Temos então a igualdade

$$xe_1 + ye_2 = x_1u_1 + y_1u_2$$

ou

$$xe_1 + ye_2 = x_1(\cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2) + y_1(-\operatorname{sen}\theta e_1 + \cos\theta e_2)$$

de onde obtemos

$$x = x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta$$

$$y = x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta \ .$$

Ou, explicitando x_1 e y_1

$$x_1 = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$$

$$y_1 = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta.$$

Exemplo. Seja o ponto $P(6,4)$. Efetuando-se uma rotação de um ân gulo de $\pi/6$ radianos nos eixos, em relação ao novo sistema, suas coordenadas passam a ser

$$x_1 = 6\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$y_1 = -6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = -3\sqrt{3} + 2$$

ou seja

$$P(3+2\sqrt{3},\ 2-3\sqrt{3})\ .$$

Exemplo. Usando uma rotação de eixos conveniente transforme a e quação

$$4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0,$$

em uma que não contenha o termo em xy.

Solução. Substituindo x e y na equação dada por

$$x = x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta \ ,$$

$$y = x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta \ ,$$

obtemos

$$4(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)^2 + (x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta)^2 +$$
$$4(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)\,(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta) \quad +$$
$$(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta) - 2(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta) = 0,$$

que é a equivalente da equação inicial em relação ao sistema x_1Oy_1, obtido do sistema xOy por uma rotação de um ângulo θ. Desenvolvendo-a, obtemos

$$(4\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta)x_1^2 + (4\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta)y_1^2 +$$
$$+ (-6\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta)x_1y_1 + (\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\quad x_1 \quad +$$
$$+ (-\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta)y_1 = 0. \quad (1)$$

Como nosso objetivo é obter uma equação que não contém o produto das variáveis, igualamos o coeficiente de x_1y_1 a zero, ou seja, impomos para θ a condição

$$-6\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta = 0 \ .$$

Lembrando que $\cos\theta\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta$ e que $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos2\theta$,

obtemos

$$-3\operatorname{sen}2\theta + 4\cos2\theta = 0$$

e, portanto,

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{4}{3} \ .$$

A partir da igualdade $\operatorname{tg}2\theta = \frac{4}{3}$ deduzimos que $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$.

(θ é aproximadamente $26^\circ 33'$).

Substituindo-se os valores de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ na equação (1) e efetuando-se as contas, obtemos

$$y_1 = \sqrt{5}\, x_1^2 \; .$$

O gráfico desta equação é uma curva chamada parábola. Ela está representada, juntamente com os dois sistemas de coordenadas, na figura seguinte.

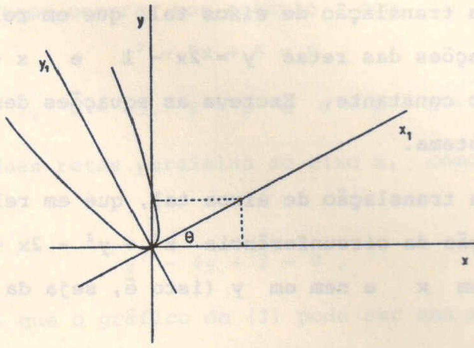

Fig. 2.33

Observe que a parábola acima é, também, o gráfico da equação

$$4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0 \quad ,$$

em relação ao sistema xOy, pois quando se efetua uma mudança de sistema de coordenadas, rotação ou translação, o gráfico não se altera, apenas a equação muda.

EXERCÍCIOS

2.38 Escrever as coordenadas do ponto P(2,7) em relação ao sistema $x_1O_1y_1$, obtido do sistema xOy por uma rotação de um ângulo $\pi/6$ radianos no sentido anti-horário.

2.39 Escrever uma equação da circunferência de raio r e centro na origem, em relação ao sistema x_1Oy_1, obtido dos sistema xOy por uma rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

2.40 Efetua-se uma translação de eixos de modo que a nova origem seja o ponto $(-2,3)$.

a) Achar as coordenadas dos pontos $(3,2)$ e $(5,7)$ com respeito ao novo sistema.

b) Escrever uma equação da reta $y = 2x + 7$ com respeito ao novo sistema.

2.41 Efetuar uma translação de eixos tal, que em relação ao novo sistema, as equações das retas $y = 2x - 1$ e $x + 3y = 11$ não contenham o termo constante. Escreva as equações destas retas em relação ao novo sistema.

2.42 Efetuar uma translação de eixos tal, que em relação ao novo sistema, a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ não contenha termos em x e nem em y (isto é, seja da forma $x^2 + y^2 = r^2$).

2.43 Efetua-se uma rotação de eixos de um ângulo θ no sistema xOy. Sabendo-se que, em relação aos sistema xOy, o ponto P é dado por $(5,\sqrt{3})$ e que, em relação ao novo sistema, é dado por $(4,-2\sqrt{3})$, determinar o ângulo θ.

9. CÔNICAS.

Dependendo dos valores dos coeficientes A, B, C, D, E e F uma equação da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 , \qquad (I)$$

pode não admitir solução. Por exemplo, não existe nenhum par ordenado (x,y) de números reais que satisfaz a equação

$$4x^2 + 9y^2 + 5 = 0 .$$