Igor Laélio Barbosa Souza

ESTUDO DA DINÂMICA POPULACIONAL DO BICHO-MINEIRO VIA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

JEQUIÉ-BA

2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE QUIMICA E EXATAS

Igor Laélio Barbosa Souza

ESTUDO DA DINÂMICA POPULACIONAL DO BICHO-MINEIRO VIA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Monografia apresentada ao Departamento de Química e Exatas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática com Enfoque em Informática.

Orientador: Prof. Dr. Nemésio Matos de Oliveira Neto

JEQUIÉ-BA
2012

Monografia apresentada ao Departamento de Química e Exatas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática com Enfoque em Informática.

Aprovada por:

_____

Nemésio Matos de Oliveira Neto

Orientador

_____

Edson Ramos

_____

Fernando dos Santos Silva

JEQUIÉ-BA

2011

Agradecimentos

A Deus, Grande Arquiteto do Universo, pela fonte de sabedoria e inspiração, e pela conclusão de mais uma etapa da minha vida, na qual sempre esteve presente.

Aos meus queridos e amados pais, Norma Suely e Hélio Lucas, pelo apoio incondicional, carinho, exemplo e dignidade fundamentais para a formação do meu caráter, por terem colocado os estudos como prioridade e pelo incentivo dado a cada passo que caminhei.

Aos meus irmãos, Ingrid Raíra, Ian Felipe e Devid Lucas pela força e ajuda nos melhores e piores momentos.

Às minhas tias, em especial Tia Cau, Tia Ane e Tia Sandra, por todo apoio que me deram.

Ao meu orientador Nemésio de Oliveira Matos, pela paciência, apoio, postura, dedicação e contribuições teóricas, mostrando-se sempre disponível.

Aos membros da banca examinadora que se dispusera a avaliar este trabalho.

Aos demais professores do Curso de Matemática com Enfoque em Informática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (Campus de Jequié), principalmente aos professores Ademakson Araújo, Cleusiane Vieira, José Eduardo e Márcia Graci.

Enfim, a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação profissional, ética, moral.

Meu sincero e merecido, Muito Obrigado!

Resumo

Neste trabalho apresentamos um sistema de equações diferenciais no qual simulamos a dinâmica populacional do Bicho-Mineiro a fim de prever o crescimento do inseto (praga). Fizemos uma análise qualitativa dos pontos críticos do sistema quando calculamos e analisamos os seus autovalores e uma análise quantitativa quando construímos planos de fase e plotamos os gráficos. Variamos diversas vezes alguns parâmetros e verificamos que o sistema apresentou apenas soluções estáveis. A taxa de crescimento e o índice de predação da Vespa interferem significativamente nos valores de coexistencia da presa (Bicho-Mineiro) e do predador (Vespa). Pretendemos acrescentar ao modelo a temperatura para torná-lo mais realístico, para que possamos confrontar nossos dados como o modelo de autômatos celulares (AC) e com dados de pesquisa de campo.

Abstract

In this work we show a differential equations system in which we simulated the population dynamics of an insect called Bicho Mineiro (leaf miner) in order to predict the growth of that insect (pest). We made a qualitative analysis of the critical points of the system. We calculated and analyzed its self-values and a quantitative analysis was made through building phase plans and the graphs were plotted. Some parameters were varied several times and it was showed that the system had only stable solutions.The Vespa's growth and predation rate significantly interfere prey's coexistence values (leaf miner) and the predator (Vespa). We intend to add to model the temperature to make it more realistic, so we can compare our data to the model of cellular automata (CA) and with data from field research.

Lista de Figuras

1 Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2 < 0}$.....19

2 Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda_2} < 0 < \boldsymbol{\lambda_1}$.....20

3 Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$ caso (a) 21

4 Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$ caso (b) 22

5 Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda = \pm\, i\beta}$.....23

6 Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda} = \propto \pm\, \mathbf{i\beta}$.....24

7 Campo Vetorial (a) e Plano de fases (b).....29

8 Plano de fase Lagarta X Vespa quando $\boldsymbol{\alpha_{V1}}$=$\boldsymbol{\alpha_V}$.....36

9 Plano de fase Lagarta X Vespa quando $\boldsymbol{\alpha_{V1}}$=$\mathbf{n} * \boldsymbol{\alpha_V}$.....38

10 Diferença entre Lagartas e Vespas quando varia $\boldsymbol{\alpha_{V1}}$=$\boldsymbol{\alpha_V}$.....39

11 Plano de fase Ovo X Vespa e Adulta X Vespa quando $\boldsymbol{\alpha_{V1} = \alpha_V}$.....39

Lista de Tabelas

1 Propriedades de Estabilidades e Instabilidades de Sistemas Lineares e Quase Lineares.....26
2 Autovalores quando α_V=α_{V1}.....36
3 Autovalores quando α_{V1}=$n * \alpha_V$ e $n = 0.3$.....37
4 Autovalores quando α_{V1}=$n * \alpha_V$ e $n = 0.7$.....37
5 Autovalores quando α_{V1}=$n * \alpha_V$ e $n = 2.0$.....38
6 Autovalores quando α_{V1}=$n * \alpha_V$ e $n = 10$.....38

Sumário

1 Introdução.....10

2 Aspectos biológicos do Bicho-Mineiro.....12

2.1 Principais fatores que influenciam a incidência do Bicho-Mineiro.....13

2.2 Flutuação populacional.....14

3 Sistemas Dinâmicos.....15

4 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias.....17

5 Sistemas Quase Lineares.....26

6 Dinâmica de uma espécie isolada.....28

7 Modelo não-linear de Presa-Predador para duas espécies.....29

8 Material e Métodos.....31

Um modelo Equações Diferenciais para o estudo da Dinâmica Populacional do Bicho-Mineiro.....31

Análise Analítica do Sistema.....33

Métodos Numéricos.....34

Análise Numérica do Sistema.....35

9 Resultados e Discussão.....36

10 Conclusões.....41

11 Consideraçõe Finais e Perspectivas.....42

12 Referências Bibliográficas.....43

13 Anexo.....45

1 Introdução

O Brasil é o maior produtor mundial de café e o segundo maior consumidor da bebida. A receita cambial com exportação de café verde encerrou 2010 com elevação de 37,76%, em comparação com o ano anterior. O faturamento alcançou US$ 5,182 bilhões, antes US$ 3,762 bilhões, conforme relatório da Secretaria de Produção e Agroenergia do Ministério da agricultura, com base em números da Secretaria de Comércio Exterior (Secex), do Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior.

Segundo a revista cafeicultura, produção nacional de café cresceu 20% em 2010, e a Bahia é 4º maior produtor**,** está atrás apenas de Minas Gerais, Espírito Santo e São Paulo.

Os números de café beneficiado no Brasil, em 2010, apontam produção de 47,2 milhões de sacas de 60 quilos, de acordo com a terceira estimativa da CONAB (Companhia Nacional de Abastecimento) esse valor representa aumento de 19,6% frente às 39,5 milhões de sacas do ano 2009.

Esses dados fazem com que a cafeicultura destaca-se também como atividade de grande empregabilidade dentre os principais setores do agronegócio, a sua capacidade de geração de empregos demonstra sua importância para a economia baiana, tanto no mercado interno, quanto externo. Fazendo com que cada vez mais o governo invista no melhoramento das técnicas de processamento, manejo, plantio e no controle biológico de pragas, como é o caso do Bicho-Mineiro, visto como a principal praga do cafeeiro. É um inseto (peste) monófago que ataca somente os pés de café, principalmente em regiões neotropicais tais como o Brasil.

Isto significa que, o Brasil deve ter interesse em ampliar a base de conhecimento no setor cafeeiro, gerando informações e novas tecnologias como, por exemplo, para o controle biológico, com o intuito de aumentar a produção e a produtividade e diminuir as perdas por pragas.

Segundo a Revista Cultivar, os danos causados pelas lagartas do Bicho-Mineiro (BM) nas folhas são consideráveis, eles reduzem a capacidade de fotossíntese em função da redução da área foliar, pois se alimenta de células do parênquima paliçádico das folhas. Em geral, as plantas que sofrem intenso ataque do BM apresentam, principalmente, o topo completamente desfolhado podendo, no entanto, sofrer desfolha total. Em consequência da desfolha, há redução da produção e da longevidade dos cafeeiros.

Uma maneira de diminuir as perdas durante o plantio, segundo Oliveira-Neto (2009), é prever a incidência de pragas e propor métodos de controle (biológico ou não), bem como entender quais são os mecanismos chaves que facilitam com que tais pragas/doenças se espalham no cafeeiro. Hoje, com o uso dos computadores, ficou mais fácil estudar tais problemas, pois podemos sugerir modelos matemáticos que simulem o sistema em questão e, podemos resolver tais modelos via simulação computacional.

Neste trabalho propomos uma modelagem matemática da dinâmica populacional do BM através de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) autônomas, com as quais analisaremos o BM desde sua fase ovo até a fase adulta. Faremos uma análise qualitativa das EDOs investigando o comportamento de suas soluções.

2 Aspectos biológicos do Bicho-Mineiro

O Bicho-Mineiro é uma praga exótica originária do continente Africano. Trata-se de um inseto monófago, pois ataca apenas o cafeeiro e tem esse nome devido às galerias que constrói entre as epidermes da folha que, em conseqüência, destroem o tecido paliçádico, utilizado pelas lagartas para sua alimentação de acordo com Souza, *et al.* (1998).É considerado um inseto de metamorfose completa, pois, passa pela fase ovo, lagarta, crisálida e mariposa.

Fase de Ovo

A fase ovo dura em média 5 a 21 dias. Os ovos do BM possuem um aspecto gelatinoso e são muito pequenos, sendo dificilmente vistos a olho nu. As fêmeas depositam número variável de ovos, sendo que a alimentação dos insetos com solução de sacarose a 10% e sua manutenção em temperatura em torno de 27 °C contribuem sobremaneira para o aumento do número de ovos por postura Parra (1981).

Segundo Parra (1981) a viabilidade e a duração da fase de ovo podem variar, principalmente em função da temperatura, sendo que a eclosão das lagartas é mais precoce em temperaturas mais elevadas. Nesta fase inicial, há uma mortalidade natural, pela fragilidade de alguns ovos e um aumento, no período de chuvas, devido a retirada dos ovos pela água.

Fase de Lagarta

Essa fase de desenvolvimento, que dura em média de 9 a 40 dias, o inseto não tem contato com o meio externo. Logo após a eclosão, as lagartas perfuram a cutícula e a epiderme superior da folha que se encontra em contato com o ovo, penetrando diretamente no parênquima paliçádico onde permanecem se alimentando de células desse tecido até o abandono para transformação em crisálida. É no período larval que o Bicho-Mineiro causa maiores danos às plantas conforme Souza, *et al.* (1998).

Diversos fatores, como a temperatura e a umidade relativa do ar, interferem diretamente no desenvolvimento das lagartas. A viabilidade das lagartas, ou seja, a

porcentagem de insetos que passam à fase de crisálida é de 49,9 % a 20 °C, 72,4 % a 27 °C, 80,7 % a 30 °C e 11,6 % a 35 °C.

Fase de Crisálida

Quando desenvolvidas, as lagartas abandonam as galerias, tecem um fio de seda e deslocam-se preferencialmente para folhas do terço inferior das plantas, ou seja, na "saia" do cafeeiro Mello (2005).

A temperatura tem papel relevante nessa fase do desenvolvimento do inseto, segundo Parra (1981) o seu aumento gradual reduz o tempo que o inseto permanece na fase de pupa. A duração média da fase de crisálida é de 4 a 26 dias, enquanto que a viabilidade dessa fase, que corresponde a porcentagem de adultos que emergem é de 78,7 % a 20 °C, 94,7 % a 27 °C, 93,3 % a 30 °C e 25 % a 35 °C.

Fase de Adulto

Nessa ultima fase, que dura em média 15 dias, o inseto adulto do Bicho-Mineiro é uma mariposa de coloração prateada com uma mancha circular de halo amarelo nas pontas das asas. A razão sexual é de 1 macho : 1 fêmea Parra (1981). A duração e a viabilidade da fase adulta são também influenciadas pela temperatura e pela umidade do ar. Estudos conduzidos por Parra (1981) revelaram que não existe diferença na longevidade de machos e fêmeas em uma mesma temperatura.

2.1 Principais fatores que influenciam a incidência do Bicho-Mineiro.

A incidência do BM nas lavouras de café é particularmente influenciada pela temperatura, face de exposição e, especialmente, pelo espaçamento adotado entre os pés de café. De acordo com Souza, *et al.* (1998), espaçamentos maiores, que proporcionam maior arejamento às plantas, favorecem as infestações.

Segundo Conceição (2005), a existência de inimigos naturais contribui significativamente para a estabilidade de populações do inseto abaixo do nível de dano. São vários os insetos que parasitam as lagartas, mas sua eficiência é menor que aquela

proporcionada pela ação de insetos predadores que pode ser de até 69% (Conceição apud, GALLO *et al.*, 1978; REIS e SOUZA, 1986).

> Estudos conduzidos por Reis *et al*. (1975) evidenciaram que o controle proporcionado por parasitos varia entre 16 e 20%. No entanto a utilização de produtos químicos de controle, especialmente aqueles usados em pulverização, contribuem muito para a redução populacional dos inimigos naturais. (CONCEIÇÃO, 2005, p. 28)

2.2 Flutuação populacional

A flutuação populacional consiste no monitoramento de populações dos insetos em todos os estágios de desenvolvimento, determinando a intensidade de ataque nas lavouras. A partir dos estudos da flutuação populacional podem-se conhecer melhor as épocas de ocorrência do inseto, as condições favoráveis para o seu desenvolvimento, os locais de preferência de ataque, conhecer os inimigos naturais e em conseqüência a época de controle.

A intensidade de infestação do Bicho-Mineiro não é igual para todos os anos numa mesma lavoura, entre lavouras de uma mesma região cafeeira e entre regiões cafeeiras. Nas regiões que o clima é favorável ao inseto, ou seja, altas temperaturas, baixa umidade do ar e distribuição irregular das chuvas, com períodos secos prolongados, ocorrem evoluções rápidas das populações, que podem atingir altíssimas infestações segundo Conceição (2005).

Mudanças climáticas, como por exemplo, a ocorrência de períodos mais longos de seca, com ocorrência de altas temperaturas, mesmo no inverno, têm relação direta com a flutuação populacional da praga. A incidência de temperaturas elevadas, baixa umidade relativa do ar e períodos longos sem chuva, aumentam consideravelmente a incidência de lesões e os prejuízos de acordo com Reis e Souza (1994). Vários estudos relativos à flutuação e biologia desse inseto realizados no Brasil, mostraram que em condições de campo e laboratório, respectivamente, a longevidade do inseto sofre influência preponderante da temperatura, quanto mais alta a temperatura mais curto será o período de vida.

3 Sistemas Dinâmicos

É sabido que algumas populações naturais exibem oscilações persistentes da sua densidade populacional, com uma periodicidade que em geral é discutível. O estudo da dinâmica entre presas e predadores tem sido um dos principais focos do estudo da Ecologia de população animal. Segundo Monteiro (2011), o primeiro e mais famoso modelo sobre interação entre duas espécies é conhecido modelo de *Lotka-Volterra*. Quando observaram que, após a paralisação de pescas no mar Adriático, durante a Primeira Guerra Mundial, houve um aumento no numero de peixes predadores e uma diminuição no numero de peixes que eram as presas. Daí em diante, os modelos foram se aprimorando a fim de se obter aproximações mais realísticas e efeitos estabilizadores.

O estudo de um modelo visa a melhor compreensão da variação do número de indivíduos de uma determinada população e também, dos fatores que a influenciam em tais variações. Para isso, é necessário o conhecimento das taxas em que se verificam perdas e ganhos de indivíduos e identificar os processos que regulam a variação da população.

De um modo geral, quando tratamos de um sistema presa-predador, costuma ser estudado teoricamente, para fins didáticos, fazendo-se algumas considerações e aproximações já que as dinâmicas de interação entre duas espécies são muito complexas para serem analisadas no meio em que se processam, devido a fatores ambientais diversos. É necessário assumirmos, por exemplo, que:

- Tanto as espécies de presas quanto as de predadores não são afetadas por fenômenos naturais, como uma catástrofe, que possam ocorrer no meio em que habitam.
- Assumimos também que os predadores estão distribuídos uniformemente no habitat, ou seja, que todos têm a mesma chance de encontrar e consumir as presas e que não há competição entre eles.
- Para diminuir o número de variáveis, desprezamos os efeitos que são pequenos, em comparação com a precisão desejada e também, sempre que possível, concentramos os parâmetros em vez de distribuirmos.
- Para simplificação da análise matemática, em princípio, assumimos relações lineares, para exprimir processos envolvidos no sistema.

Estudando a dinâmica de duas espécies vivendo num mesmo habitat, onde uma preda a outra, surge-nos alguns questionamentos: o quanto a predação reduz o número de presas? É possível a coexistência de predadores e presas e, em caso afirmativo, sob quais condições?

Para responder essas perguntas, propomos um modelo matemático da dinâmica populacional do BM através de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Analisaremos a população do BM desde sua fase ovo até a fase adulta. E para essas análises faremos um breve estudo de sistemas de equações lineares e não lineares, seus tipos de estabilidades a partir do plano de fases das soluções.

Faremos uma análise analítica das EDOs do nosso modelo encontrando seus pontos de equilíbrio do sistema e o comportamento das soluções próximo destes pontos, além de uma análise quantitativa, onde utilizaremos um método numérico (Runge-Kutta) para integrar numericamente as EDOs.

4 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Para fazermos uma análise das soluções do nosso sistema de EDOs, primeiramente devemos fazer um breve estudo definindo um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias, ordinárias por que as equações têm uma única variável independente, aparecendo apenas derivadas simples nas equações.

Daremos um maior foco no estudo das estabilidades dos pontos de equilíbrio de um sistema linear, apresentando os possíveis casos de autovalores para esse sistema, o qual definirá o tipo de estabilidade ou instabilidade no ponto crítico em questão.

Logo após mostraremos a similaridade da análise das soluções, na proximidade do ponto crítico de um sistema linear e um sistema não-linear, como o nosso.

Um sistema de n equações diferenciais de *primeira ordem* (pois apresentam derivadas de primeira ordem) é um conjunto de n equações diferenciais, com uma variável independente t e n variáveis dependentes $x_1, x_2 \dots, x_n$, que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n') \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n') \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n') \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $F_1, F_2 \dots, F_n$, são quaisquer funções de $(2\,n + 1)$ variáveis reais, que definem o sistema.

Se todas as funções $F_1(t), F_2(t) \dots, F_n(t)$ forem identicamente nulas no intervalo $I = (\gamma, \delta)$, dizemos que o sistema (4.1) é homogêneo; caso contrário, ele é não-homogêneo.

Dizemos as funções $x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ são uma solução do sistema (4.1) no intervalo $I = (\gamma, \delta)$ se elas: i) são diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I e ii) satisfazem o sistema (4.1) em todo $t \in I$.

Se associarmos ao sistema (4.1), n condições iniciais: $x_1(t_0) = {x_1}^0, x_2(t_0) = {x_2}^0, \dots, x_n(t_0) = {x_n}^0$, dizemos que (4.1) será um problema de valor inicial (PVI).

Se todas as funções $F_1, F_2 \dots, F_n$ do sistema (4.1) não dependerem explicitamente de t, o sistema é dito autônomo.

Para a classificação de pontos de equilíbrio do sistema descrito em (4.1), consideremos um sistema linear homogêneo, de coeficientes constantes, de *duas* equações diferenciais na forma matricial:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{4.2}$$

onde A é a matriz 2x2 e x é um vetor 2x1.

O *ponto de equilíbrio* ou *ponto crítico* do sistema é o ponto (x_1^*, x_2^*) para o qual as derivadas se anulam, ou seja:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \tag{4.3}$$

É fácil de ver que *para qualquer sistema linear homogêneo o ponto de equilíbrio é dado por* (x_1^*, x_2^*) = (0,0).

O nosso objetivo é estudar como as soluções particulares do sistema se comportam na vizinhança do ponto de equilíbrio (0,0). Será que as soluções, ao longo do tempo, convergem para o ponto de equilíbrio ou será que se afastam dele? E qual o seu aspecto gráfico?

De acordo com Boyce-Diprima (2002), a solução geral de um sistema homogêneo de duas equações diferenciais de primeira ordem pode ser escrita como:

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t}\, v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\, v_2 \tag{4.4}$$

em que λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz de coeficientes e v_1 e v_2 são os vetores próprios associados a cada autovalor. Esse estudo será efetuado de forma qualitativa recorrendo a uma representação geométrica, denominada *plano de fases*: não representamos x_1^* e x_2^* separados em função do tempo, mas sim x_2^* em função de x_1^*.

O ponto de equilíbrio (0,0) corresponde à origem das coordenadas do plano de fases. O percurso traçado por x_1e x_2 ao longo do tempo no plano de fases é denominado *trajetória*.

Vamos então considerar vários casos, correspondentes aos diferentes tipos de autovalores que podem ocorrer:

Autovalores reais, distintos e de sinais iguais:

a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Segue da equação (4.4) que $x \to 0$ quanto $t \to \infty$: uma vez que ambas as exponenciais têm expoentes negativos, independente dos valores de c_1 e c_2 ambas as parcelas tenderão para zero,ou seja,todas as soluções se aproximam do ponto de equilíbrio à medida que o tempo aumenta.

Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de v_1, então $c_2 = 0$. Conseqüentemente a solução permanecerá nessa reta para todo t e tende à origem quando $t \to \infty$. Analogamente se o ponto pertence à reta na direção de v_2, então a solução tende à origem ao longo dessa reta.

E uma vez que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, para valores suficientemente grandes de t, a parcela em v_1 poderá ser desprezada e apenas a parcela em v_2 contribui para x. Assim, quanto $t \to \infty$, não só as trajetórias se aproximam da origem, mas o fazem tendendo também à reta na direção de v_2. Logo, todas as soluções tendem ao ponto crítico tangentes à reta na direção de v_2, exceto as que começam exatamente na reta na direção de v_1. As trajetórias estão esquematizadas no plano de fases na Figura1. Nesta situação, o ponto de equilíbrio é então designado de nó impróprio, ou nó atrator, ou sorvedouro

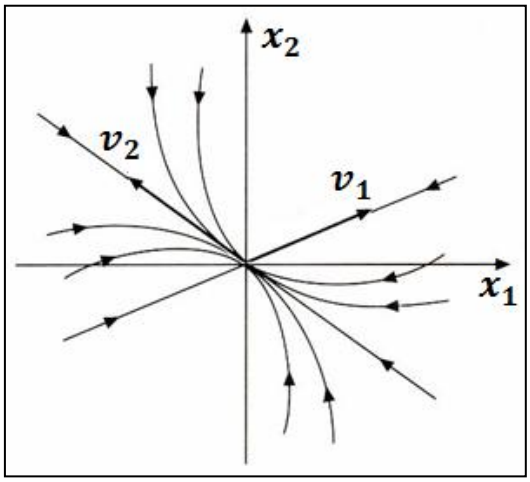

Figura 7: Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2 < 0}$

b) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

Agora as trajetórias têm o mesmo padrão do item a, mas o sentido é o oposto: quando $t \to +\infty$, $x \to \infty$, ou seja, para tempos elevados, as trajetórias afastam-se cada vez mais do ponto de equilíbrio. Nesse caso o ponto crítico é chamado de nó ou fonte.

Autovalores reais, distintos e de sinais diferentes $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

Da equação (4.4), podemos observar que se a solução começa em um ponto contendo a origem na direção v_1, então $c_2 = 0$. Consequentemente, a solução permanece nessa reta para todo t e como $\lambda_1 > 0$, segue que $\|x\| \to \infty$ quanto $t \to \infty$. Mas se a solução começa em um ponto inicial pertencente à reta na direção de v_2 temos que $\|x\| \to 0$ quanto $t \to \infty$, já que $\lambda_2 < 0$. E as soluções que começam em outros pontos seguem trajetórias semelhantes às da Figura 2. Nesse caso a origem é chamada de ponto de sela.

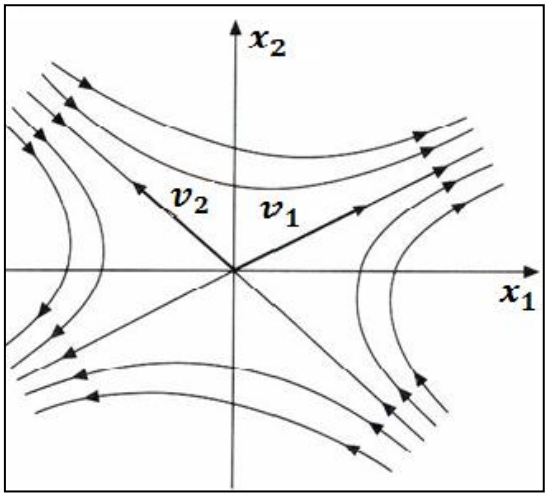

Figura 8: Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda_2} < 0 < \boldsymbol{\lambda_1}$

Autovalores iguais

Antes de falarmos de autovalores iguais, primeiro devemos lembrar que segundo Boyce-Diprima (2002), se todos os autovalores de uma matriz A de ordem n são simples, ou seja, tem multiplicidade 1, então existem n autovetores, um para cada autovalor e são linearmente independentes. Mas se a matriz A tem *autovalores repetidos*, então ela pode ter menos do que n autovetores independentes.

Para o nosso exemplo vamos supor que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e considerar o caso em que os autovalores são negativos, se forem positivos, as trajetórias serão semelhantes, mas o sentido do movimento é contrário.

Então consideremos os dois casos:

a) Existem dois autovetores linearmente independentes

Se conseguirmos encontrar dois vetores próprios linearmente independentes associados ao valor próprio único λ, então a solução geral (4.4) pode ser escrita como:

$$x = c_1 e^{\lambda t}\, v_1 + c_2 e^{\lambda t}\, v_2 \;=\; e^{\lambda t}(\, c_1\, v_1 + c_2\, v_2\,), \tag{4.5}$$

onde v_1 e v_2 são autovetores independentes e o vetor $(\, c_1\, v_1 + c_2\, v_2\,)$ tem a direção depende das constantes c_1 e c_2 (ou seja, das condições iniciais do problema). As trajetórias vão assim, ao longo do tempo, seguir a direção desse vetor, ou seja, serão *retas* com a direção de $(\, c_1\, v_1 + c_2\, v_2\,)$.

Logo as trajetórias aproximam-se do ponto de equilíbrio à medida que *t* aumenta. Este ponto crítico é designado de *nó próprio*.

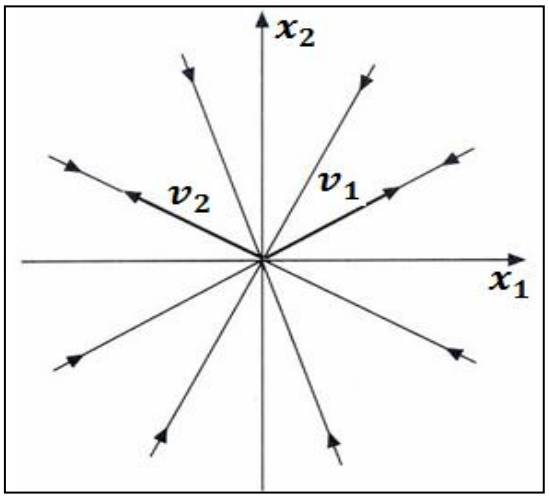

Figura 9: Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$ caso (a)

b) Existe um autovetor linearmente independente

$$x = c_1 e^{\lambda t}\, v_1 + c_2 e^{\lambda t}(\, v_1 t + \, v_2) \tag{4.6}$$

Assumindo $\lambda < 0$, teremos nas situações limite onde v_1 é o autovetor e v_2 é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido.

Para t muito grande, o termo dominante nesta equação é $c_2 e^{\lambda t}\, v_1 t$ Assim, quando $t \to +\infty$, todas as trajetórias tendem à origem e são tangentes à reta na direção do autovetor v_1. Analogamente, para valores negativos de t, o termo $c_2 e^{\lambda t}\, v_1 t$ é novamente dominante, de modo que, quando $t \to -\infty$, as trajetórias afastam-se do ponto de equilíbrio denominado *nó impróprio* ou degenerado, cada trajetória assíntota uma reta paralela à v_1.
Se $\lambda > 0$, o sentido das trajetórias seria o inverso.

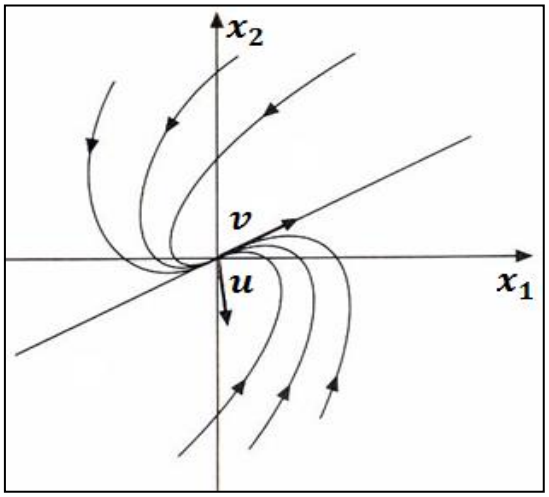

Figura 10: Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$ caso (b)

Autovalores complexos conjugados

Neste caso, os autovalores são dados por $\lambda = \propto \pm \mathrm{i}\beta$, onde $\propto$ e β são reais e em consequência, os autovetores associados também são complexo da forma $v = a \pm \mathrm{i}b$ onde a e b são reais , e a solução geral será dada por:

$$x = c_1 e^{\propto t}[\cos(\beta t)\, a - \sin(\beta t)\, b + \; c_2 e^{\propto t}[\sin(\beta t)\, a + \cos(\beta \mathrm{t})\, b\,] =$$

$$= e^{\propto t}\{[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)]a + [-c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta \mathrm{t})]b\} \qquad (4.7)$$

Temos agora que considerar dois casos distintos: (a) os autovalores com parte real nula**,** $\propto = 0$; (b) autovalores com parte real não nula, isto é, $\propto \neq 0$

No caso (a), a solução é então simplesmente:

$$x = [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)]a + [-c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)]b$$

Uma vez que os coeficientes a e b são multiplicados por valores periódicos no tempo, x não exibe qualquer comportamento específico quando $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$. Poderá haver momentos em que a solução se afasta do ponto crítico (0,0), para depois se voltar a aproximar, sendo este comportamento repetido infinitamente. O plano de fases terá assim um aspecto semelhante ao representado na Figura 5:

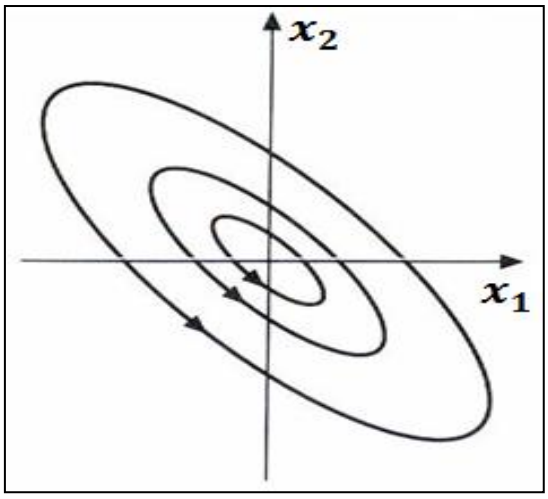

Figura 11: Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda = \pm i\beta}$

O ponto de equilíbrio é agora designado de *centro*, uma vez que as trajetórias "orbitam" continuamente em seu redor.

Para o caso (b), de autovalores com parte real não nula, isto é, $\propto \neq 0$, é possível mostrar que as trajetórias são espirais, que tendem ou se afastam da origem dependendo do sinal da parte real $\propto$. Abaixo ilustramos o caso com $\propto < 0$.

Para este caso a solução geral (4.4) é dada por:

$$x = e^{\propto t}\{[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)]a + [-c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)]b\}$$

Se $\propto < 0$, temos que: $t \to +\infty \Rightarrow x \to 0$ e $t \to -\infty \Rightarrow x \to \infty$.

As trajetórias "orbitam" ainda em torno de (0,0), no entanto, aproximam-se cada vez mais medida que o tempo aumenta, formando uma espiral. O comportamento das trajetórias no plano de fases correspondente é exibido na Figura 6. Para esta situação o ponto de equilíbrio é denominado *foco*. Se $\propto > 0$, o sentido das trajetórias seria o oposto.

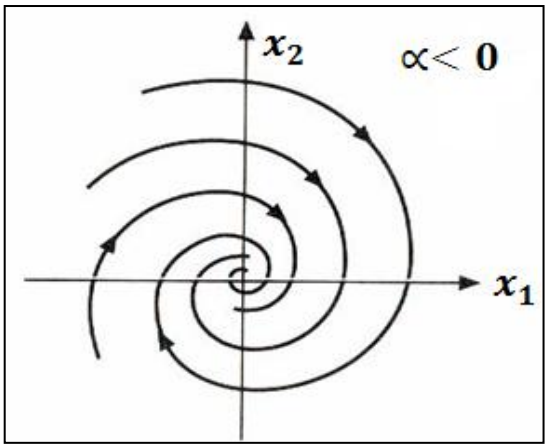

Figura 12: Plano de fase para $\boldsymbol{\lambda} = \propto \pm \mathbf{i}\boldsymbol{\beta}$

Classificação da estabilidade dos pontos de equilíbrio

Um ponto de equilíbrio é estável no sentido que atrai soluções iniciais próximas a ele, mas pode não atrair soluções com condições iniciais distantes.

Para além disso, um ponto de equilíbrio é *assintoticamente estável* se for estável e a trajetória se aproximar deste ponto quando $t \to +\infty$. Um ponto de equilíbrio que não seja estável é chamado *instável*.

Um centro é um exemplo de um ponto de equilíbrio estável, mas não assintoticamente estável, situação ilustrada na Figura 5. Um foco ou um nó próprio ou nó impróprio em que as trajetórias tendam para o ponto de equilíbrio quando $t \to +\infty$, são exemplos de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

É necessário saber que toda essa análise foi para um sistema dito *autônomo*, pois todos os coeficientes da matriz A não dependem da variável independente t, mas sim das variáveis dependentes x_1 e x_2, caso contrario o sistema é dito não autônomo. Essa distinção desses sistemas é importante porque a análise qualitativa geométrica feita anteriormente é estendida para sistemas autônomos em geral, na qual possui mais de 2 EDOs, como é o nosso modelo que apresentaremos adiante, mas não é útil para sistemas não autônomos.

Note que o sistema (4.2) tem um campo de direção associado que é independente do tempo, ou seja, todas as soluções que satisfazem uma condição inicial percorrem a mesma trajetória, daí um único retrato de fase mostra simultaneamente informação qualitativa sobre todas as soluções do sistema.

5 Sistemas Quase Lineares

Frequentemente é impossível obter soluções analíticas exatas de equações diferenciais não lineares por sua complexidade. Não vamos, portanto tentar resolvê-las, mas apenas procurar obter informação qualitativa sobre o comportamento da solução na proximidade do chamado ponto (ou pontos) de equilíbrio.

No capitulo anterior fizemos um breve estudo dos pontos de equilíbrio de sistemas lineares, mas sabemos que teremos que analisar o comportamento das trajetórias de um sistema não-linear. Para fazermos isso devemos aproximar o sistema não-linear estudado, por um sistema linear apropriado cujas trajetórias sejam fáceis de descrever. Segundo Von Zuben (2009) a linearização é uma aproximação em torno de um ponto crítico, ela só pode levar em consideração, o comportamento do sistema em uma vizinhança deste ponto. Nenhum outro comportamento não seja local, muito menos o comportamento global do sistema pode representar o modelo linearizado. O sistema que é possível fazer essa aproximação é chamado de sistema *quase linear*.

Dado um sistema não-linear em forma bidimensional tal que $X = (x, y)$:

$$\frac{dX}{dt} = f(X) \tag{5}$$

Nosso objetivo principal é estudar o comportamento das trajetórias do sistema (5) em uma vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0). Para isso vamos considerar esse sistema na forma escalar:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pode ser mostrado que, usando a expansão em séries de Taylor, que o sistema (5.1) será quase linear em uma vizinhança de um ponto (x_0, y_0) sempre que as funções F e G tiverem derivadas parciais contínuas até de segunda ordem. Ele será da forma:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y\,(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

onde $N_1 = x - x_0$ e $N_2 = y - y_0$.

Esse é um método simples e geral para encontrar o sistema linear aproximado a um sistema quase linear, na vizinhança de um ponto critico. Segundo Von Zubem (2009), a estabilidade dos pontos críticos de um sistema não linear pode ser estudada através do cálculo dos autovalores da matriz Jacobiana ou Jacobiano.

Estudadas as estabilidades de sistemas lineares e um método de aproximar um sistema não linear a um linear, apresentamos uma tabela com os tipos de estabilidade e instabilidade em torno dos pontos críticos de sistemas lineares e quase lineares. Nesse trabalho, não faremos demonstrações do comportamento dos pontos críticos de um sistema quase linear, basta observarmos a semelhança com o sistema linear e notar que para *x* pequeno, os termos não-lineares também são pequenos e não afetam a estabilidade e o tipo de ponto crítico determinados pelo sistema linear, exceto em dois possíveis casos: quando λ_1 e λ_2 forem imaginários puros, e quando λ_1 e λ_2 forem reais e iguais.

Tabela 1 : Propriedades de Estabilidades e Instabilidades de Sistemas Lineares e Quase Lineares

	Sistema Linear		Sistema Quase Linear	
	Tipo	Estabilidade	Tipo	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	N	Instável	N	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	N	Assintoticamente estável	N	Assintoticamente estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	OS	Instável	PS	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	NP ou NI	Instável	N ou PE	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	NP ou NI	Assintoticamente estável	N ou PE	Assintoticamente estável
$\lambda_1, \lambda_2 = \propto \pm \mathrm{i}\beta$				
$\propto > 0$	PE	Instável	PE	Instável
$\propto < 0$	PE	Assintoticamente estável	PE	Assintoticamente estável
$\lambda_1 = \mathrm{i}\beta$ e $\lambda_2 = -\mathrm{i}\beta$	C	Estável	C ou PE	Indeterminado

Nota: N, nó; NI nó impróprio; NP, nó próprio; PS, ponto de sela; PE, ponto espiral; C, centro.

6 Dinâmica de uma espécie isolada

Nos modelos mais simples sobre dinâmica populacional, como o de Malthus e o *logístico*, estuda-se a variação temporal do número N de indivíduos de uma espécie. No modelo de Malthus assume-se por simplicidade, que a taxa de variação de N no instante t, ou seja, que:

$$\frac{dN(t)}{\mathrm{dt}} = a\mathrm{N(t)} \tag{6}$$

onde a é a variação relativa da população (natalidade menos mortalidade).

Já o modelo logístico, que considera a constante a do modelo de Malthus como uma função que depende da própria população, também conhecida como equação de Verhulst, leva-se em conta o fato de que a taxa de crescimento depende realmente da população, ou seja:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N \tag{6.1}$$

onde r é a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador e K representa a população limite estabelecida pela disponibilidade de recursos naturais como espaço, comida, efeitos predadores, etc. Também conhecida com *capacidade de suporte do meio* segundo Ricklefs (2003).

Note que se $N < K$, a taxa de crescimento é positiva e se $N > K$, a taxa de crescimento é negativa e a estabilidade é alcançada quando $N^* = K$.

7 Modelo não-linear de Presa-Predador para duas espécies

Em um ecossistema, onde há várias espécies, existe uma rede de interação bastante intricada, o que torna seu modelamento difícil. Até mesmo a interação entre duas espécies pode resultar num modelo complicado, se for incluídos efeitos sazonais, fases das populações, suas distribuições espaciais etc.

O primeiro e mais famoso modelo sobre interação sobre duas espécies é o conhecido modelo de *Lotka-Volterra*:

$$\frac{dx}{dt} = (a - \alpha y)x$$

$$\frac{dy}{dt} = (-b + \beta x)y \tag{7}$$

sendo $x(t)$ e $y(t)$ as populações de presas e predadores, respectivamente em um instante t e que a, b, α e β são constantes positivas. Supondo que os meios de subsistência para as presas são ilimitados e que seu crescimento não teria nenhum fator inibidor, não fosse a presença dos predadores. Ao propor o modelo Volterra assumiu que:

- Na ausência de predadores, a população de presas cresce exponencialmente graças ao termo ax. Assim não se consideram efeitos de superpopulação;
- O efeito de predação é reduzir a taxa de crescimento da presa através do termo $-\alpha yx$ que é proporcional à taxa de encontros entre presas e predadores.
- Na ausência de presas, a população de predadores decresce exponencialmente, segundo o termo $-by$. Dessa maneira assume-se que os predadores alimentam-se exclusivamente das presas;
- A contribuição da presa para a taxa de crescimento do predador é dado pelo termo βxy.

As soluções de equilíbrio (x^*, y^*), para o sistema (7) são (0,0) e $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\propto})$. Os autovalores associados a (0,0) valem $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = -b$; portanto, a origem é um ponto *tipo sela*. Os autovetores correspondentes coincidem com os eixos coordenados: ao longo do eixo $\boldsymbol{x}$, tem-se a direção de afastamento da origem (para $y = 0, x(t)$ cresce exponencialmente); ao longo do eixo $\boldsymbol{y}$, tem-se a direção de aproximação da origem (para $x = 0, y(t)$ decresce exponencialmente). Os autovalores associados ao ponto $(b/\beta, a/\propto)$ são $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}$ e conforme o teorema de Hartman-Grobman, não podemos determinar

a estabilidade pelo cálculo dos autovalores, já que esses possuem a parte real nula, justficando a indeterminação da Tabela 1, para a estabilidade de imaginários puros.

Com esses resultados, esboça-se o campo vetorial em torno do ponto $(b/\beta, a/\propto)$, analisando os sinais de $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ nos quadrantes formado pelas retas $x = \frac{b}{\beta}$ e $y = \frac{a}{\propto}$ que são perpendiculares entre si e passam por $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\propto})$. Essas retas são obtidas impondo $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} = 0$. O ponto $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\propto})$ localiza-se na intersecção de tais retas, conforme mostrado da Figura 7. No quadrante superior direito, tem-se que $x > \frac{b}{\beta}$ e $y > \frac{a}{\propto}$ o que implica $\frac{dx}{dt} < 0$ e $\frac{dy}{dt} > 0$. Portanto, nessa região, o campo vetorial é representado por ↖. Estendendo essa análise para os outros quadrantes, mostra-se que as trajetórias no *espaço de fases* parecem girar no sentido anti-horário, em torno do ponto de equilíbrio $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\propto})$.

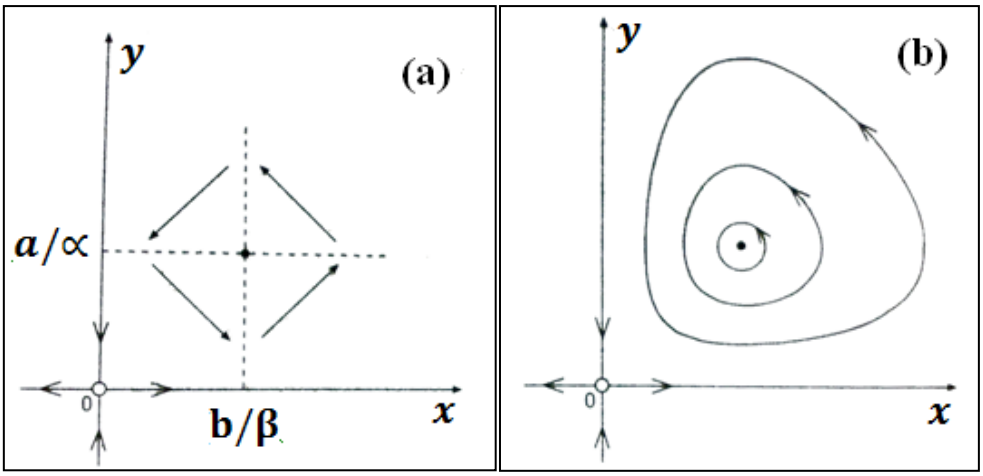

Figura7: Campo Vetorial (a) e Plano de fases (b)

Já que a equação para $\frac{dx}{dy}$ é integrável, de maneira que é possível calcular, analiticamente, as trajetórias percorridas no espaço de fase em torno desse ponto de equilíbrio. Observe que a relação dx/dy pode ser escrita como: $a\beta^2 x dx = -b\alpha^2 y dy$.

Integrando ambos os lados obtemos: $a\beta^2 x^2 + b\alpha^2 y^2 = c$ onde c é a constante de integração. Agora dividindo a equação (6.3) por c encontramos:

$$\frac{x^2}{\frac{c}{a\beta^2}} + \frac{y^2}{\frac{c}{b\alpha^2}} = 1 \tag{7.1}$$

Assim, temos que as trajetórias são elípticas, fechadas em torno do seu ponto crítico, chamado de *centro*, como na Figura 7(b). Isso mostra que as quantidades de presa e de predador variam periodicamente. A amplitude e a frequência desse comportamento periódico são determinantes pela condição inicial.

8 Material e Métodos

Um modelo Equações Diferenciais para o estudo da Dinâmica Populacional do Bicho-Mineiro.

Nas últimas seções vimos que Bicho-Mineiro é considerado um inseto de metamorfose completa, passando pela fase de ovo, lagarta, crisálida e mariposa de acordo com Souza (1998). A fase ovo dura em média 5 a 21 dias. Depois dessa fase, o inseto passa para a fase lagarta, que dura em média de 9 a 40 dias. É nesse período que o Bicho-Mineiro causa maiores danos às plantas e também é predado pelas Vespas, segundo Melo (2005). Depois da fase de lagarta, o inseto deixa de se alimentar da planta, desse à saia do cafeeiro e passa para a fase de pupa (ou crisálida) permanecendo nesta fase de 4 a 26 dias, em média, é quando finalmente alcança a fase adulta (mariposa) que dura em média 15 dias. Diversos fatores, como a temperatura e a umidade relativa do ar, interferem diretamente no desenvolvimento das lagartas. Na fase inicial, há uma mortalidade natural, pela fragilidade de alguns ovos e um aumento, no período de chuvas, devido a retirada dos ovos pela água. Na fase adulta, o inseto possui uma morte natural que pode variar de acordo com a temperatura. Depois do período de acasalamento que dura de 1 a 5 dias, as fêmeas são capazes de colocar mais de 50 ovos em seu período embrionário, sendo que a proporção é de 1 macho para 1 fêmea.

Com base nessas principais características biológicas do BM, elaboramos um sistema de EDOs no qual será feita a evolução temporal das populações em cada fase pelas seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
\frac{dN_0}{dt} &= -\alpha_0 N_0 - \alpha_{01} N_0 + \frac{\beta_3}{2} N_3 \\
\frac{dN_1}{dt} &= -\alpha_1 N_1 + \alpha_{01}\left(1 - \frac{N_1}{K}\right) N_0 - \alpha_{12} N_1 - \alpha_V N_1 N_4 \\
\frac{dN_2}{dt} &= -\alpha_2 N_2 + \alpha_{12} N_1 - \alpha_{23} N_2 \\
\frac{dN_3}{dt} &= -\alpha_3 N_3 + \alpha_{23} N_2 \\
\frac{dN_4}{dt} &= -\alpha_4 N_4 + \alpha_{V1} N_1 N_4
\end{aligned}
\tag{8}
$$

onde cada fase (da presa), ovo, lagarta, pupa, adulta e a Vespa (predadora), serão denotadas pelos índices 0,1, 2, 3, 4 e os números de insetos em cada equação serão representados $N_0, N_{1,} N_2, N_3, N_4$ respectivamente, sendo α_i com $i = 0, 1, 2, 3, 4$ parâmetros relacionados com a morte natural, os α_{ij} referem-se às taxas de transições do inseto da fase i para a fase j, o parâmetro β_3 está relacionado com a taxa em que os ovos são ovopositados e K é o nível de saturação, ou seja, a capacidade máxima de insetos numa determinada área.

Alguns valores para esses coeficientes relacionados ao BM são encontrados em diversos trabalhos de pesquisas de campo, como por exemplo, Oliveira, Martins e Zacarias (2007); usaremos alguns deles para tornar mais realístico o nosso modelo. Nos trabalhos pesquisados, a viabilidade do BM na fase ovo é de 60 a 100%, na fase lagarta é de 81 a 93%, na fase crisálida é de 93 a 96% e na fase adulta é proporcional ao período que ela vive, já que é a última fase do inseto. Agora calculando a probabilidade de morte do inseto como sendo 1 menos a viabilidade média temos que $\alpha_0 = 0.2, \alpha_1 = 0.13, \alpha_2 = 0.055$ e $\alpha_3 = 0.06$. As taxas de transições de uma fase para outra é dada por $\alpha_{ij} = 1/T$, onde T é o período médio de vida, daí $\alpha_{01} = 0.077, \alpha_{12} = 0.44$ e $\alpha_{23} = 0.6$. O parâmetro referente à ovoposição, dado $\beta_3 = 8$, na equação aparece sendo dividido por dois, pois só as fêmeas colocam ovos.

A última equação do sistema (8) refere-se às Vespas que são predadoras do BM na fase lagarta, justificando o fator N_4 na segunda equação do sistema. Para os parâmetros relacionados à Vespa, α_4, α_{V1} e α_V, que são fatores externos variando muito de um lugar para outro, fizemos $\alpha_4 = 0.03$ e simulamos o modelo com variações em α_{V1} que é taxa de crescimento das Vespas e α_V que é o índice de predação das Vespas nas lagartas.

Depois de apresentarmos todos os valores dos coeficientes vamos analisar analítica e numericamente as soluções das EDOs do nosso modelo.

Análise Analítica do Sistema

Construímos o Jacobiano para esse sistema quase linear e encontramos um sistema linear apropriado abaixo:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\alpha_0 + \alpha_{01}) & 0 & 0 & \frac{\beta_3}{2} & 0 \\ \alpha_{01}\left(1 - \frac{{N_1}^*}{K}\right) & \frac{\alpha_{01}{N_0}^*}{K} - \alpha_{12} - \alpha_1 - \alpha_V {N_4}^* & 0 & 0 & -\alpha_V {N_1}^* \\ 0 & \alpha_{12} & -(\alpha_2 + \alpha_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_{V1}{N_4}^* & 0 & 0 & -\alpha_4 + \alpha_{V1}{N_1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

onde $U_i = N_i - N_i^*$

Após isso, aplicamos os pontos críticos encontrados, em (8.1) para fazermos uma análise analítica da estabilidade local dos pontos críticos do sistema (8) através do cálculo dos autovalores da matriz linearizada (8.1), usando o **Maple 12** como auxílio.

Métodos Numéricos

Existem muitos problemas em engenharia em ciência, especialmente problemas não lineares, como é o nosso caso, nos quais os métodos apresentados nas seções 4 e 5 ou não se aplicam, ou são muito complicados para se usar; por isso utilizaremos métodos numéricos para obter o comportamento da solução do problema desde que dados os valores iniciais.

Para esse trabalho utilizaremos o famoso método de *Runge-Kutta* de quarta ordem, já que ele é mais preciso que outros métodos como o de Euler. Segundo Boyce- Diprima (2002) esse método é relativamente simples e é suficiente preciso para muitos problemas de maneira eficiente. A fórmula de *Runge-Kutta* que envolve uma média ponderada de valores de $f(y)$ em pontos diferentes no intervalo é dada por:

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{\Delta t}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \tag{8.2}$$

onde, $f_1 = f(Y_k)$, $f_2 = f\left(Y_k + \frac{\Delta t}{2} f_1\right)$, $f_3 = f\left(Y_k + \frac{\Delta t}{2} f_2\right)$, $f_4 = f(Y_k + \Delta t f_3)$, Δt é o tamanho dos passos e k é a k-ésima iteração de k. Para o problema em questão Y_k representa os N_i com $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Apresentamos algumas linhas de código do nosso programa onde foi aplicado o Runge-Kutta, utilizando o programa **Fortran de versão 11.1**:

```
f1=matmul(R,y)

f2=f1+(delta/2.d0)*matmul(R,f1)

f3=f1+(delta/2.d0)*matmul(R,f2)

f4=f1+ delta*matmul(R,f3)

y=y+(delta/6.d0)*(f1+2.d0*f2+2.d0*f3+f4)

Write(1,10) k*delta,y(1),y(2),y(3),y(4),y(5)
```

onde delta é o tamnho do passo e R é a matriz Jacobiana de (8.1) e y(1),y(2),y(3),y(4),y(5) são os os N_i com $i = 0, 1, 2, 3, 4$ respectivamente gerados por y. Segue em anexo algumas linhas geradas pelo programa.

Análise Numérica do Sistema

Dado o sistema (8) e fazendo $\frac{dN_i}{dt} = 0$ temos como pontos críticos não nulos $({N_0}^*, {N_1}^*, {N_2}^*, {N_3}^*, {N_4}^*)$, onde:

$$ {N_0}^* = \frac{\alpha_4 * \alpha_{12} * \alpha_{23} * \frac{\beta_3}{2}}{(\alpha_0 + \alpha_{01}) * \alpha_3 * \alpha_{v1} * (\alpha_2 + \alpha_{23})} $$

$$ {N_1}^* = \frac{\alpha_4}{\alpha_{v1}} $$

$$ {N_2}^* = \frac{\alpha_4 * \alpha_{12}}{\alpha_{v1} * (\alpha_2 + \alpha_{23})} $$

$$ {N_3}^* = \frac{\alpha_4 * \alpha_{12} * \alpha_{23}}{\alpha_3 * \alpha_{v1} * (\alpha_2 + \alpha_{23})} $$

$$ {N_4}^* = -\frac{(\alpha_{12} + \alpha_1)}{\alpha_{1v}} + \alpha_{01} * \left(1 - \frac{\frac{\alpha_4}{\alpha_{v1}}}{K}\right) * \left(\frac{\alpha_4 * \alpha_{12} * \alpha_{23} * \frac{\beta_3}{2}}{(\alpha_0 + \alpha_{01}) * \alpha_3 * \alpha_{1v} * \alpha_4 * (\alpha_2 + \alpha_{23}) *}\right) $$

Aplicamos no sistema (8) os valores iniciais para o número BM e de Vespas, sendo $N_0 = 15, N_1 = 9, N_2 = 8, N_3 = 6$ e $N_4 = 5$ e encontramos, por simulação computacional utilizando o software **Fortan** de versão 11.1, vários pontos críticos que variam quando mudamos alguns coeficientes do sistema. Com esses dados construímos vários gráficos que serão apresentados no capítulo seguinte.

9 Resultados e Discussão

Como vimos, alguns dos coeficientes do sistema são encontrados em diversos trabalhos de pesquisa de campo, ou seja, são dados referentes aos aspectos biológico do BM e que em primeiro momento não vamos alterar. Então vamos variar os dois coeficientes, que geralmente não são encontrados em referências, que são: índice de predação das Vespas nas lagartas α_V e taxa de crescimento das Vespas α_{V1}. Consideraremos dois casos para variar esses valores e estudar seus respectivos pontos críticos.

No primeiro caso, supomos que o índice de predação das Vespas nas lagartas é igual à taxa de crescimento da Vespa em valores absoluto, ou seja, o número de predadores cresce numa mesma taxa em que ele preda sua presa.

Tabela 2 : autovalores quando α_V=α_{V1}

α_V=α_{V1}	Ponto crítico	1º autovalor	2º autovalor	3º autovalor	4º autovalor	5º autovalor
0.01	(290,3,10,23,997)	-11.5692	-0.2905+0.1084i	-0.2905-0.1084i	-0.0094+0.0302i	-0.0094-0.0302i
0.004	(725,8,24,58,2167)	-11.5740	-0.2902+01080i	-0.2902-01080i	-0.0078+0.0295i	-0.0078-0.0295i
0.00081	(3579,37,119,286,129)	-11.5962	-0.2870+0.1043i	--0.2870-0.1043i	-0.0001+0.0032i	-0.0001-0.0032i

Como nosso foco maior é analisar a relação presa x predador, ou seja, Lagarta x Vespa, plotamos o plano de fase só com a população de ambos, tendo em vista também a dificuldade na análise de um plano de fase com dimensões maiores.

Na tabela 2, mostramos que tanto o segundo como o quinto autovalor são complexos e tem a parte real negativa, significando que o ponto de equilíbrio é um ponto espiral e assintoticamente estável. Veja agora o *plano de fase*, plotados no **Grace**, das equações II e V do sistema (8) fazendo α_{V1}=α_V com os valores da Tabela 2.

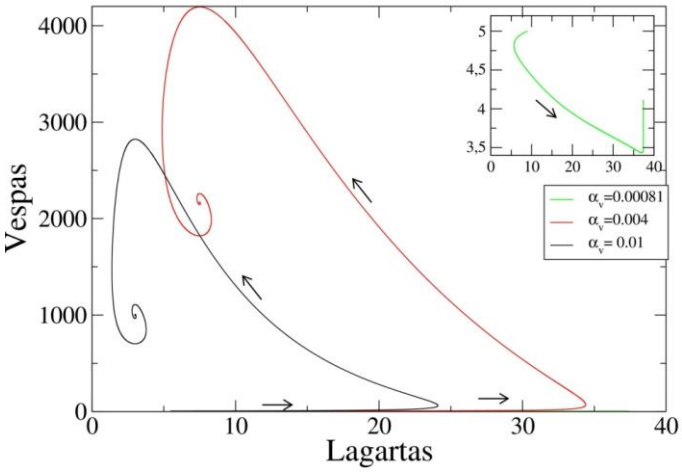

Figura 8: Plano de fase Lagarta X Vespa quando $\boldsymbol{\alpha_{V1}}$=$\boldsymbol{\alpha_V}$

Note que para α_V=α_{V1}=0.00081 o número de lagartas se estabiliza (ponto fixo) em um número maior do que o de lagartas devido ao baixo índice de predação e como a taxa de crescimento também é baixa, contribui para a diminuição da população de Vespas.

Quando aumentamos a taxa para 0.004 o número de lagartas diminui enquanto que a população de Vespas aumenta consideravelmente, para α_V=α_{V1}=0.01 acontece o mesmo, só que como o índice é maior que o anterior, a *coexistência* é dada para valores menores, tendo em vista que nesse caso as Vespas predão e crescem mais rápido, só que como as presas vão morrer mais rápido, falta alimento para tanta Vespa, ocasionando uma maior mortalidade da mesma, fazendo com que suas populações se estabilizem em valores menores.

Para entendermos o que é coexistência ou estabilidade do sistema do ponto de vista biológico, Ricklefs diz que:

> A estabilidade nos sistemas predador-presa pode ser pensada como uma tendência das duas populações para atingir tamanhos de equilíbrio invariantes. Isto é um significado restritivo e especial da palavra estabilidade, porque, como vimos, as populações de ambos podem também oscilar em ciclos estáveis. Contudo, a presença de ciclos indica a influência de fatores estabilizadores. (RICKLEFS,2003,p.332)

No segundo caso, faremos $\alpha_{V1} = n * \alpha_V$; neste caso estamos supondo que a taxa de crescimento das Vespas é proporcional ao seu índice de predação, ou seja, que quando a predação aumenta, a taxa de crescimento das Vespas também aumenta proporcionalmente, note que no primeiro caso fizemos $n = 1$, agora faremos n variar entre valores maiores e menores que 1, onde atribuímos para α_V os mesmos valores da tabela anterior e para n damos os valores citados na Tabela 3.

Tabela 3 : autovalores quando α_{V1}=$n * \alpha_V$ e $n = 0.3$

α_V	Ponto crítico	1º autovalor	2º autovalor	3º autovalor	4º autovalor	5º autovalor
0.01	(966,10,32,77,794)	- 11.5724	- 0.2897+0.1075i	- 0.2897-0.1075i	-0.0075+0.0273	-0.0075-0.0273
0.004	(2416,25,80,193,899)	-11.5857	-0.2881+0.1057i	-0.2881-0.1057i	-0.0034+0.0188i	-0.0034-0.0188i

Tabela 4 : autovalores quando α_{V1}=$n * \alpha_V$ e $n = 0.7$

α_V	Ponto crítico	1º autovalor	2º autovalor	3º autovalor	4º autovalor	5º autovalor
0.01	(414,4,14,33,960)	- 11.5738	- 0.2901+0.1079i	- 0.2901-0.1079i	-0.0094+0.0285i	-0.0094-0.0285i
0.004	(1036,11,34,83,1934)	-11.5784	-0.2897+0.1075i	-0.2897-0.1075i	-0.0071+0.0274i	-0.0071-0.0274i

Tabela 5 : autovalores quando α_{V1}=$n * \alpha_V$ e $n = 2.0$

α_V	Ponto crítico	1º autovalor	2º autovalor	3º autovalor	4º autovalor	5º autovalor
0.01	(145,2,5,12,1040)	-11.5540	- 0.2917+0.1099i	- 0.2917-0.1099i	-0.0081+0.0362i	-0.0081-0.0362i
0.004	(362,4,2,6,2439)	-11.5700	-0.2906+0.1085i	-0.2906-0.1085i	-0.0088+0.0310i	-0.0088-0.0310i
0.00081	(1789,19,85,117,6757)	-11.5814	-0.2888+0.1064i	-0.2888-0.1064i	-0.0054+0.0226i	-0.0054-0.0226i

Tabela 6 : autovalores quando α_{V1}=$n * \alpha_V$ e $n = 10$

α_V	Ponto crítico	1º autovalor	2º autovalor	3º autovalor	4º autovalor	5º autovalor
0.01	(29,1,1,2,1075)	-11.4991	- 0.2981+0.1174i	- 0.2981-0.1174i	-0.0003+0.0582i	-0.0003-0.0582i
0.004	(72,1,2,6,2656)	-11.5582	-0.2918+0.1100i	-0.2918-0.1100i	-0.0084+0.0365i	-0.0084-0.0365i
0.00081	(358,4,12,29,12060)	-11.5702	-0.2906+0.1085i	-0.2906-0.1085i	-0.0087+0.0313i	-0.0087-0.0313i

Calculando os diversos autovalores dos pontos críticos encontrados através da variação de α_{V1}=$n * \alpha_V$, onde n assumiu 2 valores menores que 1 e 2 maiores que 1, podemos perceber que todos os autovalores também tem a parte real negativa ou são reais negativos, indicando, pela Tabela 1, que os pontos críticos são do tipo: nó na direção dos autovetores de autovalores reais negativos e do tipo ponto espiral na direção de autovetores de autovalores imaginários com parte real negativa. Veja agora o *plano de fase* das equações II e V fazendo α_{V1}=$n * \alpha_V$ com os valores da Tabela 3 até a Tabela 6, fizemos dois planos de fase, um com $\alpha_V = 0.004$ e $\alpha_V = 0.01$.

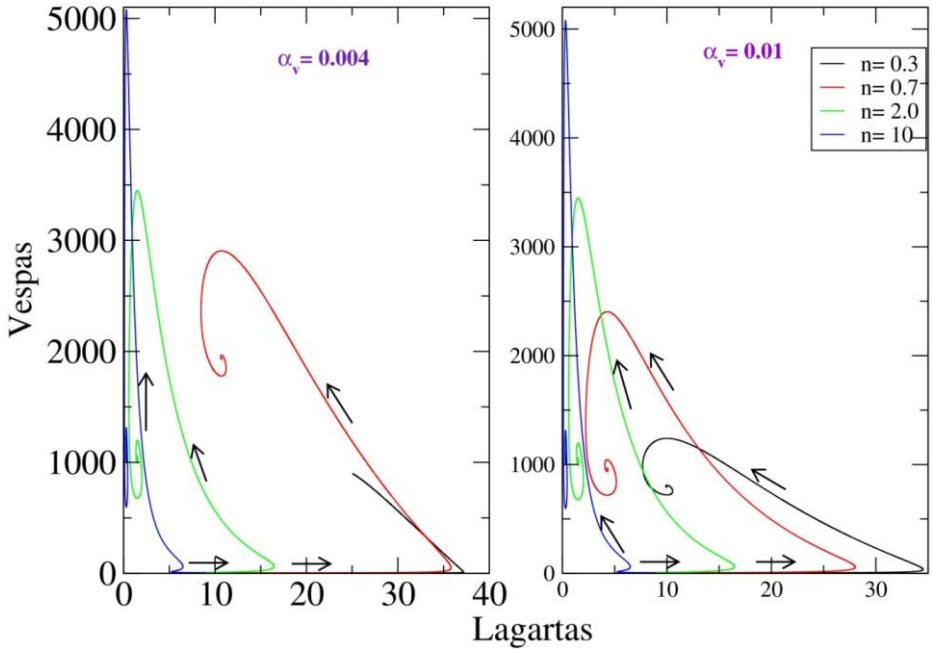

Figura 9: Plano de fase Lagarta X Vespa quando $\boldsymbol{\alpha_{V1}}$=$\boldsymbol{n * \alpha_V}$

Uma análise similar a da Figura 8 pode ser feita para as variações dos pontos críticos, e como era de se esperar, os pontos de críticos são pontos espirais ou nós e todos de estabilidade assintótica.

Uma outra análise foi realizada observando a diferença entre os níveis populacionais entre Lagartas e Vespas em função de $\boldsymbol{\alpha_{V1} = \alpha_V}$.

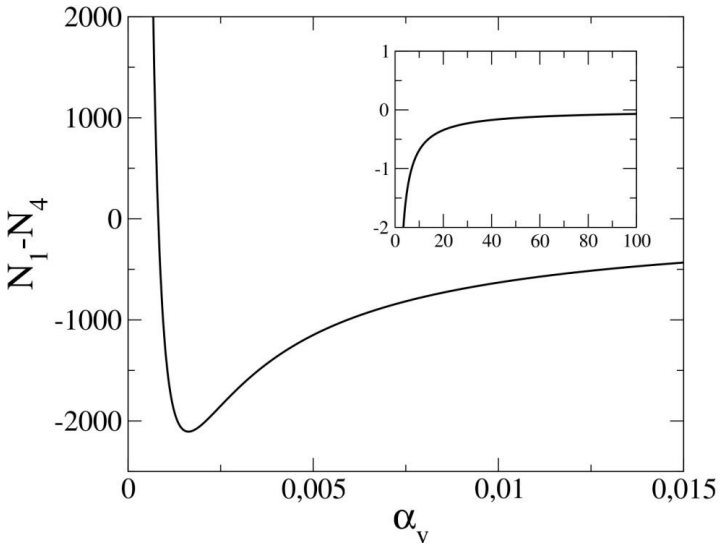

Figura 10: Diferença entre Lagartas e Vespas quando varia α_{V1}=α_V.

Também fizemos o plano de fase Ovo X Vespa e Crisálida X Vespa, já que mesmo que o BM seja predado somente na fase Lagarta, as equações que representa o inseto em cada fase estão relacionadas uma vez que para ter lagartas tem que haver ovos que por sua vez que existir insetos adultos para por, ou seja, uma equação depende da outra.

Como era de se esperar pelos autovalores encontrados, os pontos fixos são assintoticamente estáveis e são pontos espirais.

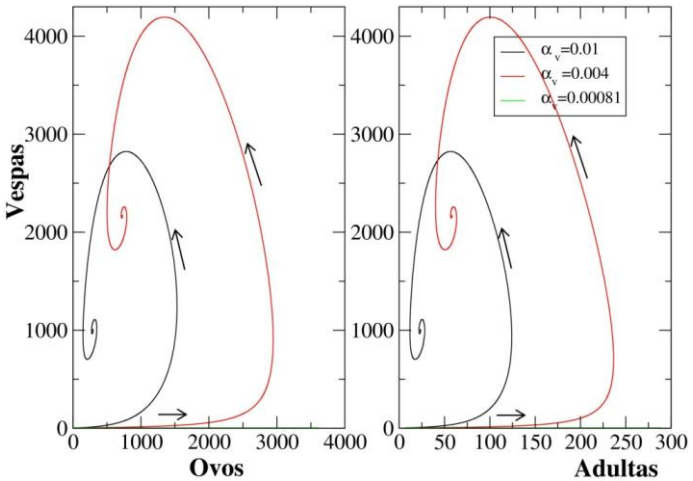

Figura 11: Plano de fase Ovo X Vespa e Adulta X Vespa quando $\alpha_{V1} = \alpha_V$

Variando alguns parâmetros como a probabilidade de morte da presa α_0 e do predador α_4, a quantidade de ovos por fêmea do BM (β_3), a probabilidade de o inseto passar da fase ovo para a fase lagarta α_{01}, e taxa da capacidade de suporte do ambiente (K) e realizando o mesmo processo para encontrar os autovalores referentes aos novos pontos críticos, foi verificado que todos os autovalores apresentam o mesmo comportamento das Tabelas 3,4 5 e 6, ou seja, que independente dos coeficientes utilizados o sistema apresenta pontos críticos que são assintoticamente estáveis.

10 Conclusões

Apresentamos um modelo de EDOs para simular a dinâmica populacional do BM e da Vespa predarora, onde fizemos diversos testes com diferentes valores para alguns coeficientes do sistema e verificamos que para todos os valores testados o sistema apresenta *soluções estáveis*,ou seja, há uma coexistência entre as espécies.

Já que é na fase Lagarta que o BM causa maiores danos e também é predado, segundo Melo (2005). Analisando somente a densidade populacional do inseto na fase lagarta, e da Vespa que é sua predadora, percebemos uma grande influência da taxa de crescimento e do índice de predação nos niveis populacionais da Vespa. Foi verficado que quando aumentamos esses índices, os níveis populacionais diminuem, fazendo com que o número de BM e de Vespas se estabilizem em valores menores, indicando uma possível maneira de controlar biologicamente a evolução da praga em campo.

11 Consideraçõe Finais e Perspectivas

De acordo com Melo(2005), sabe-se que fatores climáticos como temperatura, precipitação e umidade relativa do ar, tem interferência direta na flutuação populacional do BM, pretendemos acrescentar ao modelo a temperatura como fator que influencia as probabilidades do inseto passar de uma fase para outra (α_{ij}), tornando assim o modelo mais realístico para ser comparado com resultados de campo.

12 Referências Bibliográficas

BOYCE,W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC,2002.

BRASIL, **Ministério da Agricultura . Ministério da Agricultura Pecuária e Abastecimento**.

Cafeicultura: **A revista do agronegócio Café**. Disponível em:<http://www.revistacafeicultura.com.br/index.php?tipo=ler&mat=35393> Acessado 12/10/2011

CONCEICAO, C. H. C. **Biologia, dano e controle do bicho-mineiro em cultivares de café arábica.** 2005. 86p. Dissertação (Mestrado em Agricultura Tropical e Subtropical) – Instituto Agronômico, Campinas, 2005.

MELO, T. L. **Flutuação Populacional, Predação e Parasitismo do Bicho-Mineiro *Leucoptera coffeella* (Guérin-Mèneville e Perrotet, 1842) *Lepidoptera:Lyonetiidae*) em Duas Regiões Cafeeiras do Estado da Bahia.** 2005.135p. Dissertacao (Mestrado em Agronomia) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitoria da Conquista, 2005.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 3.ed. Editora Livraria da Física, 2011.

ODUM, E. P. **Ecologia**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1988.

OLIVEIRA NETO, N. M. 2009. 12 f. **Modelo de Autômatos Celulares para a dinâmica populacional do Bicho-Mineiro Leucoptera coffeella (Guérin-Mèneville e Perrotet, 1842) (Lepidoptera:Lyonetiidae.** Projeto de Pesquisa – Departamento de Química e Exatas, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, BA, 2010.

OLIVEIRA, A. C. S. ; MARTINS, S. G. F. ; ZACARIAS, M. S. . **Computer simulation of the coffeeleaf miner using sexual Penna aging model**. Physica. A, v. 387, p. 476-484, 2007.

PARRA, J.R.P.;Gonçalves, W.;Precetti, A. A. C. M., **Flutuação populacional de parasitos e predadores de *Perileucoptera coffeella* (Guérin-Meneville, 1842) em três localidades do Estado de São Paulo.** Turrialba, San José, v. 4, p. 357-364, 1981.

REIS, P. R.; SOUZA, J. C. Insetos na folha. **Revista Cultivar Grandes Culturas**, Pelotas, n. 39, p. 30-33, maio 2002. Disponível em: <http://www.grupocultivar.com.br/arquivos/gc39_insetos.pdf>. Acessado em 10/10/2011

RICKLEFS, R. E. **A Economia da Natureza**. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 2003.

SOUZA, J.C.; REIS P.R.; RIGITANO, R L. **O bicho mineiro do cafeeiro**: biologia, danos e manejo integrado. Belo Horizonte: EPAMIG, 1998. 48p. (Boletim Técnico, 54)

UNICAMP, J. V. Z. **Estudo de Estabilidade em Sistemas Não-Lineares**. p. 1-6, maio de 2009. Disponível em: <ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/.../topico5_03.pdf> .Acessado em 12/02/2012

Anexo

0.0000000	15.0000000	9.0000000	8.0000000	6.0000000	5.0000000
0.0100000	15.1918517	8.9418238	8.0405085	6.0079468	5.0030009
0.0200000	15.3834089	8.8843156	8.0805773	6.0159469	5.0059745
0.0300000	15.5746747	8.8274700	8.1202115	6.0239995	5.0089210
0.0400000	15.7656520	8.7712820	8.1594160	6.0321041	5.0118408
0.0500000	15.9563438	8.7157464	8.1981956	6.0402599	5.0147341
0.0600000	16.1467531	8.6608580	8.2365554	6.0484664	5.0176012
0.0700000	16.3368829	8.6066118	8.2745002	6.0567228	5.0204424
0.0800000	16.5267359	8.5530027	8.3120346	6.0650287	5.0232580
0.0900000	16.7163150	8.5000258	8.3491636	6.0733833	5.0260482
0.1000000	16.9056230	8.4476760	8.3858918	6.0817860	5.0288133
0.1100000	17.0946628	8.3959484	8.4222239	6.0902363	5.0315536
0.1200000	17.2834370	8.3448381	8.4581645	6.0987335	5.0342693
0.1300000	17.4719484	8.2943401	8.4937182	6.1072771	5.0369607
0.1400000	17.6601996	8.2444496	8.5288896	6.1158665	5.0396282
0.1500000	17.8481933	8.1951618	8.5636833	6.1245011	5.0422719
0.1600000	18.0359321	8.1464720	8.5981036	6.1331803	5.0448921
0.1700000	18.2234186	8.0983752	8.6321550	6.1419036	5.0474891
0.1800000	18.4106554	8.0508669	8.6658420	6.1506705	5.0500632
0.1900000	18.5976449	8.0039422	8.6991689	6.1594803	5.0526145
0.2000000	18.7843897	7.9575966	8.7321400	6.1683325	5.0551435
0.2100000	18.9708922	7.9118253	8.7647596	6.1772267	5.0576502
0.2200000	19.1571549	7.8666239	8.7970320	6.1861622	5.0601351

Na primeira coluna são mostrados os passos, na segunda em diante são mostrados os N_i com $i = 0, 1, 2, 3, 4$ respectivamente.