



UESB

Universidade Estadual
do Sudoeste da Bahia

SILVANO BEZERRA DE OLIVEIRA

FÍSICA I: MECÂNICA - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL



EDIÇÕES UESB

Série Textos Didáticos, v. 36



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA (UESB)

Reitor

Prof. Dr. Luiz Otávio de Magalhães

Vice-Reitor

Prof. Dr. Marcos Henrique Fernandes

Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Comunitários (PROEX)

Profª Drª Gleide Magali Lemos Pinheiro

Diretor da Edições UESB

Cássio Marcilio Matos Santos

Editor

Yuri Chaves Souza Lima

COMITÊ EDITORIAL

Presidente

Profª Drª Gleide Magali Lemos Pinheiro (PROEX)

Representantes dos Departamentos/Áreas de Conhecimento

Profª Drª Alba Benemerita Alves Vilela (DS II)

Profª Drª Delza Rodrigues de Carvalho (DCSA)

Prof. Dr. Cezar Augusto Casotti (DS 1)

Prof. Dr. Flávio Antônio Fernandes Reis (DELL)

Prof. Dr. José Antonio Gonçalves dos Santos (DCSA)

Prof. Dr. José Rubens Mascarenhas de Almeida (DH)

Prof. Dr. Luciano Brito Rodrigues (DTRA)

Profª Drª Sylvana Naomi Matsumoto (DFZ)

Representantes da Edições UESB

Esp. Cássio Marcilio Matos Santos (Diretor)

Esp. Yuri Chaves Souza Lima (Editor)

Adm. Jacinto Braz David Filho (Revisor)

Dr. Natalino Perovano Filho (Portal de Periódicos)

PRODUÇÃO EDITORIAL

Normalização Técnica

Jacinto Braz David Filho

Revisão de linguagem

Tauana Lucena de Novaes

Capa

Arte gráfica: Ana Cristina Novais Menezes (DRT-BA 1613)

Imagem: Treinamento de distância. Autora: Aleutic

Disponível em: <https://www.istockphoto.com/br/vetor/treinamento-de-dist%C3%A2ncia-gm883035018-245649158>

Silvanio Bezerra de Oliveira

FÍSICA I: MECÂNICA – SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Série Cadernos Didáticos, v. 36



EDIÇÕES UESB

Vitória da Conquista – BA
2023

Copyright © 2023 by Autor.
Todos os direitos desta edição são reservados a Edições UESB.
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte,
constitui violação de direitos autorais (Lei 9.610/98).

E-book publicado conforme o Regulamento da Publicação de Textos Didáticos na UESB.

O51f

Oliveira, Silvanio Bezerra de.

Física I: Mecânica – Simulação Computacional/Silvanio Bezerra de Oliveira. – Vitória da Conquista: Edições UESB, 2023. (Série Cadernos Didáticos, v. 36).

34 p.

ISBN 978-65-87106-67-0

1. Física: Grandezas físicas. 2. Mecânica. 3. Simulação computacional. I. T.

CDD: 530

Catálogo na fonte: Juliana Teixeira de Assunção – CRB 5/1890
Biblioteca Universitária Professor Antonio de Moura Pereira
UESB – Campus de Vitória da Conquista

Editora filiada à:



SUMÁRIO

Apresentação	5
Capítulo I – Mecânica	6
1.1 Grandezas Físicas e Unidades de Medidas	6
1.2 Movimento Unidimensional	7
1.2.1 Ausência de Movimento	7
1.2.2 Movimento com Velocidade Instantânea	9
1.2.3 Movimento Acelerado	10
1.2.4 Velocidade e Aceleração Média	16
1.2.5 Queda Livre	18
Problemas Propostos	21
Referências	24
Apêndice A - Programa 1 - Partícula em Repouso - MRU	26
Apêndice B - Programa 2 - Partícula com Velocidade Constante - MRU	27
Apêndice C - Programa 3 - Partícula com Velocidade e Aceleração Constante – MRUV	28
Apêndice D - Programa 4 -Partícula com Aceleração Constante - MRUV	29
Apêndice E - Programa 5 - Velocidade Média Escalar da Partícula	30
Apêndice F - Programa 6 - Partícula em Queda Livre p/ Três Velocidades Iniciais Diferentes - $y(t)$ e $v(t)$ – MRUV	31
Apêndice G - Programa 7 - Partícula em Queda Livre p/ Três Velocidades Iniciais Diferentes Estimando Tempo e Velocidade de Impacto - $ y(t) $ e $ v(t) $ - MRUV	33

APRESENTAÇÃO

O primeiro volume deste Caderno Didático é o início de um trabalho que resultará num material completo sobre a compreensão dos fenômenos físicos através de simulações computacionais. A experiência adquirida ao longo dos trinta e três anos, na vida acadêmica, como professor desde o ensino fundamental, médio e superior, traduz a maior motivação em poder apresentar uma abordagem diferenciada sobre a Física tão bem explorada em vários outros livros referenciados.

Atualmente, temos, ao nosso favor, o computador como ferramenta para diversas atividades cotidianas. Principalmente no campo da pesquisa científica, em que grande parte dos resultados são obtidos através das simulações computacionais. Diante disso, introduzimos, simultaneamente, com os conhecimentos de Física neste primeiro capítulo, os primeiros passos nas simulações computacionais como instrumento facilitador da compreensão dos fenômenos físicos.

Com base nos conteúdos de Física abordados por diversos autores, citados nas Referências, iniciaremos neste capítulo com o estudo das Grandezas Físicas e Unidades de Medidas e do Movimento de uma Partícula em uma Dimensão. Para este estudo, gráficos e tabelas de dados serão obtidos através das simulações computacionais utilizando uma linguagem de programação.

Para os exemplos simulados neste volume os códigos estão escritos numa linguagem de fácil entendimento, de forma simples e direta, isto é, não necessita de sub-rotinas adicionais para a execução do programa (ver nos Apêndices).

Foi utilizado o compilador *gfortran*, o qual pode ser instalado através do Ubuntu, que é um sistema operacional baseado em Linux. Ele é gratuito e de código aberto, podendo ser usado num computador ou servidor. O leitor também tem a opção de programar com outra linguagem de sua preferência.

Com essa abordagem, espera-se que o estudante adquira uma melhor formação científica, para se tornar um futuro profissional envolvido com o desenvolvimento das novas tecnologias.

CAPÍTULO 1 – MECÂNICA

1.1 GRANDEZAS FÍSICAS E UNIDADES DE MEDIDAS

Antes de realizar um estudo detalhado dos fenômenos físicos, de qualquer natureza, é importante perceber que tais fenômenos podem ser modelados de forma analítica ou numérica, através do uso de parâmetros físicos cujas grandezas podem ser escalares ou vetoriais.

A massa, o comprimento e o tempo são considerados grandezas físicas padrões pelo Sistema Internacional de Unidades, como mostra a Tabela 1 com suas unidades fundamentais.

Tabela 1: Grandezas e unidades físicas padrão do S.I.

Grandeza	Nome	Símbolo
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Massa	quilograma	kg

Fonte: elaborada pelo autor.

Entretanto, outras grandezas físicas surgem a partir das grandezas padrões, por exemplo:

- Velocidade = distância / tempo;
- Aceleração = distância / tempo;
- Força = massa x distância / tempo;
- Densidade linear = massa / distância ou comprimento;
- Densidade superficial = massa / área = massa / comprimento;
- Densidade volumétrica = massa / volume = massa / comprimento;
- Momento linear = massa x distância / tempo.

Na Tabela 2 estão algumas grandezas físicas em termos de suas unidades derivadas das grandezas padrões.

Tabela 2: Grandezas derivativas e suas unidades.

Grandeza	Símbolo
Velocidade	m/s
Aceleração	m/s^2
Força	$kg \times m/s^2 = \text{Newton}$
Densidade Linear	kg/m
Densidade Superficial	kg/m^2
Densidade Volumétrica	kg/m^3
Momento Linear	$kg \times m/s$

Fonte: elaborada pelo autor.

As grandezas físicas podem ser identificadas como **escalares e vetoriais**. Na Tabela 3, alguns exemplos dessas grandezas.

Tabela 3: Grandezas escalares e vetoriais.

Escalar	Vetorial
Tempo	Deslocamento
Massa	Velocidade
Densidade	Força
Corrente Elétrica	Aceleração
Trabalho	Torque
Temperatura	Momento

Fonte: elaborada pelo autor.

Para utilizarmos as grandezas físicas e suas unidades de medidas, na seção 1.2, analisaremos o movimento da partícula em uma dimensão espacial, isto é,

- Inicialmente em repouso;
- Deslocando-se em linha reta com velocidade constante;
- Deslocando-se em linha reta com aceleração constante;
- Finalmente em queda-livre.

OBS: O estudo do movimento bidimensional ocorrerá no Capítulo 2.

1.2 MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL

Inicialmente, temos que entender que qualquer fenômeno físico é representado por funções matemáticas, as quais foram estudadas no Ensino Médio, entre elas, as funções lineares do 1º e 2º grau, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Assim como ocorrem operações matemáticas com os números reais, \mathcal{R} (adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação), também ocorrem com as funções (diferenciação ou derivação e integração ou antiderivação). Para isso, é necessário um conhecimento prévio envolvendo o cálculo diferencial e integral de funções.

No decorrer deste capítulo, abordaremos de forma introdutória, noções básicas dessas operações aplicadas aos fenômenos físicos.

1.2.1 Ausência de Movimento

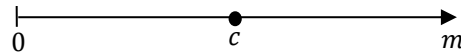
Como representar matematicamente uma partícula no estado de repouso?

Fisicamente, isso significa que ela está parada em relação a um observador num referencial inercial fixo ou com a mesma velocidade do observador, o que nos remete a 1ª Lei de Newton (Lei do Referencial Inercial) a ser estudada mais adiante.

Nesse caso, considere a função deslocamento $x(t)$ da partícula em relação ao tempo t , dada por,

$$|\vec{x}(t)| = x(t) = c \text{ (m)} \quad (1.1)$$

o que significa que a partícula sofreu uma mudança de posição em uma reta na direção horizontal, estacionou a c m a partir da origem no sentido positivo (à direita da origem).



Note que foram dadas três informações sobre o vetor deslocamento $x(t)$ da partícula:

- Módulo - $x(t)$;
- Direção - horizontal;
- Sentido - para direita (positivo) ou esquerda (negativo);

ou,

- Direção - vertical;
- Sentido - para cima (positivo) ou para baixo (negativo).

Na Matemática, a função deslocamento (Eq. (1.1)) é conhecida como **função constante**.

Para obtermos uma "resposta" dessa função, aplica-se a operação diferenciação utilizando qualquer uma das notações abaixo:

- Notação de Leibniz - $\frac{d}{dt}x(t)$;
- Notação de Lagrange - $x'(t)$;
- Notação de Newton - $\dot{x}(t)$.

Outro significado do resultado da aplicação do operador diferencial em uma função é a obtenção da **taxa de variação da função** em relação a variável dependente t .

Para obter a taxa de variação da função representada na Eq. (1.1), utilizaremos algumas das Regras de Derivação de Funções cujas demonstrações os leitores podem encontrar em vários livros de Cálculo Diferencial e Integral a partir do estudo de **Limite de Funções**.

Neste capítulo, apenas realizaremos as aplicações de algumas dessas regras, dentre elas,

- **Derivada da Função Potência**

$$x(t) = t^n \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(t^n) = n \cdot t^{n-1}, \quad \forall n \in \mathfrak{R}. \quad (1.2)$$

Como consequência dessa regra, podemos aplicar para as seguintes funções:

- **Derivada da Função Constante**

$$x(t) = c \quad (c \in \mathfrak{R}) \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(c \cdot t^0) = 0 \cdot c \cdot t^{0-1} = 0, \quad (1.3)$$

isto é, a taxa de variação de uma função constante é sempre igual a zero.

- **Derivada da Função Identidade**

$$x(t) = t \quad (t \in \mathfrak{R}) \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(t^1) = 1 \cdot t^{1-1} = 1, \quad (1.4)$$

ou seja, a taxa de variação de uma função identidade é sempre igual a um.

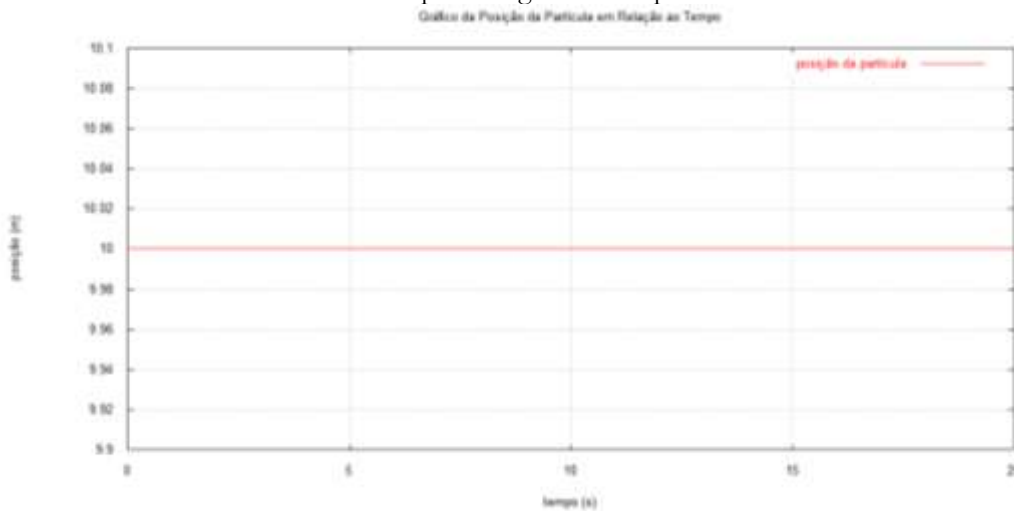
Exemplo 1: Considere uma partícula estacionada na posição a 10 m do ponto de partida durante um intervalo de tempo, a melhor função matemática que representa este tipo de situação é a função constante, cujo módulo é

$$x(t) = 10 \quad (x \rightarrow m, t \rightarrow s), \quad (1.5)$$

cuja taxa de variação, de acordo com a Eq. (1.3), é zero. Fisicamente, isso significa que a partícula permanece na mesma posição durante o transcorrer do tempo, isto é, em repouso.

No Apêndice A está o código do “Programa 1” considerando apenas a função da Eq. (1.3) dentro de um “loop” temporal. Com os dados gerados a partir da função representada na Eq. (1.5), obtém-se o esboço do seu gráfico (Figura 1.1).

Figura 1.1: Representação gráfica do resultado da simulação, posição x tempo, a partir dos dados obtidos pelo Programa 1 - Apêndice A.



Fonte: elaborada pelo autor.

1.2.2 Movimento com Velocidade Instantânea

Considere uma partícula que saiu do estado de repouso a partir de uma certa posição inicial x_0 , e percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais. A função matemática que representa essa nova situação, é representada por,

$$x(t) = x_0 + \alpha t, \quad (1.6)$$

isto é, uma função linear do 1º grau na variável t , onde $x(t)$, é a posição final da partícula em um dado instante t , e α , é o coeficiente angular da reta, que se mantém constante durante todo o intervalo de tempo.

Ao aplicar o operador diferencial na função da Eq. (1.6) utilizando as regras das Eqs. (1.3) e (1.4), obtemos,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(x_0 + \alpha t) = \frac{d}{dt}(x_0) + \alpha \frac{d}{dt}(t) = 0 + \alpha \cdot 1 = \alpha. \quad (1.7)$$

(OBS: Note que na Eq. (1.7) foi utilizada uma das propriedades da Derivação - a **derivada da soma** é igual a soma das derivadas).

Portanto, a taxa de variação de uma função linear do 1º grau é igual ao coeficiente angular da reta, α , que se mantém constante durante o movimento da partícula. Para a constante α , os físicos a denominaram de **velocidade instantânea**, $v(t)$. Assim,

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t), \quad (1.8)$$

isto é, o vetor velocidade é a taxa de variação do vetor deslocamento da partícula em relação ao tempo.

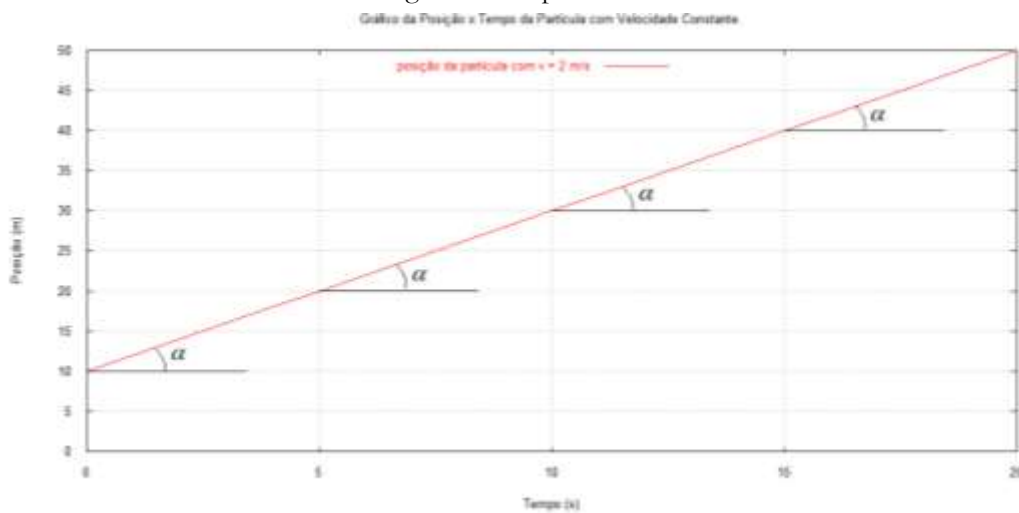
Assim, podemos retornar ao caso da partícula em repouso, Eq. (1.5), e afirmar que a sua velocidade é zero, ou, que a velocidade em qualquer instante é zero, $v(t) = 0$.

Exemplo 2: Considere uma partícula estacionada na posição 10 m, a qual entra em movimento, no sentido positivo, de uma reta horizontal com velocidade constante de 2 m/s durante um intervalo de tempo t . Nesse caso, a função matemática que melhor representa a posição da partícula a cada instante t , é uma função linear do 1º grau descrita por,

$$x(t) = 10 + 2t, \quad (1.9)$$

cujos os dados do gráfico dessa função (Figura 1.2), são obtidos a partir do “Programa 2” no Apêndice B.

Figura 1.2: Representação gráfica do resultado da simulação, posição x tempo, a partir dos dados obtidos pelo Programa 2 - Apêndice B.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1.2, note que o coeficiente angular, α , se mantém constante ao longo da reta inclinada.

1.2.3 Movimento Acelerado

Considere uma partícula que saiu do estado de repouso a partir de certa posição inicial x_0 com uma dada velocidade inicial v_0 . Nesse momento, foi observado que a sua velocidade aumentava a cada instante t , isto é, não era mais constante. Isso significa que o movimento deixa de ser representado por uma reta, e passa a ser uma curva.

Portanto, a função matemática que representa esta nova situação, é a função quadrática na variável t ,

$$x(t) = x_0 + v_0 t + Kt^2, \quad (1.10)$$

onde K , é a inclinação da reta tangente a curva, ponto a ponto. Nesse caso, consideramos $K > 0$, indicando assim, o crescimento da velocidade a cada instante t (Figura 1.3).

Aplicando o operador diferencial na função quadrática da Eq. (1.10) através das regras de derivação (Eqs. (1.2), (1.3) e (1.4)), obtemos,

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} (x_0 + v_0 t + Kt^2) = \frac{d}{dt} (x_0) + v_0 \frac{d}{dt} (t) + K \frac{d}{dt} (t^2) = v_0 + 2Kt. \quad (1.11)$$

Observe que após aplicar o operador diferencial na Eq. (1.11), o grau da função foi reduzido de 2º para 1º grau na variável t , nos revelando uma nova função da velocidade em relação ao tempo,

$$v(t) = v_0 + 2Kt. \quad (1.12)$$

em que, v_0 , é a velocidade inicial da partícula e, $2K$, é o coeficiente angular da reta que se mantém constante à medida que a velocidade aumenta proporcionalmente ao tempo.

Mais uma vez, ao aplicar o operador diferencial na função linear da Eq. (1.12), obtemos,

$$\frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} (v_0 + 2Kt) = \frac{d}{dt} (v_0) + 2K \frac{d}{dt} (t) = 2K. \quad (1.13)$$

de modo que os físicos observaram que a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo é uma constante - $2K$ - e a denominaram de **aceleração** a - m/s^2 , isto é,

$$a = \frac{d}{dt} v(t) = 2K \Rightarrow K = a/2. \quad (1.14)$$

Portanto, as Eqs. (1.10) e (1.12) podem ser reescritas como,

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2, \quad (1.15)$$

e

$$v(t) = v_0 + at, \quad (1.16)$$

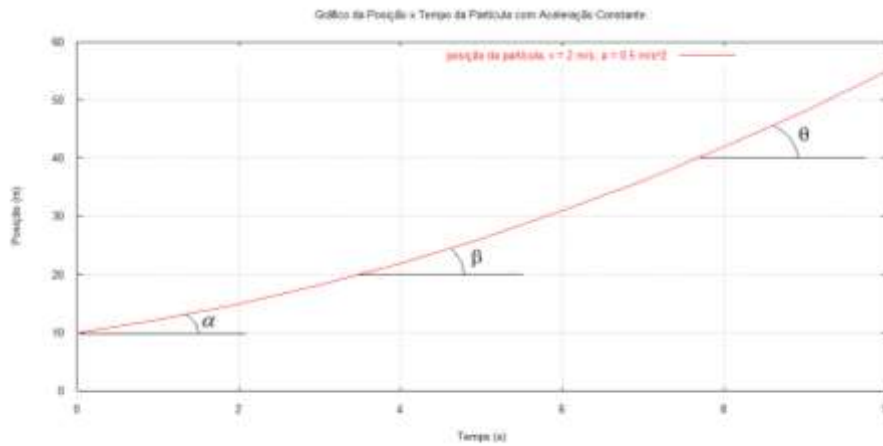
caracterizando, assim, o movimento acelerado de uma partícula ou como movimento retilíneo uniformemente variado - MRUV.

Exemplo 3: Uma partícula na posição inicial 10 m entra em movimento com uma velocidade inicial de 2 m/s sendo acelerada a $0,5 \text{ m/s}^2$ durante um intervalo de tempo, t . Podemos obter várias informações sobre o movimento dessa partícula analisando o gráfico (Figura 1.3) gerado pelo “Programa 3” no Apêndice C, isto é, da função descrita por,

$$x(t) = 10 + 2t + \frac{1}{4} t^2, \quad (1.17)$$

Na Figura 1.3, note que para cada ponto da curva, os coeficientes angulares assumem valores diferentes (α , β e θ), indicando assim, o aumento da velocidade quando submetido a uma aceleração constante.

Figura 1.3: Representação gráfica do resultado da simulação, posição x tempo, a partir dos dados obtidos pelo Programa 3 - Apêndice C.

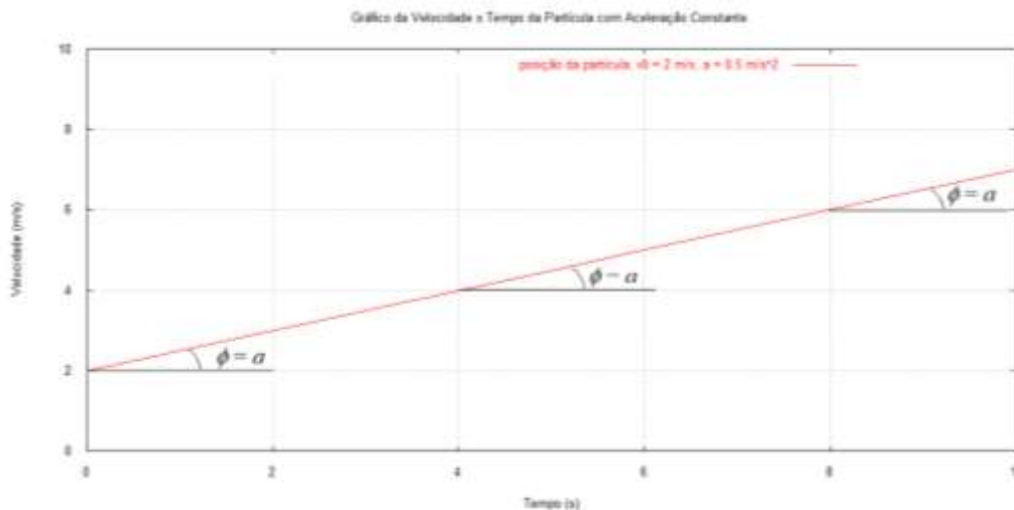


Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplo 4: Mantendo as condições iniciais do Exemplo 3, podemos obter também, informações sobre a velocidade da partícula analisando o gráfico (Figura 1.4) gerado pelo “Programa 4” no Apêndice D, isto é, da função descrita por,

$$v(t) = 2 + \frac{1}{2}t. \tag{1.18}$$

Figura 1.4: Representação gráfica do resultado da simulação, velocidade x tempo, a partir dos dados obtidos pelo Programa 4 - Apêndice D.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1.4, observa-se a linearidade do gráfico cujo coeficiente angular, ϕ , caracteriza o aumento proporcional da velocidade quando submetido a uma aceleração constante ($\phi = a$). Portanto, temos o seguinte conjunto de funções do movimento em módulo:

- $x(t) = c \Rightarrow v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 0$ - Partícula em Repouso;
- $x(t) = x_0 + vt \Rightarrow v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = v$ - Partícula com Velocidade Constante;

- $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \Rightarrow v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = v_0 + at \Rightarrow a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = a$ - Partícula com Aceleração Constante;

Desafio 1: Note que o conjunto de funções obtidas anteriormente dependem do tempo t . Combinando o módulo das Eqs. (1.15) e (1.16), obtenha a Equação de Torricelli independente do tempo,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{1.19}$$

Toda operação matemática possui a sua operação inversa, no caso da Derivação é a Integração de funções. Na literatura científica existem vários livros e tabelas de fórmulas com métodos de integração de diversos tipos de funções. Neste capítulo, apresentaremos apenas noções básicas sobre este tema para que o leitor entenda os fenômenos físicos aqui estudados.

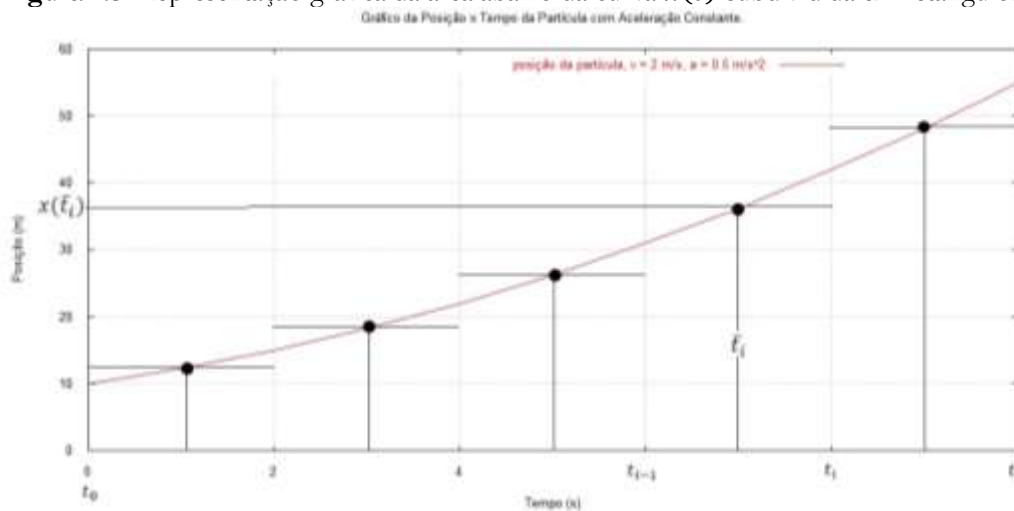
O conceito de integração surgiu com a necessidade de se calcular área da região abaixo de curvas, dado certo intervalo definido de uma função de valores reais e contínua. Pela Figura 1.5, podemos deduzir que área A da região abaixo da curva $x(t)$, compreendida entre os instantes t_0 e t_n é dada por,

$$A \cong x(\bar{t}_2)\Delta_2 t + x(\bar{t}_4)\Delta_4 t + \dots + x(\bar{t}_i)\Delta_i t + \dots + x(\bar{t}_n)\Delta_n t. \tag{1.20}$$

ou seja,

$$A \cong \sum_{i=1}^n x(\bar{t}_i)\Delta_i t. \tag{1.21}$$

Figura 1.5: Representação gráfica da área abaixo da curva $x(t)$ subdividida em retângulos.



Fonte: elaborada pelo autor.

Se $x(t)$ é uma função de valores reais e contínua definida no intervalo $[t_0, t_n]$, o número do qual as somas da Eq. (1.21) tornam-se cada vez menores à medida que $\Delta_i t$ tendem a zero, é denominado de integral de x em $[t_0, t_n]$ sendo representado por,

$$\int_{t_0}^{t_n} x(t) dt, \tag{1.22}$$

conhecida, também, como **integral de definida** no intervalo $[t_0, t_n]$. Quando o intervalo não é definido, temos, portanto, a **integral indefinida** da função $x(t)$, isto é,

$$\int x(t) dt = y(t) + c \quad (c \in \mathfrak{R}) \Rightarrow \frac{d}{dt}y(t) = x(t), \quad (1.23)$$

cuja solução, é uma nova função $y(t)$, adicionada a uma constante de integração c , de modo que, a derivada dessa função, $\frac{d}{dt}y(t)$, é exatamente igual ao integrando $x(t)$. A função $x(t)$ é denominada de **integrando** e $y(t)$, **função primitiva** de $x(t)$.

Exemplo 5: Considere as seguintes funções com suas respectivas primitivas:

- $x(t) = t \Rightarrow \int t dt = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2} + c\right) = 2 \frac{t^{2-1}}{2} = t;$
- $x(t) = t^2 \Rightarrow \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3} + c\right) = 3 \frac{t^{3-1}}{3} = t^2;$
- $x(t) = t^3 \Rightarrow \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{t^4}{4} + c\right) = 4 \frac{t^{4-1}}{4} = t^3;$

...

- $x(t) = t^n \Rightarrow \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{n+1}}{n+1} + c\right) = (n+1) \frac{t^{n+1-1}}{n+1} = t^n; \text{ ou,}$

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c. \quad (1.24)$$

Qual o resultado ao integrar uma função contínua com valores reais, definida num certo intervalo?

A resposta é uma nova função que obedece a Eq. (1.23) e que atenda a diferença das derivadas entre o limite superior e o limite inferior, isto é,

$$\int_{t_0}^{t_n} x(t) dt = \frac{d}{dt}y(t_n) - \frac{d}{dt}y(t_0). \quad (1.25)$$

Note que, a constante de integração c é igual zero devido a aplicação da diferença entre os limites de integração $[t_0, t_n]$. As Eqs. (1.24) e (1.25) são conhecidas como parte do **Teorema Fundamental do Cálculo**, as quais são demonstradas nos livros de Cálculo.

Exemplo 6: O que acontece quando integramos as seguintes funções?

- $1 - v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Rightarrow \int \left[\frac{d}{dt}x(t)\right] dt = \int dx(t) = x(t) + c_1.$
- $2 - a(t) = \frac{d}{dt}v(t) \Rightarrow \int \left[\frac{d}{dt}v(t)\right] dt = \int dv(t) = v(t) + c_2.$
- $3 - v(t) = v_0 + at \Rightarrow \int (v_0 + at) dt = v_0 \int dt + a \int t dt = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 + c_3.$
- $4 - C(r) = 2\pi r \Rightarrow 2\pi \int r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} + c_4 = \pi r^2 + c_4.$
- $5 - A(r) = 4\pi r^2 \Rightarrow 4\pi \int r^2 dr = \frac{4}{3} \pi r^3 + c_5.$

- No caso 1 temos que, assim como a derivada da função posição é a função velocidade, a integral é exatamente o inverso, isto é, a integral da função velocidade é a função posição.
- No caso 2 temos que, assim como a derivada da função velocidade é a função aceleração, a integral é exatamente o inverso, isto é, a integral da função aceleração é a função velocidade.

- No caso 3 temos que a integral da função velocidade com aceleração constante é exatamente função posição com aceleração constante (MRUV).
- No caso 4 temos que a integral da função comprimento do círculo é exatamente a função área do círculo em relação a ao raio r .
- No caso 5 temos que a integral da função área da esfera é exatamente a função volume da esfera em relação a ao raio r .

Exemplo 7: Considere a função horária da Eq. (1.18) cujo gráfico está representado na Figura 1.4. Utilizando as técnicas de integração de funções, calcule a área abaixo da reta no intervalo de tempo $[4,8]$ segundos. Note que, por se tratar de uma reta inclinada, a área abaixo da reta no intervalo $[4,8]$, pode ser obtida geometricamente pelo cálculo da área do trapézio A_T , isto é,

$$A_T = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(6+4)4}{2} = 20 \text{ u. a} \quad (\text{unidades de área}),$$

onde B é a base maior e b , a base menor do trapézio. Utilizando as técnicas de integração, obtemos,

$$\begin{aligned} v(t) = 2 + \frac{1}{2}t &\Rightarrow \int_4^8 \left(2 + \frac{1}{2}t\right) dt = 2 \int_4^8 dt + \frac{1}{2} \int_4^8 t dt = 2[t]_4^8 + \frac{1}{4}[t^2]_4^8 \Rightarrow \\ \int_4^8 \left(2 + \frac{1}{2}t\right) dt &= 2(8 - 4) + \frac{1}{4}(8^2 - 4^2) = 8 + 12 = 20 \text{ m}. \end{aligned}$$

Isto significa que a partícula se deslocou 20 m em 4 s.

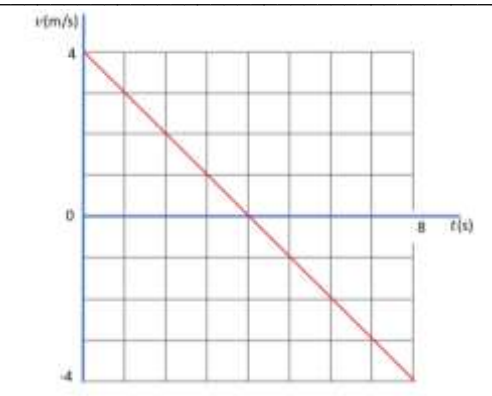
Exemplo 8: Considere a função horária da velocidade $v(t) = 4 - t$ (m/s). Mostre que $\vec{v}(t) \neq |\vec{v}(t)|$ no intervalo de tempo $[0,8]$ s. Para mostrar a diferença, faremos os gráficos de ambas as funções juntamente com a integração definida no intervalo $[0,8]$, cujo resultado será a distância percorrida nesse intervalo.

- Cálculo da integral no intervalo $[0,8]$ da função vetorial $v(t)$:

$$\int_0^4 (4 - t) dt + \int_4^8 (4 - t) dt = \left[4t - \frac{t^2}{2}\right]_0^4 + \left[4t - \frac{t^2}{2}\right]_4^8 = 8 \text{ m} + (-8 \text{ m}) = 0.$$

Observa-se no gráfico da Figura 1.6, que a partícula após percorrer 4 m para a direita, sua velocidade foi reduzindo a zero, em seguida, a velocidade da partícula muda o sentido, fazendo com que ela percorra mais 4 m para a esquerda, resultando em um deslocamento nulo, $\vec{x}(t) = \vec{0}$.

Figura 1.6: Gráfico da função velocidade em relação ao tempo.



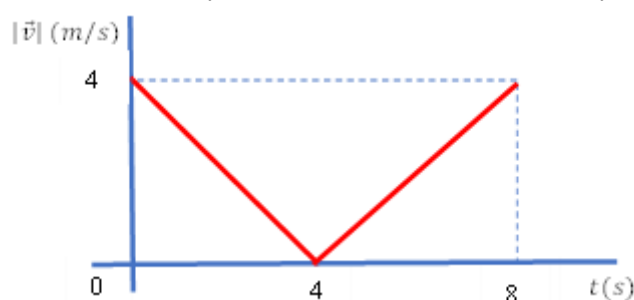
Fonte: elaborada pelo autor.

- Cálculo da integral no intervalo $[0,8]$ da função modular $|\vec{v}(t)|$:

$$\int_0^4 (4 - t) dt + \int_4^8 (t - 4) dt = \left[4t - \frac{t^2}{2}\right]_0^4 + \left[\frac{t^2}{2} - 4t\right]_4^8 = 8m + 8m = 16m.$$

Nota-se, no gráfico da Figura 1.7, que a partícula após percorrer 4 m para a direita, sua velocidade foi reduzindo a zero, em seguida, a velocidade da partícula aumenta mantendo o mesmo o sentido, fazendo com que ela percorra mais 4 m para a direita, resultando em uma distância total percorrida de 16 m, $|\vec{v}(t)|=16m$.

Figura 1.7: Gráfico da função modular da velocidade em relação ao tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

OBS: Neste exemplo, foi utilizado o cálculo integral para se obter o valor da distância percorrida pela partícula, porém, o leitor poderia calcular as áreas dos triângulos de forma direta, cujos resultados seriam os mesmos.

Portanto, através dessa abordagem, o leitor será capaz de entender outros fenômenos físicos que serão estudados mais adiante, aplicando tanto a integração de funções na forma analítica, como também, na forma numérica.

1.2.4 Velocidade e Aceleração Média

Ao considerarmos situações em que a velocidade é constante (Figuras 1.1 e 1.2), torna-se mais simples identificar a velocidade média v_m , o que não ocorre quando, a velocidade varia ao longo do

percurso (Figura 1.3). Dessa forma, ela pode ser tomada como uma grandeza escalar quando, na média, ela assume um valor após um corpo percorrer uma distância, Δx , num determinado intervalo de tempo, Δt . Isto é,

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.26)$$

De forma análoga, a **aceleração média** - a_m - é a razão entre a diferença das velocidades, obtidas em dois instantes diferentes, e o intervalo de tempo,

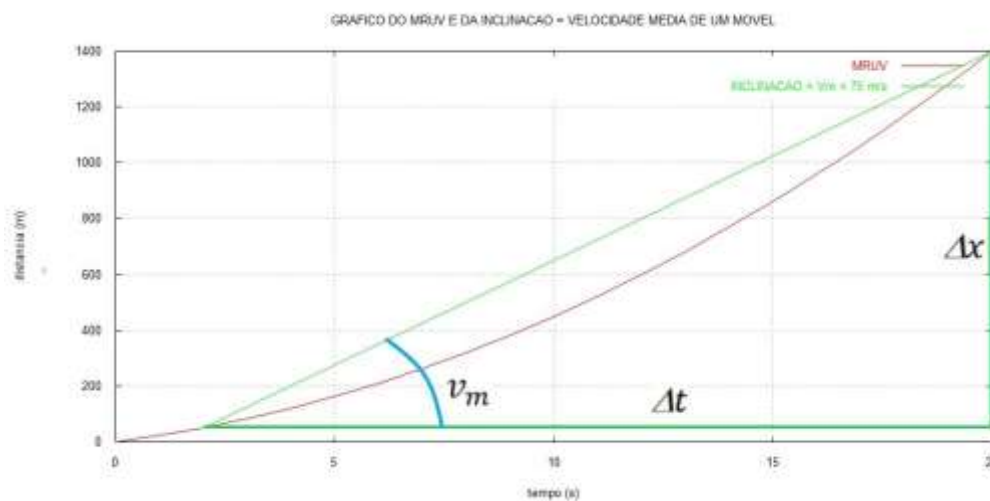
$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.27)$$

Exemplo 9: Considere um objeto que se encontra a 50 m da origem quando o cronômetro marcava $t_1=2,0$ s, isto é, $x_1=50$ m. Em seguida, ele foi observado em $t_2=20,0$ s, tendo percorrido 1.400 m de distância, isto é, $x_2=1.400$ m. Qual a **velocidade média**, v_m , do veículo durante todo o percurso?

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1.400 \text{ m} - 50 \text{ m}}{20,0 \text{ s} - 2 \text{ s}} = \frac{1.350 \text{ m}}{18,0 \text{ s}} = 75 \text{ m/s}.$$

Na Figura 1.8, nota-se que o valor da velocidade média está representado pela inclinação da reta que liga os dois pontos no gráfico, posição x tempo, isto é, $P_1(2;50)$ e $P_2(20;1.400)$ e que a mesma apenas depende da distância percorrida, Δx , durante o intervalo de tempo, Δt .

Figura 1.8: Representação gráfica do resultado da simulação, posição x tempo, a partir dos dados do exemplo 8, obtidos pelo Programa 5 - Apêndice E.



Fonte: elaborada pelo autor.

OBS: No Apêndice E encontra-se o código do Programa 5 que determina a velocidade média para qualquer intervalo de tempo a partir de uma função horária do MRUV, cujos parâmetros iniciais dessa equação são escolhidos pelo leitor.

No estudo de Limite de Funções, quando $\Delta t \rightarrow 0$, obtém-se a velocidade instantânea, isto é, o limite da velocidade média (Eq. (1.26)) quando $\Delta t \rightarrow 0$, é a derivada da função $x(t)$,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{dt} x(t).$$

Analogamente, obtém-se, também, a aceleração instantânea, onde o limite da aceleração média, Eq. (1.27) quando $\Delta t \rightarrow 0$, é a derivada da função $v(t)$,

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d}{dt} v(t).$$

1.2.5 Queda Livre

A trajetória de um corpo em queda livre pode ser considerada, por aproximação, um movimento unidimensional. Este corpo estará sujeito a uma aceleração constante que dependerá, por exemplo, da massa do planeta. No caso da Terra, a aceleração gravitacional é $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Se este corpo estiver caindo no vácuo, sem perturbação aerodinâmica atuando nele, a experiência realizada, inicialmente, por Galileu Galilei diz “que todos os corpos, quaisquer que sejam seus tamanhos, formas ou composição caem com a mesma aceleração no mesmo local próximo da sua superfície da Terra”.

Para baixas altitudes h , comparada com a distância ao centro da Terra ($\approx 6.400 \text{ km}$), a aceleração gravitacional g , pode ser considerada constante. Entretanto, à medida que o corpo se afasta da Terra, a aceleração diminui. Tal relação $g(h)$, iremos analisar com mais detalhes em outros capítulos.

Ao considerarmos a aceleração gravitacional como um vetor g , ele terá seu módulo constante, direção vertical e sentido para baixo. Isso independe da velocidade do corpo, isto é, subindo ou descendo em sua trajetória.

Portanto, $a = -g$ e as equações de movimento uniformemente variado na forma escalar (Eqs. (1.15), (1.16) e (1.19)) para a queda livre, tornam-se,

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2, \quad (1.28)$$

$$v(t) = v_0 - gt, \quad (1.29)$$

e

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0). \quad (1.30)$$

Exemplo 10: Represente graficamente a distância de afastamento e a velocidade de um corpo em queda livre a partir do repouso com velocidades iniciais $v_0 = 0 \text{ m/s}$, $v_0 = 4 \text{ m/s}$ e $v_0 = 8 \text{ m/s}$.

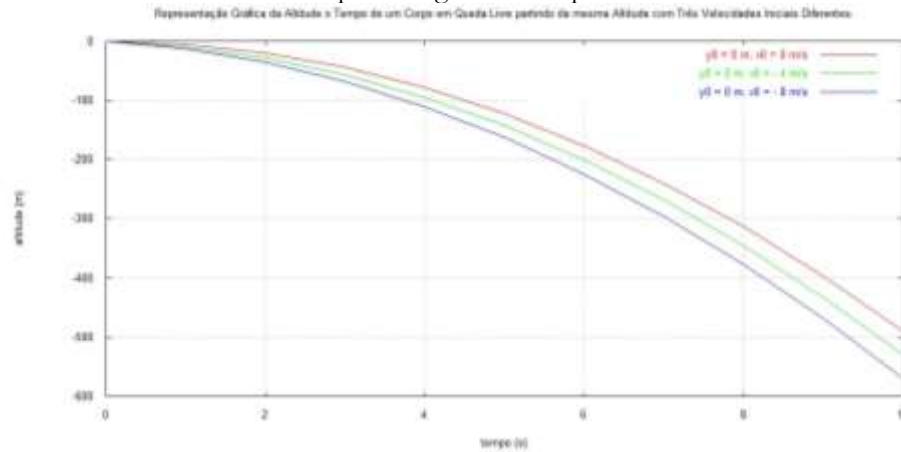
Para obter a representação gráfica da distância de afastamento e velocidade do corpo, em relação ao tempo, serão utilizadas as Eqs. (1.28) e (1.29), simuladas através do Programa 6 descrita no Apêndice F para um intervalo de tempo de 10 s.

Na Figura 1.9, uma análise gráfica é necessária, visto que, o movimento acelerado do corpo obedece à função horária quadrática dada por,

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2, \text{ com } g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

- Nota-se que, durante a queda, o corpo se afasta da origem a cada segundo em valores negativos.
- Quando o corpo possui uma velocidade inicial (negativa), v_0 , o seu afastamento torna-se mais acentuado em relação à origem.

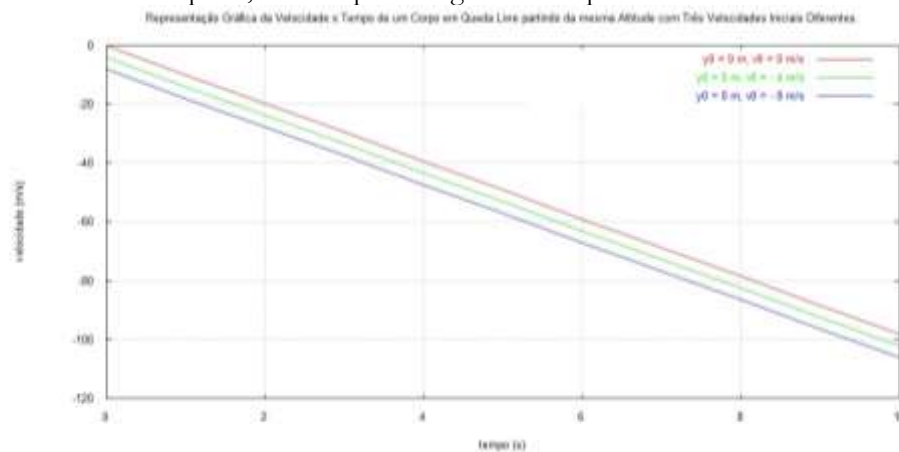
Figura 1.9: Representação gráfica do resultado da simulação, altitude x tempo, a partir dos dados do exemplo 9, obtidos pelo Programa 6 - Apêndice F.



Fonte: elaborada pelo autor.

- À medida que aumenta a velocidade inicial, nota-se que o corpo se afasta cada vez mais rápido, atingindo distâncias cada vez maiores no mesmo intervalo de tempo da simulação.

Figura 1.10: Representação gráfica do resultado da simulação, velocidade x tempo, a partir dos dados do exemplo 9, obtidos pelo Programa 6 - Apêndice F.



Fonte: elaborada pelo autor.

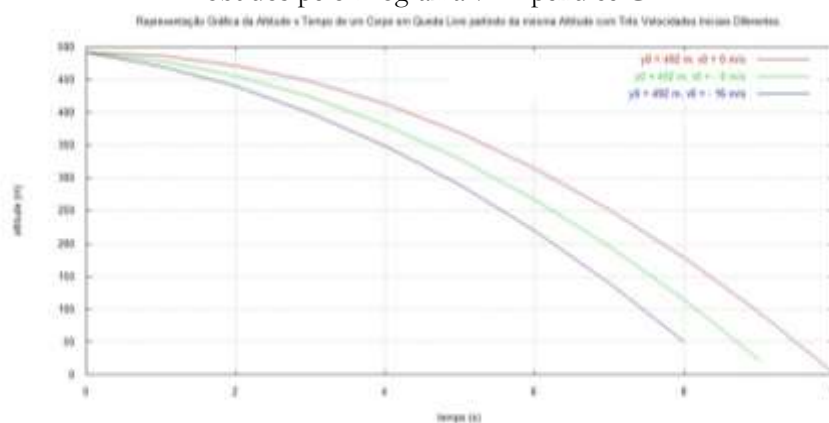
Na Figura 1.10, tem-se o gráfico da função horária linear da velocidade (Eq. (1.28)), o qual mostra o comportamento do corpo durante a queda livre a cada instante.

- Durante a queda, nota-se que a velocidade aumenta devido a aceleração gravitacional, diferenciando, apenas, quando se considera o aumento das velocidades iniciais em módulo, isto é, de 0 m/s para 4 m/s e de 4 m/s para 8 m/s.
- Dessa forma, quanto maior a velocidade inicial, maior será o afastamento em relação à origem (Figura 1.9), conseqüentemente, maior será sua velocidade final, considerando o mesmo intervalo de tempo.

Considere neste mesmo exemplo, que o objeto esteja no topo do edifício *Shanghai World Financial Center*, com 492 m de altura e que sejam considerados apenas o módulo das medidas, $|y(t)|$ e $|v(t)|$.

- Nesse caso, adiciona-se ao Programa 6 uma “condição de parada”, de modo que o primeiro valor negativo da altitude obtido na simulação, representaria o objeto atravessando a superfície da Terra.
- Logo, através da simulação e representação gráfica, a altitude, velocidade e o instante mais próximo do impacto seriam conhecidos.
- No Apêndice G encontra-se o Programa 7 que gera os dados dos gráficos presentes nas Figuras 1.11 e 1.12.

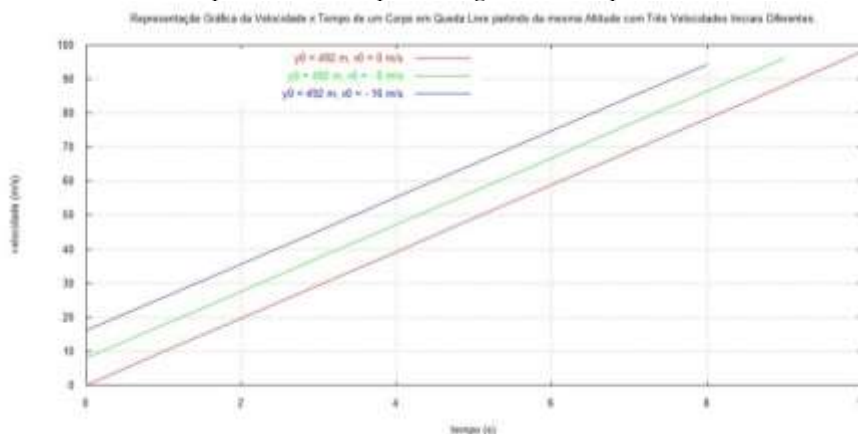
Figura 1.11: Representação gráfica do resultado da simulação: altitude x tempo, a partir dos dados do exemplo 9, obtidos pelo Programa 7 - Apêndice G.



Fonte: elaborada pelo autor.

- Na Figura 1.11, comparando os resultados das três simulações (Apêndice G) envolvendo o aumento das velocidades iniciais, nota-se que o tempo para o impacto tende a diminuir.
- Quando se diz impacto, fisicamente significa $y(t) = 0$ m. Como t é uma variável inteira, o gráfico mostra $y(t) \neq 0$, entretanto, pode-se calcular o valor de t resolvendo a equação do 2º grau para $y(t) = 0$. Obtendo assim, o seu valor exato (Apêndice G).
- O gráfico da Figura 1.12 mostra o aumento da velocidade durante a queda do objeto até o momento do impacto.

Figura 1.12: Representação gráfica do resultado da simulação, velocidade x tempo, a partir dos dados do exemplo 9, obtidos pelo Programa 7 - Apêndice G.



Fonte: elaborada pelo autor.

- De forma análoga ao gráfico da Figura 1.11, quando o objeto parte com velocidade inicial cada vez maior, a tendência é que o impacto ocorra no tempo menor e com velocidade final de impacto cada vez maior. Como mostra o quadro do Apêndice G.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Seção 1.1 - Grandezas Físicas e Unidades de Medidas

1. Crie um programa que determina: a) o valor aproximado da circunferência da Terra, tendo como dados de entrada, a distância (km) entre duas cidades e o tempo (h) entre elas. Considere ambas localizadas paralelamente à linha do equador terrestre e, b) o erro em percentuais do resultado obtido em relação ao valor real.
2. Desenvolva um programa que calcule o tempo de duração (anos) de uma viagem estelar cujos dados de entrada são: frações da velocidade da luz e a distância da estrela ou exoplaneta.
3. Suponha que a Terra sofra um retardo na sua rotação de 1 milésimo de segundos por dia. Elabore um programa que calcula o efeito cumulativo na medida do tempo, tendo como dado de entrada um período em séculos.
4. Na Astronomia, 1 UA (unidade astronômica) é a distância média entre a Terra e o Sol na ordem de $1,5 \times 10^8$ km. O parsec (pc) é outra unidade de medida utilizada, principalmente, entre galáxias - $1 \text{ pc} \approx 206.265 \text{ UA}$. Escreva um programa que calcule a distância: a) os planetas do sistema solar em relação ao Sol na unidade minutos-luz e, b) entre as galáxias Via Láctea e Andrômeda em parsec.
5. Sabendo-se que a constante de Avogadro é $N_A = 6,0221367 \times 10^{23}$ átomos/mol, crie um programa que solicite como dado de entrada, a Unidade de Massa Atômica (u.m.a) de qualquer átomo da Tabela Periódica, para calcular a) a quantidade de átomos presentes numa amostra de 1 kg do átomo em questão e b) o tempo em anos para contar esta quantidade, se possível, a uma taxa de 1.000 átomos/s.

6. Utilizando como dados de entrada a densidade volumétrica de alguns gases e líquidos conhecidos e o volume específico, escreva um programa que calcule a massa em kg dessa substância neste volume.
7. A dilatação temporal é prevista pela Relatividade Restrita e explica por que dois relógios sincronizados podem fornecer diferentes leituras de tempo após sofrerem diferentes acelerações. Utilizando a equação da dilatação do tempo,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde, $\Delta t'$, é o tempo a ser observado no referencial Terra, Δt , o tempo observado pelo astronauta, v , a velocidade do astronauta em km/s e $c = 300.000$ km/s, a velocidade da luz, elabore um programa que determina o tempo acrescido na Terra quando um viajante se desloca pelo espaço no tempo Δt , com velocidade v .

8. Uma sonda espacial parte da Terra se afastando a uma velocidade de 17,2 km/s. Elabore um programa que determina a) o tempo em que ela passa pelos planetas do Sistema Solar e b) o tempo em que as imagens feitas por ela chegue a Terra.

Seção 1.2 - Movimento Unidimensional

1. Adaptar o Programa 1 (Apêndice A), para gerar um gráfico da posição em relação ao tempo, com três partículas no estado de repouso e em posições diferentes durante um certo intervalo de tempo.
2. Adaptar o Programa 2 (Apêndice B), a) para gerar um gráfico da posição em relação ao tempo, envolvendo duas partículas com posições iniciais diferentes, uma com velocidade constante crescente e a outra com velocidade constante decrescente durante um certo intervalo de tempo b) Adicione ao programa, uma condição para que seja identificado o instante e a posição de encontro de ambas as partículas.
3. Adaptar o Programa 3 (Apêndice C), a) para gerar um gráfico da posição em relação ao tempo, envolvendo duas partículas com posições e velocidades iniciais diferentes, uma com aceleração constante e a outra com desaceleração constante durante um certo intervalo de tempo. b) Adicione ao programa, uma condição para que seja identificado o instante e a posição de encontro de ambas as partículas.
4. Adaptar o Programa 4 (Apêndice D), a) para gerar um gráfico da velocidade em relação ao tempo, envolvendo duas partículas com velocidades iniciais diferentes, uma com aceleração constante e a outra com desaceleração constante durante um certo intervalo de tempo. b) Adicione ao programa, uma condição para que seja identificado o instante em que ambas as partículas possuem as mesmas velocidades.

5. Utilizando a Equação de Torricelli (Eq. (1.19)), escreva um programa que gere um gráfico da aceleração em função do deslocamento de um corpo, que percorre uma distância $\Delta x \neq 0$ até parar, isto é, velocidade final igual a zero. Faça uma discussão dos resultados.
6. Numa estrada, o motorista resolve desacelerar o seu carro uniformemente, o que provoca uma redução na velocidade de v_0 para v_f durante t s. Utilizando as Eqs. (1.16), (1.19) e (1.27), e estes três parâmetros físicos como dados de entrada, escreva um programa que determine: a) a distância que o veículo percorrerá até parar, após a redução para v_f , e b) o tempo para percorrer esta distância.
7. Um corredor completa seu percurso em 2 minutos. Elabore um programa (adaptar o Programa 4 no Apêndice D) que gere um gráfico da velocidade em função do tempo, de modo que, a) nos primeiros 20 s ele atinge a velocidade de 6 m/s, em seguida mantém a velocidade constante por 30 s, depois reduz sua velocidade até 3 m/s durante 40 s e finalmente, mantém essa velocidade até o final do percurso. O programa deve calcular, também, a) a distância (m) percorrida em cada intervalo de tempo, b) a distância total percorrida e c) a aceleração (m/s^2) em cada intervalo de tempo citado no item a).
8. A velocidade de uma partícula obedece a função horária $v(t) = 2t + 1$, com t em s, e v , em m/s. Elabore um programa que a) esboce o gráfico das funções $v(t)$ e $x(t)$, e b) calcule a área abaixo da reta da função $v(t)$ no intervalo $[0,4]$ s e c) calcule o deslocamento no intervalo $[0,4]$ s.
9. Um avião para decolar partindo do repouso, precisa alcançar uma velocidade máxima ao final da pista. Escreva um programa que calcula essa velocidade tendo como dados de entrada, o comprimento da pista de 2,4 km e as seguintes acelerações constantes mínimas: Cesna 152 - $0,12 m/s^2$, Boeing 737 - $1,3 m/s^2$ e o avião a jato - $2,1 m/s^2$.
10. Suponha que uma sonda espacial é lançada de uma base lunar com aceleração constante de $1,62 m/s^2$. Desenvolva um programa que determine: a) o período em dias que ela alcançará $0,1c$, $0,01c$ e $0,001c$ ($c = 3,0 \times 10^8 m/s$ - velocidade da luz,) e, b) a distância em UA, percorrida nesse período.
11. Na média, a duração de um piscar dos olhos é de 125 ms. Escreva um programa que determina: a) a distância percorrida nesse tempo estando uma pessoa nas seguintes velocidades: 80 km/h, 110 km/h, 250 km/h (Fórmula 1) e 372 km/h (Fórmula 1). b) Repita a simulação com as mesmas velocidades anteriores para $t = 1$ s. Para efeito comparativo, coloque os resultados numa tabela e discuta os resultados.
12. Um carro de fórmula 1 pode acelerar de 0 a 100 km/h em 3 s, enquanto um Tesla Roadster equipado com propulsor de foguete, atinge a mesma velocidade em 1,1 s. Elabore um programa que determina o valor da aceleração média de ambos os carros e compare com a aceleração gravitacional $g = 9,81 m/s^2$ sentida pelos pilotos.
13. Quando um asteroide entra na atmosfera da Terra, ele se fragmenta passando a ser chamado de meteoritos. Elabore um programa que determina: a) o valor aproximado da velocidade final de impacto na Terra (despreze a resistência do ar) e na Lua, e b) o tempo que levou para atingir o solo,

considerando as velocidades iniciais de 28.000 km/h, 42.000 km/h, 78.000 km/h e 124.000 km/h, a partir de 110 km de altitude. Construa uma tabela comparando os resultados para discussão.

14. Construa um programa que tenha como dados de entrada, a altura máxima em que um objeto alcança ao ser lançado verticalmente e aceleração gravitacional do planeta/satélite, por exemplo, Terra Lua e Marte. Os resultados de saída serão a velocidade inicial o qual foi lançado e o tempo em que ele permaneceu no ar. Construa uma tabela com no mínimo três alturas diferentes para cada planeta/satélite, comparando os resultados para discussão.

15. Em um lançamento vertical, a aceleração de um foguete chega a Ng ($N > 1$ e g constante) de aceleração durante 1,0 min. Após certa altitude, ele apresenta problemas de funcionamento e começa a cair em queda livre. Desenvolva um programa que calcule a) a altitude máxima alcançada e, b) o tempo total, isto é, desde o lançamento até o impacto com a Terra. Construa uma tabela para alguns valores de N comparando os resultados para discussão.

Referências

DE DEUS, J. D.; PIMENTA, M.; NORONHA, A.; PEÑA, T.; BROGUEIRA, P. *Introdução à Física*. Lisboa: McGraw-Hill de Portugal, 1992. 522 p.

HALIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. *Física 1*. Tradução: Márcio Q. Moreno. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. 323 p.

HALIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K.; WALKER, J. *Fundamentos de Física*. Tradução: Ronaldo S. de Biasi. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 349 p.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 4. ed. São Paulo: Atual, 1985. 253 p.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica 1*. 4. ed. São Paulo: Blucher, 2002. 328 p.

SOUZA, C. F.; PINTO, M. V. C.; SOARES FILHO, P. C. *Física 1A*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009. v. 1. 279 p.

TIPLER, P. A. *Física*. Tradução: Horácio Macedo. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. 651 p.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN A. R. *Física I*. Tradução: Sonia M. Yamamoto. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008. 403 p.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Programa 1 – Partícula em Repouso – MRU

```

!ESTA ROTINA DETERMINA A POSIÇÃO DA PARTÍCULA EM RELAÇÃO AO TEMPO
!AUTOR: PROF. SILVANIO B. DE OLIVEIRA - UESB - VC

PROGRAM PAR_REPOUSO
INTEGER T,TF,TI      ! VARIÁVEIS INTEIRAS
REAL X,X0           ! VARIÁVEIS REAIS
DIMENSION X(30)     ! DIMENSÃO DO VETOR

OPEN (1,FILE="EX1.dat") ! ABRINDO UM ARQUIVO DE DADOS - ENDEREÇO 1

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DE TEMPO FINAL
PRINT*, "ENTRE COM A POSIÇÃO DE REPOUSO:"
READ(*,*) X0        ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL X0

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DE TEMPO INICIAL TI
PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE TI:"
READ(*,*) TI       ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL TF

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DE TEMPO FINAL
PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE TF:"
READ(*,*) TF       ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL TF

DO T=TI,TF          ! LOOP TEMPORAL NO INTERVALO
  X(T)=X0           ! FUNÇÃO HORÁRIA DO MOVIMENTO

! ESCRIVENDO INSTANTE E POSIÇÃO EM FUNÇÃO DE T NO ARQ. DE DADOS 1
WRITE (1,*) T,X(T)
ENDDO              ! FIM DO LOOP TEMPORAL
END PROGRAM        ! FIM DO PROGRAMA

```

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

0	10.0000000	11	10.0000000
1	10.0000000	12	10.0000000
2	10.0000000	13	10.0000000
3	10.0000000	14	10.0000000
4	10.0000000	15	10.0000000
5	10.0000000	16	10.0000000
6	10.0000000	17	10.0000000
7	10.0000000	18	10.0000000
8	10.0000000	19	10.0000000
9	10.0000000	20	10.0000000
10	10.0000000		

APÊNDICE B – Programa 2 – Partícula com Velocidade Constante - MRU

```

!ESTE PROGRAMA GERA DADOS DA POSIÇÃO X TEMPO NO MRU - VEL. CONST.
!AUTOR: PROF. SILVANIO B. DE OLIVEIRA - UESB - VC

PROGRAM PAR_VEL_CONST
INTEGER T,TF,TI      ! VARIÁVEIS INTEIRAS
REAL X,X0,V         ! VARIÁVEIS REAIS
DIMENSION X(30)     ! DIMENSÃO DO VETOR

OPEN (1,FILE="EX2.dat") ! ABRINDO UM ARQUIVO DE DADOS - ENDEREÇO 1

! SOLICITA NA TELA ENTRADA POSIÇÃO INICIAL
PRINT*, "ENTRE COM A POSIÇÃO DE REPOUSO:"
READ(*,*) X0      ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL X0 (M)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA VELOCIDADE
PRINT*, "ENTRE COM A VELOCIDADE:"
READ(*,*) V      ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL V (M/S)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DE TEMPO INICIAL
PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE TI:"
READ(*,*) TI     ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL TI (S)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DE TEMPO FINAL
PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE TF:"
READ(*,*) TF     ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL TF (S)

DO T=TI,TF              ! LOOP TEMPORAL NO INTERVALO
  X(T)=X0+V*T          ! FUNÇÃO HORÁRIA DO MRU

! ESCRIVENDO INSTANTE E POSIÇÃO EM FUNÇÃO DE T NO ARQ. DE DADOS 1
  WRITE (1,*) T,X(T),V

ENDDO                  ! FIM DO LOOP TEMPORAL
END PROGRAM            ! FIM DO PROGRAMA
    
```

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

0	10.0000000	2.00000000	11	32.0000000	2.00000000
1	12.0000000	2.00000000	12	34.0000000	2.00000000
2	14.0000000	2.00000000	13	36.0000000	2.00000000
3	16.0000000	2.00000000	14	38.0000000	2.00000000
4	18.0000000	2.00000000	15	40.0000000	2.00000000
5	20.0000000	2.00000000	16	42.0000000	2.00000000
6	22.0000000	2.00000000	17	44.0000000	2.00000000
7	24.0000000	2.00000000	18	46.0000000	2.00000000
8	26.0000000	2.00000000	19	48.0000000	2.00000000
9	28.0000000	2.00000000	20	50.0000000	2.00000000
10	30.0000000	2.00000000			

APÊNDICE C – Programa 3 – Partícula com Velocidade e Aceleração Constante – MRUV

```

!ESTE PROGRAMA DADOS DA POSIÇÃO X TEMPO NO MRUV - ACELER CONSTANTE
!AUTOR: PROF. SILVANIO B. OLIVEIRA

PROGRAM PAR_ACEL_CONST
INTEGER T,TF,TI      ! VARIÁVEIS INTEIRAS
REAL X,X0,V0,A      ! VARIÁVEIS REAIS
DIMENSION X(30)     ! DIMENSÃO DO VETOR

OPEN (1,FILE="EX3.dat") ! ABRINDO UM ARQUIVO DE DADOS - ENDEREÇO 1

! SOLICITA NA TELA ENTRADA POSIÇÃO INICIAL
PRINT*, "ENTRE COM A POSIÇÃO DE REPOUSO:"
READ(*,*) X0 ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL X0 (M)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA VELOCIDADE
PRINT*, "ENTRE COM A VELOCIDADE:"
READ(*,*) V0 ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL V0 (M/S)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA VELOCIDADE
PRINT*, "ENTRE COM A ACELERAÇÃO:"
READ(*,*) A ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL A (M/S^2)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DE TEMPO INICIAL
PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE TI:"
READ(*,*) TI ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL TI (S)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DE TEMPO FINAL
PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE TF:"
READ(*,*) TF ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL TF (S)

DO T=TI,TF      ! LOOP TEMPORAL NO INTERVALO
  X(T)=X0+V0*T+(A/2)*T**2 ! FUNÇÃO HORÁRIA DO MRUV

! ESCRIVENDO INSTANTE E POSIÇÃO EM FUNÇÃO DE T NO ARQ. DE DADOS 1
WRITE (1,*) T,X(T),V0,A
ENDDO ! FIM DO LOOP TEMPORAL
END PROGRAM ! FIM DO PROGRAMA

```

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

0	10.0000000	2.00000000	0.500000000	6	31.0000000	2.00000000	0.500000000
1	12.2500000	2.00000000	0.500000000	7	36.2500000	2.00000000	0.500000000
2	15.0000000	2.00000000	0.500000000	8	42.0000000	2.00000000	0.500000000
3	18.2500000	2.00000000	0.500000000	9	48.2500000	2.00000000	0.500000000
4	22.0000000	2.00000000	0.500000000	10	55.0000000	2.00000000	0.500000000
5	26.2500000	2.00000000	0.500000000				

APÊNDICE D – Programa 4 – Partícula com Aceleração Constante - MRUV

```

!ESTE PROGRAMA GERA DADOS DA VELOCIDADE X TEMPO NO MRU - ACEL CONST
!AUTOR: PROF. SILVANIO B. DE OLIVEIRA

PROGRAM PAR_AC_CONST
INTEGER T,TF,TI      ! VARIÁVEIS INTEIRAS
REAL V,V0,A         ! VARIÁVEIS REAIS
DIMENSION V(30)     ! DIMENSÃO DO VETOR

OPEN (1,FILE="EX4.dat") ! ABRINDO UM ARQUIVO DE DADOS - ENDEREÇO 1

! SOLICITA NA TELA ENTRADA VELOC INICIAL
PRINT*, "ENTRE COM A VELOCIDADE INICIAL:"
READ(*,*) V0 ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL V0 (M)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA ACELERAÇÃO
PRINT*, "ENTRE COM A ACELERAÇÃO:"
READ(*,*) A ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL A (M/S^2)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DE TEMPO INICIAL
PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE TI:"
READ(*,*) TI ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL TI (S)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DE TEMPO FINAL
PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE TF:"
READ(*,*) TF ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL TF (S)

DO T=TI,TF          ! LOOP TEMPORAL NO INTERVALO
    V(T)=V0+A*T    ! FUNÇÃO HORÁRIA DO MRUV!

! ESCRIVENDO INSTANTE E POSIÇÃO EM FUNÇÃO DE T NO ARQ. DE DADOS 1
WRITE (1,*) T,V(T),A
ENDDO              ! FIM DO LOOP TEMPORAL
END PROGRAM        ! FIM DO PROGRAMA
    
```

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

0	2.00000000	0.50000000	6	5.00000000	0.50000000
1	2.50000000	0.50000000	7	5.50000000	0.50000000
2	3.00000000	0.50000000	8	6.00000000	0.50000000
3	3.50000000	0.50000000	9	6.50000000	0.50000000
4	4.00000000	0.50000000	10	7.00000000	0.50000000
5	4.50000000	0.50000000			

APÊNDICE E – Programa 5 – Velocidade Média Escalar da Partícula

```

!ESTA ROTINA DETERMINA A VELOCIDADE MEDIA DE UM CORPO
!AUTOR: PROF. SILVANO B. DE OLIVEIRA - UESB - VC

PROGRAM VEL_MEDIA
INTEGER T,DT,TI,TF,T1,T2
REAL X,X0,V0,A,VM,DX           ! VARIÁVEIS REAIS
DIMENSION X(20)                ! DIMENSÃO DO VETOR

TI=0                            ! DEFINIÇÃO DO INSTANTE INICIAL (s)
TF=20                           ! DEFINIÇÃO DO INSTANTE FINAL (s)

X0=0.                            ! DEFINIÇÃO DA POS. INICIAL (m)
V0=20.                          ! DEFINIÇÃO DA VELOC. INICIAL (m/s)
A=5.                             ! DEFINIÇÃO DA ACELERAÇÃO (m/s^2)

OPEN (1,FILE="EXEMPLO1.dat")    ! ABERTURA ARQ DADOS - ENDEREÇO 1

DO T=TI,TF                       ! LOOP TEMPORAL NO INTERV TI À TF
  X(T)=X0+V0*T+(0.5)*A*T**2     ! EQUAÇÃO HORÁRIA DO MRUV
  WRITE (1,*) T,X(T)           ! SAÍDA DA POS EM FUNÇÃO DE T
ENDDO                            ! FIM DO LOOP TEMPORAL

PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE T1:" ! SOLICITA NA TELA T1
READ(*,*) T1                    ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL T1

PRINT*, "ENTRE COM O INSTANTE T2:" ! SOLICITA NA TELA T2
READ(*,*) T2                    ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL T2

DT=T2-T1                        ! CÁLCULO DO DELTA T
DX=X(T2)-X(T1)                 ! CÁLCULO DO DELTA X
VM=DX/DT                       ! CÁLCULO DA VELOCIDADE MÉDIA

WRITE (1,*)
WRITE (1,*) T1,X(T1)           ! ESCRIVENDO T1 E X1 NO ARQ. DE DADOS 1
WRITE (1,*) T2,X(T2)           ! ESCRIVENDO T2 E X2 NO ARQ. DE DADOS 1

! ESCRIVENDO VEL_MEDIA NO ARQUIVO DE DADOS 1
WRITE (1,*) "VEL. MÉDIA:",VM,"m/s"

END PROGRAM                      ! FIM DO PROGRAMA

```


**APÊNDICE F – Programa 6 – Partícula em Queda Livre p/ três Velocidades Iniciais
Diferentes – $y(t)$ e $v(t)$ – MRUV**

ESTE PROGRAMA GERA DADOS DA ALTITUDE E VELOCIDADE X TEMPO NO MRUV COM
ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL CONSTANTE
AUTOR: PROF. SILVÂNIO B. OLIVEIRA

```

PROGRAM PAR_ACEL_GRAV
INTEGER T, TI, TF          ! VARIÁVEIS INTEIRAS
REAL Y, V, V0, Y0, G      ! VARIÁVEIS REAIS
DIMENSION Y(30), V(30)    ! DIMENSÃO DO VETOR

TI = 0      ! INSTANTE INICIAL
TF = 10     ! SUPOSTO INSTANTE FINAL

OPEN (1, FILE="EX5.dat")  ! ABRINDO UM ARQUIVO DE DADOS - ENDEREÇO 1

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA ALTURA DE QUEDA
PRINT*, "ENTRE COM A ALTURA INICIAL EM M:"
READ(*, *) Y0           ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL Y0 (M)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA VELOCIDADE
PRINT*, "ENTRE COM A VELOC. INICIAL:"
READ(*, *) V0          ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL V0 (M/S)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA ACELERAÇÃO GRAVITAC DO PLANETA
PRINT*, "ENTRE ACELER GRAV. DO PLANETA"
READ(*, *) G           ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL G(M/S^2)

DO T=TI, TF            ! LOOP TEMPORAL NO INTERVALO
Y(T)=Y0+V0*T-(G/2)*T**2 ! FUNÇÃO HORÁRIA DA ALTITUDE
V(T)=V0-G*T           ! FUNÇÃO HORÁRIA DA VELOCIDADE

! ESCRIVENDO INSTANTE, ALTURA E VELOC. NO ARQ. DE DADOS 1
WRITE (1,10) T, Y(T), V(T)
ENDDO                  ! FIM DO LOOP TEMPORAL

10  FORMAT(I5, 5X, 2F16.3) ! FORMATAÇÃO DOS DADOS DE SAÍDA
END PROGRAM            ! FIM DO PROGRAMA

```

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

0	0.000	0.000	6	-176.580	-58.860
1	-4.905	-9.810	7	-240.345	-68.670
2	-19.620	-19.620	8	-313.920	-78.480
3	-44.145	-29.430	9	-397.305	-88.290
4	-78.480	-39.240	10	-490.500	-98.100
5	-122.625	-49.050			

0	0.000	-4.000	6	-200.580	-62.860
1	-8.905	-13.810	7	-268.345	-72.670
2	-27.620	-23.620	8	-345.920	-82.480
3	-56.145	-33.430	9	-433.305	-92.290
4	-94.480	-43.240	10	-530.500	-102.100
5	-142.625	-53.050			

0	0.000	-8.000	6	-224.580	-66.860
1	-12.905	-17.810	7	-296.345	-76.670
2	-35.620	-27.620	8	-377.920	-86.480
3	-68.145	-37.430	9	-469.305	-96.290
4	-110.480	-47.240	10	-570.500	-106.100
5	-162.625	-57.050			

APÊNDICE G – Programa 7 – Partícula em Queda Livre p/ três Velocidades – MRUV

```

!ESTE PROGRAMA GERA DADOS DA ALTITUDE E VELOCIDADE X TEMPO NO MRUV COM
!ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL CONSTANTE COM CONDIÇÃO DE PARADA
!AUTOR: PROF. SILVANO B. OLIVEIRA

PROGRAM PAR_ACEL_GRAV
INTEGER T, TI, TF          ! VARIÁVEIS INTEIRAS
REAL Y, V, V0, Y0, G      ! VARIÁVEIS REAIS
DIMENSION Y(30), V(30)   ! DIMENSÃO DO VETOR

TI = 0          ! INSTANTE INICIAL
TF = 1000      ! SUPOSTO INSTANTE FINAL

OPEN (1, FILE="EX5.dat") ! ABRINDO UM ARQUIVO DE DADOS - ENDEREÇO 1

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA ALTURA DE QUEDA
PRINT*, "ENTRE COM A ALTURA INICIAL EM M:"
READ(*, *) Y0          ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL Y0 (M)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA VELOCIDADE
PRINT*, "ENTRE COM A VELOC. INICIAL:"
READ(*, *) V0         ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL V0 (M/S)

! SOLICITA NA TELA ENTRADA DA ACELERAÇÃO GRAVITAC DO PLANETA
PRINT*, "ENTRE ACELER GRAV. DO PLANETA"
READ(*, *) G         ! ARMAZENA O VALOR DIGITADO NA VARIÁVEL G(M/S^2)

! INSTANTE REAL DO IMPACTO - Y(TC)=0 - FÓRMULA DE BHASKARA
TC = (-V0-SQRT(V0**2-4*Y0*(-G/2)))/(-G)
VIMP = V0-G*TIMP          ! VELOCIDADE DE IMPACTO

! SAIDA NA TELA DO INSTANTE E VELOCIDADE DE IMPACTO
PRINT*, TIMP, ABS(VIMP)
TF=TC                    ! CONVERTENDO VARIÁVEL REAL EM INTEIRA
DO T=TI, TF              ! LOOP TEMPORAL NO INTERVALO
Y(T)=Y0+V0*T-(G/2)*T**2 ! FUNÇÃO HORÁRIA DA ALTITUDE
V(T)=V0-G*T             ! FUNÇÃO HORÁRIA DA VELOCIDADE

IF (Y(T) .LE. 0) THEN   ! CONDIÇÃO DE PARADA ALTITUDE NEGATIVA
STOP
ELSE

! ESCRIVENDO INSTANTE, ALTURA E VELOC. NO ARQ. DE DADOS 1
WRITE (1,10) T, Y(T), ABS(V(T))

ENDIF
ENDDO                    ! FIM DO LOOP TEMPORAL

10  FORMAT(I5, 5X, 2F16.3) ! FORMATAÇÃO DOS DADOS DE SAÍDA
END PROGRAM              ! FIM DO PROGRAMA

```

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

0	492.000	0.000	6	315.420	58.860
1	487.095	9.810	7	251.655	68.670
2	472.380	19.620	8	178.080	78.480
3	447.855	29.430	9	94.695	88.290
4	413.520	39.240	10	1.500	98.100
5	369.375	49.050	Timp = 10.015 s, Vimp = 98.250 m/s		

0	492.000	8.000	5	329.375	57.050
1	479.095	17.810	6	267.420	66.860
2	456.380	27.620	7	195.655	76.670
3	423.855	37.430	8	114.080	86.480
4	381.520	47.240	9	22.695	96.290
			Timp = 9.233 s, Vimp = 98.575 m/s		

0	492.000	16.000	5	289.375	65.050
1	471.095	25.810	6	219.420	74.860
2	440.380	35.620	7	139.655	84.670
3	399.855	45.430	8	50.080	94.480
4	349.520	55.240	Timp = 8.516 s, Vimp = 99.544 m/s		