A HÉLICE: UMA CURVA IMPORTANTE NO CÓDIGO DA VIDA

Felipe Fonseca dos Santos e Renata Melo Nascimento[1]
Elias Santiago de Assis[2]

RESUMO

Em 1953 os cientistas Francis Crick e James Watson apresentaram um modelo para a molécula de DNA constituída por duas cadeias helicoidais antiparalelas, com a "coluna vertebral" de açúcar e fosfato na parte externa e as bases (adenina, timina, guanina e citosina) no interior. Devido aos ângulos em que as substâncias químicas do DNA se ligam umas às outras, todas as moléculas de DNA consistem em duas faixas paralelas espiraladas, como corrimão de uma escada em espiral – daí a estrutura do DNA recebeu o nome dupla hélice. Aspectos interessantes, como estes, torna as hélices o objeto de estudo do nosso trabalho. As hélices são curvas espaciais de grande interesse no estudo de Geometria Diferencial, que possui importantes aplicabilidades em diversas áreas de conhecimento, ela se destaca na matemática como sendo a única curva do espaço que possui curvatura e torção constantes. O trabalho proposto busca assinalar as principais características geométricas das hélices e a utilização destas curvas em outras áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Curvas espaciais; Hélices; Geometria Diferencial.

APRESENTAÇÃO

A Matemática surgiu inicialmente com as necessidades básicas do homem primitivo: contar suas posses (aritmética) e dividir terras (geometria). No entanto, só tornou-se uma ciência a partir da invenção do sistema axiomático, difundido principalmente no livro "Os Elementos" de Euclides. O sistema axiomático foi

---

Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB).
[2] Professor orientador, membro do colegiado de matemática da UFRB.

fundamental ao consolidar os importantes conceitos: “axiomas”, “teoremas”, “corolários”, “lemas”, “postulados”, “proposições” e “demonstração”.

Conhecer a história da matemática nos permite perceber que as suas teorias resultaram sempre de desafios que os matemáticos enfrentaram, e que foram fundamental ao consolidar os importantes conceitos: “axiomas”, “teoremas”, “corolários”, “lemas”, “postulados”, “proposições” e “demonstração”. desenvolvidos com grande esforço, quase sempre, num contexto bem diferente daquele em que são apresentados após todo o processo de descoberta.

Uma das características mais importantes da Matemática é o fato dela poder penetrar em muitos outros ramos do conhecimento humano, como a física, engenharia, economia, medicina, arquitetura entre outras.

O referido trabalho está inserido na área da Geometria Diferencial, campo da Matemática que tem suas origens no início do século XIX e destina-se ao estudo de objetos de natureza geométrica usando as ferramentas do Cálculo e em linhas gerais estuda curvas e superfícies. O surgimento dessa área da Matemática remonta aos primórdios do Cálculo e iniciou-se com o estudo das curvas.

Algumas curvas planas ou espaciais destacam-se pelas suas propriedades geométricas, como por exemplo, as retas, os círculos, as elipses e as hélices, dentre outras. Na passagem do estudo de curvas planas para curvas no espaço aprecem dois elementos bastante interessantes: a noção de curvatura e torção. O primeiro mede o quanto uma curva se afasta de estar contida numa reta. Mais precisamente, quanto mais uma curva se assemelhar a uma reta, mais próxima de zero será a sua curvatura. Este conceito é local, de modo que a curvatura de uma curva pode variar de ponto a ponto. O segundo elemento, a torção, mede o quanto uma curva se afasta de estar contida em um plano. Em outras palavras, curvas de torção nula são curvas planas.

Pretendemos apresentar, neste trabalho, os aspectos curiosos das hélices, curvas espaciais de grande interesse no estudo de Geometria Diferencial. Elas são curvas cujas retas tangentes fazem um ângulo constante com uma direção fixa. Estudá-las requer o entendimento de dois conceitos matemáticos extremamente relevantes: curvatura e torção.

OBJETIVO GERAL

O pôster *As hélices em nosso dia a dia* pretende apresentar o conceito matemático de hélices, suas propriedades e a utilização destas curvas em outros ramos, além da Matemática.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Assinalar conexões entre a Matemática Pura e a Matemática Aplicada.
- Estudar as propriedades geométricas das hélices.
- Compreender os conceitos matemáticos de curvatura e torção.
- Despertar o senso crítico e investigativo dos estudantes de graduação, sobretudo na área de Geometria Diferencial.

REFERENCIAL TEÓRICO

Começaremos nosso trabalho estudando o conceito de curvatura e torção de uma curva regular, que denotaremos por $\alpha(s)$. Para isso adotaremos um sistema de referencial móvel ao longo da curva, o triedro de Frenet. Segundo Tenemblat (2008) cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano. O plano de $R3$ que contém $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $t(s)$ (vetor tangente) é o plano normal a curva α em

s. O plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $b(s)$ é denominado plano osculador e o

plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $n(s)$ (vetor normal) é o plano retificante da curva

α em s.

O conceito de curvatura e torção serão definidos para uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A curvatura mede o quanto uma curva aproxima-se (ou afasta-se) de uma reta no seguinte sentido: quanto mais próxima de zero é a curvatura de uma curva, mais esta curva se parece com uma reta.

Segundo Tenemblat (2008) podemos definir curvatura e vetor normal matematicamente, da seguinte forma:

Seja $\alpha: I \subset R \rightarrow R3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco

$s \in I$, definimos curvatura de α em s o número positivo $\alpha''(s) = k(s)$.

Seja $\alpha: I \subset R \rightarrow R3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco,

ou seja, $\alpha'=1$, tal que $ks>0$. Isto implica que $\alpha'(s) \perp \alpha''(s)$. Portanto $\forall\, s \in I$, o vetor

$$ns=\alpha''(s)\alpha''(s)=\alpha''(s)k(s)$$

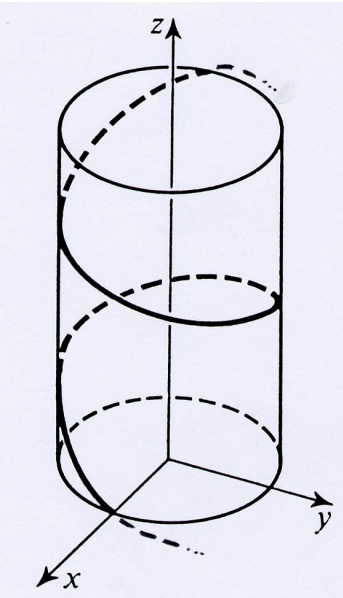
é denominado vetor normal a α em s.

Denotaremos $\alpha'(s)$ por $t(s)$, temos que $t(s)$ e ns são vetores ortonormais do

$R3$. Portanto o vetor $bs=ts \wedge n(s)$, chamado vetor binormal, forma com $t(s)$ e ns

uma base ortonormal do $R3$ chamada de triedro de Frenet. A partir deste originam-se

as fórmulas de Frenet:



$t's = ksns$ $\qquad$ $n's = -\tau sb(s) - kst(s)b's = \tau sns$

Já a torção nos da à medida de quão uma curva não é plana, de modo que somente as curvas planas apresentam torção nula. De acordo com Carmo (1971) a torção pode ser definida da seguinte forma:

Seja $\alpha: I \subset R \rightarrow R3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s, e tal

que $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por $\tau s = \langle b's, ns \rangle$ é denominado torção

da curva em s.

As hélices são as únicas curvas do espaço que apresentam curvatura e torção constantes (e não nulas). Esse fato deve-se a um importante resultado da Geometria Diferencial das Curvas conhecidas como Teorema Fundamental Da Teoria Local das Curvas.

De uma maneira geral, uma curva α é chamada uma hélice se as retas

tangentes de α fazem um ângulo constante com uma direção fixa.

Uma curva regular $\alpha:I\rightarrow R3$ é uma hélice, se existe um vetor unitário v que

forma um ângulo constante com $\alpha'(t)$, $\forall$ $t\in I$, isto é,

$<\alpha'(t),v>\alpha'(t)$

é constante.

A grosso modo, a Hélice é uma curva do espaço descrita pelo movimento de um ponto ao redor de um eixo, ao mesmo tempo em que se eleva.

Observe a curva

$\alpha t=rcost, rsent, bt$

com r e b constantes positivas.

A medida que o parâmetro t cresce, também cresce o valor de $z=bt$, logo $x, y,$

z move-se para cima. Porém a medida que t cresce, o ponto (x, y, z) também move-se em uma trajetória diretamente acima do círculo

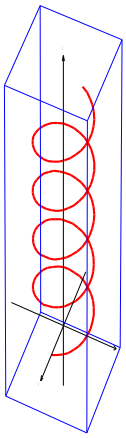
$x=r\cos t\,,\ \ y=r\,\mathrm{sen}\,t$

no plano xy. A combinação desses movimentos para cima e circular produz uma

curva com formato de saca – rolhas que se enrola num cilindro circular reto de raio r

centrado no eixo z. A figura a seguir mostra o traço desta curva.

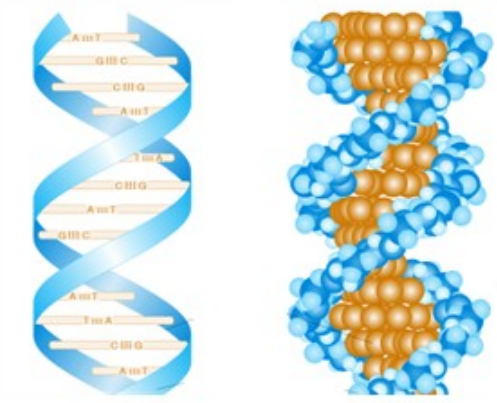
Hélice Circular



Esta curva é chamada de hélice circular. Esses resultados podem ser encontrados no livro Cálculo II de Howard Anton, Iri Bivens e Stephen Davis.

A hélice circular , é um caso particular de uma classe de curvas que tem a mesma propriedade. A hélice descrita anteriormente ocorre na natureza. Abaixo está um representação da hélice dupla da molécula de DNA (ácido dexorribonucléico), estrutura que contém todas as instruções herdadas necessárias para o desenvolvimento do organismo humano.

Molécula de DNA – Dupla hélice



JUSTIFICATIVA

A aplicabilidade dos conceitos matemáticos em outras áreas do conhecimento constitui uma articulação plausível entre estas ciências e vai de encontro à tendência desarticulada de se construir o conhecimento científico em Matemática. De acordo com Nikolai Ivanovich Lobachewski, um grande matemático russo do século XIX,

“não há ramo na Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real” (BOYER, 2000, p. 369). Um outro matemático, o alemão Friedrich Gauss, reforça o pensamento de Lobachewski ao dizer que “(...) a sabedoria muitas vezes está mais perto quando nos abaixamos do que quando nos levantamos” (EVES, 2002, p. 522). Para eles, a Matemática, por inspiração, deveria atingir à realidade humana. Assim, a interdisciplinaridade entendida não apenas como conexão entre disciplinas escolares, mas como a utilização da produção intelectual em benefício do próprio homem, favorece o entendimento e desenvolvimento dos conceitos mais complexos de qualquer ciência.

> A interdisciplinaridade enquanto aspiração emergente de superação da racionalidade científica positivista, aparece como entendimento de uma nova forma de institucionalizar a produção do conhecimento nos espaços da pesquisa, na articulação de novos paradigmas curriculares e na comunicação do processo perceber as várias disciplinas; nas determinações do domínio das investigações, na constituição das linguagens partilhadas, nas pluralidades dos saberes, nas possibilidades de trocas de experiências e nos modos de realização da parceria. (SIQUEIRA, 1995, p. 1)

Apresentar a utilidade das hélices na engenharia, biologia e nas artes plásticas, caracteriza a interface entre a Geometria Diferencial e outras ciências, o que torna o estudo dessas curvas mais interessante e menos abstrato.

No dia-a-dia nos deparamos vez ou outra, com Hélices: a parte metálica dos saca-rolhas, o acabamento de engrenagens da engenharia automotiva, roscas de um modo geral, molas,os parafusos, os belos e artesanais mensageiros do vento construídos a partir de palitos de picolé, fios de nylon, agulhas e miçangas. Também é possível observá-las na Biologia.

No ano de 1953, os cientistas J. Watson e F. Crick descobriram que a estrutura da molécula de DNA (ácido desoxirribonucléico) é de duas hélices circulares paralelas e interligadas. E a partir daí foi possível determinar características especificas do DNA, como a rigidez de flexão, a torção e o diâmetro efetivo. Essa descoberta permitiu o desenvolvimento do estudo dessa importante estrutura que carrega informação genética de uma geração para outra. Abrindo assim, o caminho para avanços significativos na medicina.

METODOLOGIA

A apresentação do pôster divide-se em duas fases, a saber: a primeira consiste na introdução dos conceitos matemáticos referentes ao estudo das hélices. Será pontuada a noção de curvatura e torção relacionando-as com as hélices. A segunda parte abordará o aparecimento das hélices, por meio de suas propriedades geométricas, em outras áreas.

PÚBLICO ALVO

Professores de matemática da educação básica e do ensino superior. Alunos de cursos de Licenciatura ou bacharelado em Matemática e áreas afins.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard, BIVENS,Irl, DAVIS, Stephen. **Cálculo Volume II.** 8º Edição. Bookman 2007.

BOYER, C. **História da Matemática**. 2ª Edição. Editora Edgard Blücher.

CARMO, Manfredo P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Sociedade Brasileira de matemática - SBM, Textos universitários. 2005.

CARMO, M. P. do; **Geometria Riemanniana**. 3ª Edição. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 3ª Edição. Editora da Unicamp.

GORODSKI, C. **Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria**. Disponível em < http://www.ime.usp.br/~gorodski/ps/geom.doc>.

SIQUEIRA, H. **Interdisciplinaridade como superação da fragmentação**. Caderno de Pesquisa, nº 68. 1995.

TENENBLAT, K. **Introdução a Geometria Diferencial**. 2ª Edição. Editora Blücher.