos resoluções corretas, conforme resolução institucional;

2- *Resoluções Erradas*: Foram agrupadas da seguinte forma:

1º Grupo: Tentaram responder, sem sucesso, aos dois casos de resolução. Esses dois casos se referem a alojar os estudantes: um por hotel e, dois em um hotel e o 3º estudante em outro hotel;

2º Grupo: Identificação de padrões de contagem ou princípio multiplicativo. Este grupo pode ser exemplificado pelas estratégias:

1ª estratégia: Apenas consideraram um estudante em cada hotel;

2ª estratégia: Apenas consideraram dois estudantes em um hotel e um no outro hotel;

3ª estratégia: Apenas consideraram dois estudantes em cada hotel;

3º Grupo: Utilizaram como estratégia de solução a permutação;

4º Grupo: Usaram fórmula(s) de maneira errada(s). Sendo que estas fórmulas se referem à combinação ou arranjo.

5º Grupo: Não recorreram a conceitos referentes ao assunto Análise combinatória (aqui entram as questões como regra de 3, potência, uso das operações, etc.).

3- *Não Respondeu:* Esta categoria compreende as questões:

1º grupo: Deixadas em branco;

2º grupo: Aquelas em que o aluno não resolveu a questão, mas escreveu: “não sei”; “não consigo responder”; “não sei como continuar”; “esqueci a fórmula”, etc.

QUADRO 2: Categorias do PAE

Categorias	grupos	estratégias
Resoluções Corretas		
Resoluções erradas	1º grupo	
	2º grupo	1ª estratégia
		2ª estratégia
		3ª estratégia
	3º grupo	
	4º grupo	
	5º grupo	
Não respondeu	1º grupo	
	2º grupo	

Fonte : Elaboração Própria

Minayo (1992) apresenta passos que ajudam no desenvolvimento do trabalho como ordenar os dados, mapear os dados obtidos no trabalho de campo.

A fundamentação teórica contribuiu para responder aos questionamentos que foram feitos, e rever as categorias. Por fim a análise final é colocada da seguinte maneira:

> Neste momento, procuramos estabelecer articulações entre os dados e os referenciais teóricos da pesquisa, respondendo às questões da pesquisa com base

> em seus objetivos. Assim promovemos relações entre o concreto e o abstrato, o geral e o particular, a teoria e a prática.(MINAYO, 1992, p.78)

Porém, para refinar a análise feita, este trabalho criou quatro subcategorias, e as resoluções dos sujeitos foram classificadas, baseadas nas possíveis formas de resolver a questão :

- Princípio Multiplicativo – Ao que recorrerem ao princípio multiplicativo, permutação ou fatorial para responderem a questão.
- Emprego das Fórmulas – Utilizaram fórmulas de arranjo e combinação para resolverem a questão.
- Enumerar todos os eventos – Alunos que tentaram enumerar todas as 60 possibilidades de hospedagem.
- Não recorreram a conceitos referentes ao conteúdo Análise combinatória – Utilizaram outros métodos de resolução (exemplo: regra de três, potenciação, etc.).

E assim reelaborei as categorias que foram utilizadas neste trabalho:

QUADRO 3: Categorias e subcategorias

Categorias	**subcategorias**
Resoluções corretas	
Resoluções Erradas	Princípio Multiplicativo
	Emprego das fórmulas
	Enumeração de todos os eventos
	Não recorreram a conceitos referentes a análise combinatória.
Não respondeu	

Fonte: Elaboração Própria

Depois foram analisadas as entrevistas dos professores do ensino médio, que foram gravadas e transcritas. A entrevista continha perguntas sobre a formação do professor; a

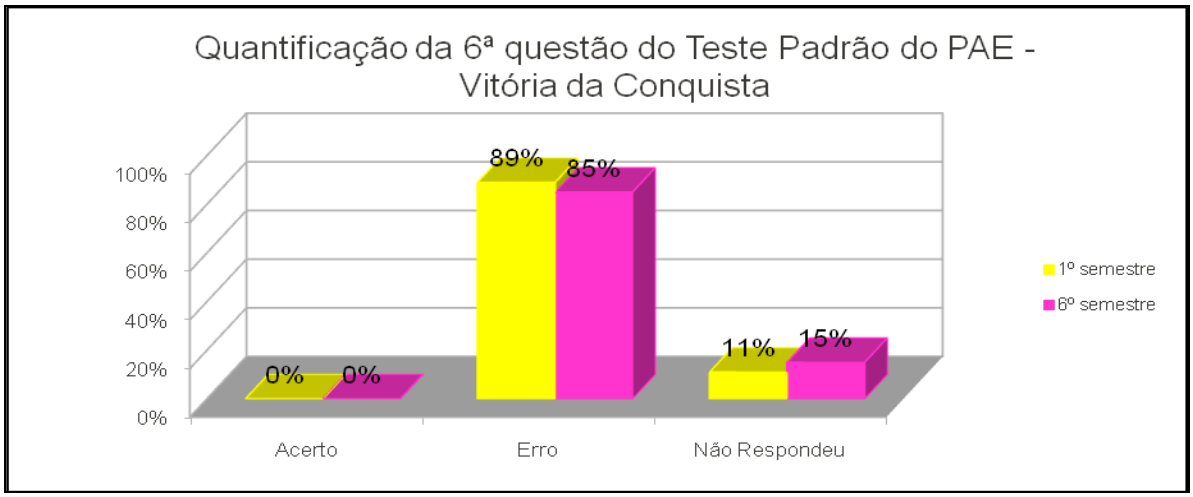
metodologia e recursos empregados para ensinar análise combinatória, especificamente permutação, arranjo, combinação e princípio multiplicativo e ainda se existem dificuldades para os alunos e professores aprenderem e ensinarem, respectivamente, esse assunto. No trabalho relacionaremos as respostas dos professores com os temas de cada subcategoria: Princípio multiplicativo; Emprego das Fórmulas; Enumeração de todos os eventos; Não recorreram a conceitos referentes a análise combinatória.

Por último, foi o livro didático usado no ensino médio do ensino público. Os objetivos eram verificar como o livro didático abordava o conteúdo, se enfatizava o uso de fórmulas ou apresentava meios para o entendimento dos problemas até chegar às fórmulas. Analisamos primeiro a parte histórica, de abordagem do conteúdo, exercícios resolvidos, exercícios propostos e o manual do professor.

4. Análise dos Resultados

Ao analisarmos as 50 soluções dos estudantes do *campus* de Vitória da conquista, os números encontrados a respeito da 6º questão é preocupante, pois nenhum dos alunos conseguiu acertar.

Gráfico 1 - Quantificação da 6ª questão do Teste Padrão do PAE - Vitória da Conquista
Fonte: Coordenação Geral do PAE



Com a ausência de acertos nesta questão, uma análise mais aprofundada foi feita a partir das resoluções consideradas como erradas. Foram agrupadas 44 respostas erradas, como segue o quadro abaixo. Em seguida discutirei cada subcategoria.

QUADRO 4: Respostas Erradas

Respostas erradas		
Subcategorias	**1º semestre**	**6º semestre**
Princípio multiplicativo	**4**	**1**
Emprego das Fórmulas	**2**	**3**
Enumeração dos eventos	**18**	**5**
Não recorreram a conceitos referentes a análise combinatória	**9**	**2**
Total	**33**	**11**

Fonte : Elaboração Própria

4.1Princípio Multiplicativo

A primeira estratégia de resolução da 6ª questão usava como principal ferramenta o princípio multiplicativo. Mas para entendermos a resolução é preciso primeiramente compreender o conceito do princípio multiplicativo, que também pode ser entendido como princípio fundamental da contagem:

> Suponhamos que um evento seja constituído de duas etapas sucessivas. A 1ª etapa pode ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a 2ª etapa pode ser realizada de m maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por n x m. Esse princípio, pode ser generalizado para ações constituídas de mais de duas etapas sucessivas. (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PERIGO; ALMEIDA, 2004, p. 307).

O que nos chama atenção é que o princípio multiplicativo é o pilar para a resolução dos muitos problemas de análise combinatória. Pessoa e Borba (2010) nos colocam que os

problemas básicos que envolvem raciocínio combinatório, trabalhados no estudo com alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º do Ensino Médio, podem ser solucionados, dentre outras formas, por meio do princípio multiplicativo.

Compreendido o conceito e a importância do princípio multiplicativo, a 1ª estratégia de resolução segue.

Resolução 1

_____ _____ _____ _____ hotéis

_____ _____ _____ estudantes

Existem duas formas de distribuir os estudantes.

- Colocando um estudante em um hotel temos:

4 possibilidades para o primeiro estudante

3 possibilidades para o segundo

2 possibilidades para o terceiro

4 .3 .2 = 24 possibilidades

- Agora colocando dois estudantes em um hotel e um no outro, temos:

4 possibilidades para a dupla

3 possibilidades para o 3º estudante

Como esta distribuição pode ser feita de 3 formas diferentes temos

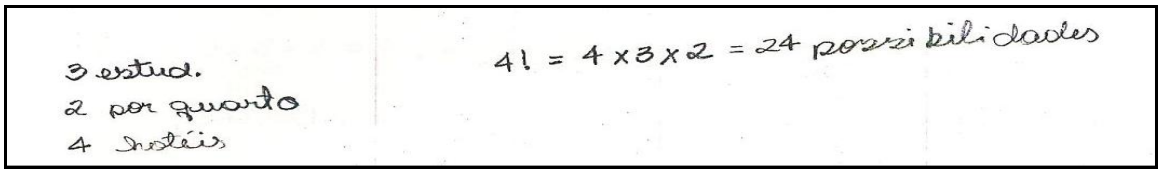
(4.3)3 = 36 possibilidades.

Como existem duas formas de agrupar os estudantes somando-as temos: 24 + 36 = 60

Das 44 respostas erradas apenas 5 alunos que utilizaram o princípio multiplicativo como método de resolução da questão, 4 alunos são do 1º semestre e 1 do 6º.

O aluno V16X é um exemplo de resposta dos discentes do 1º semestre. Usando o fatorial, ele tenta encontrar o resultado, não levando em consideração as especificações do problema da questão.

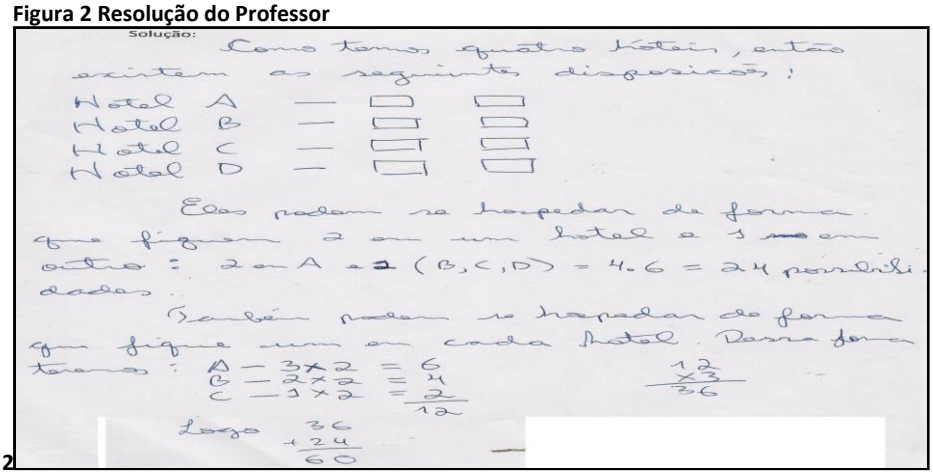
Figura 1Resposta do Aluno V16X



Muitas das falhas encontradas estavam relacionadas à incorreta aplicação do princípio multiplicativo, já que esta era uma ferramenta importante na resolução da questão. Em estudo realizado por Rocha (2007) , intitulado *Investigando a aprendizagem de análise combinatória simples em uma turma de licenciandos em Matemática submetida a uma prática de ensino tradicional*, no qual participaram 17 alunos do sexo masculino, sendo que 10 participaram de todo processo de intervenção. Observou-se que apenas 20% dos alunos conseguiram definir ou exemplificar corretamente o princípio multiplicativo. Esses resultados apontam como é grande a dificuldade dos alunos do ensino superior em compreender e aplicar ao princípio multiplicativo.

Em relação aos professores do ensino médio entrevistados, estes também validaram a importância do princípio multiplicativo como ferramenta importante para a resolução de questões que envolvam análise combinatória. Quando perguntados: Quais as estratégias utilizadas por você e alunos para resolver questões de análise combinatória? o professor 1, mesmo não tendo respondido a questão pelo princípio multiplicativo, em um trecho de seu depoimento coloca que "[...]tento transparecer desde o começo, que a gente resolve muita coisa quase tudo, com o princípio multiplicativo[...]"(entrevista, 2011); o professor 2 também ressalta que tenta "[...] deixar claro também que essas fórmulas de arranjo e combinação elas, as vezes em algumas situações, elas não são eficientes, é preciso usar o princípio multiplicativo mesmo [...]"(entrevista, 2012). Essa declaração nos faz pensar que este professor ao resolver questões de análise combinatória, geralmente o faz usando as fórmulas, por ser um método mais rápido, porém quando uma questão demanda um pensamento mais elaborado ele parte primeiramente para o princípio multiplicativo. Ao responder a mesma questão aplicada no teste do PAE, o professor 2 utilizou o princípio multiplicativo, chegando ao resultado correto.

Figura 2 Resolução do Professor


Solução:

Como temos quatro hotéis, então existem as seguintes disposições:

Hotel A — ☐ ☐
Hotel B — ☐ ☐
Hotel C — ☐ ☐
Hotel D — ☐ ☐

Eles podem se hospedar de forma que fiquem 2 em um hotel e 1 em outro: 2 em A e 1 (B, C, D) = 4 . 6 = 24 possibilidades.

Também podem se hospedar de forma que fique um em cada hotel. Dessa forma temos:
A — 3 × 2 = 6
B — 2 × 2 = 4
C — 1 × 2 = 2
12

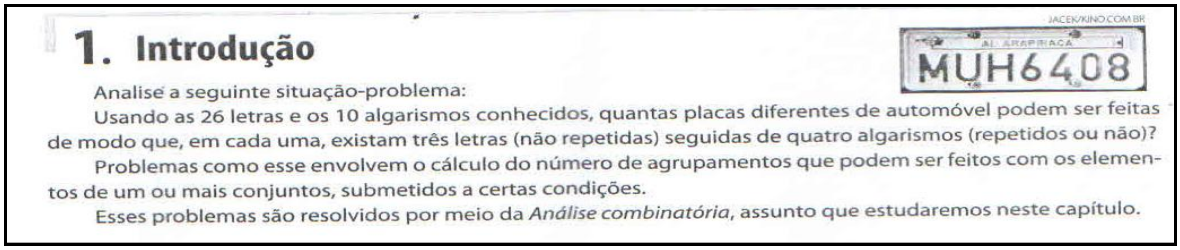
12 × 3 = 36

Logo 36 + 24 = 60

2

O livro didático, o mesmo usado por estes professores, também foi analisado neste trabalho. O livro didático apresentou inicialmente um pouco da origem da análise combinatória, expôs alguns problemas que envolviam estudantes e sugeria a estes que estes estimassem ou dessem palpites sobre as respostas. O livro pedia na introdução que os alunos analisassem um problema, para a composição de uma placa de automóvel, que pode se resolvido usando a análise combinatória.

Figura 3 Introdução


1. Introdução

Analise a seguinte situação-problema:

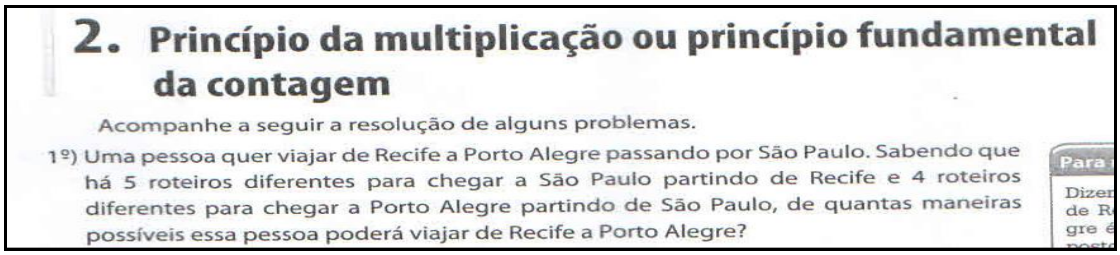
Usando as 26 letras e os 10 algarismos conhecidos, quantas placas diferentes de automóvel podem ser feitas de modo que, em cada uma, existam três letras (não repetidas) seguidas de quatro algarismos (repetidos ou não)?

Problemas como esse envolvem o cálculo do número de agrupamentos que podem ser feitos com os elementos de um ou mais conjuntos, submetidos a certas condições.

Esses problemas são resolvidos por meio da *Análise combinatória*, assunto que estudaremos neste capítulo.

A partir da resolução do problema abaixo, que envolve o cálculo de possibilidades de roteiros de uma viagem de Recife a Porto Alegre, o livro começa a falar do princípio multiplicativo. Seguem-se situações-problema, que também podem ser resolvidos de forma semelhantes ao primeiro para assim depois generalizar chegando a definição do princípio.

Figura 4 Problemas para introduzir o conteúdo princípio multiplicativo



2. Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

Acompanhe a seguir a resolução de alguns problemas.

1º) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Exercícios resolvidos com o princípio são expostos e por fim os exercícios propostos, estes apresentam questões que se assemelham com os exercícios resolvidos. A maior parte dos problemas refere-se a: situações como lançamento de moedas, combinação de elementos do cotidiano e a números que podem ser formados. Nesta parte do livro a abordagem é simples e rápida, pois os problemas ainda não exigem do aluno um raciocínio mais elaborado como na questão aplicada no teste I, na qual o aluno se deparou com duas possibilidades de hospedagem.

O manual do professor, que encontra-se no final do livro , também mostrou como podem ser resolvidos alguns problemas de análise combinatória seguindo alguns passos como: Compreender o problema; Planejar a solução; Executar o que foi planejado e Verificar se a resposta está correta. É interessante, essa forma de pensar ao responder uma questão pois como vimos nos testes de alguns alunos, não é apenas o fato de usar o princípio multiplicativo errado mas também não interpretar corretamente o problema. Também no manual o professor pode encontrar uma seção que apresenta atividades suplementares para cada conteúdo trabalhado no livro, que podem ser utilizadas em avaliações, fixações ou para revisões. Essa parte do livro de maneira resumida alerta o professor da variedade de situações-problema que podem o ocorrer e pelo fato de conter poucos padrões, o que torna os problemas de contagem uma parte desafiadora da matemática.

Para responder questões usando o princípio multiplicativo é necessário interpretar todas as minúcias do problema, e os alunos de Vitória da Conquista, especificamente os alunos que resolveram usando o princípio,não entenderam que os estudantes poderiam ser hospedados de duas formas. Muitos dos problemas em análise combinatória podem ser resolvidos

usando princípio multiplicativo. O livro pode ser, neste caso um bom aliado para os professores ajudarem os alunos a resolverem questões usando o princípio, como por exemplo seguindo as instruções de como responder uma questão utilizando alguns passos, como citado anteriormente.

Os professores entrevistados delegaram significativa importância ao princípio, assim como o livro o faz, em uma observação feita : "Você pode usar o conceito tanto o conceito de arranjo como o princípio fundamental da contagem para resolve problemas"(DANTE, 2010, p. 282) e Rocha (2007) ressalta que mais importante que memorizar fórmulas é a compreensão do princípio multiplicativo.

4.2 Emprego das fórmulas

A segunda maneira de resolver a questão do primeiro teste, seria solucionar o problema, utilizando as fórmulas de arranjo e combinação.

Primeiramente segue a definição de arranjo e combinação. Para Bianchini e Paccola (2000, p. 390) Dados n elementos distintos, chama-se arranjo simples desses n elementos, tomados p a p, a qualquer agrupamento de p elementos distintos, escolhidos entre os n elementos dados. Combinação para estes autores é definida como: Dados n elementos distintos, chama-se combinação simples desses n elementos, tomados p a p, a qualquer agrupamento de p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados, e que diferem entre si pela natureza de seus elementos (p. 397)

Resolução 2

H = hotel; V = Vaga; E = Estudante, em que: H = 4; E = 3; V = 2

Para o primeiro caso em que temos um estudante em cada hotel. Assim utilizando arranjo simples $A_{H,E}$.

$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!}$ = 4. 3. 2 = 24 maneiras de colocar um estudante em cada hotel;

Para o segundo caso em que temos dois estudantes em um hotel e um no outro o número de maneiras de escolher os dois hotéis será:

$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!}$ = 4 . 3 = 12 e o número de maneiras de escolher os dois estudantes será $C_{3,2}$ = $\frac{3!}{2!1!}$ = 3

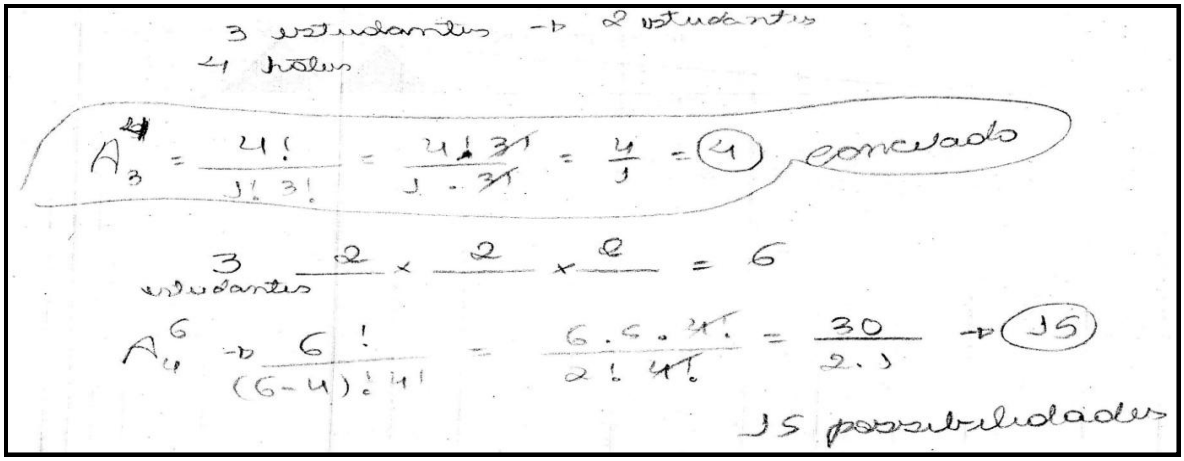
Então, para o segundo caso, temos: $A_{4,2}$. $C_{3,2}$ = 12 . 3 = 36

O número total de maneiras será: $A_{4,3}$ + $A_{4,2}$. $C_{3,2}$ = 24 + 36 = 60

Ao analisar o teste foi percebido que os alunos de ambos os semestres a grande maioria não fez uso das fórmulas para resolver a questão ou quando o fez não lembrou corretamente delas, sendo 5 alunos no total, 2 alunos do 1º semestre e 3 do 6º.

O aluno V34X é um representante desta subcategoria, este usa a fórmula de maneira errada ,esta refere-se a arranjo.

Figura 5 Resposta do Aluno V34X

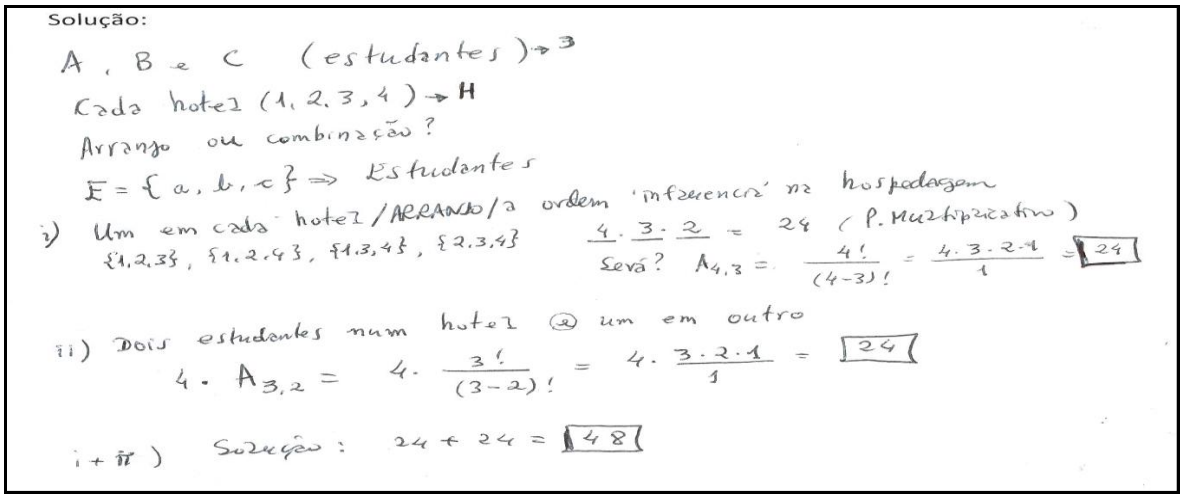


Na busca de resolver a questão os alunos tentaram sem sucesso aplicar as fórmulas e o resultado obtido foi considerado a provável resposta. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2000, p. 46) determinam como competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática "Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, **fórmulas**, tabelas etc.) e vice-versa." (grifo nosso). Em pesquisa realizada por Pessoa e Borba (2010) com alunos do ensino médio, as pesquisadoras observaram que quando os alunos se utilizam de fórmulas o fazem de maneira inadequada, o que se assemelha bastante com os resultados encontrados no teste do PAE.

Uma das perguntas da entrevista, se referia as estratégias utilizadas pelos professores e alunos para resolver as questões de análise combinatória, o professor 1 declarou que os alunos geralmente não utilizam as fórmulas por não gostarem e por acharem outros

métodos mais fáceis como ficou evidenciado em um trecho de sua fala "*mais da metade, grande maioria mesmo eles em geral, eles não gostam de fórmulas, eles preferem resolver sem fórmulas[...]"*(entrevista, 2012). Na resposta do professor 1 ficou evidenciada o uso das fórmulas para a resolução da questão.

Figura 6 Resolução do Professor 1


Solução:

A, B e C (estudantes) → 3

Cada hotel (1, 2, 3, 4) → H

Arranjo ou combinação?

E = {a, b, c} ⇒ Estudantes

i) Um em cada hotel / ARRANJO / a ordem 'interfere' na hospedagem

{1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4} 4 · 3 · 2 = 24 (P. Multiplicativo)

Será? $A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \boxed{24}$

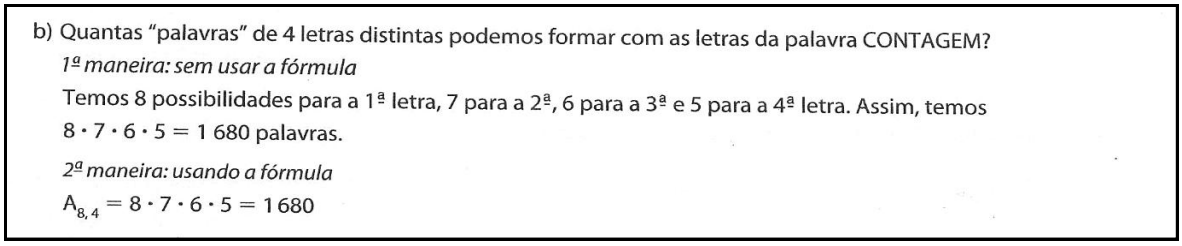
ii) Dois estudantes num hotel ② um em outro

$4 \cdot A_{3,2} = 4 \cdot \frac{3!}{(3-2)!} = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \boxed{24}$

i + ii) Solução: 24 + 24 = $\boxed{48}$

O livro didático quando aborda conteúdos como Permutação, Arranjo e Combinação parte de situações-problema para assim chegar a generalização das fórmulas. Os exemplos de questões respondidas são apresentadas, evidenciando sempre que podem ser resolvidas de duas maneiras: usando as fórmulas e sem a utilização de fórmulas como mostra a figura abaixo.

Figura 7 Resposta do livro página 283


b) Quantas "palavras" de 4 letras distintas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?

1ª maneira: sem usar a fórmula

Temos 8 possibilidades para a 1ª letra, 7 para a 2ª, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra. Assim, temos $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$ palavras.

2ª maneira: usando a fórmula

$A_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$

Fonte: (DANTE, 2010, p. 283)

É interessante essa forma de expor o resultado, pois o aluno pode escolher a melhor maneira de resolver a questão ter uma visão mais ampla a respeito da resolução.

O pequeno número de alunos que utilizaram as fórmula para resolver o problema do PAE faz com que nos questionemos: Será que apenas não se lembraram das fórmulas ou a compreensão foi insuficiente para saber qual fórmula aplicar?

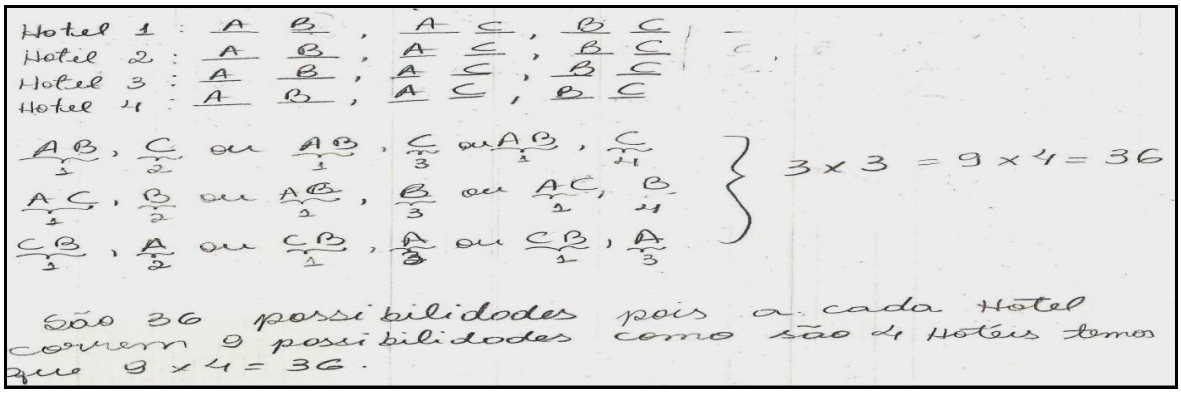
Por isso, sugerimos que, os alunos devem ser incentivados a generalizar o conhecimento, pois se o professor não tomar esse cuidado, como garantirá a compreensão do processo de resolução quando o resultado for um número muito grande?

O primeiro incentivo que o professor deve fazer é o entendimento desses valores (resultados que encontramos), mas em segundo plano é preciso esforço de ambos, professores e alunos para a generalização do problema. As fórmulas são importantes, pois simplificam os cálculos tornando-os mais simples na resolução de muitos problemas e como o livro mesmo traz mais importante do que decorar uma fórmula e aplicá-la é compreender o que esta sendo feito (DANTE, 2010).

4.3 Enumerar todos os eventos

Enumerar todos os 60 eventos que compõe todas possibilidades é a última estratégia institucional, e grande parte alunos tentaram resolveram por esse método. Podemos entender que esse método é mais trabalhoso, como os eventos enumerados são muitos, é necessário ter bastante atenção para as condições do problema. Vinte e três alunos tentaram enumerar as possibilidades, 18 licenciandos do 1º semestre e 5 licenciandos do 6º, como na resposta do aluno V4Y que faz a enumeração, para assim generalizar chegando depois a conclusão.

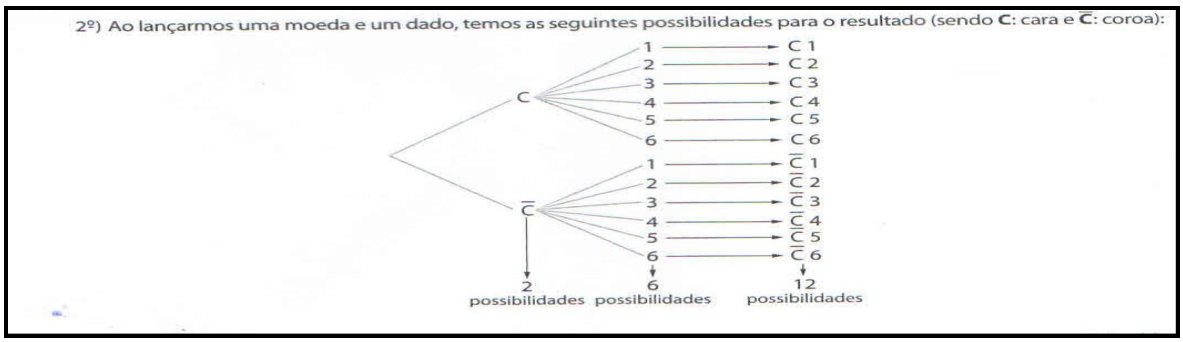
Figura 8 Resposta do Aluno V4Y



Nenhum dos professores em seus depoimentos em relação às estratégias de resolução de questões de análise combinatória (incluindo a do teste do PAE), fazem referência a enumeração de eventos.

O livro, porém, quando inicia o conteúdo, com problemas no qual enumera todos os eventos, o faz, quando a questão não tenha tantas condições a ser seguidas ou quando o número de possibilidades é pequeno como no exemplo a seguir.

Figura 9 Exemplo da página 276



Fonte: (DANTE, 2010, p .276)

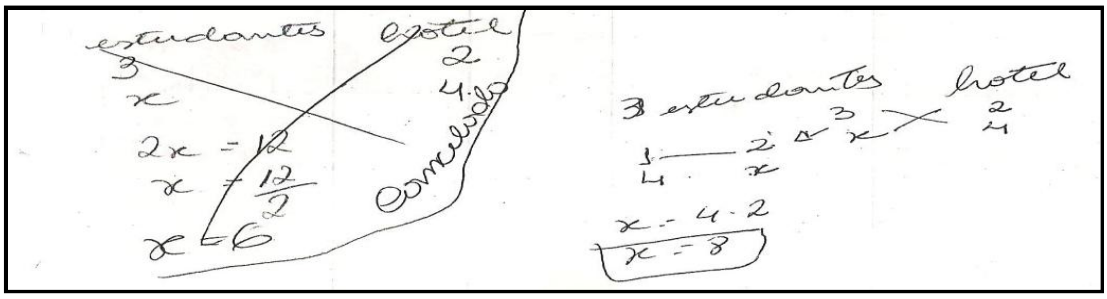
Os alunos que participaram do teste do PAE em grande maioria começou enumerando para depois generalizar e assim tentar responder, o que fica claro que talvez para melhor visualizar as condições do problema seja melhor enumerar. Os professores não relataram resolver problemas de análise combinatória enumerando por ser um método que exija mais atenção e tempo, então o princípio e as fórmulas acabaram sendo os métodos mais utilizados. O livro didático geralmente faz a enumeração dos eventos em questões que irão introduzir algum conteúdo, para que o aluno possa vir depois usar a generalização.

Pessoa e Borba (2010) observam que estudantes de anos de escolaridades distintos (fundamental I , II e ensino médio) utilizam geralmente as mesmas estratégias de resolução de questões envolvendo análise combinatória, tais como : desenhos, listagem, quadros, árvores de possibilidades... , assemelhando-se muito com os participantes do teste do PAE. Talvez a enumeração seja um caminho trabalhoso para os professores, porém para os alunos pode ser um caminho mais fácil para tentar entender o problema e assim recorrer a generalização para encontrar a resposta correta.

4.4 Não recorreram a conceitos referentes ao conteúdo Análise combinatória.

A última categoria se refere aos alunos que utilizaram outros métodos de resolução para responder a questão. Os alunos não recorreram a conceitos referentes ao conteúdo Análise Combinatória. Utilizaram, por exemplo, regra de três e uso das operações,etc. 11 alunos , sendo 9 do 1º e 2 do 6º semestre. O aluno V9x faz parte desta subcategoria.

Figura 10 Aluno V9X



Os professores não relatam um método que não use conceitos da análise combinatória para resolver questões dessa natureza. O livro didático também não sugere outras alternativas de resoluções para questões de combinatória que não utilizem o princípio, as fórmulas ou a enumeração dos eventos. Apesar de não serem as únicas formas de resolver a questão, usar os conceitos de análise combinatória podem ser os métodos mais comuns para a resolução de questões.

No ensino de matemática, especialmente de análise combinatória não é fácil utilizar novas estratégias de ensino. Porém a busca é necessária para melhorar a aprendizagem, uma alternativa que pode ser eficaz é a utilização do material lúdico .

4.5 Utilização de material lúdico.

Quando a pergunta da entrevista aplicada ao professores fazia referência ao que era utilizado para trabalhar com o conteúdo de análise combinatória pelos docentes, o material lúdico não foi citado por nenhum dos dois como um material usado com constância na prática pedagógica, como podemos perceber em uma das falas do Professor 2: *" É, material lúdico, eu particularmente não utilizo muito não, mais mesmo é, quadro de giz o livro e lista de exercícios, principalmente, é, exercícios, questões e prova de vestibular, porque as vezes tem uma estratégia diferente".*(entrevista, 2012). O professor 1 também não faz uso de material lúdico , "[...]material concreto lúdico, é de modo organizado eu acho que eu não uso quase nada[...]"(entrevista, 2011).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias colocam que:

> Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo... Desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes. (BRASIL, 2000, p. 52)

O desenvolvimento de atividades lúdicas é de fundamental importância para uma aprendizagem mais ativa e interativa, desafiando o aluno na busca de conhecimento.

Na UFBA – Universidade Federal da Bahia existe o LEMA – Laboratório de Ensino de Matemática propõe novas maneiras e problemas interessantes para o ensino diversos conteúdos matemáticos. Na oficina voltada para o ensino da análise combinatória com a utilização do material lúdico na resolução de problemas, realizada em 18 de abril de 2011, como uma das estratégias de intervenção do PAE a partir das dificuldades identificadas ao analisarem o 1º teste aplicado no campos de Vitória da Conquista na UESB. Em parceria com o LEMA – O Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA, foi oficializado o convite para a realização dessa oficina, ministrada pelos integrantes do LEMA, Daniela Santa Inês Cunha e Paulo Raimundo Sterin Malta. Estes dividiram em grupos os participantes, a fim de

que estes resolvessem os problemas propostos utilizando material lúdico. Abaixo estão algumas fotos do material utilizado em alguns problemas propostos na oficina.

Imagem a : Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantas modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

Imagem b : De quantas maneiras se pode colorir uma bandeira de 7 listras com 3 cores distintas de modo que não se tenha cores iguais adjacentes?

A oficina desenvolveu-se de maneira divertida e bem educativa, pois discutíamos possibilidades para as resoluções dos problemas em grupos e isso nos permitia abrir o leque de possibilidades de respostas e pensamentos. Penso que, como futura educadora, esta

nova estratégia de ensino da análise combinatória poderia ser aplicada ao ensino médio com resultados muito satisfatórios.

Não é um caminho seguido por muitos professores, como o estudo de Pinheiro e Sá (2007), em que realizaram uma investigação com a colaboração de 20 professores de Ensino Médio em Belém do Pará, no qual os pesquisadores tinham como questionamento principal: *Qual era a prática pedagógica predominante no ensino de análise combinatória no Ensino Médio*? Foi observado que o recurso didático mais utilizado pelos professores, tanto graduados e pós-graduados, era o livro didático e que a maioria dos docentes usam como prática predominante as definições como ponto de partida, em seguida apresentam exemplos, propriedades e exercícios. "Quanto às aulas expositivas, é comum que seja o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a ideia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante". Não precisa ser assim "[..]Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática." (BRASIL, 2000, p.53). Porém, como professores devemos sempre pensar em algo novo e tentar algo estimulante para a pratica pedagógica. O lúdico pode ser um auxílio ao docente e ainda tem um "poder" de atração sobre os alunos, além de servir de estímulo para uma aprendizagem mais prazerosa. Como a análise combinatória apresenta variados problemas que exigem uma raciocínio mais elaborado, a utilização do material lúdico propicia uma situação mais favorável para o aprendizado deste conteúdo.

5. Considerações Finais

Essa pesquisa teve por objetivo entender o contexto das situações nas quais o erro se faz presente nas respostas dos alunos, especificamente em questões envolvendo Análise Combinatória e conhecer as dificuldades encontradas pelos discentes no determinado conteúdo.

Trabalhar com as respostas de alunos do curso de licenciatura em matemática é uma oportunidade que permite a professores e alunos repensarem a respeito de como esses conteúdos são trabalhados no ensino médio e de quais maneiras esses resultados obtidos pela análise de erros poderia ajudar para formular novas estratégias de ensino voltados para o processo de resolução de uma questão.

Para uma aprendizagem e uma compreensão dos conteúdos estudados é necessário saber o porquê de tais acontecimentos. E, buscando entender por que muitos estudantes dos cursos de licenciatura em matemática, demonstram inúmeras dificuldades para entender e resolver problemas com análise combinatória, foi preciso saber como os professores relataram suas práticas pedagógicas e como o livro aborda o conteúdo.

O problema principal deste trabalho, perguntava o que poderia ser inferido sobre o princípio multiplicativo, permutação, arranjo e combinação a partir das resoluções dos alunos do 1º e 6º semestres dos licenciando de matemática. Chego à conclusão de que os alunos preferem começar enumerando as possibilidades para assim chegar à generalização. Princípio multiplicativo e fórmulas foram os métodos menos utilizados por eles. Entender o princípio multiplicativo é fundamental para resolver questões de análise combinatória, e é considerado importante tanto para professores como para o autor do livro didático em questão. Os alunos não sabem utilizar os conceitos de permutação, arranjo e combinação, principalmente quando vão aplicar as fórmulas, pois muitos não lembraram ou quando aplicam, fazem de maneira errada.

Objetivando identificar o que os alunos demonstravam saber ou não dos conceitos do conteúdo de análise combinatória, chega-se a conclusão que grande maioria dos discentes não sabem usar os conceitos: princípio multiplicativo, permutação, arranjo e combinação, para chegar a resolução correta do problema, principalmente por não interpretarem o enunciado da questão. Quando tentam enumerar todas as possibilidades de eventos os alunos conseguem uma generalização, facilitando o término do raciocínio.

Não podemos deixar que os futuros professores carreguem consigo dificuldades para as salas de aulas, mas que estes possam entender os erros como uma oportunidade de reaprender a análise combinatória e poder utilizar o erro como estratégia de ensino.

Tentando modificar a ideia de que o erro é algum ruim e vergonhoso, pesquisas em análise de erros vêm conquistando espaço entre graduandos do curso de matemática. Objetivando encontrar técnicas que possam motivar o aluno não só da graduação em matemática e sim estudantes em vários níveis do ensino, e principalmente que esse novo professor venha a também utilizar a análise de erros como métodos de ensino.

6.Referência Bibliográfica

BIANCHINI, E; PACCOLA, H. **Curso de Matemática**. Editora Moderna, (2000).

BORBA, R. **Raciocínio Combinatório na Educação Básica**. X Encontro Nacional de Educação Básica, 2010.

BORTOLOTI, R. D. M.; SILVA, C. V.; OLIVEIRA, A. P. T.; NASCIMENTO, J. C. *Análise dos erros cometidos por discentes de cursos de licenciatura em matemática das universidades estaduais baianas*. 20 f. **Projeto de Pesquisa** – Departamento de Química e Exatas, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, BA, 2007.

BRASIL. ***PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação:*** *SAEB: Ensino Médio: Matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília: Ministério da Educação (MEC). (2008).

BRASIL.**PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS ENSINO MÉDIO-** Parte I Bases Legais. Brasília: Ministério da Educação (MEC), (2000).

CURY, H.N. ***"Professora, eu só errei um sinal!":*** *como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem*. In: CURY, H. N. (org.). Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: Edipucrs, 2004. p. (111 – 138).

CURY,H.N. Análise de Erros. ***Anais*** **do X encontro Nacional de Educação Matemática**, (2010).

CURY, H. N. ***Análise de erros:*** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica. (2008).

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**/ Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2010.

DESLANDES, S. F. et al. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**.Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

FIORENTINI, D ; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos – Campinas, SP: Autores Associados, 2006 – (Coleção formação de professores).

HOFFMANNN, J. ***Pontos e Contrapontos****: de pensar ao agir em avaliação.* Mediação Editora*,* (1998).

IEZZI, G. et al*.* ***Matemática: Ciências e Aplicações****. 2ª série do Ensino Médio. São Paulo: Atual, 2004.*

MINAYO, M.C de S. ***O desafio do conhecimento****: pesquisa qualitativa em saúde*. São Paulo-Rio de Janeiro, HUCITEC- ABRASCO, 1992.

MORGADO, A; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J; PINTO DE CARVALHO, P; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probalidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

PESSOA, C ; BORBA, R. ***Quem dança com quem****: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª.* Zetetiké- Cempem- FE-Unicamp-v.17,n.31-jan/jun., (2009).

PESSOA, C ; BORBA, R. ***O desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica***- Revista Em Teia, (2010).

PINHEIRO, C; SÁ, P. **O ensino de análise combinatória:** a prática pedagógica predominante segundo os docentes. In: *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte,* 2007.

PINTO, N. B. ***O erro como estratégia didática:*** *estudo do erro no ensino da matemática elementar.*Campinas, SP: Papirus,(2000).

RIZZINI, I ; CASTRO, M ; SARTOR, C.D ***Pesquisando...*****guia de metodologias de pesquisa para programas sociais**. Rio de Janeiro: USU Ed. Universitária/CESPI/USU, 1999. 147p.

ROCHA, J. Investigando a aprendizagem de análise combinatória simples em uma turma de licenciandos em Matemática submetida a uma prática de ensino tradicional. In: **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, Belo Horizonte, 2007.

VIEIRA, F. M. S., ***Uma introdução á combinatória técnicas de contagem*****.** Universidade Portucalense. Porto, 2007.

Anexos

1.Perguntas da entrevista com professor do ensino médio.

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Licenciatura Matemática
Reflexões acerca do desempenho de Licenciandos de Matemática em relação à Análise Combinatória.Por: Kamila Barros Pereira
Orientador(a): Roberta D´Angela Menduni Bortoloti

1. Qual a sua formação?
2. Qual o nível de atuação? Há quanto tempo leciona para o Ensino Médio?
3. Ao trabalhar com o conteúdo de análise combinatória como faz?
4. Para trabalhar com o conteúdo de análise combinatória o que você utiliza?
5. A combinatória envolve 3 assuntos: Permutação; Arranjo e Combinação. Escolha um desses assuntos e relate como desenvolve o ensino do mesmo?
6. Como você trabalha princípio multiplicativo?
7. Quais as estratégias utilizadas por você e alunos para resolver os problemas de análise combinatória?
8. Explica aos alunos como conseguiu chegar as fórmulas?
9. Você percebe alguma dificuldade para os alunos aprenderem análise combinatória?
10. Você sente alguma dificuldade em ensinar análise combinatória?