Ex@tas Online

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

Aplicando conceitos de Geometria Diferencial para o cálculo de área
Applying Differential Geometry concepts to the area computation

Claudiano Goulart [1], Jany Santos Souza Goulart [1,2] e Jonathas de Souza Carvalho [3]

[1] Departamento de Ciências Exatas – Universidade Estadual de Feira de Santana (DEXA/UEFS)

[2] Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências – Universidade Federal da Bahia / Universidade Estadual de Feira de Santana (PPGEFHC-UFBA/UEFS)

[3] Graduado em Licenciatura em Matemática – Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)

Resumo

Neste artigo, apresenta-se uma proposta que versa sobre o cálculo de áreas de figuras planas e espaciais por meio da Geometria Diferencial. É frequente associar o cálculo de área de tais figuras no âmbito das Geometrias Plana e Espacial. Nesse sentido, pensou-se no desenvolvimento de uma atividade que seguisse um caminho diferenciado daquele que é comumente propagado em documentos oficiais, como PCNs, Livros-textos e didáticos, orientações curriculares, dentre outros. Nestes termos, foram convidados alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática para percorrer essa trilha, sendo ofertado um minicurso cujo objetivo central foi abordar conceitos da Geometria Diferencial, tais como parametrizações e primeira forma fundamental e suas aplicações, obtendo-se por este método conhecidas fórmulas de área estudadas nos ensinos fundamental e médio. Em termos teóricos, recorremos tanto à Geometria Diferencial quanto ao seu arcabouço histórico, no intuito de se compreender como ocorreu seu desenvolvimento. Além disso, transitou-se do método tradicional, geralmente empreendido em aulas de matemática, a uma abordagem em que a manipulação, a construção e a representação dos objetos matemáticos estavam presentes.

Palavras-chave: Cálculo de áreas. Geometria Plana e Espacial. Geometria Diferencial.

Abstract

In this article, a proposal is presented that deals with the computation of areas of plane and spatial figures through Differential Geometry. It is frequent to associate the area computation of such figures in the scope of the Plane and Spatial Geometries. In this sense, we thought about the development of an activity that followed a path different from the one that is commonly propagated in official documents, such as PCNs, textbooks and didactics, curricular guidelines, among others. In these terms, students of a Mathematics Degree Course were invited to follow this path, being offered a mini course whose main objective was to approach concepts of Differential Geometry, such as parametrizations and first fundamental form and its applications, obtaining by this method known area formulas studied in elementary and middle schools. In theoretical terms, we use both the Differential Geometry and its historical framework, in order to understand how its development occurred. In addition, it was transposed from the traditional method, usually undertaken in mathematics classes, to an approach in which the manipulation, construction, and representation of mathematical objects were present.

Keywords: Computation of areas. Plane and Space Geometry. Differential Geometry

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

1 Introdução

Em um primeiro momento, quando nos referimos ao cálculo de área de figuras planas ou espaciais, os métodos empregados no âmbito da Geometria Plana e Espacial são fundamentalmente utilizados. Contudo, neste artigo revelaremos possibilidades de transitar por um percurso diferenciado dos que comumente são propagados na esfera dos documentos oficiais e nas práticas das salas de aula nos diversos níveis de ensino. Nesta perspectiva, surgiu a intenção de promovermos um minicurso que contemplasse o cálculo de áreas intercambiando com alguns elementos da Geometria Diferencial. O público-alvo foi constituído por discentes de um Curso de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de despertar nos mesmos uma visão mais ampla do conhecimento em pauta, e, considerando-se o fato de que em um futuro breve estarão exercendo a função de docentes de matemática, em consequência, poderão propagar uma concepção diferenciada acerca dos cálculos de áreas.

Neste âmbito, os PCNs [1] (p. 26) propõem romper com "aspectos de exploração de conteúdos meramente acadêmicos, de forma isolada, sem qualquer conexão entre seus próprios campos ou com outras áreas de conhecimento", tendo no horizonte que o ensino dessa disciplina pouco tem contribuído para a formação integral do aluno, com vistas à conquista da cidadania. Inserida nesse direcionamento, a conceituação de área de figuras geométricas revela-se como um conteúdo com potencial para abordar fatos que estabelecem ligação direta com situações cotidianas. Num mesmo direcionamento, as orientações curriculares para o ensino médio [2] (p. 75) seguem a argumentação de que "o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos [...]. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, *áreas* e volumes" (grifo nosso).

Em cursos de nível do ensino superior vinculados às ciências exatas, o cálculo da medida de área de figuras planas ou espaciais está presente nas ementas de componentes curriculares como Geometria Analítica (área de regiões delimitadas por triângulos e paralelogramos em um tratamento na teoria de vetores) e Cálculo Integral de uma ou mais variáveis (área de regiões planas delimitadas pelo gráfico de funções integráveis ou área de uma superfície no espaço obtida pela rotação de uma curva em torno de um eixo fixado). Conforme detalharemos na próxima seção, o cálculo de área ainda pode ser abordado no âmbito da componente Geometria Diferencial, usando-se, para este fim, a noção de parametrizações de uma superfície e os coeficientes de sua primeira forma fundamental associados a uma fixada parametrização. Assim, diante do exposto, nota-se que o tópico área transita em diversos níveis de ensino.

Em uma abordagem mais atual, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC [3] destaca algumas unidades temáticas, dentre elas está a Geometria, ressaltando que a mesma

> não pode *ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área* e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. [...] Enfatiza-se também que, a equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura") (BNCC, 2017, p. 270, grifos nossos).

Neste sentido, Baltar [4] e Facco [5] destacam que a noção de área de uma região poligonal pode ser trabalhada apenas como uma grandeza, independentemente da unidade de medida escolhida. Assim, pode-se definir axiomaticamente o conceito de área da seguinte forma:

Seja P o conjunto de todos os polígonos de um plano. Para todo polígono convexo $A \in P$, existe uma única aplicação $u_A: P \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que

(i) $u_A(S),\ \forall S \in P$
(ii) $u_A(A) = 1$
(iii) $u_A(S_1 \cup S_2) = u_A(S_1) + u_A(S_2),\ \forall S_1, S_2 \in P$ com $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
(iv) $u_A(G(S)) = u_A(S), \forall S \in P$ e para toda isometria G do plano.

Defina em $P \times P$, a relação de equivalência R_A por

$$S\, R_A S' \quad \Leftrightarrow \quad u_A(S) = u_A(S').$$

A classe de equivalência $\overline{S_1} = \{S \quad | \quad S\, R_A S_1\}$ é dita área de S_1. O número real positivo $m(S_1) = u_A(S_1)$ é chamado medida da área S_1. Nota-se que a área tratada como grandeza tem por objetivo apenas comparar duas regiões e decidir se elas pertencem a uma mesma classe de equivalência.

A partir deste escopo introdutório, direcionaremos nosso olhar para os relatos históricos, os quais asseguram que a matemática, dita primitiva, necessitava de um embasamento prático para se desenvolver. No caso específico da geometria, os problemas decorriam de fórmulas de mensuração própria para os cálculos de áreas de terra e volume de grãos. Em uma perspectiva contemporânea, a geometria adquire novos aspectos. Podemos citar, por exemplo, a utilização de técnicas do cálculo diferencial para estudar a teoria de curvas e superfícies no espaço Euclidiano tridimensional. Conforme pontuado por Eves [6] (p. 603), existem evidências de pesquisas neste campo desde o século XVIII, realizadas por Gaspard Monge e Euler; foi Gauss, porém, em 1827, quem dedicou em sua obra denominada *Disquisitiones Generalles Circa Superfícies Curvas* um volume ao tema. Todavia, o assunto ganhou maior notoriedade por meio das equações gravitacionais da Teoria da Relatividade de Albert Einstein.

De acordo com Boyer [7] (p. 434): "o interesse pela teoria geral da relatividade levou a uma quantidade de publicações objetivando esclarecer ou expandir tanto a teoria da relatividade quanto a geometria diferencial". Genericamente, podemos considerar que a geometria usual se interessa pela totalidade de uma figura, ao passo que a Geometria Diferencial se concentra nas propriedades de uma curva ou superfície numa vizinhança imediata a um ponto. Neste contexto, a junção entre o cálculo de área e a Geometria Diferencial torna-se um relevante exercício para o desenvolvimento e formação do futuro professor de matemática.

2 Relação entre cálculo de área e Geometria Diferencial

Nesta seção, iremos apresentar um breve resumo sobre alguns conteúdos abordados em um curso de Geometria Diferencial. Uma discussão detalhada sobre os temas que abordaremos a seguir pode ser encontrada em Carmo [8] ou Tenenblat [9].

O principal objetivo da Geometria Diferencial é o estudo de curvas e superfícies regulares no espaço euclidiano tridimensional fazendo uso de conceitos de diversas áreas, como cálculo diferencial, análise matemática, álgebra linear, álgebra e topologia. Em linhas gerais, uma curva regular no espaço é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que, localmente, pode ser coberto por imagens de difeomorfismos a um parâmetro real e que, em cada ponto, a reta tangente está bem definida. De modo similar, uma superfície regular S é um subconjunto do espaço euclidiano tridimensional localmente difeomorfo a um subconjunto aberto U do plano e que, em cada ponto $p \in S$, pode-se considerar um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (geralmente denotado por T_pS), de dimensão 2, tangente a S em p. Por este motivo, o conjunto em questão é denominado plano tangente a S em p. Mais precisamente, dado $p \in S$ é possível construir uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, tal que X é um homeomorfismo diferenciável e para cada q $\in U$, a aplicação linear $dX_q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora. A aplicação X é dita parametrização de S em p. Historicamente, este estudo de uma superfície regular através de parametrizações (ou sistema de coordenadas locais) foi introduzido por Gauss, conforme destacado por Eves [6] (p. 602), ao declarar que "[...] Carl Friedrich Gauss (1777-1855) introduziu o método singularmente produtivo de estudar a geometria diferencial de curvas e superfícies por meio de representações parametrizadas desses objetos.".

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

Como exemplos de superfícies regulares, podemos citar planos, esferas, superfícies de revolução (conjunto obtido pela rotação de uma curva regular em torno de uma reta fixada), gráficos de funções reais diferenciáveis $f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, imagem inversa de um valor regular, isto é, o conjunto $f^{-1}(a)$, onde $f: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, $a \in f(U)$ e $\nabla f(p) \neq 0$, $\forall p \in f^{-1}(a)$ (elipsoides, paraboloides e hiperboloides são exemplos de superfícies definidas por imagem inversa de valor regular).

Restringindo a T_pS, o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, podemos obter uma forma quadrática definida neste plano. Mais precisamente, podemos definir a função

$$I_p: T_pS \to \mathbb{R}, \text{ dada por } I_p(v) = < v, v > = |v|^2,$$

denominada primeira forma fundamental de S em p. Observemos que dada uma parametrização local $X: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ uma vizinhança V de p, podemos considerar uma base $B = \{X_u, X_v\}$ de T_pS e construir funções diferenciáveis

$$E =< X_u, X_u >, F =< X_u, X_v >, G =< X_v, X_v >.$$

Neste caso, $I_p(v) = a^2 E + 2ab\, F + b^2 G$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são as coordenadas de v, com relação à base B. Além disto, $|X_u \times X_v| = EG - F^2$.

O conhecimento da primeira forma fundamental nos permite tratar de questões métricas na superfície, tais como comprimento de curvas, ângulos entre duas curvas que se interceptam e cálculo de área de regiões contidas em superfícies regulares. Não discutiremos os detalhes envolvidos nestas aplicações, porém, tendo em vista os nossos propósitos neste trabalho, apresentamos a seguinte definição:

Definição 1. Seja S uma superfície regular e seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de S em p. Considere R uma região limitada em S, inteiramente contida em $X(U)$. Se $Q = X^{-1}(R)$ então o número real positivo

$$\iint_Q |X_u \times X_v| dudv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

é chamado área de R (Figura 1).

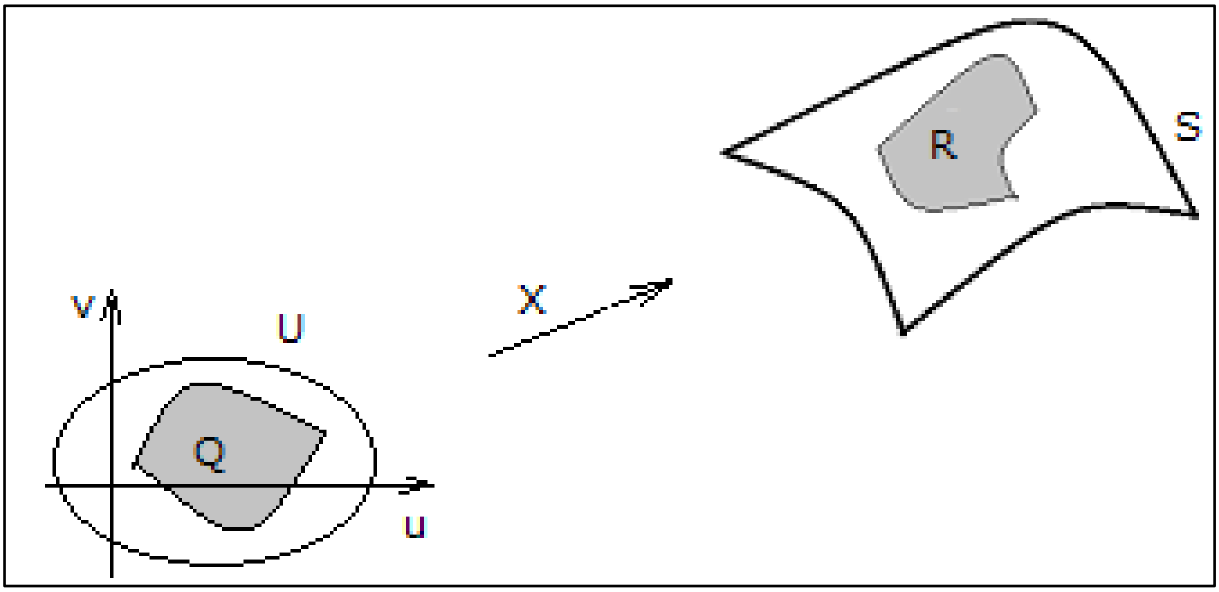


Figura 1: Área de região regular
Fonte: Adaptação de uma figura apresentada por do Carmo [8] (p. 97)

Ex@tas Online

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

É importante ressaltar que o teorema de mudança de parâmetros em uma superfície regular, juntamente com o teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas nos permitem concluir que tal definição independe da escolha de parametrização.

3 Materiais e Métodos

A investigação constitui-se a partir de um estudo descritivo e exploratório, com abordagem qualitativa, a qual, de acordo com Gil [10], reúne estudos que têm como propósito preencher lacunas do conhecimento. O minicurso foi direcionado aos estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática. O pré-requisito mínimo para participação no minicurso foi estar cursando o quarto semestre. Estabeleceu-se uma parceria entre o Diretório Acadêmico da instituição e o Laboratório de Educação Matemática, com vistas a uma ampla divulgação e realização das inscrições. Nestes termos, 20 discentes se interessaram pelo curso, mas apenas 16 compareceram. O minicurso teve a carga horária total de 8 horas, fracionada em dois encontros de 4 horas cada.

No primeiro momento, foi realizada a aplicação de um questionário que versou sobre áreas de figuras planas e espaciais, objetivando-se extrair e registrar o nível de conhecimento que os alunos possuíam acerca do tema. Na sequência, foram estudados alguns conceitos preliminares da Geometria Diferencial. Ressalta-se que não foi solicitada a identificação do participante no questionário visando-se obter respostas autênticas. As questões trabalhadas foram:

QUESTIONÁRIO 1

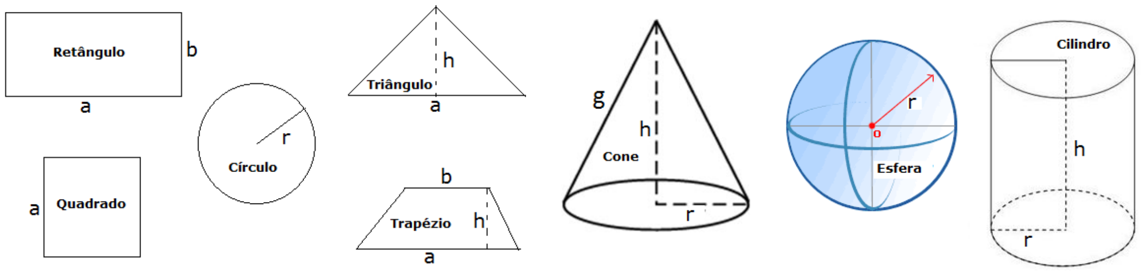
Não é necessário se identificar. Use o verso, se necessário.

Curso:____ Semestre:_________

1. Você conhece as expressões (fórmulas) para o cálculo da área das figuras abaixo? Informe-as a seguir, usando as medidas dadas nas figuras.

Retângulo Quadrado Círculo Triângulo

Trapézio Cone Esfera Cilindro



Notações (medidas): a, b: lados; r: raio; h: altura; g: geratriz.

2. Você já estudou alguma demonstração ou dedução de algumas destas expressões (fórmulas)?
   Em caso afirmativo, informe qual(is)? Que argumentos foram utilizados?
3. Você consegue utilizar os conteúdos de cálculo diferencial e integral para o cálculo de área de figuras planas?
   Em caso afirmativo, exemplifique. Em caso negativo, exponha os motivos.
4. Responda os mesmos itens da questão anterior considerando áreas de figuras espaciais.
5. Você tem algum conhecimento sobre Geometria Diferencial?

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

Em caso afirmativo, de que forma se deu o contato com esta área da matemática? Sabe como usar os seus conteúdos para o cálculo de áreas?

Os posicionamentos dos discentes, frente às questões apresentadas acima, revelaram maior contato com as figuras geométricas planas: retângulo, quadrado, triângulo, círculo e trapézio. Inferimos ainda, que as fórmulas trabalhadas em geometria espacial, como o cálculo da área do cone, esfera e cilindro, revelaram-se distantes do contexto dos alunos, visto que nenhum dos participantes tratou das mesmas no decorrer de todo o questionário.

As associações apresentadas nos itens de 2 a 5 estavam sempre vinculadas aos triângulos, retângulos ou quadrados, o que enfatiza uma maior ligação com os mesmos. Fato este justificado nas inferências realizadas desde a educação infantil, como aponta Barguil [11]: “No que se refere à Forma, na Educação Infantil, por vezes, seu ensino é limitado à identificação pelas crianças de figuras geométricas planas: círculo, triângulo, quadrado e retângulo” – o que é difundido nos demais níveis de ensino, conforme exemplificamos com as respostas da segunda questão de três discentes:

Estudante 1: *“Sim. Triângulos: partindo de que a área do quadrado é base vezes altura, logo sabendo-se que o triangulo representa a metade da área do quadrado temos que* $\frac{1}{2}$ *a.b representado a área do triângulo.”*
Estudante 2: *“Já estudei algumas deduções, a do retângulo e quadrado onde uma é análoga a outra e a do círculo. Todas envolvendo o conceito de preenchimento”.*
Estudante 3: *“área de triângulo e do retângulo por meio do produto vetorial. Ao tomarmos os lados dessas figuras como vetores”.*

Assim, nota-se o relevo empreendido a essas figuras. Outro destaque, refere-se ao quinto item, em que apenas um aluno revelou seu contato com a geometria diferencial por meio do estudo de curvas, demonstrando a singularidade da proposta do cálculo de área utilizando conceitos da Geometria Diferencial.

3.1. Descrição das atividades

Atividade 1: Inicialmente, foram apresentados aos participantes conceitos específicos desta área da matemática, tais como superfície regular, parametrizações e vizinhanças coordenadas. Para uma melhor compreensão desta teoria, foi proposta a construção, com o uso de matérias manipuláveis, de uma parametrização de uma esfera de raio $r = 1$ e centro na origem O do sistema de coordenadas cartesianas no espaço, por meio de coordenadas esféricas, que consiste em descrever os pontos P da esfera usando dois ângulos (o primeiro ângulo $\theta \in (0, \pi)$, formado entre o segmento OP e o eixo das cotas Oz , e o segundo ângulo $\varphi \in (0,2\pi)$, formado entre o eixo das abscissas Ox e a projeção de OP sobre o plano Oxy. Esta atividade foi desenvolvida com a utilização dos seguintes materiais: uma bola de isopor de tamanho médio, três palitos de madeira, um marcador para quadro branco e um estilete fornecido a cada um dos presentes. O primeiro passo da atividade consistiu em inserir na bola de isopor os três palitos (cada par formando um ângulo reto), simbolizando os três eixos coordenados. Feito isto, foi solicitado que, após a escolha de um ponto arbitrário P na esfera, fosse recortado o sólido limitado pela esfera, pelos planos coordenados Oxz e Oxy e pelo plano que contém o ponto P e o eixo Oz. Em seguida, cada participante marcou os ângulos acima descritos. As imagens a seguir ilustram a construção desta atividade.

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

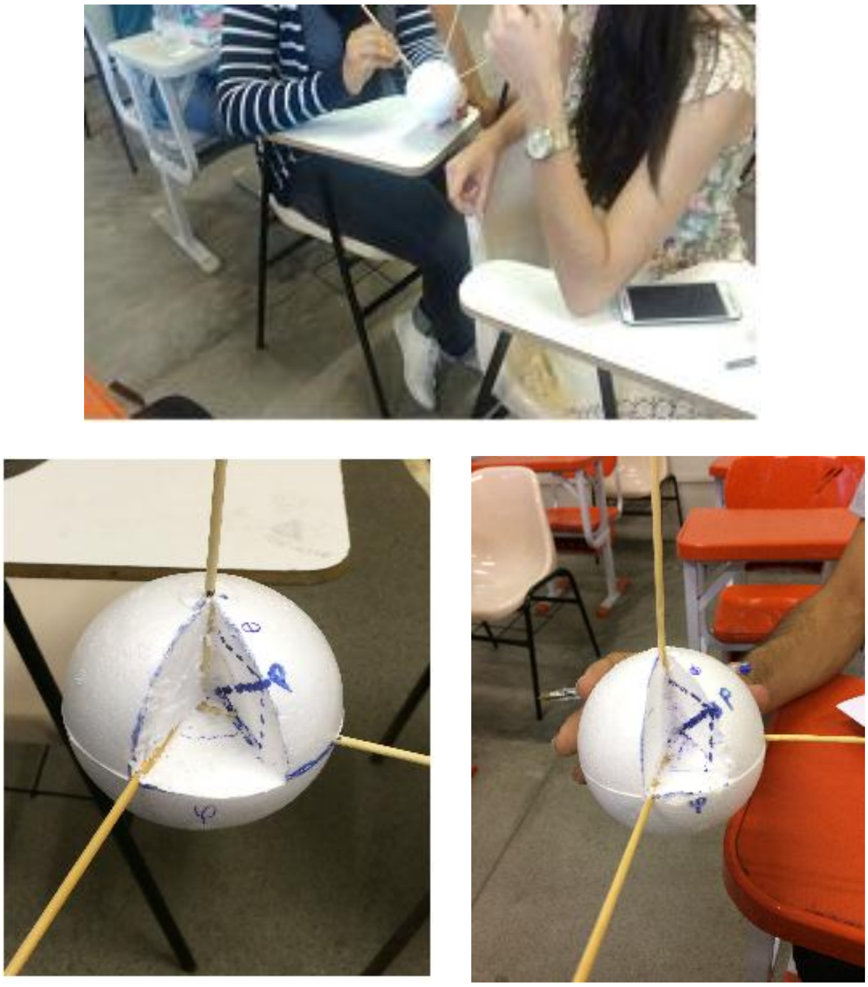


Figura 2: Parametrização da esfera
Fonte: Arquivo dos autores

Para concluir a atividade referida, todos foram convidados a obter as coordenadas do ponto P, em função de θ e φ. Usando noções básicas sobre funções trigonométricas, obteve-se a expressão $X(\theta,\varphi) = (\text{sen}\theta \cos\varphi\,,\ sen\theta\, \text{sen}\,\varphi\,,\ \cos\theta)$ conforme exemplo abaixo:

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

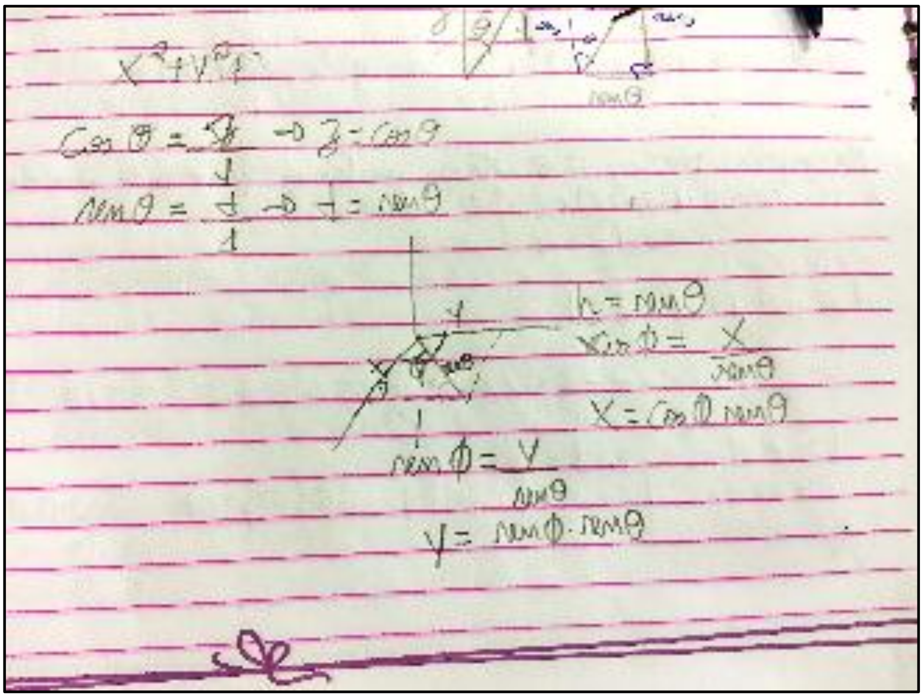


Figura 3: Parametrização da esfera de raio $r = 1$.
Fonte: Arquivo dos autores

Similarmente, a esfera de raio $r > 0$ (arbitrário) admite uma parametrização $X_1(\theta, \varphi) = (r\text{sen}\theta \cos\varphi\,,\ rsen\theta\, \text{sen}\,\varphi\,,\ r\cos\theta)$; $\theta \in (0, \pi)$ e $\varphi \in (0{,}2\pi)$. Usando materiais manipuláveis de fácil acesso, também pode-se obter uma parametrização $X_2(\theta, z) = (r \cos\theta\,,\ rsen\theta,\ z)$; $\theta \in (0{,}2\pi)$ e $z \in \mathbb{R}$ para o cilindro de raio $r > 0$ e $X_3(u, v) = (u, v, 0)$; $u, v \in \mathbb{R}$ para o plano Oxy.

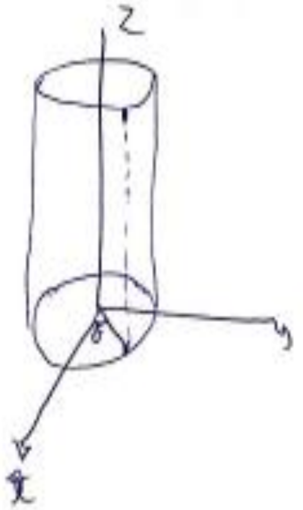
No caso da esfera e do cilindro, é importante observar que a definição formal de superfície regular não nos permite trabalhar com ângulos em intervalos fechados ou aumentar o comprimento destes intervalos. Por este motivo, o processo como acabamos de descrever não é suficiente para delinear todos os pontos sobre estas superfícies. No entanto, usando escolhas análogas podemos construir novas vizinhanças coordenadas (outras duas para a esfera e mais uma para o cilindro) que, juntamente com a primeira, irão cobrir tais superfícies completamente.

O primeiro dia do curso foi finalizado com a apresentação da definição de primeira forma fundamental, a dedução de seus coeficientes com relação a uma parametrização e o trabalho com exemplos variados.

Atividade 2: O segundo encontro foi dedicado exclusivamente ao cálculo de área de figuras planas e espaciais. No início, foi apresentada aos participantes a definição de área do contexto da Geometria Diferencial. Em seguida, os presentes foram reunidos em quatro grupos cujo objetivo foi deduzir, através da definição apresentada e das parametrizações estudadas no primeiro dia (cilindro, esfera e plano), as expressões que permitem calcular a área de figuras planas, como triângulo, paralelogramo e círculo, e áreas laterais de figuras espaciais, como esfera e cilindro. Os materiais usados foram apenas caneta e folhas de papel A4. Seguem abaixo algumas das resoluções apresentadas pelos alunos:

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

CILINDRO $\quad X(\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$



$$X_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$X_z = (0, 0, 1)$$

$$E = r^2 \quad F = 0 \quad G = 1 \Rightarrow \iint \sqrt{EG-F^2}\, d\theta\, dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^h \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} r\, d\theta\, dz \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \theta \Big|_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \cdot z \Big|_0^h =$$

$$= r \lim_{\varepsilon \to 0} \big((2\pi - \varepsilon) - (0 + \varepsilon)\big)(h - 0) \Rightarrow hr \lim_{\varepsilon \to 0} (2\pi - 2\varepsilon) = 2hr \lim_{\varepsilon \to 0} (\pi - \cancel{\varepsilon}) =$$

$$= 2hr\pi = 2\pi r h$$

Figura 4: Cálculo da área de um cilindro
Fonte: Arquivo dos autores

Ex@tas Online
ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

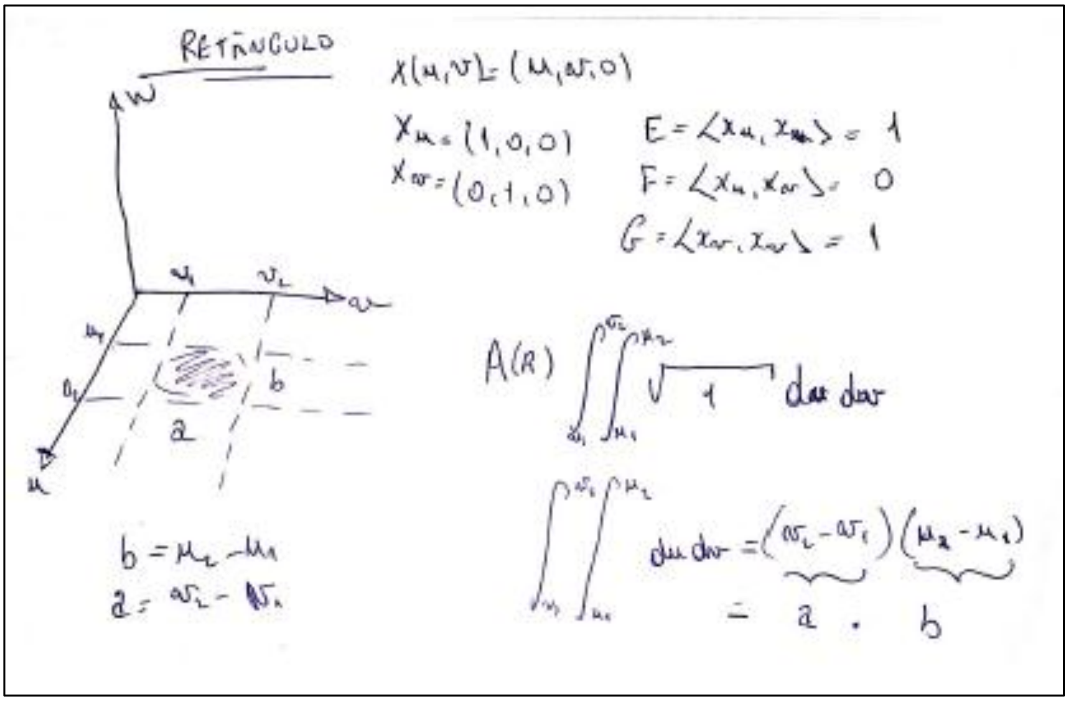


Figura 5: Cálculo da área de um retângulo
Fonte: Arquivo dos autores

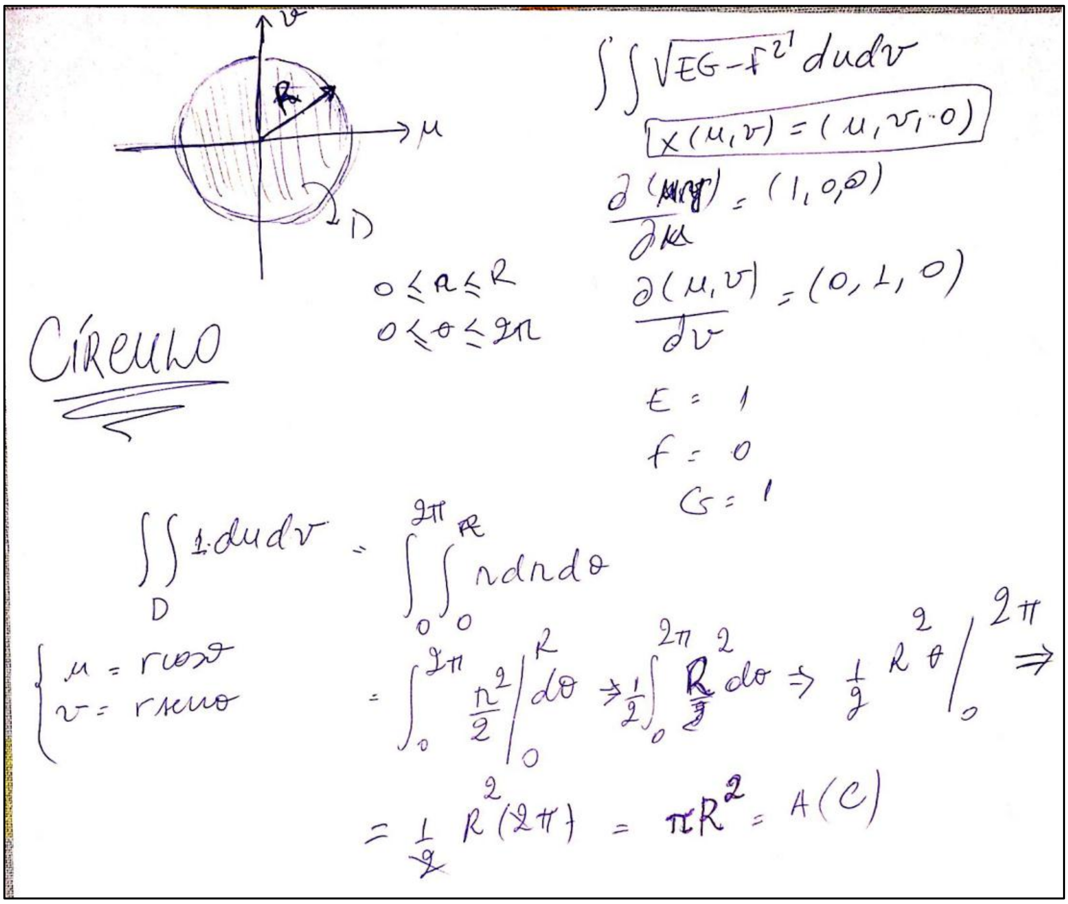
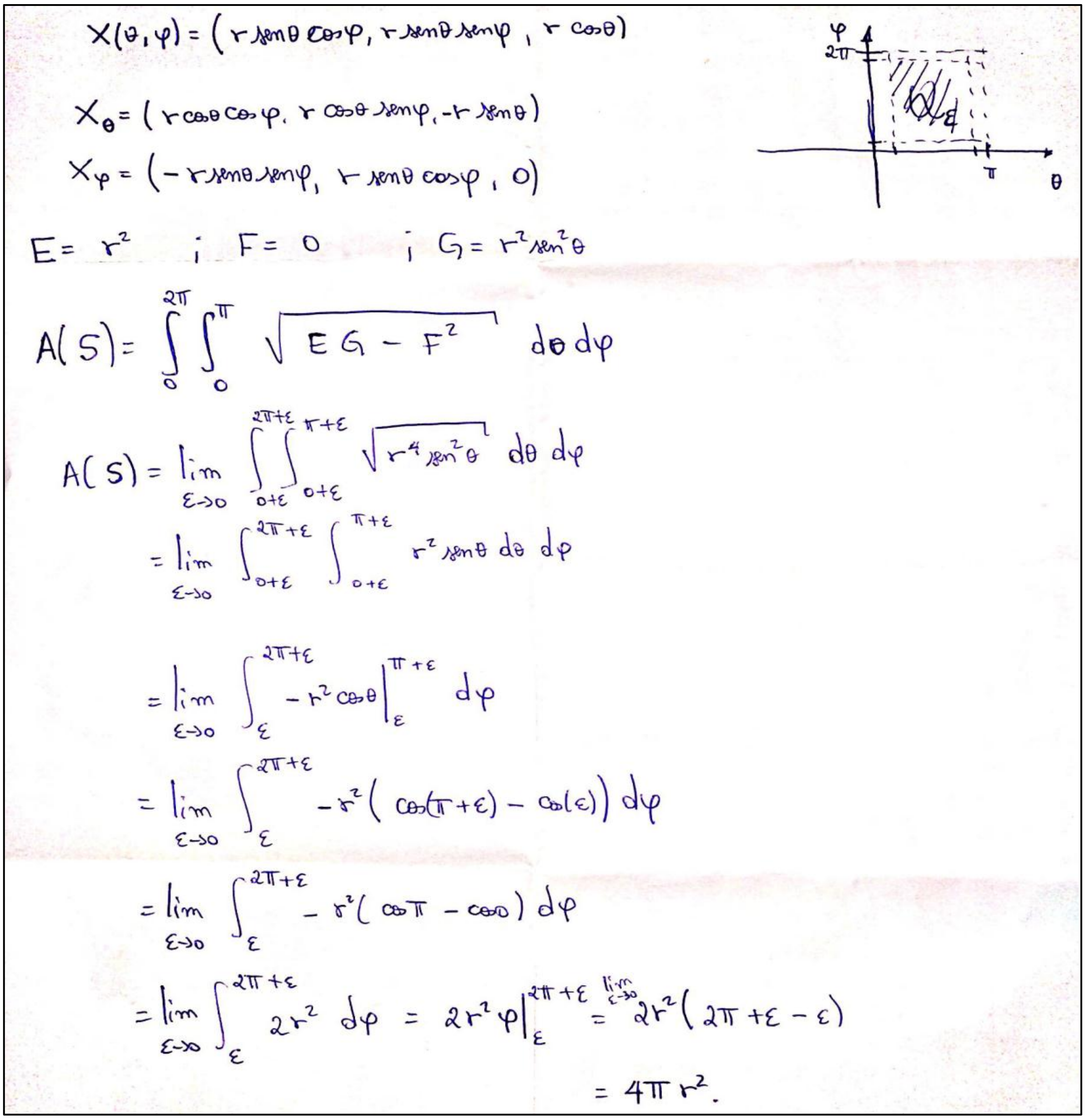


Figura 6: Cálculo da área de um círculo
Fonte: Arquivo dos autores

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13



$$X(\theta,\varphi) = (r\,sen\theta\cos\varphi,\ r\,sen\theta\,sen\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$X_\theta = (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\,sen\varphi,\ -r\,sen\theta)$$

$$X_\varphi = (-r\,sen\theta\,sen\varphi,\ r\,sen\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$E = r^2 \quad ; \quad F = 0 \quad ; \quad G = r^2 sen^2\theta$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{EG - F^2}\ d\theta\, d\varphi$$

$$A(S) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon}\int_{0+\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} \sqrt{r^4 sen^2\theta}\ d\theta\, d\varphi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon}\int_{0+\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} r^2 sen\theta\ d\theta\, d\varphi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} -r^2\cos\theta \Big|_{\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} d\varphi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} -r^2\left(\cos(\pi+\varepsilon) - \cos(\varepsilon)\right) d\varphi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} -r^2(\cos\pi - \cos 0)\, d\varphi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} 2r^2\, d\varphi = 2r^2\varphi\Big|_{\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} \overset{\lim_{\varepsilon\to 0}}{=} 2r^2(2\pi+\varepsilon-\varepsilon)$$

$$= 4\pi r^2.$$

Figura 7: Cálculo da área de um esfera
Fonte: Arquivo dos autores

Enfatizamos que nos cálculos apresentados acima existem alguns erros técnicos que, no entanto, não comprometem a solução encontrada. Por exemplo, na figura 6, o aluno escreveu $\frac{\partial(u,v)}{\partial u}$ e $\frac{\partial(u,v)}{\partial v}$ mas o correto seria $\frac{\partial X(u,v)}{\partial u}$ e $\frac{\partial X(u,v)}{\partial v}$, respectivamente. Na figura 7, o desenho do retângulo Q_ϵ, nos permite concluir que o aluno possui a correta compreensão do conceito de integrais impróprias. No entanto, existe um equívoco ao escrever $\int_{0+\epsilon}^{2\pi+\epsilon}\int_{0+\epsilon}^{\pi+\epsilon}\sqrt{r^4sen^2\theta}\ d\theta d\varphi$ pois, a expressão correta seria $\int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon}\int_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon}\sqrt{r^4sen^2\theta}\ d\theta d\varphi$. Mas observa-se, que apesar deste lapso, o discente demonstrou avanços no âmbito da Geometria Diferencial pois ele percebeu que a parametrização definida não é suficiente para cobrir toda a esfera.

Finalizando o minicurso, foi aplicado um segundo questionário, visando-se colher as impressões dos participantes acerca da Geometria Diferencial e suas aplicações no cálculo de área. Abaixo, constam as questões e algumas respostas dos discentes.

QUESTIONÁRIO 2

Não é necessário se identificar.

Curso:_____________________________________Semestre:_________

Finalizado o minicurso "Usando conceitos de Geometria Diferencial para o cálculo de área", informe suas impressões e opiniões sobre o mesmo. Discorra sobre o que você aprendeu, destacando:

1. Os elementos com que você teve contato pela primeira vez;
2. As principais dificuldades encontradas. Na sua opinião, qual é a razão destas dificuldades?
3. O seu interesse pelos conteúdos de Geometria Diferencial.

Analisando as respostas apresentadas pelos discentes, nota-se que a maioria relata o primeiro contato com tópicos específicos de Geometria Diferencial (superfícies, parametrizações e primeira forma fundamental) e também com os conteúdos inseridos na ementa de Geometria Analítica (coordenadas polares). Ressaltam-se ainda, entraves com alguns temas vinculados à componente curricular Cálculo Integral de Funções de Várias Variáveis (integrais duplas, mudança de coordenadas), mesmo que tenham cursado a disciplina.

Quanto ao interesse pela geometria diferencial e às interligações percebidas pelos participantes do minicurso, transcrevemos abaixo algumas das respostas apresentadas. Visando preservar o anonimato dos mesmos, iremos identificar suas falas pela letra E, acrescida por um índice numérico.

E_1: "O maior interesse foi visualizar como a Geometria Diferencial seria usada para o cálculo de áreas de figuras, que temos habitualmente outras maneiras de achar as fórmulas. Percebi o uso dos conhecimentos trigonométricos, álgebra linear, limites, derivadas, integral dentre outros".

E_2: "O interesse foi entender como poderia aplicar conceitos de GD no cálculo de área. Uso de cálculo, geometria analítica, álgebra linear".

E_3: "O meu interesse foi aprender mais sobre os cálculos de superfícies e percebi que se conecta com conhecimentos de geometria analítica e cálculo integral e diferencial".

E_4: "Achei uma excelente escolha a utilização de materiais concretos e a ligação apresentada com a geometria plana".

E_5: "Vimos as interligações com os conteúdos de cálculo IV e geometria básica. Muito bom o minicurso, conseguimos ver a geometria diferencial mais aplicada, isso a torna mais interessante de ser estudada".

E_6: "A Geometria Diferencial é uma área interessante, atrativa, devido ao fato de interligar cálculo e geometria, permitindo a melhor visualização dos resultados por meio da geometria".

E_7: "Amei o pouco que vi de Geometria Diferencial, pena que não dá para mudar de área agora. Percebi sua aplicação na geometria da escola e me encantei".

Com base nas impressões relatadas pelos alunos, percebe-se grande interesse pela geometria diferencial, sua capacidade em interligar vários conhecimentos matemáticos, assim como a possibilidade de se trabalhar com materiais concretos e a sua aplicação na dedução de relações que permitem o cálculo de área, conectando, desta forma, aos conteúdos trabalhados na educação básica.

4 Considerações Finais

Finalizamos este artigo apontando algumas constatações detectadas no desenvolvimento do minicurso. A primeira evidência, refere-se ao aspecto limitado que os discentes do curso de Licenciatura em Matemática em questão apresentaram ao silenciarem suas respostas quanto às áreas das figuras espaciais, demonstrando contato e proximidade apenas com as figuras planas. Nesse contexto, deixa-se transparecer que ao se remeter ao cálculo de área fica implícito que o mesmo está unicamente associado às figuras planas. Aspecto este, que deve ser rompido. Além disso, confirmou-se a "popularidade" dos triângulos, retângulos, quadrados e círculos.

O segundo ponto trata-se dos entraves vinculados às lacunas, mencionadas pelos próprios estudantes, no que se refere à carência no trato com os conteúdos relacionados à componente curricular

ISSN 2178-0471
vol. 9 n.2 Ago. 2018
pág. 1-13

Cálculo Integral de Funções de Várias Variáveis (integrais duplas, mudança de coordenadas). Fato este, que enfatiza a relevância da integralização dos conteúdos constituintes das ementas de todas as disciplinas da grade curricular dos cursos de graduação, pois a ausência da abordagem de determinados temas pode constituir obstáculos para que os alunos avancem em sua trajetória profissional.

Por fim, é importante destacar que o minicurso possibilitou, a alguns discentes de um Curso de Licenciatura em Matemática, uma aproximação entre a Geometria Diferencial – tida por muitos como algo intangível, abstrato e, consequentemente, complexo – e a abordagem de áreas de figuras planas e espaciais; além de propiciar uma percepção das interligações com variadas disciplinas e diversas áreas da matemática, revelando, dessa maneira, uma interessante proposta para difusão e propagação de outros temas e em outras instituições de ensino superior.

Referências

[1] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf > Acesso em: 22 dez. 2017.

[2] BRASIL. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2017

[3] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2017.

[4] BALTAR, Paula Moreira. **Une étude de situations et d'invariants: outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège**. Petit X, Grenoble - França, v. 49, p. 45-78, 1998. Disponível em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/49/49x5.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2017.

[5] FACCO, Sônia Regina. **Conceito de área**: uma proposta de aprendizagem. 2003. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11232/1/sonia%20facco.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2017.

[6] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Universidade de Campinas, 2004.

[7] BOYER, Carl Benjamin; GOMIDE, Elza F. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998.

[8] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Differential geometry of curves and surfaces**. New Jersey: Prentice Hall, 1976.

[9] TENENBLAT, Keti. **Introdução à geometria diferencial**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

[10] GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2010.

[11] BARGUIL, Paulo Meireles. **Fiplan:** Recurso Didático para o Ensino e a Aprendizagem de Geometria na Educação Infantil e no Ensino Fundamental. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6707_4204_ID.pdf>. Acesso em: 27 dez. 2017.