Proposta de Apresentação de Poster
II Semana de Educação Matemática da UESB – 2010

# HIPERSUPERFÍCIES VINCULANTES NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÕES

Gabriel Duarte Barbosa
Ronaldo Thibes
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

**RESUMO**

Consideramos sistemas clássicos simples submetidos a vínculos holônomos caracterizados por hipersuperfícies vinculantes no espaço de configurações. Através do método dos multiplicadores de Lagrange indeterminados, introduzimos os vínculos na ação clássica de forma natural. Através da resolução das equações de movimento, determinamos as forças generalizadas associadas aos vínculos.

**PALAVRAS-CHAVE**

mecânica analítica; vínculos; multiplicadores de Lagrange

## INTRODUÇÃO

A análise de sistemas clássicos da Física Básica via métodos Lagrangianos e Hamiltonianos apresenta um enorme número de vantagens, principalmente do ponto de vista dos fundamentos e princípios físicos envolvidos. Em particular podemos citar como inegáveis vantagens dos tratamentos Lagrangiano e Hamiltoniano a não extensa utilização de vetores e componentes, a unificação de abordagem de diferentes problemas (mecânicos, variacionais, de teoria de campo, etc.), a linguagem própria para posterior quantização e uma visão mais clara e limpa do problema através da análise da geometria do espaço de configurações.

Uma das críticas aos métodos da mecânica analítica é a não determinação das forças de vínculo associadas a um dado problema. No presente trabalho, mostramos que é possível determinar as forças de vínculo através do método dos multiplicadores de Lagrange. Através da identificação das hipersuperfícies de vínculo de um dado prolema, introduzimos os vínculos na Lagrangiana. Após a resolução das equações de movimento,

os multiplicadores de Lagrange podem ser determinados. Com o conhecimento dos multiplicadores de Lagrange, é possível determinarmos as forças de vínculo. Mostraremos o processo completo para vínculos holônomos e para um classe de vínculos não-holônomos. Trabalharemos alguns exemplos explicitamente.

## JUSTIFICATIVA

A apresentação do presente trabalho na II SEEMAT é justificada como uma aplicação de métodos matemáticos em física teórica. Para a resolução do problema aqui apresentado foram utilizados vários métodos matemáticos, tais como geometria, cálculo variacional, cálculo de várias variáveis, equações diferenciais, etc. Acreditamos ser muito importante para o estudante de matemática o conhecimento das enormes possibilidades de aplicação dos vários conceitos matemáticos estudados em sala de aula.

A determinação das forças associadas a vínculos descritos por hipersuperfícies geométricas via multiplicadores de Lagrange é justificada por ser essa em princípio justamente uma das principais críticas à abordagem da mecânica analítica.

## OBJETIVOS

Demonstrar claramente como determinar forças de vínculo associadas a hipersuperfícies vinculantes no espaço de configurações. Efetuar os cálculos explicitamente em exemplos simples da mecânica clássica.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Denominamos o conjunto geométrico constituído pelo produto cartesiano das coordenadas generalizadas de *espaço das configurações*. Para cada valor das coordenadas generalizadas corresponde um ponto no espaço das configurações. A evolução temporal do sistema físico (dinâmica) constitui uma curva no espaço das configurações, parametrizada pela variável real tempo.

Em muitos casos de interesse físico, mesmo antes de resolvermos as equações de movimento do sistema e determinar a evolução temporal, possuímos informação relevante sobre a região onde se encontra a solução das equações de movimento.

Denominamos *vínculo* toda e qualquer limitação de ordem cinemática, portanto. Observe que restrições de ordem dinâmica não constituem vínculos, como por exemplo uma força que obriga uma partícula a subir em um plano inclinado não constitui portanto um vínculo.

## METODOLOGIA

Os vínculos são introduzidos na função Lagrangiana através de multiplicadores de Lagrange indeterminados. Seja um sistema clássico descrito por um conjunto de N coordenadas generalizadas $q^i(t)$, i = 1, ..., N submetido a um conjunto de M vínculos holônomos $f^k(q^i,t) = 0$, k = 1, ... , M independentes. As M equações de vínculo descrevem uma hipersuperfície no espaço de configurações. Seja $L(q^i,dq^i/dt,t)$ a Lagrangiana do sistema, desconsiderandio os vínculos. Introduzimos M multiplicadores de Lagrange $\lambda_k$ e reescrevemos a Lagrangiana como $L'(q^i,dq^i/dt,t) = L(q^i,dq^i/dt,t) + \lambda_k f^k$. Consideramos agora os multiplicadores de Lagrangiana como variáveis independentes e escrevemos as equações de Euler-Lagrange. Após a resolução das Equações de Euler-Lagrange as forças de vínculo calculadas a partir dos multiplicadores de Lagrange.

## RESULTADOS

Após a determinação do multiplicadores de Lagrange, as forças generalizadas (associadas às coordenadas generalizadas) podem são calculadas por $Q_k = \Sigma\ \lambda_l\ df_l/dq_q$ . Os resultados obtidos são satisfatórios e consistentes com a literatura. Nossos resultados incluem exemplos de partícula livre, partícula confinada em curvas quadráticas, partícula confinada em esfera e patinete em movimento bidimensional.

## CONCLUSÕES

O método aqui apresentado mostra-se completamente satisfatório. Nos exemplos simples em que conhecemos a solução das forças de vínculo calculadas por outros métodos, tal como o Newtoniano, chegamos exatamente à expressão conhecida para as forças de vínculo, mostrando a correção do método. Futuras aplicações deste método em teoria de campo poderão ser futuramente analisadas.

## BIBLIOGRAFIA

GOLDSTEIN ,Herbert .*Classical Mechanics* .3 ed local: Editora Addison Wesley (2007)

LEMOS, Nivaldo. *Mecânica Analítica*. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Livraria da Física (2007)

FOWLES**,** Grant R.; CASSIDAY**,** George L. *Analytical Mechanics* Saunders College Publishing (1998)

BARCELOS NETO, João – Mecânica Newtoniana, Lagrangiana & Hamiltoniana – Editora Livraria da Física (2004)