MINI-CURSO: ÁLGEBRA FÁCIL COM CARTÕES

Ministrante: Márcia Azevedo Campos

Introdução:

Saber ler e interpretar textos de problemas de matemática pode ser a diferença entre resolver um problema e não resolvê-lo. Dessa forma, é essencial que se desenvolva um trabalho específico com a leitura dos diferentes tipos de textos que aparecem na matemática, tais como textos do livro, textos de problemas, gráficos, tabelas, entre outros.

A resolução de problemas de álgebra, além das habilidades de leitura e interpretação, requer do aluno a passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica.

O uso do material didático auxilia no desenvolvimento dos diversos conteúdos, atuando na matemática de forma a concretizar conceitos abstratos. Para tanto, o material deve passar por um processo criterioso de seleção, de forma a desenvolver o pensamento reflexivo dos alunos. Do conteúdo "álgebra" pode-se criar inúmeros materiais didáticos, devido ao seu alto nível de abstração, eles proporcionam um retorno muito satisfatório.

ATIVIDADE 1: **Equações**

Objetivo: Resolver equações geometricamente.

Pré-requisitos: Operações fundamentais, área de figuras planas.

Material: Cartolina de duas cores para recortar: 20 tiras (8 x 2cm), sendo 10 de uma cor (x) e 10 da outra cor (– x) e 20 quadradinhos (2 x 2cm), sendo 10 de uma cor (1) e 10 da outra cor (–1)**.**

Procedimentos:

– Em grupos, ou individualmente, representar expressões e efetuar operações de expressões algébricas, sugeridas pelo professor.

Exercícios:

Trabalhamos inicialmente com a modelagem para expressões algébricas, ou seja, vamos escolher o conjunto de peças que representará cada uma dessas expressões, como nos exemplos a seguir:

1) Represente as expressões:
   a) $x + 3$
   b) $3x – 2$
   c) $– 2x + 1$
   d) $x^2 – x$
   e) $x^2 – 3x + 2$

2) Resolva as operações, explicando a estratégia usada em cada uma delas:
   a) $(x + 3) + (2x – 5)$
   b) $(– 3x + 4) + (2x^2 + 3x – 5)$
   c) $(3x + 5) – (2x + 3)$
   d) $1 . x$
   e) $x . x$
   f) $(– 2x) . (x – 1)$
   g) $(x – 1) . (– x – 4)$

Usando a propriedade *uma igualdade se mantém se efetuamos operações iguais em ambos os lados*, modelamos a solução de uma equação do 1º grau, como nos exemplos abaixo.

É importante que cada operação efetuada em ambos os lados da igualdade seja acompanhada de sua representação simbólica para que, após muitos exemplos, o estudante participante apreenda as propriedades usadas e se liberte do material concreto, passando a resolver as equações algebricamente. Vários professores que aplicaram a atividade em sala de aula relatam que, de fato, é isso que acontece.

3) Resolva as equações:
   a) $3x + 1 = 2x + 2$
   b) $2x - 2 = -x + 4$
   c) $2 - x = 5 - 2x$

Nesta atividade, observando um modelo físico, os participantes podem investigar a fatoração de um trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$, com a, b e c inteiros cuja decomposição resulta em uma expressão do tipo $(ax + p)(x + q)$ com p e q inteiros. O objetivo é levar à percepção das propriedades que permitam fatorar tais expressões no nível simbólico.

Para realizar a atividade, estabelecemos o seguinte:

Um trinômio do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c$ com a, b *e* c *inteiros e* $a > 0$ *pode ser fatorado se, e somente se, for possível formar um retângulo com as peças que o representam. As dimensões do retângulo formado representam os fatores do trinômio.*

4) Fatorar:
   a) $x^2 + 6x + 9$
   b) $x^2 + 3x + 2$
   c) $x^2 - 3x + 2$
   d) $2x^2 + 4x + 6$

Em seguida devem usar essas relações para fatorar algebricamente outros trinômios e estarão prontos para resolver equações do segundo grau, usando a fatoração para recair em equações do primeiro grau.

5) Resolver as equações:
   a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
   b) $x^2 + 3x + 2 = 0$
   c) $x^2 - 3x + 2 = 0$
   d) $2x^2 + 4x + 6 = 0$

ATIVIDADE 2: **Polinômios**

Objetivo: Representar e resolver equações polinomiais geometricamente.

Pré-requisitos: Operações fundamentais, equações e área de figuras planas.

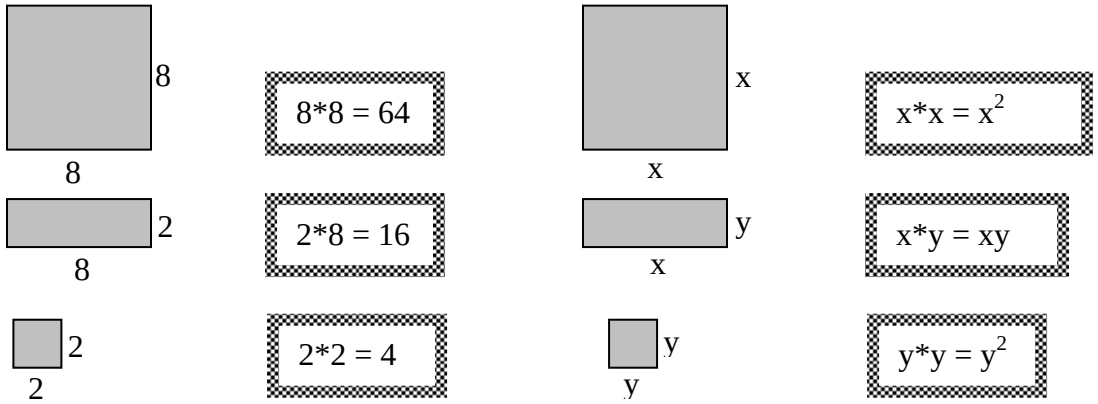
Material: Cartolina de duas cores para recortar:

_ 4 quadrados de cada cor medindo (8x8) cm;
_ 12 retângulos de cada cor medindo (8x2) cm;
_ 20 quadrados de cada cor medindo (2x2) cm.

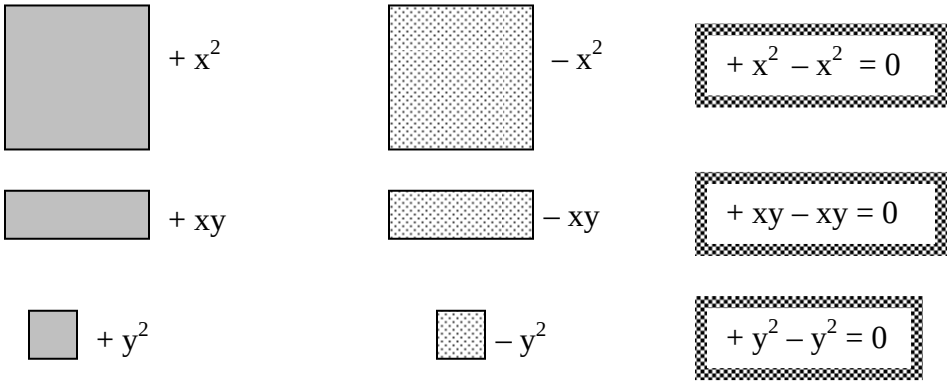
Procedimentos: Deve-se codificar uma cor como positivo e a outra como negativo, padronizando o material.

_ Inicia-se expondo as medidas dos lados de cada figura, de forma que calculem as suas áreas e em seguida iniciar a substituição dos números pelas incógnitas. Sendo assim, se 8*8 = 64, 2*8 = 16 e 2*2 = 4, substituindo 8 por x e 2 por y, por exemplo, teríamos que:

$$x*x = x^2,\ y*x = yx \text{ e } y*y = y^2.$$



Dado isto, o professor dá alguns exemplos como: $3x^2$, $2xy$, $3y^2$ ou $y^2 + 2xy$, etc. E deve mostrar também a situação nula, que se dá através da junção de peças iguais, porém de cores diferentes. Então, (considerando o cinza positivo e o pontilhado negativo) temos:



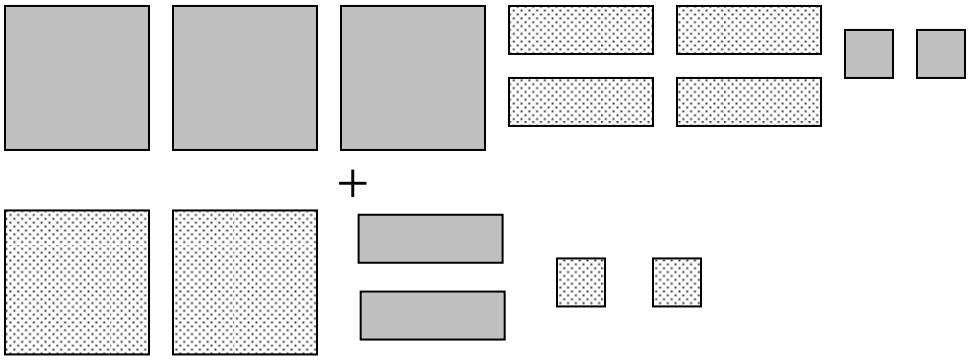
Podemos representar polinômios de diferentes sinais e polinômios opostos.

Por exemplo: $3x^2 - 4xy + 2y^2$ e seu oposto $-3x^2 + 4xy - 2y^2$.

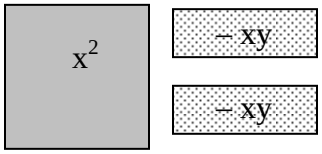
_ Partindo daí, pode-se fazer a **soma e a subtração de polinômios**, dada pela troca de todos os sinais do polinômio a ser subtraído.

Por exemplo:

$3x^2 - 4xy + 2y^2 - (2x^2 - 2xy + 2y^2) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x^2 + 2xy - 2y^2 = \underline{x^2 - 2xy}$



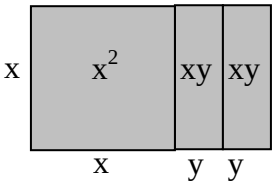
Temos que figuras iguais de cores diferentes se anulam, então:



_ Para a **multiplicação** trabalharemos com resolução de áreas.

Tentaremos através de áreas, resolver, por exemplo:

$$(x).(x + 2y).$$

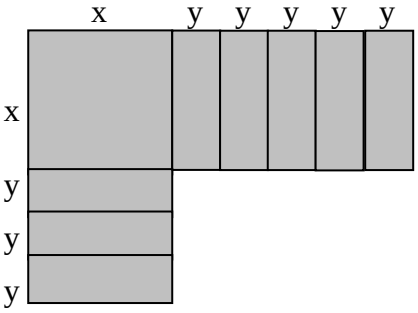


Observando o resultado do cálculo de áreas por pedaços temos:

$$x^2 + xy + xy = x^2 + 2xy.$$

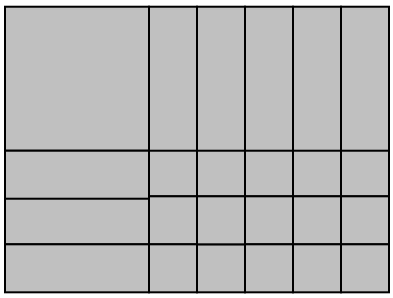
Desta forma podemos testar inúmeros exemplos, como:

$$(x+5y).(x+3y)$$



Ficaria assim, e a soma das áreas destas figuras jamais daria como resposta a multiplicação deste polinômio. Para tanto, se faz necessário que acrescentemos figuras proporcionais ao lado até que se complete um retângulo.

Portanto:



Obtemos então (de cima para baixo):

$x^2 + 5xy + xy + 5y^2 + xy + 5y^2 + xy + 5y^2 =$
$\underline{x^2 + 8xy + 15y^2}$.

Resolvendo pela álgebra ficaria:

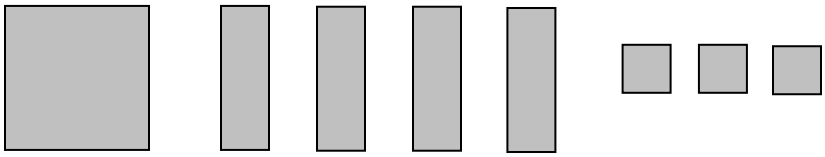
$(x+5y).(3y+x)= 3xy + x^2 + 15y^2 + 5xy = \underline{x^2 + 8xy + 15y^2}$. Confere!

Pudemos constatar que em caso de multiplicação e divisão de polinômios não se utiliza de positivos e negativos, por estarmos trabalhando com áreas, e neste caso poderia acontecer o x ser positivo em um lado, mas em outro negativo, o que dificultaria a representação.

_ **Divisão**: em caso de divisão também há algumas restrições para se trabalhar de forma concreta (como todo material didático, este também é limitado); em geral, todo professor inicia a divisão de polinômios utilizando-se de polinômios exatos, muitas vezes a matéria se restringe a isso. Para tal, o material também é utilizável sem problemas. Iniciaremos com um exemplo de divisão exata:

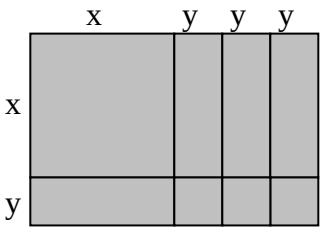
$(x^2 + 4xy +3y^2) : (x + y)$.

Temos:



Para resolver deve-se tentar encaixar as peças de forma a formar um retângulo, e que um dos lados deste retângulo seja x + y.

Então:



Temos que $(x + y) . (x + 3y) = x^2 + 4xy +3y^2$

Portanto x + 3y é a resposta da divisão.

Pela lei da reversibilidade temos que, se um polinômio a, dividido por um polinômio z, é igual a y (a : z = y), então a : y = z, quando a divisão é exata. Usando o exemplo já utilizado na divisão de polinômios temos:

$$(x^2 + 4xy + 3y^2) : (x + y) = (x + 3y),$$

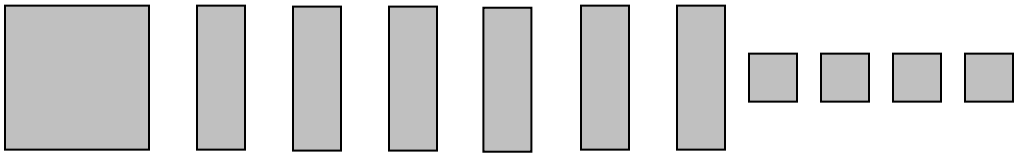
$$\text{se } (x + y).(x + 3y) = (x^2 + 4xy + 3y^2),$$

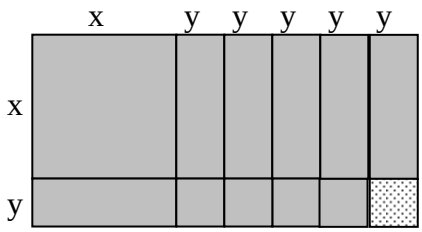
$$\text{então:}(x^2 + 4xy + 3y^2) : (x + 3y) = (x + y).$$

Vamos agora para uma divisão com resto:

$$(x^2 + 6xy + 4y^2) : (x + y)$$

O sistema de resolução é o mesmo; devemos tentar formar um retângulo. A diferença é que neste caso devemos adicionar simétricos para preencher a parte que fica incompleta. Vejamos:





Então, $(x^2 + 6xy + 4y^2) : (x + y) = (x + 5y)$
E sobra $- y^2$ de resto,
ou seja,
$(x + y) . (x + 5y) = (x^2 + 6xy + 4y^2) + y^2$

Podemos trabalhar polinômios de grau três, mas para isso teremos que usar poliedros como cubos, paralelepípedos retângulos. E para polinômios de grau maior que três não é possível representar, pois nos limitamos à terceira dimensão.

Exercício: Usando o material:

1) Represente as expressões:
   a) $2x^2 + xy$
   b) $x^2 + 3xy - 3y^2$
   c) $-2x^2 - xy + 2y^2$

2) Resolva as operações, explicando a estratégia usada em cada uma delas:
   a) $(x^2 + 5xy + 3y^2) + (-2xy + y^2)$
   b) $(3x^2 + 5xy) - (x^2 + 2xy)$
   c) $(2x + y) . (x + 2y)$
   d) $(3x^2 + 4xy + y^2) : (3x + y)$

Referências:

1) NETO, Ernesto Rosa. *Didática da Matemática* – Revista do Professor de Matemática, SBM: São Paulo, abr/jun, 1991.
2) REVISTA NOVA ESCOLA para Professores de 1º. Grau: *Álgebra fácil com cartões*. n. 85, p. 22 – 25, ano X. jun.1995.
3) RPM – REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBEM.
4) www.furb.br/redemat/arquivo/fe/algebra.doc - acessado em 06/11/07
5) www.mathema.com.br – acessado em 06/11/07
6) HELLMAISTER, Ana C. P.; GALVÃO, M. E. E. L. *Resolvendo Fisicamente*. Coleção: Explorando o Ensino.