
Análise de algumas soluções topológicas do modelo de Heisenberg na superfície de um parabolóide
Analysis of some topological solutions of the Heisenberg model on the surface of a paraboloid

Priscila da Silva Cunha Vilas-Boas¹, Vagson Luiz Carvalho Santos²

¹ Universidade do Estado da Bahia - Campus VII, Senhor do Bonfim - BA, Brasil
priscila_vilasboas@hotmail.com

² Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano
Campus Senhor do Bonfim - BA, Brasil
vagson.santos@ufv.br

Resumo

Neste trabalho, investigamos o modelo de Heisenberg na superfície do parabolóide. Através das equações de Euler-Lagrange foram encontradas como soluções do modelo dois tipos de excitações: tipo-sóliton e tipo-vórtice. Na primeira, consideramos o modelo isotrópico ($\lambda = 0$) e encontramos, para o parabolóide infinito, sólitons topologicamente estáveis. No entanto, no caso da superfície com um “corte” ou do parabolóide finito, os sólitons fracionários aparecem. Considerando então o modelo anisotrópico ($\lambda = -1$), encontramos a solução tipo-vórtice, cuja energia é influenciada pela relação entre a altura e o raio máximo do parabolóide.

Palavras-chave: parabolóide, sólitons, vórtices.

Abstract

In this study, we investigate the Heisenberg model in the paraboloidal surface. Through the Euler-Lagrange equations, two types of excitation were found as solutions of the model: the soliton-like and the vortex-like. At the first one, we considered the isotropic model ($\lambda = 0$) and we found out, to the infinite paraboloid, topologically stable solitons. However, in the case of the surface with a hole in its center or the finite paraboloid, the fractional solitons appear. Then, considering the anisotropic model ($\lambda = -1$) we have found the vortex-like solution, whose energy is influenced by the relation between the high and the maximum radius of the paraboloid.

Keywords: paraboloid, solitons, vortices.

1 Introdução

Materiais magnéticos desempenham importante papel na tecnologia moderna. São aplicados em sensores de posição, fechaduras, balanças eletrônicas e motores elétricos, entre outros. No entanto, uma de suas aplicações mais importantes é a gravação magnética de dados.

Eles têm atraído a atenção de pesquisadores da Física da Matéria Condensada, cujas pesquisas buscam, por exemplo, compreender as origens microscópicas das propriedades magnéticas dos materiais, a descoberta de novos materiais e novas aplicações tecnológicas [1], de forma que a compreensão dos fenômenos relacionados ao magnetismo é de fundamental importância.

Assim, considerando a magnetização, temos que sua origem é dada no momento angular intrínseco dos elétrons (spin), cujas configurações de equilíbrio podem ser estudadas através do modelo de Heisenberg.

Esse modelo considera a interação de troca de spins eletrônicos entre os primeiros vizinhos dos sítios de uma rede de átomos, e a partir dele obtêm-se soluções, denominadas excitações topológicas. O comportamento de tais excitações é influenciado pela geometria do espaço físico, o que torna importante o seu estudo em diferentes geometrias [2].

Neste trabalho, estamos interessados em determinar a existência de excitações topológicas e calcular suas energias, fazendo para tanto um estudo teórico dos resultados obtidos através da aplicação do modelo de Heisenberg à superfície de um parabolóide.

O texto foi organizado da seguinte forma: na fundamentação teórica trazemos de forma resumida conceitos de magnetismo, defeitos topológicos e soluções, além do modelo de Heisenberg. Apresentamos então a superfície do parabolóide, e em seguida calculamos e definimos as soluções e suas energias. Por fim, apresentamos nossas conclusões.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Magnetismo

Um campo magnético \mathbf{B} pode ser produzido de duas formas: usando partículas eletricamente carregadas em movimento, ou a partir de partículas elementares que possuem um campo magnético intrínseco, como os elétrons. Estes, por sua vez possuem um momento angular, conhecido como momento angular de spin, representado pelo símbolo \mathbf{S} [3].

Quanto à intensidade do campo magnético \mathbf{H} , esta relaciona-se ao campo magnético \mathbf{B} de forma proporcional:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (1)$$

onde μ_0 é a permeabilidade do vácuo [4].

Denominada momento de dipolo magnético por unidade de volume, a magnetização \mathbf{M} é definida por:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_i m_i, \quad (2)$$

onde m_i é o momento magnético do átomo de índice i [5].

Considerando o ponto de vista microscópico, explica-se as propriedades magnéticas adquiridas por um corpo relacionando-as à existência de elétrons que se movem em torno do núcleo. Assim, se submetermos uma porção da matéria a um campo magnético externo, os elétrons que se movimentam em torno do núcleo passarão a sofrer a ação de uma força magnética causada pelo campo. No entanto, sem a presença de um campo magnético externo, e devido a agitação térmica, a orientação dos dipolos intrínsecos é aleatória. Dessa forma, ao aplicarmos um campo magnético externo, haverá uma orientação dos dipolos de forma a minimizar a energia de interação. Isso acontecerá se os momentos de spins estiverem paralelos ao campo magnético externo, sendo que tal orientação depende também da temperatura [6].

A suscetibilidade magnética por unidade de volume mede a resposta dos materiais à aplicação de um campo magnético externo através da quantidade escalar adimensional χ , definida através da relação [7]:

$$\chi = \frac{\mu_0 |\vec{M}|}{|\vec{B}|} \quad (3)$$

A depender de suas respostas, os materiais podem ser classificados como diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos, ferrimagnéticos e antiferromagnéticos. Neste trabalho porém, nosso interesse está nos materiais ferromagnéticos, e o resumo que segue foi feito a partir da referência [6].

O mecanismo responsável pelo aparecimento do ferromagnetismo são as chamadas interações de troca, existente nos elétrons do material. Essas fortes interações eletrostáticas de natureza quântica favorecem a configuração na qual os spins se alinham de forma que produzem um campo magnético não-nulo; isso acontece ainda que o campo magnético externo seja nulo. Tal configuração produz no material a formação de regiões denominadas *domínios magnéticos*, que contêm elevado número de spins eletrônicos orientados em uma determinada direção; o resultado é a existência de um momento magnético.

Assim, ainda que um pedaço de ferro não seja um ímã - dada a orientação aleatória dos momentos magnéticos, ele pode vir a sê-lo, e para tanto aplica-se um campo magnético externo. Nesse caso, os dipolos magnéticos intrínseco dos elétrons ficarão sujeitos a um torque, que tende a orientá-los no mesmo sentido e direção do campo.

Os materiais ferromagnéticos são classificados como doces e duros. Os materiais doces ganham ou perdem magnetização com a aplicação ou a retirada do campo externo. Já nos materiais duros, a magnetização residual é mantida, mesmo quando o campo externo é nulo, sendo utilizados em aplicações que necessitam de campos magnéticos permanentes. Como exemplo, citamos o armazenamento magnético de informações, em discos rígidos e flexíveis de computadores.

2.2 Defeitos Topológicos

Tanto no estudo da teoria de campos, quanto no estudo de defeitos na física de matéria condensada, têm sido utilizados a linguagem, os métodos e os teoremas de topologia algébrica, como também a teoria da homotopia, pois fornecem uma linguagem natural para a descrição e classificação de defeitos.

Um meio ordenado é definido como uma região do espaço descrita por uma função $f(r)$, que associa a cada ponto da região um parâmetro de ordem, sendo que os possíveis valores desse parâmetro constituem um espaço conhecido como espaço interno, ou parâmetro de espaço ordenado. Tal meio é dito uniforme se a função f é constante, ou seja, se o valor do parâmetro de ordem é sempre o mesmo. O interesse, no entanto, está no estudo dos defeitos topológicos, que são regiões de dimensão menor que a do meio ordenado, pertencentes a meios *não-uniformes*. Nestes, o parâmetro de ordem varia continuamente no espaço exceto, às vezes, em pontos isolados, linhas ou superfícies [8].

Considerando agora conceitos de Homotopia (extraídos das referências [7] e [2]), tomamos um sistema ordenado descrito por um campo $\vec{f}(\vec{x})$ definido sobre os pontos \vec{x} de algum domínio espacial X . Chamando de F o contorno dos possíveis valores de \vec{f} , então $F = S^1$ é um círculo se \vec{f} é um vetor de duas componentes e comprimento fixo; $F = S^2$ se \vec{f} é um vetor de três componentes e comprimento fixo, e assim por diante.

Caminhos fechados podem ser definidos a partir um sistema X unidimensional, parametrizado por $0 \leq x \leq 2\pi$, e um campo $\vec{f}(\vec{x})$ qualquer, de maneira que a cada ponto $x_i \in X$ há um ponto imagem $\vec{f}(x_i) \in F$. Uma vez que x varia de 0 a 2π , o ponto imagem traça uma curva em F partindo de $\vec{f}(0)$ e terminando em $\vec{f}(2\pi)$. No entanto, serão considerados apenas os campos que obedecem à condição $\vec{f}(0) = \vec{f}(2\pi) = \vec{f}_0$.

A partir do estudo do comportamento desses caminhos fechados, também chamados de *loops*, é possível classificá-los dentro das chamadas classes de homotopia. Assim, temos que quaisquer loops pertencentes à mesma classe podem ser deformados um no outro, sendo que loops pertencentes a diferentes classes não o podem. Como exemplo, podemos citar que um triângulo ou um quadrado podem ser deformados continuamente para se obter um círculo; pertencem, portanto, à mesma classe e seus membros são ditos homotópicos um ao outro.

Ainda acerca de caminhos fechados, é possível classificar as superfícies como simplesmente conexas e não-simplesmente conexas. Na primeira classificação, qualquer caminho fechado pode ser continuamente reduzido a um ponto; na segunda, porém, nem todas as curvas fechadas o podem.

Se considerarmos, por exemplo, o espaço euclidiano bidimensional (E^2), temos que qualquer *loop* nessa superfície pode ser deformado em um outro através de deformações contínuas, pois a superfície é simplesmente conexa; no entanto, se for feito “corte” no plano, ou seja, se um determinado ponto for excluído, teremos então uma superfície não-simplesmente conexa.

Assim, considerando um ponto excluído, então um *loop* fechado em torno dele não será um *loop* puntiforme, sendo que tais *loops* que o circulam podem ser classificados através de um inteiro Q , cuja magnitude e sinal especificam o número de vezes e o sentido no qual o ponto é envolvido.

O conjunto $\{\vec{f}^0, \vec{f}^1, \vec{f}^2, \dots\}$, onde \vec{f}^Q representa todos os *loops* que circulam o ponto excluído Q vezes, é chamado de “grupo fundamental”, ou “primeiro grupo de homotopia” de F , sendo denotado por $\pi_1(F)$. O subscrito 1 indica que X adquire a forma de uma superfície fechada unidimensional, isto é, um *loop* que é topologicamente equivalente a um círculo, S^1 . Se X é um região bidimensional do espaço, e todos os pontos do contorno são mapeados em um ponto $x_0 \in X$, então X assumirá a forma de uma superfície fechada bi-dimensional, topologicamente equivalente a uma superfície esférica, S^2 ; nesse caso, o grupo é $\pi_2(F)$.

2.3 Soluções

Neste trabalho, estudamos as soluções tipo-sóliton e tipo-vórtice, que são soluções especiais de equações não-lineares.

A teoria de campos clássica não-linear possui soluções comumente conhecidas como sólitons, que representam configurações estáveis, com energia bem definida e sem singularidades. Por serem soluções de equações de equações não-lineares, o princípio da superposição não é obedecido. Dessa forma, quando se encontram, assintoticamente, ao se separarem, eles voltam à forma anterior [9].

Por ser um objeto topológico, sua estabilidade permite que exista uma lei de conservação, de forma que há uma quantidade Q que é igual a um número inteiro e se conserva. Tal quantidade é associada a uma carga topológica, não sendo possível a deformação de um sóliton com carga igual a 1 ao estado fundamental [2]. No caso do sóliton, o mapeamento da superfície deve envolver um esfera de spins.

Vórtices, por sua vez, são excitações topológicas encontradas na busca por soluções se considerados o modelo XY, como também o modelo do rotor planar. A diferença entre os modelos está ligada aos vínculos do espaço interno de cada um: no caso do rotor planar, tem-se o vínculo $S^2 = S_x^2 + S_y^2 = 1 \Rightarrow S_z = 0$; já para o modelo XY o vínculo é $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1$, sendo que apenas S_x e S_y aparecem na Hamiltoniana, por causa da anisotropia [12].

Eles podem ser vistos como um conjunto de spins em torno de um circuito fechado em volta do núcleo, ou seja, em torno do centro ou caroço do vórtice. O núcleo, por sua vez, é uma obstrução topológica, o que torna impossível mudar, topologicamente, a configuração dos spins de forma a estarem perfeitamente alinhados a uma distância arbitrária dele [7]. Vórtices, particularmente os magnéticos, são caracterizados por terem a carga topológica associada ao grupo fundamental $\pi_1(F)$, de forma que adquirem carga pelo mapeamento de um círculo de spins na superfície magnética em questão.

Excitações tipo-vórtice associadas ao modelo de Heisenberg foram estudadas, por exemplo, em geometrias como a esfera [10] e a fita de Möbius [7]; já as excitações tipo-sóliton foram estudadas no toro [2], no cone [11] e na pseudo-esfera [12], entre outras.

2.4 O modelo de Heisenberg

O modelo de Heisenberg é usado no caso de problemas de sistemas magnéticos de baixas dimensões (1D, 2D). Ele descreve a configuração de spins em uma rede e calcula sua energia considerando a interação de troca entre os spins.

Seu Hamiltoniano, em uma aproximação contínua das variáveis espaciais e de spin, válida para grandes comprimentos de onda e temperatura suficientemente baixa, é dado por:

$$H = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 g^{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3} \lambda) \left(\frac{\partial S^a}{\partial \eta_i} \right) \left(\frac{\partial S^b}{\partial \eta_j} \right) \sqrt{|g|} d\eta_1 d\eta_2 \quad (4)$$

Aqui, J é o parâmetro de acoplamento entre spins vizinhos, dado pela diferença entre as energias do estado singleto e do estado tripleto, onde os spins são paralelos (estado ferromagnético) e antiparalelos (estado antiferromagnético) entre si, respectivamente. Além disso, se $J > 0$, a Hamiltoniana descreve um sistema ferromagnético; se $J < 0$, descreverá um sistema antiferromagnético.

Aqui, a métrica é definida por [13]:

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad (5)$$

Quanto a g^{ij} , são os elementos contravariantes da métrica, que podem ser definidos a partir dos elementos da métrica covariante através da relação:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij} \quad (6)$$

na qual δ_{ij} é o delta de Kronecker, onde $\delta_{ij} = 1$, se $i=j$, e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

Já os elementos da métrica do espaço interno (spins) são dados por h_{ab} ; $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\det[g_{ij}]|}$; η_1 e η_2 são as coordenadas da superfície.

O parâmetro λ , por sua vez, representa a anisotropia de interação entre os spins de forma que, para $\lambda = 0$, tem-se o caso isotrópico; o caso anisotrópico, por sua vez, é dado por $\lambda = -1$.

No caso do campo vetorial de spins clássicos, a parametrização foi feita em termos dos campos Θ e Φ , e avaliado numa esfera unitária. Desse modo, obtêm-se $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z) \equiv (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$, sendo $\Theta = \Theta(\eta_1, \eta_2)$ e $\Phi = \Phi(\eta_1, \eta_2)$.

3 A superfície do parabolóide

A superfície em estudo é o parabolóide, uma especial superfície quádrlica. São dois os tipos de parabolóide: o elíptico, que tem a forma de um copo oval, e o hiperbólico, que tem forma de sela.

O parabolóide elíptico pode ser representado pela equação:

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} = z \quad (7)$$

Neste trabalho, estamos interessados no parabolóide elíptico de revolução, obtido através da rotação de uma parábola ao redor de seu eixo; para obtê-lo, faz-se $R_1 = R_2 \equiv R$. Em um sistema de coordenadas cilíndricas dado por $(\rho, \varphi, z(\rho))$, onde ρ é o raio da superfície, φ o ângulo azimutal e z a altura da superfície, uma de suas possíveis equações paramétricas é dada por:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= \frac{a}{R^2} \rho^2 \end{aligned} \tag{8}$$

onde a é a altura do parabolóide, e R é o raio máximo.

Tomando $\kappa = 2a/R^2$, as métricas covariante e contravariante são dadas, respectivamente, por:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 + \kappa^2 \rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \kappa^2 \rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

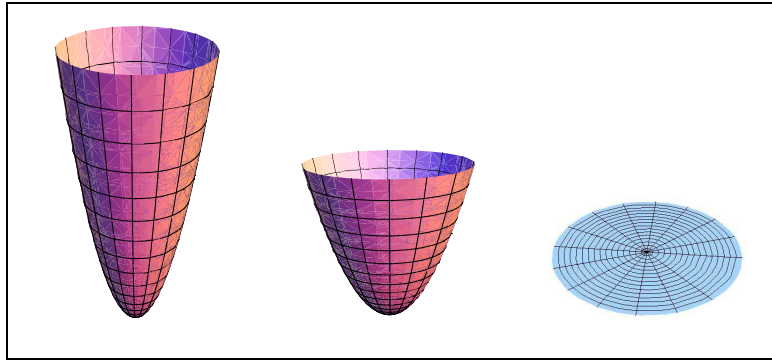


Figura 1: Representação de parabolóides elípticos de revolução com $\rho \in [0, 19]$ e diferentes alturas. Na primeira figura à esquerda, $\kappa = 0, 2$; na segunda $\kappa = 0, 1$. Ao tomar $\kappa = 0$, o parabolóide é reduzido ao plano.

3.1 Modelo de Heisenberg e soluções topológicas no parabolóide

Considerando o modelo ferromagnético, onde $J > 0$, e utilizando a representação do vetor de spin $\vec{S} = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$ obtemos a seguinte Hamiltoniana para nosso modelo:

$$\begin{aligned} H &= J \int \int \left(\frac{\rho^2}{1 + \kappa^2 \rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\rho \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\rho \Phi)^2] \\ &+ \left(\frac{1 + \kappa^2 \rho^2}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\varphi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\varphi \Phi)^2] d\rho d\varphi, \end{aligned} \tag{11}$$

onde $\partial_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial \rho}$ e $\partial_\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi}$

Determinamos ainda um parâmetro associado à superfície:

$$\zeta_{par} = \sqrt{1 + \kappa^2 \rho^2} - \ln \left(\frac{2(1 + \sqrt{1 + \kappa^2 \rho^2})}{\rho} \right) \quad (12)$$

Substituindo ζ na equação (11), a Hamiltoniana fica assim reescrita:

$$H = J \int \int \{ [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\zeta \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\zeta \Phi)^2] \\ + [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\varphi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\varphi \Phi)^2] \} d\zeta d\varphi \quad (13)$$

As equações de movimento acopladas para os campos $\Theta(\zeta, \varphi)$ e $\Phi(\zeta, \varphi)$ podem ser calculadas via equações de Euler-Lagrange para os campos. Aqui, está definida através da forma utilizada por [2], onde:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0, \quad (14)$$

Temos então as equações de movimento para os campos Θ e Φ , respectivamente:

$$\frac{\partial h}{\partial \Theta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial h}{\partial (\partial_\zeta \Theta)} \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial h}{\partial (\partial_\varphi \Theta)} \right] = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial h}{\partial (\partial_\zeta \Phi)} \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial h}{\partial (\partial_\varphi \Phi)} \right] = 0 \quad (16)$$

Uma vez que buscamos soluções estáticas, a densidade hamiltoniana assume o papel desempenhado por L em (14). Em nosso caso, ela é dada por:

$$h = [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\zeta \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\zeta \Phi)^2] \\ + [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\varphi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\varphi \Phi)^2] d\zeta d\varphi \quad (17)$$

As equações (14) e (17) nos levam à equação de movimento acopladas para os campos $\Theta(\zeta, \varphi)$ e $\Phi(\zeta, \varphi)$:

$$\sin \Theta \cos \Theta \{ -\lambda [(\partial_\zeta \Theta)^2 + (\partial_\varphi \Theta)^2] + (\partial_\zeta \Phi)^2 + (\partial_\varphi \Phi)^2 \} \\ = (1 + \lambda \sin^2 \Theta) [(\partial_\zeta^2 \Theta) + (\partial_\varphi^2 \Theta)] \quad (18)$$

$$\sin 2\Theta [(\partial_\zeta \Phi)(\partial_\zeta \Theta) + (\partial_\varphi \Phi)(\partial_\varphi \Theta)] \\ + (\sin^2 \Theta) [(\partial_\zeta^2 \Phi) + (\partial_\varphi^2 \Phi)] = 0 \quad (19)$$

Tais equações diferenciais acopladas são não-lineares, de forma que soluções gerais somente podem ser obtidas desde que sejam impostas algumas condições, o que nos leva às soluções especiais.

3.2 Soluções tipo-sóliton

Para soluções tipo-sóliton, consideramos o modelo isotrópico, onde $\lambda = 0$, e assumimos a simetria cilíndrica, onde $\Theta(\zeta, \varphi) = \Theta(\zeta)$ e $\Phi(\zeta, \varphi) = \Phi(\varphi)$. Dessa forma, obtemos da equação (13) a seguinte Hamiltoniana:

$$H = J \int_0^{2\pi} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} [(\partial_\zeta \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\varphi \Phi)^2] d\zeta d\varphi \quad (20)$$

Enquanto as equações acopladas (18) e (19) tomam a seguinte forma:

$$\sin \Theta \cos \Theta (\partial_\varphi \Phi)^2 = (\partial_\zeta^2 \Theta) \quad (21)$$

$$\sin^2 \Theta (\partial_\varphi^2 \Phi) = 0 \quad (22)$$

Se fizermos $\Theta = n\pi$, onde n é um inteiro, chegamos a uma solução para as equações. Porém, por representar o estado fundamental do modelo utilizado, não nos é interessante, tendo em vista o objetivo de determinar a energia da excitação.

A partir da equação (22), fizemos $(\partial_\varphi^2 \Phi) = 0$, assumimos $(\partial_\varphi \Phi) = 1$, e fizemos a devida substituição na equação (21), obtendo a equação de sine-Gordon:

$$\sin \Theta \cos \Theta = (\partial_\zeta^2 \Theta), \quad (23)$$

A equação (23) tem como solução mais simples [12]:

$$\Theta(\zeta) = 2 \arctan(e^\zeta) \quad (24)$$

Observamos então que, tomando $\rho \rightarrow 0$, $\zeta_{par} \rightarrow -\infty$ e $\Theta \rightarrow 0$; já para $\rho \rightarrow \infty$, $\zeta_{par} \rightarrow \infty$ e $\Theta \rightarrow \pi$. Assim, no caso do parabolóide infinito, temos que a equação (24) representa um π -sóliton. Além disso, como a esfera de spins é completamente mapeada, ele tem carga topológica igual a 1, pertencendo assim à primeira classe do segundo grupo de homotopia, e por isso tem estabilidade topológica.

A energia do sóliton é calculada substituindo a equação (24) em (20). Fazendo a integração, temos:

$$E_S = -\frac{8\pi J}{e^{2\zeta} + 1} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (25)$$

Considerando o intervalo $\rho \in [0, \infty)$, a equação (25) nos dá $E_S = 8\pi J$. No entanto, observa-se que o modelo falha na origem, fazendo-se necessário um “corte” no parabolóide, de forma que a esfera de spins não será completamente mapeada; neste caso, a carga topológica é fracionária, motivo pelo qual o sóliton é instável.

Concluimos então que o parabolóide punturado, bem como o parabolóide finito (onde $\rho \in [0, r]$, sendo r finito), não suportam sólitons estáveis, fazendo com que a configuração de spins decaia para o estado fundamental.

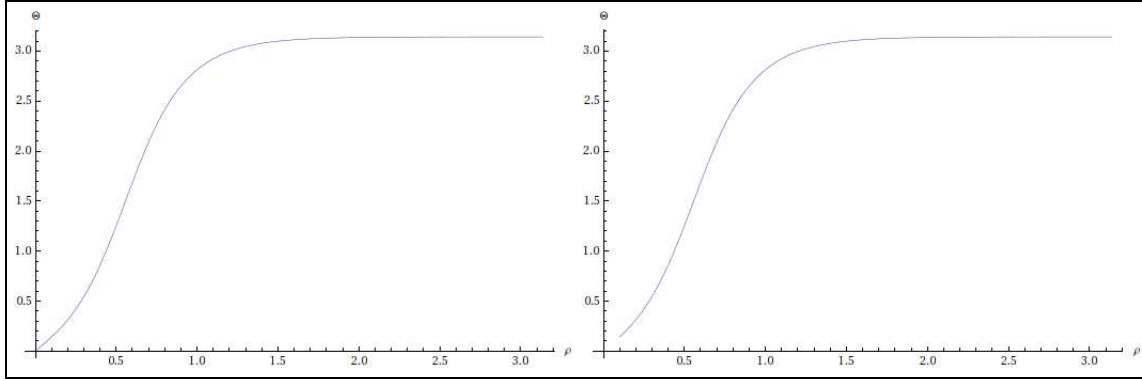


Figura 2: Comportamento de Θ em função de ρ , com $\kappa = 3$. Na figura à esquerda, tem-se um π -sóliton; à direita, um sóliton fracionário, dada a inserção de um “corte”.

3.3 Soluções tipo-vórtice

Considerando agora um modelo com anisotropia, sendo $\lambda = -1$, temos o modelo XY, que é frequentemente considerado como a forma em que os spins estão paralelos à superfície; fazendo $\Theta = \pi/2$, tem-se o regime do rotor planar, que garante que o eixo Z da esfera de spin (espaço interno) esteja sempre perpendicular à superfície.

Assim, sendo $\lambda = -1$, $\Theta = \pi/2$ e considerando simetria cilíndrica, onde $\Theta(\zeta, \varphi) = \Theta(\zeta)$ e $\Phi(\zeta, \varphi) = \Phi(\varphi)$, temos uma solução tipo-vórtice. A equação (13) toma então a seguinte forma:

$$H = J \int_0^{2\pi} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (\partial_\varphi \Phi)^2 d\zeta d\varphi \quad (26)$$

As equações de movimento, por sua vez, são reduzidas a:

$$\sin^2 \Theta (\partial_\varphi^2 \Phi) = 0 \quad (27)$$

Nessa equação, fazemos $(\partial_\varphi^2 \Phi) = 0$ e assumimos $(\partial_\varphi \Phi) = 1$, o que nos leva à seguinte solução:

$$\Phi(\phi) = Q\phi + \phi_0, \quad (28)$$

onde Q é a carga do vórtice e ϕ_0 é uma constante de integração.

Para calcular a energia do vórtice, foi feita a substituição da equação (28) na (26), cujo resultado é:

$$E_v = 2\pi J Q^2 \zeta \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (29)$$

Assumimos então a carga topológica do vórtice como $Q = 1$, pois assim ele tem tanto estabilidade topológica quanto física. Dessa forma, distorcê-lo continuamente com objetivo de trazê-lo para o estado fundamental demanda quantidade considerável de energia, o que não acontece quando a carga $Q > 1$, pois assim ele não adquire estabilidade física facilmente.

A partir dessas considerações, temos que a equação (29) toma a seguinte forma:

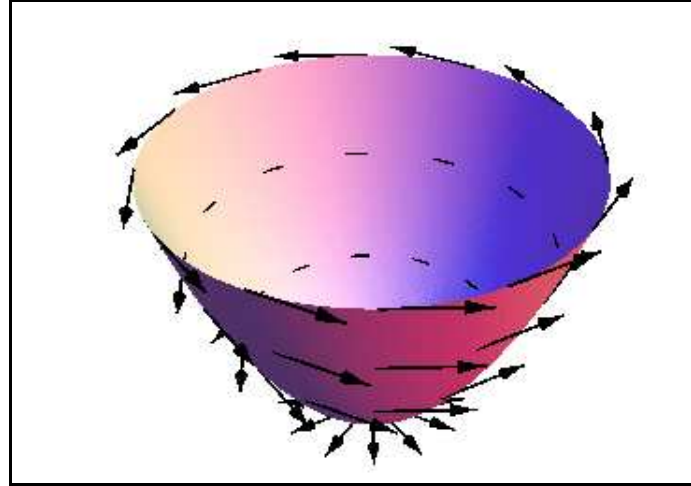


Figura 3: Comportamento do campo de spins clássicos na superfície do parabolóide, para o caso em que $\lambda = -1$ e $\Theta = \frac{\pi}{2}$. O vórtice tem carga $Q=1$.

$$E_v = 2\pi J \zeta \Big|_0^R \quad (30)$$

No entanto, o modelo de Heisenberg aqui utilizado falha, motivo pelo qual foi inserido um “corte” de tamanho l no centro do parabolóide, de forma que a energia do vórtice pode então ser determinada:

$$E_{vpar} = E_c + 2\pi J \left[\eta + \ln \left(\frac{R(1 + \sqrt{1 + \kappa^2 l^2})}{l(1 + \sqrt{1 + \kappa^2 R^2})} \right) \right] \quad (31)$$

Nesta equação, E_c é a energia do núcleo do vórtice (associada à destruição do parâmetro de ordem no caroço do defeito) e $\eta = \sqrt{1 + \kappa^2 R^2} - \sqrt{1 + \kappa^2 l^2}$.

4 Conclusões e perspectivas

Estudamos o modelo de Heisenberg para spins clássicos na superfície do parabolóide e encontramos, através das equações de Euler-Lagrange, excitações tipo-sóliton e tipo-vórtice como solução.

No caso dos sólitons, vimos que sua estabilidade é válida apenas no caso do parabolóide infinito, onde obtivemos como solução um π -sóliton com carga topológica $Q = 1$. Já para o parabolóide ponturado ou o parabolóide finito, encontramos sólitons instáveis. A razão da instabilidade é a carga fracionária, uma vez que a esfera de spins não foi completamente mapeada.

Quanto à solução tipo-vórtice, vimos que foi necessária a inserção de um “corte” para que sua energia pudesse ser calculada, sendo que esta é influenciada pela relação entre a altura e o raio máximo do parabolóide.

A partir desses resultados pudemos comparar, por exemplo, nossa solução tipo-sóliton com a obtida na *pseudo*-esfera, sendo que neste caso ela é instável; é interessante notar que as superfícies são topologicamente equivalentes.

Observações como esta nos instigam a dar continuidade ao trabalho, fazendo comparações com os resultados obtidos em outras superfícies, como também aprofundando nossos conhecimentos acerca das teorias a ele relacionadas.

Agradecimentos

P.S.C. Vilas-Boas agradece à UNEB/Campus VII através do curso de Especialização em Matemática Aplicada; a A.F. Santos por coordená-lo, junto a sua equipe; e a V.L. Carvalho-Santos, pela orientação e incentivos. V.L.C.S. agradece à agência brasileira CNPq (número 229053/2013-0) pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] REZENDE, Sergio Machado. **Magnetismo e materiais Magnéticos no Brasil**. Boletim Informativo da SBF. São Paulo: SBF(3), p. 26-35, 1998.
- [2] SANTOS, Vagson Luiz de Carvalho. **Soluções topológicas de spins no toro**. 2008, 74f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2008.
- [3] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física. 8a Edição, Vol. 3: eletromagnetismo**. Rio de Janeiro, LTC, 2009.
- [4] SHACKELFORD, James F. **Ciência dos materiais**. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008.
- [5] REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. Rio de Janeiro, Elsevier, 1982.
- [6] MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do Eletromagnetismo, Vol. II**. Ponta Grossa, Editora UEPG, 2002.
- [7] FREITAS, Walter Andrade de. **Soluções tipo-vórtice de spin na fita de Möbius**. 2009. 63f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2009.
- [8] MERMIN, N. David. **The topological theory of defects**. Reviews of Modern Physics, v. 51, 1979.
- [9] RYDER, Lewis H. **Quantum Field Theory**. 2nd ed. Cambridge University Press, 1996.
- [10] MILAGRE, G. S.; MOURA-MELO, Winder A. **Magnetic vortex-like excitations on a sphere**. Physics Letters A, v. 368, p. 155-163, 2007.
- [11] FREITAS, W. A.; MOURA-MELO, W. A.; PEREIRA, A. R. **Heisenberg spins on a cone: an interplay between geometry and magnetism**. Physics Letters A, v. 336, p. 412-422, 2005.
- [12] BELO, Leandro Ribeiro. **Modelo de Heisenberg em um espaço com curvatura negativa: excitações topológicas de spin na pseudo-esfera**. 2007. 68f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2007.

-
- [13] ARFKEN, George B. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [14] CARVALHO-SANTOS, V. L.; APOLONIO, F. A.; OLIVEIRA-NETO, N. M. **On geometry-dependent vortex stability and topological spin excitations on curved surfaces with cylindrical symmetry**. Physics Letters A, v. 377, p. 1308-1316, 2013.
- [15] MOURA-MELO, W.A.; PEREIRA, A.R.; MÓL, L.A.S.; PIRES, A.S.T. **Geometrical pinning of magnetic vortices induced by a deficit angle on a surface: Anisotropic spins on a conic space background**. Physics Letters A, v. 360, p. 472-480, 2007.
- [16] RAJARAMAN, R. **Solitons and instantons**. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [17] SAXENA, A.; DANDOLOFF, R.; LOOKMAN, T. **Deformable curved magnetic surfaces**. Physica A, v. 261, p. 13-25, 1998.