ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

Aplicação de números complexos em expansões binomiais newtonianas
Application of complex numbers in newtonian binomial expansions

Thiago Beirigo Lopes [1]
[1]Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT) *Campus* Confresa, Confresa, Brasil

Resumo

O tema Números Complexos já gera desconforto, tanto para o professor como para o estudante, devido o seu indigno nome, pois não é mais complicado aprender esse tema do que soma de fração por meio do Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Este trabalho considera importante que seja evidenciado, aos interessados em estudar sobre o tema proposto, as suas aplicações. Nesse sentido, por meio de revisão bibliográfica, foi explorado uma aplicação que se destaca por fazer uso de Combinação, tema estudado em Análise Combinatória, e Somatórios advindos da Expansão Binomial, que são temas já trabalhados no ensino médio. Assim esperou-se contribuir com o conteúdo Números Complexos de modo a ampliar os horizontes quanto à sua aplicabilidade.

Palavras-chave Números Complexos; Aplicação; Somatórios; Expansão Binomial.

Abstract

The topic Complex Numbers already causes discomfort for both the teacher and the student due to their unworthy name, because it is not more complicated to learn this theme than sum of fraction by means of the Common Multiple Minimum (MMC). This work considers it important that those interested in studying the proposed theme should be shown their applications. In this sense, through a bibliographic review, an application was explored that makes use of Combination, a subject studied in Combinatorial Analysis, and Summaries derived from the Binomial Expansion, which are themes already worked in high school. Thus it was hoped to contribute with the content Complex Numbers in order to broaden the horizons as to its applicability.

Keywords Use a maximum of 6 keywords.

Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real.
Nicolai Lobachevsky

ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

1 Introdução

Na contemporaneidade muito se tem explanado sobre um ensino[1] de matemática no ensino básico voltado para a utilidade prática dessa disciplina, não sendo se assumindo mais como um ensino tecnicista realizado de modo mecânico privilegiando principalmente a memorização do estudante. Os problemas e questões abordados com uma linguagem especificamente utilizada no conteúdo a ser trabalhado, sem realizar conexões com outros ramos da matemática, outras disciplinas ou com o cotidiano do estudante pode dar a impressão de que a matemática é um fim em si mesma [19]. No estudante mais instigador é concebível que este modo de abordar qualquer conteúdo desperte os questionamentos: "Para que serve isso?" e "Por que tenho que estudar esse conteúdo?". Nesse contexto, o conteúdo de Números Complexos possui grande complicação por se acreditar que esse tema seja desprovido de aplicações ou essas são exclusivas de um nível de conhecimento superior na área de exatas.

Os Números Complexos são abordados, comumente, na série final do ensino médio, sendo alvos de muitos questionamentos a respeito do melhor modo de abordá-los durante o início das aulas, assim como de suas aplicações e vinculações com outros ramos da própria matemática. Analisando livros didáticos, os pesquisadores Lima [14][15], Carvalho e Carvalho [6][7][8][9], Wagner e Morgado [21][22], Carneiro e Morgado [5], Lima e Wagner [17][18] e Júdice e Gomes [13] questionaram o método como esses números eram abordados, onde consideraram ser de forma equivocada ao serem expostos em uma ordem que não corresponde à história do desenvolvimento deste conceito, e a falta de sugestão de aplicações desses números tanto na trigonometria como na geometria analítica. Fazendo assim um estudo sem motivação e mostrando algo que o estudante considerará inútil em sua vida e na própria matemática, parecendo assim um conteúdo à parte de todo ensino.

Atualmente não houve muita mudança nesse quadro, quanto à abordagem há livros que destacam as equações cúbicas como geradores da discussões sobre a existência dos Números Complexos, sendo tais resultados constatados nas pesquisas de Candeias [4], Conceição [10] e Guimarães [12]. No entanto ainda há muito que se desenvolver no que tange o ensino de Números Complexos.

O PCN+ ressalta que "o professor de Matemática deve estar atento para ilustrar a utilidade dos instrumentos de representação que ensina" [1]. E ainda, dentre as competências a serem desenvolvidas, aguarda-se que os estudantes possam "ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas" [1].

Desse modo, ao fazer estudo da Expansão Binomial de Newton de $(1+x)^n$, que é $(1+x)^n = 1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n$, no livro de Morgado *et all* [20] onde a questão 21, página 121, solicitava calcular os valores de $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots$ no primeiro item e $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots$ no segundo item. Utilizando o caso particular da Expansão Binomial $(1+1)^n = 1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n = 2^n$, tem-se para ambos os itens o resultado 2^{n-1}. Diante dessa questão já bastante conhecida, houve-se a necessidade de estudar sobre a resolução com índices variados da Combinação, como $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots$ por exemplo.

Diante do exposto, o objetivo dessa pesquisa é o de apresentar mais uma aplicação de Números Complexos possível no ensino médio. Essa aplicação destaca por fazer uso de Combinação, tema estudado em Análise Combinatória, e Somatórios advindos da Expansão Binomial. Para tanto, segundo Gil [11], a pesquisa foi bibliográfica que se enquadra como uma básica estratégica por ter o propósito de completar uma lacuna no conhecimento que referente ao estudo de aplicações de Números Complexos, assim voltada à obtenção de novos conhecimentos direcionados a extensas áreas com vistas à solução de reconhecidos problemas práticos. Logo, como dito anteriormente, buscou-se mostrar a aplicação dos Números Complexos nos somatórios por meio da Expansão Binomial, utilizando-se a propriedade referente às potências de i onde é

[1]Em todo o texto evitou-se utilizar o termo dicotômico ensino-aprendizagem, pois acredita-se que não há ensino sem aprendizagem, ou seja, não cabe desassociar a aprendizagem como resultado do ensino. Acredita-se que se não houve aprendizagem, então consequentemente não houve ensino. Já a recíproca não é válida, pois pode haver aprendizado sem haver tido o ensino.

Exatas Online
ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

perceptível que se dá em ciclos.

2 Números Complexos, Expansão Binomial e Somatórios

Segundo Beirigo [3], o que define um número complexo é a unidade imaginária. A unidade imaginária é o valor de $\sqrt{-1}$ que é indicada por i, tendo como princípio fundamental a relação $\mathrm{i}^2 = -1$. Assim tendo uma das propriedades dos Números Complexos que pode ser destacada e é bastante útil devido ao comportamento cíclico das potências de i. Os ciclos se repetem como descrito a seguir

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}^0 &= \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^8 = ... = 1,\\
\mathrm{i}^1 &= \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^9 = ... = \mathrm{i},\\
\mathrm{i}^2 &= \mathrm{i}^6 = \mathrm{i}^10 = ... = -1,\\
\mathrm{i}^3 &= \mathrm{i}^7 = \mathrm{i}^11 = ... = -\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Adiante, esse fato será utilizado para auxílio durante a resolução. Pode ser verificado que essa base de conhecimento inicial é o que fundamentou a resolução do exercício motivador desse estudo citado na introdução deste trabalho.

Inicialmente, é apresentada a Expansão Binomial de Newton para $(1+x)^n$,

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^n x^n, \tag{1}$$

e desta equação ainda serão obtidos alguns resultados muito úteis.

Fazendo $x = 1$ na equação (1), obtém-se o conhecido Teorema das Linhas de Pascal.

$$(1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 2^n, \tag{2}$$

Agora, fazendo $x = -1$ na mesma equação (1), tem-se

$$(1-1)^n = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0. \tag{3}$$

Somando as equações (2) e (3) e efetuando algumas manipulações algébricas

$$\begin{gathered}
(1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n) + (1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n) = 2^n,\\
1 + 1 + C_n^1 - C_n^1 + C_n^2 + C_n^2 + C_n^3 - C_n^3 + \cdots + C_n^n + (-1)^n C_n^n = 2^n,\\
2 + 2C_n^2 + 2C_n^4 + 2C_n^6 + \cdots + (1 + (-1)^n) C_n^n = 2^n \text{ e}\\
2\left(1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots + C_n^k\right) = 2^n, \qquad (4)
\end{gathered}$$

que em (4) tem-se $k = n$ se n for par e $k = n - 1$ se n for impar. Dividindo ambos os lados da última equação por 2, obtém-se a equação (5)

$$2^{n-1} = 1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots + C_n^k, \tag{5}$$

que em (5) tem-se $k = n$ se n for par e $k = n - 1$ se n é impar.

Agora, subtraindo a equação (3) da equação (2) e, efetuando novamente algumas manipulações algébricas, tem-se

$$\begin{gathered}
1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n - 1 + C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 2^n,\\
0 + C_n^1 + C_n^1 + C_n^2 - C_n^2 + C_n^3 + C_n^3 + \cdots = 2^n,\\
2C_n^1 + 2C_n^3 + 2C_n^5 + \cdots + 2C_n^\ell = 2^n \text{ e}
\end{gathered}$$

Exatas Online
ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

$$2\left(C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots + C_n^\ell\right) = 2^n \tag{6}$$

em que $\ell = n$ se n for impar e $\ell = n-1$ se n é par.

Novamente, dividindo a última equação por 2, encontra a equação (7)

$$2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots + C_n^\ell, \tag{7}$$

em que $\ell = n$ se n for impar e $\ell = n-1$ se n é par.

Comparando as equações (5) e (7) obtém-se a relação

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots + C_n^k = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots + C_n^\ell = 2^{n-1},$$

em que $k = n$ e $\ell = n-1$ se n for par e, se n é impar $k = n-1$ e $\ell = n$. Assim, tem-se, com alguma facilidade, utilizando conceitos básicos, a soma binomial de combinações de n tomadas em números pares, como também em números ímpares.

Sendo uma pergunta muito pertinente nesse instante: “Onde se encaixam os números complexos?”. Visto que, na obtenção das equações (4) e (5), não foi utilizado em algum momento os Números Complexos. Porém, será que se consegue calcular a seguinte soma?

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \cdots + C_n^\eta \tag{8}$$

em que η é o maior inteiro positivo menor ou igual a n.

Realizando uma reflexão com os resultados já obtidos, é interessante fazer utilização de um valor para x, na equação (1), que altere sua potência em ciclos distintos de 2. Lembre-se que no início dessa seção foi explanado sobre as potências do complexo i que se altera em ciclos de 4 números. Veja como isso pode auxiliar, substituindo $x = \mathrm{i}$ na Expansão Binomial (1),

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n &= 1 + C_n^1\mathrm{i} + C_n^2\mathrm{i}^2 + C_n^3\mathrm{i}^3 + C_n^4\mathrm{i}^4 + C_n^5\mathrm{i}^5 + C_n^6\mathrm{i}^6 + C_n^7\mathrm{i}^7 + C_n^8\mathrm{i}^8 + \cdots C_n^n\mathrm{i}^n,\\ &= 1 + C_n^1\mathrm{i} + C_n^2(-1) + C_n^3(-\mathrm{i}) + C_n^4 + C_n^5\mathrm{i} + C_n^6(-1) + C_n^7(-\mathrm{i}) + C_n^8 + \cdots + C_n^n\mathrm{i}^n,\\ &= 1 + C_n^1\mathrm{i} - C_n^2 - C_n^3\mathrm{i} + C_n^4 + C_n^5\mathrm{i} - C_n^6 - C_n^7\mathrm{i} + C_n^8 + \cdots C_n^n\mathrm{i}^n,\\ &= 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 + \cdots + C_n^1.\mathrm{i} - C_n^3.\mathrm{i} + C_n^5.\mathrm{i} - C_n^7.\mathrm{i} + \cdots ,\end{aligned}$$

que resulta em

$$(1+\mathrm{i})^n = \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \cdots + (-1)^\iota C_n^h\right) + \mathrm{i}\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots + (-1)^\rho C_n^j\right), \tag{9}$$

em que h é o maior número par menor ou igual a n, $\iota = 0$ se h é múltiplo de 4 e $\iota = 1$, caso h seja par mas não múltiplo de 4. Se $j+1$ for múltiplo de 4, então $\rho = 1$, caso contrário, com j ímpar, $\rho = 0$. Da expressão anterior (9), destaca-se dois resultados úteis, a parte real

$$Re\,(1+\mathrm{i})^n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \cdots + (-1)^\iota C_n^h \tag{10}$$

e a parte imaginária

$$Im\,(1+\mathrm{i})^n = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots + (-1)^\rho C_n^j, \tag{11}$$

em que h é o maior número par menor ou igual a n, $\iota = 0$ se h é múltiplo de 4 e $\iota = 1$, caso h seja par mas não múltiplo de 4. Se $j+1$ for múltiplo de 4, então $\rho = 1$, caso contrário, com j ímpar, $\rho = 0$.

Uma vez que $(1+\mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n$ que, pela fórmula de Moivre, é equivalente a

$$\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \mathrm{i}2^{\frac{n}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right), \tag{12}$$

tem-se

$$Re\,(1+\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \tag{13}$$

ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

e

$$Im\,(1+\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right). \tag{14}$$

E, associar ainda, por meio de somas binomiais, a equação (10) com a equação (13)

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \cdots + (-1)^{\iota} C_n^h = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \tag{15}$$

e a equação (11) com (14)

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots + (-1)^{\rho} C_n^j = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right), \tag{16}$$

lembrando que h, ι, j e ρ são os mesmos definidos nas equações (6) e (7).

Somando a equação (10) com a (14) e fazendo algumas manipulações algébricas,

$$2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \cdots + (-1)^{\iota} C_n^k + 1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots + C_n^k,$$

$$2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2(1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \cdots + C_n^h),$$

$$\begin{aligned} 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) &= 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}.\cos\left(\frac{n.\pi}{4}\right), \\ &= 2.\left(1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \cdots\right) \ , \end{aligned} \tag{17}$$

lembrando que k é o maior inteiro positivo que é par e menor que n e h é o maior múltiplo de 4 que é menor ou igual a n. Se k é múltiplo de 4 então $\iota = 0$, se não, $\iota = 1$. Finalmente, obtém-se

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \cdots + C_n^h = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right), \tag{18}$$

em que h é o maior múltiplo de 4 que é menor ou igual a n.

Utilizando um raciocínio análogo, pode-se encontrar a expressão reduzida para a soma

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^1 3 + C_n^1 7 + ? + C_n^p \tag{19}$$

com p inteiro positivo tal que $p = 4m + 1 \leq n$ e para m também inteiro positivo.

Agora paira outra indagação no ar: "E se fosse um somatório binomial que tivesse um ciclo de 3?".

Para responder essa pergunta, analisa-se problemas resolvidos para ciclo de 2 (1 e -1 que são equivalentes a i^0 e i^2) e com ciclo de 4 (1, i, -1 e $-\mathrm{i}$ que são equivalentes a i^0,i^1, i^2 e i^3).

Portanto, se tiver como objetivo encontrar uma equação reduzida de um somatório binomial com ciclo 3, como $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + C_n^{12} + \cdots + C_n^t$ (t maior múltiplo de $3 \leq n$) por exemplo, tem-se que utilizar valores que dividam o ciclo trigonométrico em quantidade igual ao ciclo desejado. Ou seja, para um somatório binomial de ciclo 3 tem-se de usar os valores de forma que suas potências, com expoente múltiplo de 3, sejam iguais, isto é, $x^0 = x^3 = x^6 = x^9 = x^{12} = \cdots$. Assim, se $1 = x^3 \;\Rightarrow\; x = \cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}$. Desse modo, se quer encontrar a equação reduzida para n ciclos faz-se $x = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$, assim encontra-se um valor do argumento de um complexo na forma trigonométrica que satisfaça a quantidade de ciclos que se desejar.

ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

3 Resolução de Somatórios de ciclo 3

Para que seja exemplificado resoluções com Somatórios que seja diferentes de ciclo 3, são resolvidos dois exemplos $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + C_n^12 + \cdots$ e $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^10 + C_n^13 + \cdots$.

Primeiramente será resolvido o somatório $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + C_n^12 + \cdots$.

Fazendo $x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ na expansão binomial

$$\left(1+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^n = 1 + C_n^1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)+$$
$$+C_n^2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + C_n^3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3+$$
$$+C_n^4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^4 + C_n^5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^5+$$
$$C_n^6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^6 + C_n^n\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n \tag{20}$$

Resolvendo as potências da expansão (20), segundo a fórmula de Moivre, tem-se:

$$\left(1+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^n = 1 + C_n^1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)+$$
$$+C_n^2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) + C_n^3\left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{3}\right)\right)+$$
$$+C_n^4\left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) + C_n^5\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)+$$
$$+C_n^6\left(\cos\left(\frac{12\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{3}\right)\right) + C_n^n\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right) \tag{21}$$

Calculando os valores dos senos e cossenos, obtém-se:

$$\left(1+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^n = 1+C_n^1\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}\right)+C_n^2\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}\right)+C_n^3\left(1+0.\mathrm{i}\right)+$$
$$+C_n^4\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}\right)+C_n^5\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}\right)+C_n^6\left(1+0.\mathrm{i}\right)+C_n^7\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}\right)+\cdots+$$
$$+C_n^n\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right) \tag{22}$$

Efetuando as multiplicações pertinentes:

$$\left(1+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^n = 1 - C_n^1\frac{1}{2} + C_n^1\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i} - C_n^2\frac{1}{2} - C_n^2\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i} + C_n^3 1 + C_n^3 0.\mathrm{i} -$$
$$C_n^4\frac{1}{2} + C_n^4\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i} - C_n^5\frac{1}{2} - C_n^5\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i} + C_n^6 1 + C_n^6 0.\mathrm{i} - C_n^7\frac{1}{2} + C_n^7\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i} + \cdots \tag{23}$$

Agrupando os números reais dos imaginários puros:

Exatas Online

ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

$$\left(1+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i.sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^n = 1-C_n^1\frac{1}{2}-C_n^2\frac{1}{2}+C_n^3-C_n^4\frac{1}{2}-C_n^5\frac{1}{2}+C_n^6-C_n^7\frac{1}{2}+\cdots+$$
$$+C_n^1\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}-C_n^2\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}+C_n^3 0.i+C_n^4\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}-C_n^5\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}+C_n^6 0.i+\cdots \quad (24)$$

Separando parte real de parte imaginária, colocando em evidência o i:

$$\left(1+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i.sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^n = \left(1-C_n^1\frac{1}{2}-C_n^2\frac{1}{2}+C_n^3-C_n^4\frac{1}{2}-C_n^5\frac{1}{2}+C_n^6-C_n^7\frac{1}{2}+\cdots\right)+$$
$$+\left(C_n^1\frac{\sqrt{3}}{2}-C_n^2\frac{\sqrt{3}}{2}+C_n^3 0.i+C_n^4\frac{\sqrt{3}}{2}-C_n^5\frac{\sqrt{3}}{2}+C_n^6 0.i+\cdots\right).\mathrm{i} \quad (25)$$

Colocando os coeficientes em evidência:

$$\left(1+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i.sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^n = \frac{1}{2}\left(2-C_n^1-C_n^2+2C_n^3-C_n^4-C_n^5+2C_n^6-C_n^7+\cdots\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(C_n^1-C_n^2+C_n^4-C_n^5+C_n^7+\cdots\right).\mathrm{i} \quad (26)$$

Calculando inicialmente o módulo do complexo (27)

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \quad (27)$$

Sendo esse módulo utilizado para resolver a expansão por meio da fórmula de Moivre (28),

$$\left(1+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i.sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^n=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}\right)^n=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{i}\right)^n$$
$$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i.sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n=\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\mathrm{i.sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \quad (28)$$

Obtendo, pela igualdade da parte real da expansão binomial (26) à da fórmula de Moivre (28)

$$\frac{1}{2}\left(2-C_n^1-C_n^2+2C_n^3-C_n^4-C_n^5+2C_n^6-C_n^7+\cdots\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$
$$2-C_n^1-C_n^2+2C_n^3-C_n^4-C_n^5+2C_n^6-C_n^7+\cdots=2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \quad (29)$$

Somando-se (29) com o Teorema das Linhas de Pascal (2)

$$2-C_n^1-C_n^2+2C_n^3-C_n^4-C_n^5+2C_n^6-C_n^7+\cdots=2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$
$$+$$
$$1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+C_n^4+C_n^5+C_n^6+C_n^7+\cdots=2^n$$
$$=$$
$$3+3C_n^3+3C_n^6+\cdots=2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+2^n \quad (30)$$

Exatas Online

ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

Que dividindo ambos os membros da equação (30) por 3, finalmente obtém-se (31)

$$1 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots = \frac{2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2^n}{3} \tag{31}$$

Para a resolução do somatório $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + C_n^{13} + \cdots$ o cálculo desse somatório se faz de modo análogo ao exemplo anterior, fazendo somente uma modificação no final do processo de resolução do item anterior. Essa modificação está onde se obtém, pela igualdade da parte real da expansão binomial (26) à da fórmula de Moivre (28). Para esse exemplo será considerada a parte imaginária da da expansão binomial (26). Assim tem-se

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(C_n^1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^5 + C_n^7 + \cdots\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$C_n^1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^5 + C_n^7 + \cdots = \frac{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3} \tag{32}$$

Assim somando-se a igualdade (32), também obtida pela igualdade da parte imaginária da expansão binomial com a adquirida pela fórmula de Moivre, com Teorema das Linhas de Pascal (2)

$$C_n^1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^5 + C_n^7 + \cdots = \frac{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}$$

$$+$$

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + C_n^6 + C_n^7 + \cdots = 2^n$$

$$=$$

$$1 + 2C_n^1 + C_n^3 + 2C_n^4 + C_n^6 + 2C_n^7 + \cdots = \frac{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3} + 2^n \tag{33}$$

Que subtraindo do resultado (33), a resolução obtida no item anterior (30), tem-se

$$1 + 2C_n^1 + C_n^3 + 2C_n^4 + C_n^6 + 2C_n^7 + \cdots = \frac{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3} + 2^n$$

$$-$$

$$1 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots = \frac{2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2^n}{3}$$

$$=$$

$$2C_n^1 + 2C_n^4 + 2C_n^7 + \cdots = \frac{2\sqrt{3}.\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3} + 2^n - \frac{2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2^n}{3} \tag{34}$$

E, finalmente, realizando alguns ajeitamentos algébricos, chega-se a (35)

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + C_n^{13} + \cdots = \frac{\sqrt{3}.\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2^n}{3} + 2^{n-1} \tag{35}$$

Exatas Online
ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

4 Considerações Finais

Deve-se modificar a perspectiva de que matemática é composta somente por algoritmos, regras e fórmulas baseadas em memorização e procedimentos recursivos sem utilidade na visão do estudante. É Evidente que isto pode estar acontecendo em razão do professor entender e ensinar a matemática como uma área do conhecimento pronta e acabada, onde os estudantes englobados nesse processo podem até conseguir obter algum determinado conhecimento, porém podem não desenvolver a competência de pensar. Mais ainda, os problemas são estabelecidos sem mostrar conexões com outros ramos da matemática, dando a impressão de que a matemática é um fim em si mesma.

Durante o ensino fundamental e em grande parte do ensino médio, os estudantes fazem sua atividades como se raiz quadrada de números negativos fosse inexistente. Ainda, que equações do quadráticas que possuam, na fórmula de resolução de equações quadráticas, discriminante negativo ($\Delta < 0$) não têm soluções reais e que as situações problema que incidam nesse tipo de equação, são situações problema que não possuem soluções. Assim, não pode-se opor à orientação do PCNEM [2] que no campo da matemática demonstram que é essencial suplantar a aprendizagem concentrada em procedimentos mecânicos, sendo recomendado o destaque das aplicações dos conteúdos explorando suas relações com a própria matemática e com a realidade.

Nessa aplicabilidade, pode-se perceber que o início do problema não faz indicação direta da necessidade de utilizar os Números Complexos para sua resolução, tampouco tais números são evidenciados em sua resposta. No entanto, são ferramentas fundamentais no processo de resolução desse grupo de problemas. Um fato histórico foi evidenciado pelo italiano Rafael Bombelli (1530-1579) ao resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ e chegando, pela fórmula, ao resultado $x^3 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, sendo perceptível o fato de 4 ser uma das soluções da equação e ao ser resolvida depara-se com raízes quadradas de quantidades negativas. Tendo então que considerar $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3$ para que 4 seja solução da referida equação cúbica [16]. Assim, pode-se verificar que os Números Complexos também são utilizados no processo de resolução de equações cúbicas onde as respostas são 3 raízes reais distintas, mesmo a equação e o resultado não fazendo alusão direta à esses números.

Com esse trabalho amplia-se uma frente para estudos futuros e para um resgate de Números Complexos para o ensino médio, enfatizando sua transversalidade dentro da própria matemática por meio dos conteúdos de Trigonometria, Geometria Analítica, entre outros, assim como em outras disciplinas. Em síntese, esta pesquisa mostrou que ainda há potencialidades a serem exploradas no que tange os Números Complexos. Como em muitas áreas de pesquisa da matemática, uma grande descoberta pode ter uma humilde e simples origem e vir a ser importante para outras áreas do saber. Com os Números Complexos não foi, nem está sendo, diferente.

Referências

Brasil. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2002.

Brasil. *Parâmetros curriculares nacionais ensino médio (PCNEM):* ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, v. 3, 2006.

T. Beirigo, *Números Complexos:* uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito. Confresa: Clube de Autores, 2015.

M. R. D. Candeias, *Análise de uma coleção de livros didáticos para o ensino médio.* Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2015.

J. P. Q. Carneiro, A. C. Morgado, Coleção: Coleção Matemática 2º Grau - Giovanni e Bonjorno. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001. p. 165-229.

Exatas Online

ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

P. C. P. Carvalho, J. B. P. D. Carvalho, Coleção: Coleção Matemática - Manoel Paiva. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001a. p. 313-345.

P. C. P. Carvalho, J. B. P. D. Carvalho, Coleção: Coleção Matemática para o segundo grau - Gentil e et al. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001b. p. 138-164.

P. C. P. Carvalho, J. B. P. D. Carvalho, Coleção: Matemática - Bianchini e Paccola. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001c. p. 82-105.

P. C. P. Carvalho, J. B. P. D. Carvalho, Coleção: Matemática - Maria Helena e Spinelli. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001d. p. 379-405.

S. V. Conceição, *Análise de uma coleção de livros didáticos para o ensino médio.* Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2015. 88 p.

A. C. GIL, *Como elaborar projetos de pesquisa.* 5ª. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

R. R. Guimarães, *Análise de uma coleção de livros didáticos para o ensino médio.* Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2015. 90 p.

E. D. Júdice, M. L. M. Gomez, Coleção: Curso prático de Matemática - Paulo Bucchi. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001. p. 406-461.

E. L. Lima, Coleção: Matemática na escola do segundo grau - Antônio Machado. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001a. p. 6-46.

E. L. Lima, Coleção: Matemática, aula por aula - Benigno e Machado. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001b. p. 47-81.

E. L. Lima, P. C. P. Morgado, E. Wagner, A. C. Morgado, *A matemática do ensino médio.* 4ª. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, v. 3, 2004.

E. L. Lima, E. Wagner, Coleção: Matemática, contexto e aplicações - Dante. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001a. p. 267-312.

E. L. Lima, E. Wagner, Coleção: A Matemática do ensino médio - Márcio Cintra Goulart. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001b. p. 346-378.

T. B. Lopes, *Uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito sobre Números Complexos.* Palmas: Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal do Tocantins (UFT), 2014. 58 p.

A. C. Morgado, et al, *Análise Combinatória e Probabilidade.* 9ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

E. Wagner, A. C. Morgado, Coleção: Matemática - Gelson Iezzi e et al. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001a. p. 106-137.

Exatas Online
ISSN 2178-0471
vol. 9 n. 2 Ago. 2018
pág. 14-24

E. Wagner, A. C. Morgado, Coleção: Matemática - Kátia e Rokusaburo. In: E. L. Lima, *Exame de Textos:* Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de janeiro: SBM, 2001b. p. 230-266.