

**Suzicleide Lopes de Oliveira**

**Elementos de Radioatividade a Partir de Primeiros  
Princípios e Aspectos Ambientais no Distrito  
Uranífero de Lagoa Real - BA**

Dissertação apresentada ao PPGCA - Programa de Pós Graduação em Ciências Ambientais da UESB - para a obtenção de Título de Mestre em Ciências Ambientais com Área de Concentração em Meio Ambiente e Desenvolvimento.

Orientador:

**Dr. Ronaldo Silva Thibes**

Co-orientadora:

**Dra. Simara Santos Campos**

UESB - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

Itapetinga - Bahia

Fevereiro - 2014

Dedico este trabalho à minha querida filha Júlia,  
aos meus pais Jonas e Maria da Conceição,  
às minhas irmãs Alessandra e Sione,  
e ao meu namorado Luciano,  
com todo o meu amor.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus que em sua infinita bondade me deu forças para superar os obstáculos e sabedoria para realizar mais uma conquista.

Ao professor Ronaldo Thibes pelo incentivo, amizade, compreensão, dedicação, paciência, aprendizado e pela honra em tê-lo como meu orientador.

A Camila, grande amiga de todas as horas, por toda a ajuda com o  $\text{\LaTeX}$ , com a mecânica quântica, contribuições ao trabalho como um todo e demonstrações de carinho e apoio.

A Simara, minha co-orientadora pela amizade, apoio e ensinamentos durante o mestrado.

A Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências Ambientais e por ter concedido a minha liberação para a realização do mestrado.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Ambientais/PPCA - UESB pelo apoio, organização e condução de todas as atividades propostas durante o período do mestrado.

Aos meus professores das disciplinas do mestrado, pela amizade, apoio e conhecimentos que contribuíram com a minha formação acadêmica.

Ao professor Edilson, membro da banca de qualificação, pelas sugestões ao trabalho.

Aos professores Nemésio e Selma, membros da banca de defesa, pelas grandes contribuições ao trabalho.

A todos os colegas e amigos do curso de Pós - Graduação, em especial Amisson, Daniele, Deise, Diego e Mayana, que foram grandes companheiros durante o curso. Agradeço pelas risadas, pelas melhores segundas-feiras, pelo sofrimento coletivo na preparação e realização da prova de proficiência, na apresentação de trabalhos, na qualificação e na tão esperada defesa.

Aos meus colegas e amigos da UESB, em especial Flávia, Pedro, Laura, Marayana, Marilyn, Reginaldo e Arthur que sempre torceram por mim.

Aos meus amigos da UNEB e do CETEP de Caetitê, pelo carinho, amizade e confiança.

A Djan pela amizade e por ter me orientado com o uso do  $\text{\LaTeX}$  e na construção de gráficos neste trabalho.

A tia Mariana e tio Raimundo, pessoas iluminadas por Deus, obrigada por serem exemplo em minha vida e por todo amor e energia positiva.

A Luzia por cuidar do meu bem mais precioso, minha filha, e por vibrar durante cada etapa cumprida .

Ao meu amigo de sempre, Eduardo, pelo carinho, amizade e pensamentos positivos.

A minha grande amiga Ana Paula que participou indiretamente de todas as etapas desse trabalho e por ouvir todas as minhas lamúrias.

A minha amiga de ontem, hoje e sempre, Luciana, que esteve sempre ao meu lado, dando sugestões e me colocando para cima nos momentos de turbulência e sempre na torcida.

Ao meu namorado Luciano pelo amor, incentivo, apoio e paciência com as minhas ausências.

A minha amada irmã Alessandra e a sua família, Álvaro, Matheus e Murilo pela torcida e por todo o apoio e carinho durante o período do mestrado.

Ao meu pai Jonas pelo apoio e por ser meu exemplo de dedicação aos estudos, amo você.

A minha mamãe, Maria da Conceição (in memorian), meu anjinho, minha eterna torcedora, sei que está ao meu lado em todos os momentos, amo tanto você, sou eternamente grata a Deus por ser sua filha.

A minha princesinha, minha linda filha, Júlia, obrigada pelos beijinhos, abraços, sorrisos e por compreender, mesmo pequenina, os momentos de ausência, meu amorzinho essa vitória é nossa.

E finalmente agradeço a todos os amigos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos meu muito obrigada!

“Quem entra em contato com a Física Quântica sem se espantar, sem ficar perplexo, é porque nada entendeu”

*Albert Einstein*

# Resumo

OLIVEIRA, Suzicleide L. Elementos da Radioatividade a Partir de Primeiros Princípios e Aspectos Ambientais no Distrito Uranífero de Lagoa Real - BA. Itapetinga - BA: UESB, 2014. 87 páginas. Dissertação - Mestrado em Ciências Ambientais. Área de Concentração em Meio Ambiente e Desenvolvimento<sup>1 2</sup>.

**Resumo:** O fenômeno da radioatividade é conhecido desde 1896, quando através de pesquisas realizadas por Antonie Henri Becquerel e pelo casal Pierre e Marie Curie, foi descoberto que sais de urânio emitiam radiações capazes de revelar chapas fotográficas envoltas em papel preto. No entanto, somente com o advento da mecânica quântica e teoria quântica de campos tal fenômeno pode melhor ser compreendido e controlado. Com base nos preceitos da mecânica quântica efetuamos uma revisão de modelos efetivos para a descrição de fenômenos de desintegração radioativa e emissão de radiações alfa e beta. Através do estudo do decaimento radioativo múltiplo encontramos a solução para um sistema de equações diferenciais acopladas descrevendo uma série radioativa de  $k$ - termos, por meio do método de indução matemática. Obtivemos valores teóricos provenientes de modelos efetivos para calcular a distribuição de amplitude de energia e transição entre estados nucleares instáveis, ademais foi obtido a constante de decaimento alfa que pode ser comparado diretamente com dados experimentais. Realizamos ainda um estudo sobre o processo de desintegração com emissão de partículas beta. Efetuamos um estudo de caso analisando aspectos de impactos ambientais da região do Distrito Uranífero de Lagoa Real - BA. Por motivo dessa região constituir uma reserva geológica de urânio ela é rica em minério de elementos radioativos como o urânio e seus descendentes radioativos, causando impactos ao meio ambiente e à saúde da população devido tanto à radioatividade natural quanto à proveniente da atividade de extração e beneficiamento do urânio.

**Palavras-chave:** Radioatividade, Meio Ambiente, Urânio, Caetité, Mecânica Quântica.

---

<sup>1</sup>Orientador: Ronaldo Silva Thibes, Dr. UFRJ

<sup>2</sup>Coorientadora: Simara Santos Campos, Dra. UFS

# Abstract

OLIVEIRA, Suzicleide L. Evaluation of Environmental Impacts Arising from Uranium Extraction in Lagoa Real Bahia. Itapetinga - BA: UESB, 2014. 87 pages. Dissertation - MSc in Environmental Sciences. Specialization in Environment and Development<sup>1 2</sup>..

**Abstract:** *The phenomenon of radioactivity is known since 1896, when, through researches carried out by Antonie Henri Becquerel and the couple Pierre and Marie Curie, it was discovered that uranium salts gave out radiations which were capable of developing photographic plates wrapped in black paper. Despite this, only with advent of quantum mechanics and quantum field theory such phenomenon could be better understood and controlled. Based on the principles of quantum mechanics we performe a review of effective models for the description of radioactive decay and alpha and beta radiation emission. Through this study of multiple radioactive decay we find out the solution to a system of coupled differential equations describing a radioactive series of k- terms, by the mathematical induction method. We obtain theoretical values originating from the effective models to calculate the energy amplitude distribution and states transition from unstable nucleus linking directly to experimental data. We also perform a study about the desintegration process emitting beta particules. We obtain the decay constant for alpha particles which can be directly compared to experiment. We carry out a case study analyzing the environmental impact aspects of the region Lagoa Real Uranium District - BA. Since this region constitutes a geological reserve it is rich in ore of radioactive elements like uranium and its radioactive descendants, causing impacts to the environment and to the health of the population due to the natural radioactivity as well as to the one originating from the activities of extraction and processing of uranium.*

**Keywords:** *Radioactivity, Environment, Uranium, Caetité, Quantum Mechanics.*

---

<sup>1</sup>Leader-Teacher: Ronaldo Silva Thibes, Dr. UFRJ

<sup>2</sup>Coorientadora: Simara Santos Campos, Dra. UFS

# Lista de Figuras

1	Série radioativa do decaimento do $^{238}\text{U}$ . A série se inicia com o nuclídeo instável $^{238}\text{U}$ e termina com o elemento estável $^{206}\text{Pb}$ . Na parte de baixo de cada quadro representamos com as letras "a", "m", "d", "h" e "s" a meia-vida correspondente ao elemento em anos, meses, dias, horas e segundos respectivamente.	6
2	Série radioativa do decaimento do $^{232}\text{Th}$ . A série se inicia com o nuclídeo instável $^{232}\text{Th}$ e termina com o elemento estável $^{207}\text{Pb}$ .	6
3	Série radioativa do decaimento do $^{235}\text{U}$ . A série se inicia com o nuclídeo instável $^{235}\text{U}$ e termina com o elemento estável $^{207}\text{Pb}$ .	7
4	Minério de urânio [1].	11
5	Ciclo do combustível nuclear [1].	12
6	Reservas mundiais de urânio. O gráfico mostra que o Brasil se apresenta como a sétima potência mundial em reserva de urânio [2].	13
7	Reservas brasileiras de urânio em tonelagem de $\text{U}^3\text{O}^8$ , [3].	13
8	Reservas geológicas de urânio no Brasil, [4].	14
9	Produto final do beneficiamento de urânio, <i>Yellow Cake</i> , na esteira de secagem, INB - Caetité [1].	15
10	Gráfico curva de decaimento radioativo	20
11	Gráfico que representa a vida média	21
12	Gráfico da solução do sistema radioativo de dois termos	24
13	Gráfico da solução do sistema radioativo de três termos	27
14	Gráfico da distribuição de probabilidade $\ A(E)\ ^2$	34
15	Gráfico representando a perturbação V no intervalo de tempo ( $t = 0$ a $t = T$ )	36
16	Gráfico da função $f(x) = \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$	38

17	Gráfico da relação entre $\log T \times E^{-\frac{1}{2}}$ . . . . .	40
18	Gráfico da relação entre $T \times E$ . . . . .	40
19	Relação entre as grandezas $\log T \times E^{-\frac{1}{2}}$ pela regra de Geiger-Nuttall através de dados empíricos [5]. . . . .	41
20	Barreira de potencial para uma partícula alfa no interior do núcleo. O poço tem largura $R$ e a barreira tem espessura $R' - R$ e altura $E$ . . . . .	42
21	Barreira de potencial na coordenada radial. . . . .	43
22	Barreira de forma arbitrária subdividida em barreiras retangulares . . . . .	47
23	Curva de distribuição de energia $\beta^-$ para RaE - $^{210}\text{Bi}$ [6]. . . . .	51
24	Curva de distribuição de energia $\beta^+$ para $^{64}\text{Cu}$ [7]. . . . .	52
25	Localização da área do levantamento aerogeofísico do projeto São Timóteo, Bahia (gamaespectrometria e magnetometria), na imagem Landsat - 5TM [8]. . . . .	57
26	Jazida da Cachoeira. Bancadas de 5 metros de altura e bermas de 3 metros de largura. Profundidade de 50 metros. (Outubro de 2003)[9]. . . . .	59
27	Vista aérea da unidade de mineração e beneficiamento de urânio URA-Caetité [1].) . . . . .	59
28	Funcionário da INB fazendo a monitoração de água [10]. . . . .	60

# Lista de Tabelas

1	Potencial de Geração de Energia por Origem [2]. . . . .	2
2	Histórico da Produção da INB-Caetité, 2000 - 2011, [11]. . . . .	16
3	Meias-vidas calculadas para dois valores de $r_0$ e sua comparação com valores experimentais [5]. . . . .	49
4	O Fator de Ponderação da Radiação $w_R$ , [12]. . . . .	80
5	Fatores de Ponderação para Órgãos e Tecidos $w_T$ , [13]. . . . .	81
6	Fator de Qualidade ( $Q$ ) em Função da Transferência Linear de Energia não Restrita na Água, $L$ , [14]. . . . .	81

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Radioatividade Natural . . . . .	4
1.2	Impactos Ambientais da Radioatividade . . . . .	8
1.3	Urânio . . . . .	11
1.4	Reservas de Urânio . . . . .	12
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS DA RADIOATIVIDADE</b>	<b>18</b>
2.1	Desintegração Radioativa . . . . .	19
2.2	Decaimentos Múltiplos . . . . .	22
2.3	Distribuição de Amplitude de Energia . . . . .	31
2.4	Transição entre Estados . . . . .	34
2.5	Decaimento Alfa . . . . .	39
2.6	Decaimento Beta . . . . .	50
<b>3</b>	<b>ESTUDO DE CASO: O DISTRITO URANÍFERO DE LAGOA REAL</b>	<b>56</b>
3.1	A Região do Distrito Uranífero de Lagoa Real . . . . .	56
3.2	Radioatividade Presente na Água e Solo da Região . . . . .	61
3.3	Contaminação Ambiental por Urânio em Caetité . . . . .	64
3.4	Avaliação de Impactos Ambientais . . . . .	65
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS</b>	<b>68</b>
	<b>Apêndice A – Decaimentos Múltiplos</b>	<b>70</b>

<b>Apêndice B – Resolução da Equação da Amplitude</b>	<b>73</b>
<b>Apêndice C – Grandezas e suas Unidades na Radioatividade</b>	<b>76</b>
C.1 Grandezas Físicas . . . . .	77
C.1.1 Atividade . . . . .	77
C.1.2 Exposição (X) . . . . .	77
C.1.3 Kerma . . . . .	78
C.2 Grandezas de Proteção . . . . .	78
C.2.1 Dose Absorvida . . . . .	78
C.2.2 Dose Equivalente . . . . .	79
C.2.3 Dose Efetiva . . . . .	80
C.3 Grandezas Operacionais . . . . .	81
C.3.1 Equivalente de Dose Pessoal . . . . .	82
C.3.2 Equivalente de Dose Ambiental . . . . .	82
C.4 Unidades de Energia . . . . .	82
<b>Referências</b>	<b>83</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A radioatividade é um fenômeno essencial para a sociedade contemporânea, no entanto ainda existe muita preocupação - ou desconhecimento - da necessidade do seu uso. O medo da construção de bombas atômicas, e em virtude de acidentes nucleares como o de Chernobyl, 1986, e recentemente Fukushima, 2011, reflete o receio da sociedade ao tema radioatividade.

De fato podemos salientar sua fundamental importância e seus vários ramos de aplicação, tanto na medicina, como na agricultura, indústria, geologia, arqueologia, na restauração de peças de museus e na produção de energia elétrica. Em especial na medicina, sabemos que a radiação mais conhecida é a dos Raios X. Além dessa radiação, é comum o uso de radiofármacos - medicamentos com um ou mais radionuclídeos - que possuem a finalidade diagnóstica, para identificar doenças, ou terapêutica, na cura do câncer.

Com o crescimento populacional e da economia mundial, existe atualmente também grande preocupação em aumentar a demanda por energia. Paralelamente, há um aumento do preço do petróleo e do gás e dos problemas relativos à emissão de gás carbônico como o aquecimento global. Com isso surge a necessidade de se buscar alternativas para uma nova matriz energética. Nesse contexto, o uso da energia nuclear para geração de energia elétrica, que tem como fonte de combustível o urânio, tem assumido um papel importante no panorama mundial uma vez que esse tipo de energia é caracterizado por emitir valores baixos de gás carbônico.

Além disso, 1 kg de urânio natural, equivale a 10 toneladas de petróleo e 20 toneladas de carvão, sendo que, 1 kg de petróleo produz 4 kWh enquanto 1 kg de urânio produz 50.000 kWh de energia elétrica, Tabela 1. Portanto, torna-se propício o uso da energia nuclear para produção de energia elétrica, devido à demanda na natureza do radionuclídeo urânio, encontrado de forma abundante na crosta terrestre, e por existir em reservas em vários países, inclusive no Brasil [2].

Em decorrência das suas aplicações, o tema radioatividade tem sido objeto de pesquisas tanto no campo teórico como experimental. Nesse trabalho, além dos aspectos gerais sobre

**Tabela 1:** Potencial de Geração de Energia por Origem [2].

Origem	Produção Energética
1kg de lenha	1kWh
1kg de carvão	3kWh
1kg de petróleo	4kWh
1kg de urânio	50.000kWh

a radioatividade e a questão ambiental, buscamos o entendimento da sua essência através de modelos efetivos por se tratar da parte mais importante e pouco divulgada.

Para isso, precisamos compreender a base teórica da radioatividade. Assim apresentamos de forma clara, ampla e detalhada no capítulo 2 os Fundamentos da Radioatividade. O referido capítulo possibilita a compreensão da radioatividade como um todo e por isso iniciamos o mesmo com as definições básicas e introdutórias da radioatividade que deram subsídios para, através de modelos efetivos matemáticos, compreender o processo de decaimento das séries radioativas que corresponde ao decaimento múltiplo. Esse estudo possibilitou a resolução de um sistema de equações diferenciais acopladas de primeira ordem representando a solução de uma série radioativa de k-termos .

O entendimento pleno da radioatividade só foi possível com o advento da mecânica quântica, pois pensando classicamente era impossível compreender o modelo atômico e a física nuclear como um todo. Então buscamos o conhecimento das leis básicas da mecânica quântica para obter valores teóricos provenientes de modelos efetivos para calcular a distribuição de amplitude de energia e transição entre estados para núcleos instáveis<sup>1</sup>.

Assim, descrevemos uma fórmula para determinar a constante de decaimento a partir de funções de onda de estados iniciais que se refere ao processo de transição de estado de partículas. Desenvolvemos o estudo do decaimento alfa que é de grande relevância na física moderna por se tratar da transição de barreira de potencial por uma partícula através do mecanismo quântico conhecido por efeito túnel, em que a energia é menor que a do pico da barreira. Ainda com preceitos da mecânica quântica, analisamos o fenômeno de decaimento beta, as propriedades do neutrino e o espectro contínuo de energia decorrente do decaimento beta.

No entanto, por maiores que sejam os benefícios da radioatividade, uma vez compreendidos seus fundamentos inerentemente quânticos, precisamos entender os aspectos ambientais.

<sup>1</sup>Estados instáveis são aqueles que correspondem aos estados de elementos radioativos que ainda irão se desintegrar com o decorrer do tempo, ou seja, a propriedade dos núcleos que irão passar pelo processo de decaimento radioativo ou de desintegração nuclear.

Partimos do pressuposto de que o ser humano sempre esteve exposto às radiações ionizantes<sup>2</sup> provenientes da presença de radionuclídeos naturais na biosfera terrestre, resultante de raios cósmicos, radiação solar e da Via Láctea.

Esses radionuclídeos podem estar presentes em todo o meio ambiente como no solo, na água, em alimentos, no ar que respiramos e até em nosso corpo. Uma das formas mais comuns de exposição do homem ao urânio ocorre através da ingestão de água e de alimentos contaminados. Como o urânio é um constituinte natural do solo, ocorrem processos naturais de mobilização do radionuclídeo para as águas de superfícies e subterrâneas, em decorrência da lixiviação<sup>3</sup> natural da rocha matriz. Entretanto, o aumento da radioatividade pode estar diretamente vinculado com atividades realizadas pelo homem que podem alterar a radioatividade de fundo aumentando assim a exposição aos radionuclídeos naturais.

Constatamos que no cenário mundial, o Brasil se apresenta como a sétima potência em reservas de urânio. A única reserva explorada na América Latina encontra-se no sudoeste da Bahia e chama-se de Distrito Uranífero de Lagoa Real. Então utilizamos como exemplo para o nosso trabalho a região do Distrito Uranífero de Lagoa Real, onde desenvolvemos um estudo de caso sobre os impactos ambientais e concentração do urânio e seus descendentes radioativos.

Essa reserva, Distrito Uranífero de Lagoa Real, foi descoberta a partir de uma série de levantamentos aerogeofísicos na década de 70, mas o início das atividades de mineração e de beneficiamento<sup>4</sup> na Unidade de Concentrado de Urânio (INB<sup>5</sup>- Caetité) somente se deu a partir de 2000. A demanda de produção anual dessa unidade é de 400 toneladas de lavra<sup>6</sup> [1].

O concentrado de urânio que é produzido na INB-Caetité é utilizado como combustível para as usinas nucleares brasileiras Angra 1 e Angra 2. Com a construção de uma nova usina, Angra 3, torna-se necessário aumentar a produção. Com isso as Indústrias Nucleares do Brasil pretendem iniciar a exploração da lavra subterrânea da mina de Caetité com a meta de dobrar a sua produção. Além da exploração da mina de Caetité, a maior reserva de urânio do Brasil, Itataia, localizada em Santa Quitéria no Ceará, deverá entrar em operação nos próximos anos, com a finalidade de suprir as necessidades das usinas do Brasil e a demanda internacional [1].

Há muitas especulações a respeito da extração e beneficiamento do urânio na Bahia e por isso tem aumentado o número de pesquisas voltadas para avaliar os impactos ambientais e se es-

---

<sup>2</sup>As radiações ionizantes ocorrem quando a energia da radiação incidente sobre um material é suficiente para arrancar elétrons de seus átomos.

<sup>3</sup>Lixiviação é o processo de extração ou solubilização dos constituintes químicos da rocha com ácido.

<sup>4</sup>Beneficiamento é o processo de purificação do concentrado numa torta de cor amarela, chamada yellowcake.

<sup>5</sup>INB - Indústrias Nucleares do Brasil.

<sup>6</sup>Lavra é a atividade extrativista de exploração e beneficiamento de minério de concentrado de urânio.

ses podem estar vinculados à atividade de mineração de urânio. Inclusive, é importante salientar que organizações não governamentais manifestam preocupações a respeito. Podemos citar por exemplo, o trabalho realizado pelo Greenpeace, no Relatório Ciclo do Perigo [15], que diz ser a atividade de mineração de Caetité poluente e perigosa. Outros trabalhos apontam que o problema da contaminação por urânio e seus descendentes radioativos está relacionado à questão da radioatividade natural justificando que a população local está exposta a essa radioatividade por se tratar de uma região com alta concentração de elementos radioativos naturais.

Contudo, ao falarmos em radiação, surge toda uma preocupação relativa aos possíveis impactos ambientais, quer sejam localizados (acidentes ambientais de curto prazo, alta intensidade e largo alcance), quer sejam tópicos, (constantes e a longo prazo como em caso de regiões que possuem alta concentração natural de radionuclídeos). Para respondermos tais perguntas de maneira séria e isenta, torna-se necessário um conhecimento da radioatividade como um todo.

Para tanto faremos uma breve exposição das principais características da radioatividade de um ponto de vista ambiental. Quer natural ou provocado por ação humana, os impactos ambientais precisam ser estudados e controlados. Nesse sentido, efetuamos um levantamento bibliográfico sobre a radioatividade natural, impactos ambientais e reservas de urânio.

## 1.1 Radioatividade Natural

A radioatividade é um fenômeno natural ou artificial em que certos elementos químicos possuem a propriedade de emitir energia sobre a forma de radiação. Historicamente, a radioatividade foi descoberta pelo Francês Henri Antoine Becquerel em 1896, juntamente com o casal Pierre e Marie Curie [16]. Eles observaram materiais compostos de urânio e perceberam que esses materiais emitiam energia que impressionava placas fotográficas mesmo quando estavam encobertas por papel preto [17]. Essa energia recebeu o nome de radiação ativa, mais tarde recebeu o nome de Raios de Becquerel e, em 1898, passou a ser chamada por Marie Curie de Radioatividade.

Entretanto, essa radioatividade sempre existiu no planeta Terra e se manifesta nos elementos radioativos que se encontram na natureza. Esses elementos estão presentes na crosta terrestre que é formada de materiais radioativos naturais que são os radionuclídeos primordiais e cosmogênicos constituindo a radiação de fundo. Existe uma variação mundial nos níveis de radiação de fundo de acordo com a geologia e altitude, e a média anual mundial da exposição à radiação natural é de  $(2,4mSv^7/a)$  segundo dados da United Nations Scientific Committee on the Effects

---

<sup>7</sup>O milisievert por ano, assim como outras unidades de radioatividade, é detalhado no Apêndice C. Página 80.

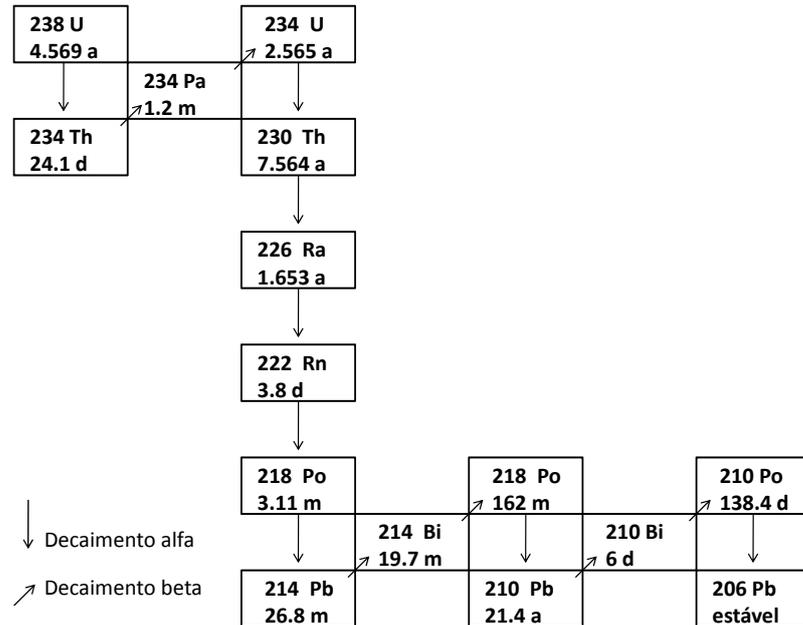
of Atomic Radiation (UNSCEAR) [18].

Além disso, esses elementos são encontrados nas construções, no ar, nos alimentos e até em nosso próprio corpo. Evoluímos expostos à radiação natural, chamada de radiação cósmica e estamos também expostos a radiações artificiais como os raios X, explosões nucleares e rejeitos nucleares.

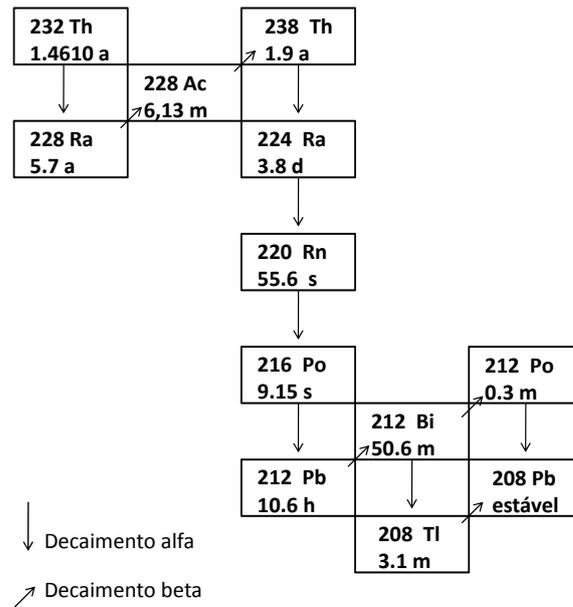
Tanto o meio ambiente como os seres humanos estão normalmente expostos a radiações ionizantes, através da radiação natural resultante de raios cósmicos ou radiação galáctica, do Sol e da Via Láctea. Os radionuclídeos são produzidos pela interação da radiação cósmica com a atmosfera, solo e água e radionuclídeos primordiais. Essa radioatividade natural é constituída principalmente de prótons de alta energia (cerca de 85%), partículas alfa (cerca de 14%) e núcleos atômicos mais pesados (cerca de 1%) [19].

Na natureza existem cerca de 340 tipos diferentes de núclídeos, sendo que cerca de 70 tipos são encontrados em elementos pesados e são radioativos [20]. Destes, o potássio  $^{40}K$ , o urânio  $^{238}U$  e o tório  $^{232}Th$  são os elementos radioativos encontrados em maior abundância na natureza e possuem concentrações variando de acordo com a região e diferentes tipos de rocha e solo.

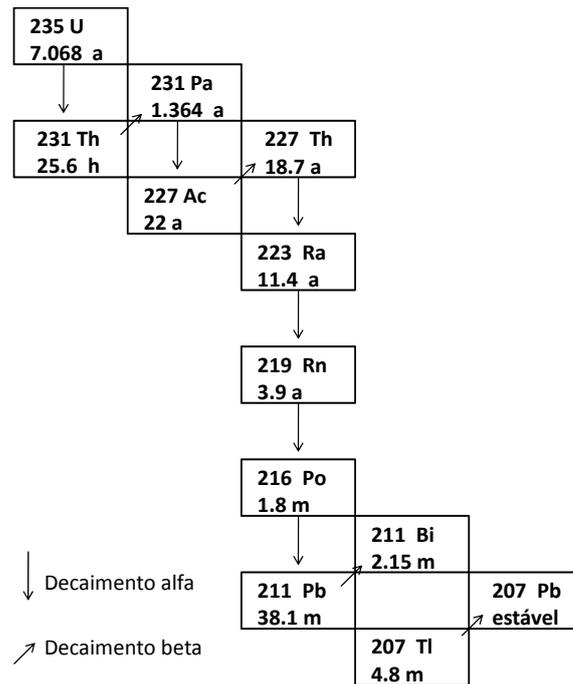
Os núclídeos radioativos que ocorrem na natureza formam três séries radioativas, como podemos ver nas Figuras 1, 2 e 3 que representam a série do decaimento do  $^{238}U$ , série do decaimento do  $^{232}Th$  e a série do decaimento do  $^{235}U$ , respectivamente. Esses radionuclídeos pertencem ao grupo de radionuclídeos naturais relacionados com o processo de síntese durante a criação do sistema solar, possuindo meia vida da ordem da idade da Terra [16]. Também fazem parte desse grupo os radionuclídeos que decaem diretamente em um núclídeo estável como  $^{40}K$ ,  $^{87}Rb$ ,  $^{124}Sn$ ,  $^{50}V$  e outros menos abundantes [21].



**Figura 1:** Série radioativa do decaimento do  $^{238}\text{U}$ . A série se inicia com o nuclídeo instável  $^{238}\text{U}$  e termina com o elemento estável  $^{206}\text{Pb}$ . Na parte de baixo de cada quadro representamos com as letras "a", "m", "d", "h" e "s" a meia-vida correspondente ao elemento em anos, meses, dias, horas e segundos respectivamente.



**Figura 2:** Série radioativa do decaimento do  $^{232}\text{Th}$ . A série se inicia com o nuclídeo instável  $^{232}\text{Th}$  e termina com o elemento estável  $^{208}\text{Pb}$ .



**Figura 3:** Série radioativa do decaimento do  $^{235}\text{U}$ . A série se inicia com o nuclídeo instável  $^{235}\text{U}$  e termina com o elemento estável  $^{207}\text{Pb}$ .

Além da exposição natural, estamos expostos às radiações produzidas pelas fontes artificiais criadas pelo homem através de procedimentos médicos, industriais, armas nucleares e usinas nucleares que introduzem elementos radioativos artificiais na biosfera. A radioatividade natural é responsável por 70% da dose total recebida podendo causar riscos à saúde decorrentes dessa radiação [22].

Algumas atividades realizadas pelo homem são responsáveis pela modificação da radioatividade natural no ambiente aumentando a radiação natural. Destacando-se a atividade de mineração, o beneficiamento, o enriquecimento isotópico, dentre outros, ocasionando impactos ambientais pela manipulação da matéria-prima, produtos e geração de resíduos sólidos contendo radioatividade [23].

Assim, o processo de operação e desmonte das rochas, britagem e rebritagem do minério na atividade de mineração do urânio gera partículas no ar além do gás radônio. Essas partículas se depositam na cobertura vegetal juntamente com os resíduos decorrentes dos processos químicos e mineralógicos e, como o urânio é resistente à degradação química, provoca impacto ambiental pela acumulação desse material no solo e na água [15].

Sabemos que qualquer atividade de mineração produz impactos ambientais e no caso da mineração de urânio a preocupação maior está relacionada com a radiação, uma vez que ela

pode causar risco à saúde da população e ao meio ambiente. Isso ocorre porque se o urânio e seus descendentes radioativos forem liberados e existir contaminação acima de valores aceitáveis, pode chegar aos seres vivos através da inalação, absorção da pele ou mucosa, através da água contaminada ou de toda cadeia alimentar [24].

Como exemplo podemos citar o caso de trabalhadores que lidam diretamente com as operações de mineração e de moagem ou no enriquecimento de urânio e o processamento das atividades. Eles têm maior risco de exposição ao urânio e seus elementos radioativos pois, durante as etapas de mineração do urânio, os trabalhadores estão em risco de exposição dérmica ao pó de urânio e ao gás radônio [24].

Similarmente, comunidades localizadas perto de zonas de mineração de urânio podem também estar em risco de exposição ao aumento das doses de radiação. Isso pode ocorrer devido à atividade de mineração, trituração de resíduos, transporte de materiais radioativos, pó radioativo, gás radônio, água contaminada e fontes de alimento, tendo assim grande risco de contaminação por radionuclídeos [25].

Percebe-se que estamos expostos à radioatividade natural e que atividades realizadas pela ação do homem podem aumentar a radiação de fundo, elevando o risco à exposição aos radionuclídeos naturais. Sendo que, moradores e trabalhadores de regiões com alta concentração de radionuclídeos tem maior risco de contaminação.

## **1.2 Impactos Ambientais da Radioatividade**

O aumento da radioatividade natural, seja de forma natural ou por ação humana, pode gerar impactos ao meio ambiente e à população em geral. A radiação pode contaminar o solo e as plantas, o vazamento de radiação contamina o mar e os seres que nele vivem, elementos radioativos contaminam a atmosfera sob a forma de poeira radioativa dos radionuclídeos e o transporte de urânio e de alguns dos seus descendentes radioativos podem contaminar as águas subterrâneas e de superfície.

A mobilização do urânio em águas superficiais e subterrâneas varia muito de acordo com as condições aquíferas da região e caracteriza-se por processos intempéricos, dissoluções químicas e processos físicos de transporte [26]. Além disso, outros fatores estão relacionados com a distribuição do urânio nas águas naturais como o teor de urânio na rocha matriz, tempo de residência do urânio no ambiente, variação climática, variação sazonal, pH, estado de oxidação e a presença de matéria orgânica [21].

O transporte de urânio como íons uranila<sup>8</sup> ( $UO_2^{2+}$ ) ocorre sob a forma de vários complexos solúveis com os ânions comumente dissolvidos tanto em águas superficiais como subterrâneas oxidantes. Os principais complexos de uranila são formados com o fosfato<sup>9</sup> e, em condições alcalinas, são formados com o carbonato<sup>10</sup>. Os teores de urânio nas águas subterrâneas dependem da rocha formadora do solo ou da proximidade a jazidas de urânio [19].

Concentrações de urânio de ocorrência natural nas águas subterrâneas são geralmente baixas e inferiores a 1 mg/L, podendo variar a níveis muito mais elevados. A lixiviação das águas subterrâneas e as condições físico-químicas são fatores que contribuem para a migração do urânio a partir de depósitos para a biosfera [27]. Outro fator que pode contribuir para que haja contaminação das águas de superfície e águas subterrâneas é a atividade de mineração.

No Brasil, a portaria de nº 2914, do Ministério da Saúde (MS), apresenta como limite para o teor de radiações alfa (radioatividade alfa total) 0,5 Bq/L e para a atividade beta total o limite é de 1 Bq/L. O anexo IX dessa portaria, na Tabela de padrão de radioatividade da água para consumo humano, apresenta que o rádio 226, produto do decaimento da série do  $^{238}U$ , tem como limite de 1 Bq/L, e o rádio 228 é de 0,1 Bq/L [28].

Em 1989, Gascoyne afirmou que águas subterrâneas possuem concentrações de Ra variando numa faixa de 0,01 a 38 Bq/L, dependendo de fatores tais como o tipo de rocha do aquífero e características físico-químicas da água [29]. Dependendo da fase sólida por onde a água percorre, se essa apresentar maior teor de urânio e tório consequentemente terá também uma maior concentração desses isótopos.

Ressaltamos que a concentração de urânio em locais com ocorrências uranífera é provavelmente superior a locais onde não há ocorrência de reservas minerais de urânio. Na zona rural, geralmente a água utilizada para ingestão e consumo advém de águas subterrâneas.

É importante salientar que tanto a água como o solo podem conter elementos radioativos. Sendo assim, a ingestão de água e de alimentos cultivados no solo, com elevada quantidade de urânio, introduz elevada quantidade de urânio à dieta da população, podendo causar riscos à saúde.

Com a ingestão de água e alimentos contaminados com o urânio é possível detectá-lo de imediato na corrente sanguínea associadas principalmente com as células vermelhas. No corpo os níveis mais altos do urânio acumulam-se nos rins, no fígado e nos ossos, entretanto a maior

<sup>8</sup>O Íon Uranila é um íon positivo que forma sais ácidos, sendo comum encontrá-lo na química aquosa do urânio.

<sup>9</sup>Expressão química dos fosfatos de uranila: Autunita  $(Ca[(UO_2)(PO_4)]_2) \cdot 8 - 12(H_2O)$  e Meta - autunita  $(Ca[(UO_2)(PO_4)]_2) \cdot 6 - 8(H_2O)$ .

<sup>10</sup>Expressão química dos carbonatos de uranila: Liebigita  $Ca_2[UO_2(CO_3)]_3 \cdot 1(H_2O)$ , Bayleyita  $Mg_2[UO_2(CO_3)]_3 \cdot 18(H_2O)$ , Cejkaita  $Na_2[UO_2(CO_3)]_3$  e Zellerita  $Ca[UO_2(CO_3)]_2 \cdot 2(H_2O)$ .

parte do urânio ingerido não é absorvida pelo corpo sendo excretada pela urina e pelas fezes.

Dependendo da exposição às radiações, essas podem atravessar o tecido biológico provocando lesões no material genético da célula, causando reprodução celular descontrolada levando ao desenvolvimento de neoplasias. Essas alterações ocorrem no material genético das células reprodutivas e podem causar doenças hereditárias aos seus descendentes.

O organismo humano contém em média 90  $\mu\text{g}$  de urânio incorporados através do consumo normal de água e alimento e também pelo ar inalado. Aproximadamente 66% se encontram no esqueleto, 16% no fígado, 8% em rins e 10% em outros tecidos. Na excreção urinária ou nas fezes elimina-se mais de 95% do urânio que entra no corpo [30].

Para se fazer a medida de parâmetros biológicos que ocorrem através da exposição do homem aos elementos radioativos, são utilizados biomarcadores de exposição que compreendem toda substância ou seu produto de biotransformação e tem por finalidade avaliar a intensidade da exposição e o risco à saúde. Os biomarcadores de exposição são de grande importância na detecção de indivíduos expostos e também no acompanhamento da exposição, sendo amplamente utilizados por pesquisadores que fazem seu uso devido a aplicabilidade em várias áreas de conhecimento. Com o seu uso pode-se determinar qualquer alteração bioquímica precoce nos fluidos biológicos, tecidos ou ar exalado. Para a avaliação da exposição a metais são analisadas amostras de urina, sangue, cabelo e saliva [31].

Entretanto, em 2007, Prado et. al. afirmam que essa forma de monitoramento verifica exposições recentes e não possibilita conclusões quanto ao que foi efetivamente incorporado [32]. Para que ocorra o monitoramento da exposição, refletindo a dose absorvida desde o desenvolvimento neurológico e das doses incorporadas gradualmente através de fontes constantes, pesquisadores utilizam ossos humanos como bioindicadores, tendo em vista que o esqueleto é o principal sítio de urânio e que o íon uranila substitui o cálcio no complexo de cristais de hidroxiapatita<sup>11</sup> do osso.

A acumulação dos radionuclídeos começa durante o desenvolvimento fetal e continua até os 60 anos. Em condições patológicas e estados fisiológicos como envelhecimento, gravidez, amamentação e doenças como a osteoporose, o mecanismo responsável pela liberação de cálcio para a corrente sanguínea mobiliza também os metais não essenciais, podendo assim, causar efeitos em outros tecidos e até mesmo na formação do feto. Com isso, o estudo do osso como biomarcador possibilita acessar informações que o metal incorporado ao tecido ósseo do indivíduo a médio e longo prazo [33].

---

<sup>11</sup> A hidroxiapatita é um componente natural dos ossos e possui de 30% a 70% de massa dos ossos e dos dentes, sendo formada por fosfato de cálcio cristalino,  $\text{Ca}_1\text{O}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$ .

### 1.3 Urânio

O urânio é a fonte de combustível para a energia nuclear e foi descoberto pelo químico Martin Klaproth, em 1789, na Alemanha, reconhecido como elemento do mineral uraninita ( $UO_2$ ) e sua variedade não cristalina *pitchblenda* que é o principal constituinte do minério de urânio. Foi isolado do mineral, em 1841, pelo Francês Eugene Melchior Peligot e somente em 1896 foram descobertas as suas propriedades radioativas pelo Francês A. Henri Becquerel [16].

É um elemento químico da série dos actínídeos com número atômico 92, sendo um metal branco-níquel, pouco menos duro que o aço, diferenciando-se dos outros minerais devido à propriedade física de emitir partículas radioativas. O urânio natural é uma mistura de três isótopos emissores contendo 99,2742% de  $^{238}U$ , 0,7204% de  $^{235}U$  e 0,0054% de  $^{234}U$ , com meias-vidas  $4,468 \times 10^9$ ,  $7,038 \times 10^8$  e  $2,455 \times 10^5$  anos respectivamente, sendo que somente o Urânio 235 é físsil<sup>12</sup>.

O urânio ocorre como constituinte natural no solo, oriundo de rochas do manto da Terra, encontrado de forma abundante na crosta terrestre e em quantidades traços em todos os tipos de rochas [20]. É um material radioativo muito reativo e encontrado como óxido, que é um composto químico formado de oxigênio e de urânio, em minerais [1]. Chama-se de minério de urânio, Figura (4), a toda concentração natural de mineral ou minerais na qual o urânio ocorre em proporções e condições tais que permitam sua exploração econômica [1].



**Figura 4:** Minério de urânio [1].

O material radioativo do urânio é utilizado na agricultura e medicina, tendo como principal aplicação comercial a geração de energia elétrica. Para que isso ocorra, o urânio passa por várias etapas no chamado Ciclo do Combustível Nuclear, Figura 5, iniciando com o processo

---

<sup>12</sup>Um elemento radioativo é dito físsil quando se divide espontaneamente em duas partes aproximadamente iguais, acompanhada da liberação de uma grande quantidade de energia e 2 ou 3 nêutrons.

de mineração até chegar ao reator. Do combustível que sai do reator recupera-se o urânio e plutônio físséis nele presentes e o restante é armazenado como rejeito radioativo [1].



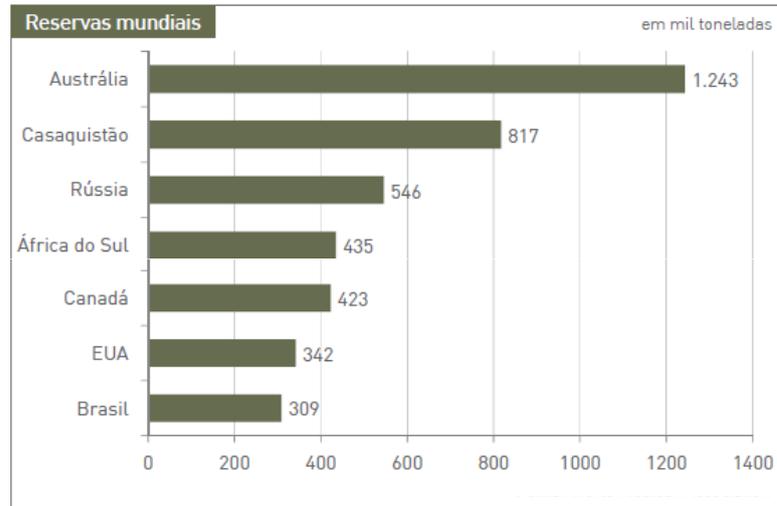
**Figura 5:** Ciclo do combustível nuclear [1].

A comercialização do urânio se dá sob a forma de diuranato de amônio, conhecido como *yellow cake* (espécie de sal amarelo, o  $U_3O_8$ ) que é a matéria prima para a produção da energia gerada em um reator nuclear e do gás hexafluoreto de urânio  $UF_6$  e  $^{235}U$  sob a forma de barras. Por se tratar de material radioativo, seu comércio é controlado pelos governos nacionais e pela Agência Internacional de Energia Atômica (IAEA).

## 1.4 Reservas de Urânio

Como vimos anteriormente, o urânio é encontrado de forma abundante na crosta terrestre, existindo ocorrências uraníferas - as reservas de urânio - em diversos lugares do mundo. Em 2009, essas reservas mundiais do minério de urânio, totalizavam 5,4 milhões de toneladas distribuídas em 14 países, sendo que, a Austrália, Casaquistão e Canadá juntos, respondiam por mais de 50% da produção do concentrado de urânio [34].

Nesse cenário, o Brasil é a sétima maior potência mundial em urânio, conforme gráfico representado na Figura 6, tendo apenas 30% do seu território prospectado [25]. E mesmo com essa condição, o atual presidente da INB (Indústrias Nucleares do Brasil), Aquilino Senra Martinez, afirma que o país tem a possibilidade de chegar à primeira posição desse ranking nos próximos anos considerando as reservas que não foram exploradas [35].



**Figura 6:** Reservas mundiais de urânio. O gráfico mostra que o Brasil se apresenta como a sétima potência mundial em reserva de urânio [2].

Da área prospectada há cerca de 309.000 toneladas de urânio nos estados da Bahia, Ceará, Paraná e Minas Gerais. Além disso, existem ocorrências uraníferas associadas a outros minerais, encontrados nos depósitos de Pitinga no Estado do Amazonas, e também áreas extremamente promissoras como a de Carajás, no Pará, conforme mostra tabela sobre reservas brasileiras de urânio apresentada na Figura 7.

Depósitos	Toneladas de $U_3O_8$		
	Medidas/ Indicadas	Inferidas	Total
Caetité / Lagoa Real	94.000	6.700	100.770
Santa Quitéria	91.200	51.300	142.500
Outras	36.500	26.600	66.100
<b>Total</b>	<b>224.700</b>	<b>84.670</b>	<b>309.370</b>
PROGNOSTICADA: PITINGA (AM): 150.000			
RIO CRISTALINO (PA): 150.000			
ESPECULATIVA: 500.000			

**Figura 7:** Reservas brasileiras de urânio em tonelagem de  $U^3O^8$ , [3].

Na Figura 8, estão representadas as reservas nacionais de urânio, as unidades de extração e de beneficiamento e produção de elementos combustíveis, bem como o local das usinas termo-nucleares de Angra dos Reis.



**Figura 8:** Reservas geológicas de urânio no Brasil, [4].

Levando-se em conta o potencial uranífero do Brasil, o governo brasileiro tem investido de forma acelerada na geração de energia nuclear, retomando o seu programa nuclear para atender a demanda de energia elétrica entre os anos de 2005 - 2030. Segundo a INB, será necessário investimento, até o ano de 2020 de R\$ 2,42 bilhões, sendo que 64% (R\$ 1,55 bilhões) deverão ser disponibilizados para a fase do enriquecimento do material, ou seja, a separação dos átomos de maior potencial energético ( $^{235}\text{U}$ ) dos átomos comuns da substância ( $^{238}\text{U}$ ) por meio de centrífugas [1].

No Brasil existem duas usinas nucleares em Angra dos Reis-RJ, a Central Nuclear Almirante Álvaro Alberto (Angra 1 e Angra 2), e uma terceira em construção, Angra 3, também no estado do Rio de Janeiro. Segundo o atual presidente da Eletronuclear, Othon Luiz Pinheiro, a usina nuclear Angra 3 entrará em operação em maio de 2018 [36].

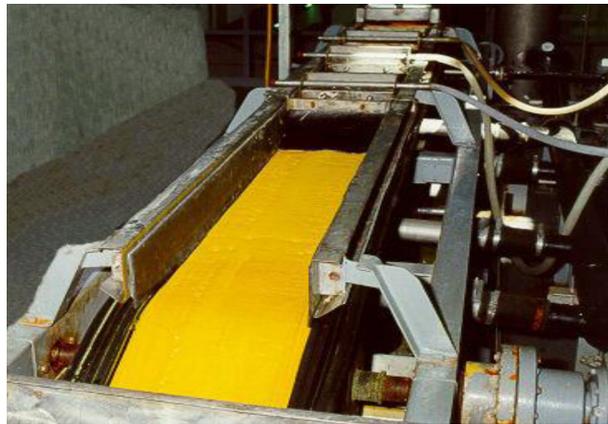
A atividade de mineração do urânio no Brasil teve início em 1980. Nesse período, foi instalado na região de Poços de Caldas em Caldas - MG o Complexo Mínero-Industrial (Mina Osamu Utsumi), tendo funcionado até o ano de 1994 sendo responsável pela produção do *yellow cake* que constitui a matéria prima para o combustível nuclear então utilizado em Angra 1.

Após a desativação da mina de urânio em Poços de Caldas, entrou em funcionamento, no ano de 2000, a única jazida em operação na América Latina, localizada no Distrito Uranífero de Lagoa Real. Nessa região existe a mina de extração e a Unidade de Concentrado de Urânio

(INB-Caetité) sendo realizado o beneficiamento do minério no Município de Caetité.

De acordo com a INB, 2013, são extraídas 400 toneladas por ano de minério na mina de Caetité-BA. Na mina são feitas as etapas de moagem do minério de urânio e em seguida o material é britado [1]. Então é feita a lixiviação para a separação do urânio do minério e obtenção da solução "licor de urânio" e, por fim, a purificação é realizada na Usina de Beneficiamento de Urânio na cidade de Caetité-BA [1].

O produto final desse beneficiamento é o *yellow cake*, Figura 9, que contém aproximadamente 70% do urânio do minério. Após esse beneficiamento, o *yellow cake*, sofre a sua conversão em gás e enriquecimento isotópico no exterior, só então retorna ao Brasil para ser utilizado como combustível nas usinas de Angra dos Reis, [11].



**Figura 9:** Produto final do beneficiamento de urânio, *Yellow Cake*, na esteira de secagem, INB - Caetité [1].

Devido à grande procura internacional pelo urânio e à possível construção de outras usinas nucleares no Brasil, a INB planeja dobrar a capacidade de produção de urânio da Bahia até 2017. Ao mesmo tempo, a estatal tem perspectivas de que ocorra o licenciamento para entrar em operação em 2016 a maior reserva de urânio do Brasil localizada na cidade de Santa Quitéria - CE, [1].

Essa reserva é conhecida como jazida de Itataia, localiza-se na parte central do Estado do Ceará, a cerca de 45 km a sudeste da cidade de Santa Quitéria. É uma jazida com predominância de fosfato, sendo a maior reserva de urânio que o país possui. Sua viabilidade econômica depende da exploração do fosfato associado, ou seja, a extração de urânio está condicionada à produção de ácido fosfórico<sup>13</sup> (insumo utilizado na produção de fertilizantes).

<sup>13</sup>O ácido fosfórico produzido por via úmida, através do ataque de ácido sulfúrico ao concentrado fosfático-uranífero tem 28% de  $P_2O_5$  e 2000 ppm de  $U_3O_8$ . A extração do urânio ocorre por separação do ácido fosfórico sendo feita por solventes. A precipitação do urânio se dá sob a forma de *yellow cake*. Neste processo é recuperado o flúor sob a forma de ácido fluossilícico.

O mineral fosfato não faz parte do monopólio da União, então a INB fez uma parceria com a empresa Galvani<sup>14</sup> que irá explorar o fosfato e repassará o urânio para a INB. As empresas pretendem produzir cerca de 180 mil toneladas de fosfato e 1,2 mil toneladas de urânio por ano. A capacidade produtiva plena é de 240 mil toneladas de fosfato e 1,5 mil toneladas de concentrado de urânio por ano [37].

As jazidas brasileiras do Distrito Uranífero de Lagoa Real-BA e Itataia-CE possuem grande tonelagem de reservas geológicas e são consideradas como empreendimento minério-industrial devido à possibilidade de recuperação a um custo abaixo do mercado. A Unidade de Concentrado de Urânio (INB-Caetité) produziu de 2000 a 2011, 3.024.994 kg de  $U^3O_8$  conforme, Tabela 2.

**Tabela 2:** Histórico da Produção da INB-Caetité, 2000 - 2011, [11].

Ano	Produção de $U_3O_8$ acumulada (Kg)
2000	13.389
2001	65.641
2002	328.937
2003	270.684
2004	352.054
2005	129.079
2006	230.588
2007	352.861
2008	389.631
2009	406.079
2010	174.269
2011	311.789
Total	3.024.994

Em 25 de março de 2013, foi publicado no Diário Oficial da União, a aprovação pela Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) para a mineração subterrânea na única mina de urânio em atividade no Brasil, a unidade de Caetité, tendo produzido 3.370 toneladas do minério a céu aberto. A INB aguarda a licença da CNEN para iniciar os trabalhos de construção de poços e túneis com a finalidade de ter acesso à lavra subterrânea que tem a perspectiva de produzir 400 toneladas por ano de concentrado de urânio [38].

Dessa forma constatamos que a radioatividade está presente na biosfera e que existem reservas de radionuclídeos em todo o mundo. Além disso, percebemos a importância do conhecimento dos impactos ambientais provenientes da radiação natural como incorporação de

<sup>14</sup>Galvani é o único grupo de capital nacional totalmente verticalizado na produção de fertilizantes fosfatados. Possui unidades distribuídas pelos Estados de São Paulo, Minas Gerais, Bahia, Mato Grosso, Sergipe e Ceará e atua em quatro das áreas mais importantes da economia brasileira: mineração, indústria, comércio e serviços.

radioanuclídeos em regiões com alta concentração do urânio e seus descendentes radioativos, ou decorrentes de acidentes nucleares, como também através das atividades que fazem parte do ciclo do combustível nuclear.

Diante de toda a problemática ambiental da radioatividade aqui discutida, no capítulo 2 a seguir, descreveremos o embasamento teórico para o entendimento da radioatividade, procurando entender a sua essência através de modelos efetivos físico-matemáticos baseando-nos nos preceitos da mecânica quântica. No capítulo 3, efetuamos um estudo de caso, usando como exemplo a região do Distrito Uranífero de Lagoa Real, onde existe atualmente a atividade de mineração e beneficiamento do urânio proporcionando uma visão geral sobre o tema aplicando os conceitos desenvolvido no capítulo anterior.

## 2 FUNDAMENTOS DA RADIOATIVIDADE

O presente capítulo constitui um estudo da radioatividade a partir de modelos físico-matemáticos consistindo na parte fundamental para o entendimento da física nuclear por se tratar de uma abordagem ampla da teoria. Desenvolveremos os modelos físico-matemáticos, fazendo uso da Mecânica Quântica [5, 39, 40, 41]. Esses modelos serão apresentados de forma clara com o objetivo de compreender transição entre estados instáveis, ou seja dos estados que irão decair com a evolução de tempo.

A Mecânica Quântica nasceu em 1901, quando Max Planck apresentou o famoso artigo intitulado "Sobre a teoria da Lei de Distribuição de Energia do Espectro Normal"[42], iniciando uma revolução nas ideias da física. A física quântica teve início com a constante de Planck  $h$ , uma constante universal e de significado fundamental [43]. A Mecânica Quântica, em contraposição à Mecânica Clássica é uma teoria inerentemente probabilística tendo surgido diante da necessidade de se explicar fenômenos macroscópicos na escala atômica e sub-atômica.

A teoria de Schrödinger da mecânica quântica, aborda o comportamento de partículas de qualquer sistema microscópico. Cada sistema tem uma equação específica que controla o comportamento da função de onda descrevendo as partículas. A equação de Schrödinger é dada por  $H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$  e nos dá a forma da função de onda  $\Psi(x, t)$ , que determina o estado físico do sistema. As funções  $\Psi$  são consideradas vetores em um espaço vetorial de Hilbert descrevendo os estados quânticos do sistema físico.

O fenômeno da radioatividade se origina no núcleo atômico e consiste na emissão de partículas carregadas e de ondas eletromagnéticas em decorrência da desintegração do núcleo. Para compreendê-lo, inicialmente descreveremos o processo de desintegração radioativa e definiremos de forma empírica a constante de decaimento  $\lambda$ , que nos dará subsídios para desenvolvermos um sistema de equações diferenciais acopladas representando uma série radioativa de  $k$  termos, que corresponde ao decaimento múltiplo.

Todo esse conhecimento irá proporcionar o entendimento da transição entre estados, conhecida como regra de ouro, que permite o cálculo da constante de decaimento a partir de funções de onda dos estados inicial e final. Por fim, serão descritos, também com base em mecânica quântica, os processos de desintegração com emissão de partículas alfa e beta.

Nas duas próximas seções, consideraremos um modelo empírico para descrição do fenômeno de decaimento radioativo. Utilizaremos mecânica quântica propriamente dita somente a partir de seção 2.3.

## 2.1 Desintegração Radioativa

O processo de emissão de partículas alfa, beta e gama e de ondas eletromagnéticas é chamado no fenômeno da radioatividade de *desintegração radioativa* ou *decaimento radioativo*, que é um processo probabilístico onde a constante de desintegração é representada por  $\lambda$ . Esse processo de desintegração radioativa ocorre através da emissão de partículas alfa, partículas beta ou raios gama.

Os materiais radioativos se desintegram a uma taxa de variação proporcional à quantidade presente no material, ou seja, o número de átomos que se decompõem por unidade de tempo numa massa de átomos diretamente instáveis é proporcional ao número total dos átomos existentes. Empiricamente, constata-se que a taxa de variação é proporcional ao número de átomos representada pela equação

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (2.1)$$

onde  $N$  representa o número de átomos em função do tempo,  $\lambda$  é a constante de desintegração e o sinal negativo representa que  $N$  decai com o tempo.

A taxa com a qual qualquer substância da amostra se desintegra em relação ao tempo é chamada de atividade da amostra ( $A$ ) representada pela equação

$$A(t) = \left| -\frac{dN}{dt} \right| = \lambda N, \quad (2.2)$$

onde usamos o módulo para indicar a positividade da atividade.

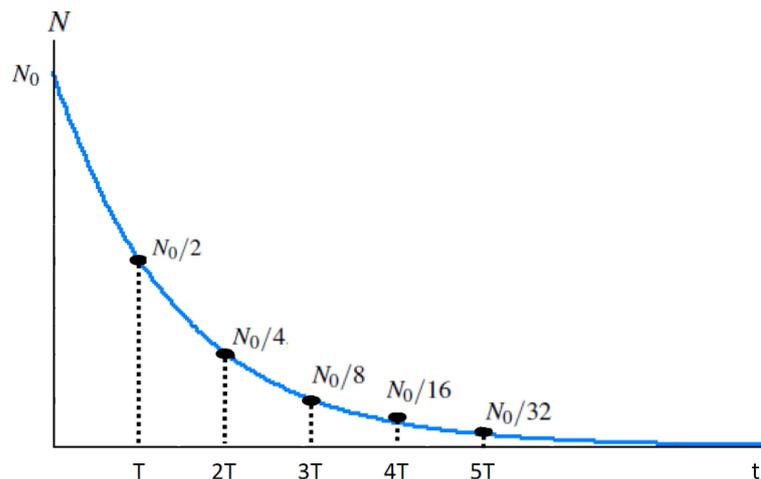
Ao resolvermos a equação diferencial (2.1) obtemos o número de átomos que ainda não se desintegraram no instante  $t$  de uma substância radioativa dado pela equação

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (2.3)$$

sendo  $N_0$  é o número de átomos inicialmente presentes, em  $t = 0$ .

É importante salientar que, no processo de decaimento radioativo, os núcleos de qualquer amostra se desintegram gradualmente, ao longo de intervalos de tempo muito variados que dependem da substância radioativa. Dessa forma torna-se impossível prever qual núcleo irá decompor-se no próximo instante de tempo, pois todos têm a mesma probabilidade de decair levando-se em conta que o decaimento radioativo é um processo estatístico ou aleatório com base em leis quânticas.

A Figura 10 representa o decrescimento exponencial em relação ao tempo relacionado ao processo de decaimento radioativo. Para cada nuclídeo radioativo há um intervalo de tempo fixo  $T$  denominado de meia-vida que é o tempo necessário para que metade dos átomos de uma substância se desintegre. Se o número inicial de núcleos for  $N_0$ , no final do tempo  $T$  haverá apenas  $N(T) = \frac{N_0}{2}$  núcleos; decorridas duas meias-vidas  $2T$  os núcleos originais reduzem-se a  $\frac{N_0}{4} = \frac{N_0}{2^2}$ ; após três meias vidas, eles serão  $\frac{N_0}{8} = \frac{N_0}{2^3}$  e assim sucessivamente.



**Figura 10:** Gráfico curva de decaimento radioativo

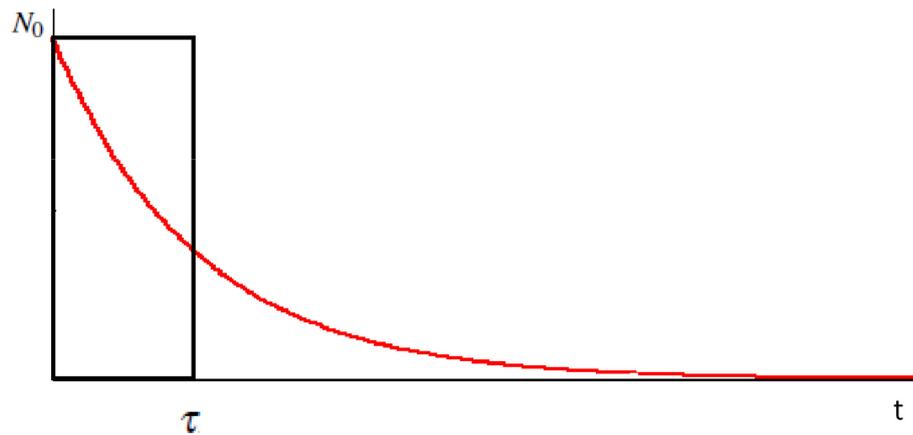
Como  $N(T) = \frac{N_0}{2}$  e  $N(T) = N_0 e^{-\lambda T}$ , então para encontrar a equação que representa a meia-vida de nuclídeos instáveis faremos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} N_0 e^{-\lambda T} &= \frac{N_0}{2}, \\ \ln e^{-\lambda T} &= -\ln 2, \\ T &= \frac{\ln 2}{\lambda}, \\ T &\cong \frac{0,693}{\lambda}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

As meias-vidas dos elementos radioativos obtidas empiricamente são extremamente variáveis de acordo com o tipo de decaimento radioativo, por exemplo, a meia-vida do Urânio  $^{238}\text{U}$

é de  $4,468 \times 10^9$  anos, do Tório  $^{232}\text{Th}$  é de  $1,39 \times 10^{10}$  ano e a do radônio  $^{222}\text{Rn}$  é de 3,82 dias [16].

Além da meia-vida, também pode-se determinar a expectativa média de vida ou a vida média ( $\tau$ ) dos átomos de uma substância radioativa, que corresponde ao tempo médio que um isótopo instável leva para decair ou desintegrar. Seja  $A(t)$  a atividade da amostra dada pela equação (2.2) e  $N(t)$  o número de átomos que decaem no intervalo de 0 a  $t$ . Apresentamos na Figura 11 o gráfico que representa a vida média dos átomos de uma substância radioativa.



**Figura 11:** Gráfico que representa a vida média

De acordo com o Teorema do Valor Médio para integrais,<sup>1</sup> no gráfico da Figura 11, por definição de  $\tau$ , a área do retângulo é igual a área sob a curva, diante disso temos que

$$\tau N_0 = \int_0^{\infty} N(t) dt. \quad (2.5)$$

Substituindo  $N(t)$  por  $N_0 e^{-\lambda t}$  da equação (2.3) obtemos,

$$\tau N_0 = \int_0^{\infty} N_0 e^{-\lambda t} dt,$$

resolvendo a integral encontramos

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty},$$

<sup>1</sup>Teorema do valor médio para integrais - Se  $f$  é uma função contínua em  $[a, b]$ , então existe  $z \in (a, b)$  tal que  $\int_a^b f(x) dx = f(z)(b - a)$ . Interpretação geométrica - Se  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ , então a área sob o gráfico de  $f$  é igual a área do retângulo de lados  $(b - a)$  e  $f(z)$  [44].

assim temos que

$$\begin{aligned}\tau &= -\frac{1}{\lambda}[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} - e^0], \text{ logo} \\ \tau &= \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Como a meia-vida equivale a  $T \cong \frac{0,693}{\lambda}$  e a vida média equivale a  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  então são quantidades proporcionais e podemos dizer que  $T \cong 0,693\tau$ . Desse modo o decaimento e a atividade radioativa diminui na mesma proporção e com a mesma meia-vida do número de núcleos radioativos.

## 2.2 Decaimentos Múltiplos

Na natureza existem três séries radioativas (Figuras (1 e 2), Página 6; e Figura (3), Página 7: a Série do decaimento do  $^{238}\text{U}$ , Série do decaimento do  $^{232}\text{Th}$  e a Série do decaimento do  $^{235}\text{U}$ . Em cada série há uma transformação de um radionuclídeo instável em outro e essa transformação continua até que se transforme em isótopos estáveis do chumbo, mais precisamente chumbo 206, chumbo 207 e chumbo 208 respectivamente. A esse processo chamamos de decaimentos múltiplos que ocorrem quando um nuclídeo pai se transforma em um nuclídeo filho e esse se transforma em um outro nuclídeo até atingir o produto final estável.

Para uma melhor compreensão dessa seção, iremos introduzir um modelo para descrever o processo de decaimento múltiplo. Como vimos nas séries radioativas naturais, no instante inicial só existem átomos do primeiro elemento da série, então podemos dizer que as séries radioativas possuem condição inicial

$$N_1(0) > 0, \quad N_i(0) = 0 \text{ com } 1 < i \leq k,\tag{2.7}$$

onde  $N_1$  é a quantidade de átomos do primeiro elemento da série radioativa,  $N_i$  corresponde às quantidades dos demais elementos da série e  $k$  representa a quantidade de vezes em que ocorreu o decaimento em série.

Segue abaixo exemplo de uma série radiotiva com três membros

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2, \end{cases}\tag{2.8}$$

onde  $\lambda_1$  é a constante de decaimento de  $N_1$ ,  $\lambda_2$  é a constante de decaimento de  $N_2$  e  $t$  é o tempo. Isso ocorre quando o nuclídeo pai decai no nuclídeo filho e esse decai em um nuclídeo estável.

Seja  $N = N_1 + N_2 + \dots + N_k$  e  $\frac{dN}{dt} = 0$ , podemos interpretar fisicamente que o número total de átomos  $N$  de uma substância se conserva no processo de decaimento radioativo, independente do número de substâncias presentes. O sistema de  $k$  equações que descreve uma série radioativa com  $k$  decaimentos tal que o  $k$ -ésimo elemento seja estável é dado por

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3, \\ \vdots \\ \frac{dN_k}{dt} = \lambda_{k-1} N_{k-1} \text{ com } k > 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Por simplicidade consideraremos todos os  $\lambda_i$  diferentes.

Esse sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem foi considerado pela primeira vez por Bateman [45], que resolveu o sistema através do método de mudança de variáveis e de frações parciais. Nesse trabalho iremos resolver o referido sistema pelo método da indução cuja solução não encontramos na literatura.

Com a finalidade de encontrar a solução para a sistema (2.9) iremos resolver sistemas de 2, 3, 4 e 5 termos. Inicialmente, iremos resolver o sistema com dois termos, o caso  $k = 2$ ; como o segundo elemento da série é estável temos  $\lambda_2 = 0$ , assim o sistema de equações será representado por

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Para determinar a solução do sistema anterior, substituímos  $N_1 = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}$  na equação

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 \quad (2.11)$$

e assim encontramos que

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1(0)e^{-\lambda_1 t}. \quad (2.12)$$

Integrando a equação anterior temos,

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t}}{-\lambda_1} + C, \quad \text{onde } C \text{ é uma constante a ser determinada pelas condições iniciais.} \quad (2.13)$$

Simplificando  $\lambda_1$  obtemos,

$$N_2 = -N_1(0) e^{-\lambda_1 t} + C. \quad (2.14)$$

De acordo com a condição inicial (2.7),  $C = N_1(0)$ , então

$$N_2 = -N_1(0) e^{-\lambda_1 t} + N_1(0). \quad (2.15)$$

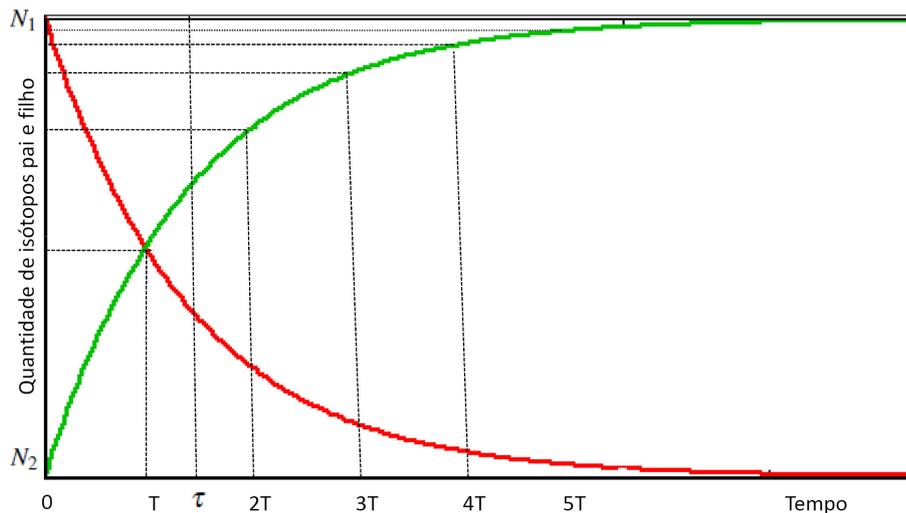
Assim,

$$N_2 = N_1(0)(-e^{-\lambda_1 t} + 1), \quad (2.16)$$

escrevemos então

$$\begin{cases} N_1 = N_1(0) e^{-\lambda_1 t}, \\ N_2 = N_1(0)(-e^{-\lambda_1 t} + 1). \end{cases} \quad (2.17)$$

Portanto, a solução do sistema é formada por duas equações exponenciais que representam o número de átomos do primeiro e do segundo elementos. Na Figura 12, plotamos o gráfico da solução do sistema radioativo para  $k = 2$ , onde  $N_1(t)$  representa o isótopo pai e  $N_2(t)$  representa o isótopo filho. Percebemos que no tempo  $T$  (meia-vida) há uma intersecção, isso quer dizer que o isótopo pai  $N_1(t)$  decaiu pela metade no isótopo filho  $N_2(t)$ .



**Figura 12:** Gráfico da solução do sistema radioativo de dois termos

Como encontramos a solução para o caso em que  $k = 2$  e analisamos o comportamento das equações no gráfico, iremos determinar nesse momento a solução para uma série radiotiva de três termos  $k = 3$ . Nesse caso  $\lambda_3 = 0$  tendo em vista que ocorrerá o decaimento de  $N_1$  em  $N_2$

com  $\lambda_1$  e  $N_2$  em  $N_3$  com  $\lambda_2$ , o sistema de equações será representado por:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2, \end{cases} \quad (2.18)$$

Note que a primeira equação de (2.18) envolve apenas  $N_1$  possuindo solução trivial  $N_1(0)e^{-\lambda_1 t}$  substituindo  $N_1(t)$  na segunda equação obtemos

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1(0)e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2, \quad (2.19)$$

passando  $\lambda_2 N_2$  para o primeiro lado e multiplicando a equação (2.18) por  $e^{\lambda_2 t}$  encontramos

$$e^{\lambda_2 t} \frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_1(0) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \quad (2.20)$$

que equivale a

$$d(N_2 e^{\lambda_2 t}) = \lambda_1 N_1(0) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} dt. \quad (2.21)$$

Integrando diretamente a última equação, temos

$$N_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C, \quad (2.22)$$

assim,

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} + C e^{-\lambda_2 t}. \quad (2.23)$$

No tempo  $t = 0$  encontramos

$$C = N_2(0) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0), \quad (2.24)$$

que expressa a constante de integração  $C$  em termos das condições iniciais  $N_1(0)$  e  $N_2(0)$ .

Assim, substituindo  $C$  em  $N_2(t)$  na equação (2.23) obtemos

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} + N_2(0) e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_2 t}. \quad (2.25)$$

De acordo com a condição inicial (2.7) temos que  $N_2(0) = 0$  então

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_2 t}. \quad (2.26)$$

Dessa forma, obtemos a seguinte solução:

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.27)$$

Substituindo a equação (2.27) em  $\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$  temos

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_2 t} \right). \quad (2.28)$$

Integrando a equação (2.28) obtemos

$$N_3 = -N_1(0) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} + D, \quad (2.29)$$

onde  $D$  é uma constante.

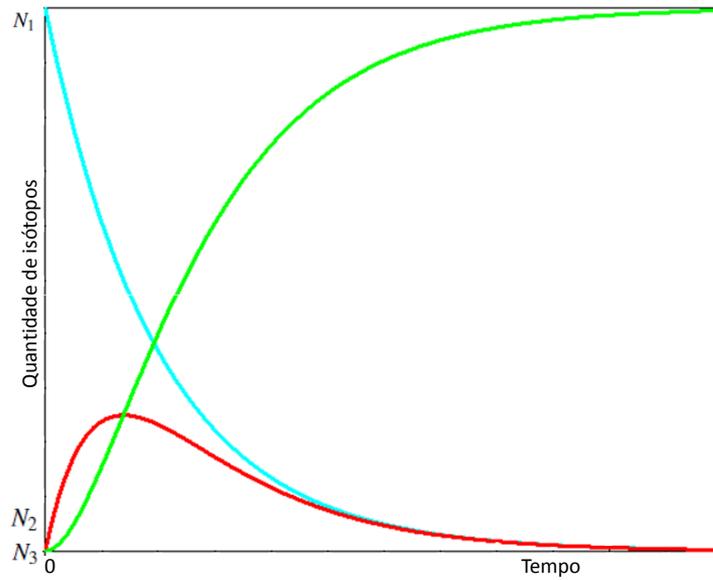
De acordo com a condição inicial (2.7)  $N_3(0) = 0$  então resolvendo a equação (2.29) encontramos  $D = N_1(0)$  e obtemos

$$N_3(t) = N_1(0) \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} + 1 \right). \quad (2.30)$$

A solução do sistema com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  será:

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0) e^{-\lambda_1 t}, \\ N_2(t) = N_1(0) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right), \\ N_3(t) = N_1(0) \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} + 1 \right) \end{cases} \quad (2.31)$$

Logo, a solução do sistema (2.31) é formada por três equações exponenciais que representam o número de átomos do primeiro, segundo e terceiro elementos. Na Figura 13 plotamos o gráfico do sistema radioativo para  $k = 3$ . Nesse caso, o isótopo pai  $N_1$  decaiu pela metade no isótopo filho  $N_2$  e esse, por sua vez, decaiu também pela metade no isótopo  $N_3$ .



**Figura 13:** Gráfico da solução do sistema radioativo de três termos

Ao aumentarmos o número de equações  $k$  em (2.9) observamos certa regularidade na solução. Por exemplo para os casos  $k = 4$  e  $k = 5$  podemos escrever as soluções como

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}, \\ N_2(t) = N_1(0) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right), \\ N_3(t) = N_1(0) \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} \right. \\ \quad \left. + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_3 t} \right), \\ N_4(t) = N_1(0) \left( -\frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} \right. \\ \quad \left. - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_3 t} + 1 \right), \end{array} \right. \quad (2.32)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l}
N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}, \\
N_2(t) = N_1(0) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_2 t} \right), \\
N_3(t) = N_1(0) \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} \right. \\
\quad \left. + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_3 t} \right), \\
N_4(t) = N_1(0) \left( -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} \right. \\
\quad \left. - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} e^{-\lambda_4 t} \right), \\
N_5(t) = N_1(0) \left( -\frac{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} \right. \\
\quad \left. - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right).
\end{array} \right. \quad (2.33)$$

No Apêndice A, Página 70, resolvemos explicitamente o caso  $k = 4$  e indicamos como o caso  $k = 5$  pode ser solucionado por computação algébrica. A partir da regularidade observada até o caso  $k = 5$ , efetuamos abaixo uma conjectura para a solução geral para qualquer natural  $k$ .

CONJECTURA

Para  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$ , o sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_i}{dt} = \lambda_{i-1} N_{i-1} - \lambda_i N_i, \quad 1 < i < k, \\ \frac{dN_k}{dt} = \lambda_{k-1} N_{k-1}, \end{cases} \quad (2.34)$$

tem por solução

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}, \\ N_i(t) = N_1(0) \left[ \sum_{j=1}^{j=i} \frac{\prod_{l=1}^{i-1} \lambda_l}{\prod_{\substack{l \neq j, \\ l=1}} (\lambda_j - \lambda_l)} e^{-\lambda_j t} \right], \\ N_k(t) = N_1(0) \left[ \sum_{j=1}^{j=i} \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{k-1} \lambda_l}{\prod_{\substack{l \neq j, \\ l=1}} (\lambda_j - \lambda_l)} e^{-\lambda_j t} + 1 \right], \end{cases} \quad (2.35)$$

onde todos os  $\lambda_i$  diferem entre si. Ressaltamos que a referida equação (2.35) somente faz sentido para  $k > 2$ .

PROVA - Por indução em k termos.

Para  $k = 2$  o sistema abaixo é verdadeiro conforme obtido em (2.17)

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}, \\ N_2(t) = N_1(0)(-e^{-\lambda_1 t} + 1). \end{cases} \quad (2.36)$$

Supor que a equação (2.35), para  $k > 2$  e  $k \in \mathbb{N}$ , seja solução para o sistema (2.34).

Devemos verificar se a solução (2.35) será válida para o caso  $k + 1$ . Seguindo o raciocínio sobre a solução para uma série radioativa, temos que o sistema de equações radioativas será

escrito da seguinte forma em  $k \in \mathbb{N}$  para  $k + 1$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_i}{dt} = \lambda_{i-1} N_{i-1} - \lambda_i N_i, \quad 1 < i < k, \\ \frac{dN_k}{dt} = \lambda_{k-1} N_{k-1} - \lambda_k N_k, \\ \frac{dN_{k+1}}{dt} = \lambda_k N_k. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Resolveremos a equação diferencial  $\frac{dN_{k+1}}{dt} = \lambda_k N_k$  com base nos casos anteriores. Precisamos primeiro substituir  $N_k$  do sistema (2.37) na última equação do sistema de equações (2.37) então,

$$\begin{aligned} \frac{dN_{k+1}}{dt} = \lambda_k N_1(0) & \left[ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \right. \\ & + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} + \dots \\ & \left. + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_2 - \lambda_k) \dots (\lambda_{k+1} - \lambda_k)} e^{-\lambda_k t} \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Integrando a equação (2.38) obtemos

$$\begin{aligned} N_{k+1} = N_1(0) & \left[ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1} \lambda_k}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1)(-\lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \right. \\ & + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1} \lambda_k}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_2)(-\lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} + \dots \\ & \left. + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1} \lambda_k}{(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_2 - \lambda_k) \dots (\lambda_{k+1} - \lambda_k)(-\lambda_k)} e^{-\lambda_k t} + F \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Equivalente a

$$\begin{aligned} N_{k+1} = N_1(0) & \left[ -\frac{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1} \lambda_k}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \right. \\ & - \frac{\lambda_1 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1} \lambda_k}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} + \dots \\ & \left. - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_2 - \lambda_k) \dots (\lambda_{k+1} - \lambda_k)} e^{-\lambda_k t} + F \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Com base na condição inicial em (2.7) para  $t=0$  o valor de  $F = N_1(0)$ , assim encontramos a equação que representa o caso  $N_{k+1}$ . Vejamos abaixo:

$$N_{k+1} = N_1(0) \left[ \frac{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1} \lambda_k}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\lambda_1 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1} \lambda_k}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} + \dots \\ & \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_2 - \lambda_k) \dots (\lambda_{k+1} - \lambda_k)} e^{-\lambda_k t} + 1 \end{aligned} \right] . \quad (2.41)$$

Com isso escrevemos a solução do sistema da série radioativa para  $k + 1$

$$\left\{ \begin{aligned} N_1(t) &= N_1(0) e^{\lambda_1 t}, \\ &\vdots \\ N_k(t) &= N_1(0) \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \right. \\ &\quad + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} \\ &\quad + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) \dots (\lambda_k - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 t} \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_k - \lambda_3) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})} e^{-\lambda_k t} \right), \\ N_{(k+1)}(t) &= N_1(0) \left( \frac{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_k}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1) \dots (\lambda_{k+1} - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \right. \\ &\quad + \frac{\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_k}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2) \dots (\lambda_{k+1} - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} \\ &\quad + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \dots \lambda_k}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) \dots (\lambda_{k+1} - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 t} \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_k - \lambda_3) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})} e^{-\lambda_k t} + 1 \right). \end{aligned} \right. \quad (2.42)$$

Portanto, provamos por indução que o sistema de equações (2.35) é solução do sistema de equações da série radioativa (2.34) com  $k$  membros, para  $k > 1$ .

## 2.3 Distribuição de Amplitude de Energia

Nessa seção iremos calcular a distribuição de amplitude de energia dos estados nucleares instáveis. Sabemos que um estado estável ou estacionário possui um único valor para sua energia e que quanto mais tempo em média vive um estado mais precisa fica sua energia. Assim, iremos mostrar que, no caso do estado nuclear, em que os núclídeos instáveis vivem geralmente um longo período para decair, este pode ser considerado como um estado de energia bem definida.

O sistema quântico em estudo é descrito por uma função de onda que é auto função do hamiltoniano. Se o sistema está num estado energético bem definido e não há influências externas (perturbação) a energia do sistema irá permanecer indefinidamente nesse estado. O mesmo não

acontece com os núcleos excitados, pois podem ocorrer na natureza perturbações no hamiltoniano em que os estados puros de energia deixam de existir.

A função de onda que descreve um estado estacionário é dada por

$$\Psi(\mathbf{q}, t) = \psi(\mathbf{q})e^{-\frac{iWt}{\hbar}}, \quad (2.43)$$

onde  $q$  representa as coordenadas do sistema,  $\psi(\mathbf{q})$  é uma função complexa em  $q$ ,  $t$  corresponde ao tempo,  $W$  é uma constante complexa e  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  onde  $h$  é a constante de Planck [40]. Para o caso do estado nuclear iremos utilizar a mesma função de onda de um estado estacionário, por se tratar de um estado aproximadamente estacionário.

Assim, embora a função de onda (2.43) para estados estacionários dependa de  $t$ , a densidade de probabilidade  $\|\Psi(\mathbf{q}, t)\|^2 dV$  depende de  $t$  para soluções normalizáveis. Então podemos dizer que  $\|\Psi(\mathbf{q}, t)\|^2 = \|\Psi(\mathbf{q}, 0)\|^2 e^{-\lambda t}$ .

Se  $W$  não for real, temos que

$$\begin{aligned} \|\Psi(\mathbf{q}, t)\|^2 &= (e^{-\frac{iWt}{\hbar}})^* \cdot (e^{-\frac{iWt}{\hbar}}), \\ &= e^{\frac{iW^*t}{\hbar}} \cdot e^{-\frac{iWt}{\hbar}}, \\ &= e^{-i(W-W^*) \cdot \frac{t}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Considerando  $\|\Psi(\mathbf{q}, 0)\|^2 = 1$ , pois a probabilidade não se conserva para núcleos instáveis, então  $\|\Psi(\mathbf{q}, t)\|^2 = e^{-\lambda t}$ , logo

$$\begin{aligned} e^{-i(W-W^*) \frac{t}{\hbar}} &= e^{-\lambda t}, \\ -\frac{i(W-W^*)}{\hbar} &= -\lambda. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Decompondo  $W$  em partes real e imaginária  $W = E_0 + i(\text{Im}W)$  obtemos  $W - W^* = 2i(\text{Im}W)$ , assim podemos concluir que

$$\begin{aligned} -i \frac{(2i(\text{Im}W))}{\hbar} &= -\lambda, \\ \text{Im}W &= -\frac{\lambda \hbar}{2}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Encontramos dessa forma o valor de

$$W = E_0 - \frac{i\lambda \hbar}{2}. \quad (2.47)$$

Apesar de  $e^{-\frac{iWt}{\hbar}}$  não ser um estado estacionário para  $W \notin \mathbb{R}$ , ele pode ser escrito como uma combinação linear de estados estacionários que formam uma base para o espaço de Hilbert. Então dizemos que

$$\begin{aligned} e^{-\frac{iWt}{\hbar}} &= e^{-i\left(\frac{E_0 - \frac{i\lambda\hbar}{2}}{\hbar}\right)t}, \\ &= e^{-\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{iE_0}{\hbar}\right)t}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Escrevendo esse estado como combinação linear de estados estacionários, obtemos

$$e^{-\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{iE_0}{\hbar}\right)t} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(E)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} dE, \quad (2.49)$$

onde  $A(E)$  representa a amplitude com a superposição de valores correspondentes de energias  $E$  bem definidas.

Invertendo a equação (2.49), encontramos que

$$A(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^{+\infty} e^{\left(i\frac{(E-E_0)}{\hbar} - \frac{\lambda}{2}\right)t} dt. \quad (2.50)$$

Resolvendo a integral<sup>2</sup> encontramos que

$$A(E) = -\frac{1}{h\lambda/2 + 2\pi i(E - E_0)}. \quad (2.51)$$

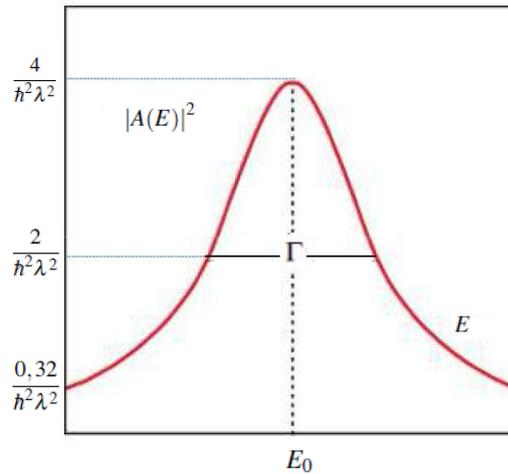
A probabilidade de em uma medida de energia encontrarmos um valor entre  $E$  e  $E + dE$  é dada por

$$\begin{aligned} \|A(E)\|^2 &= A^*(E)A(E), \\ &= \frac{1}{h^2\lambda^2/4 + 4\pi^2(E - E_0)^2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

A função da energia tem a forma de uma lorentziana, veja Figura 14. Sua largura a meia altura é  $\Gamma = \hbar\lambda = \frac{\hbar}{\tau}$ . Assim, a relação entre vida média e a largura de um estado  $\tau\Gamma = \hbar$ , mostra que, quanto mais tempo vive em média um estado, mais precisa fica sua energia. E dessa forma somente aos estados estáveis é possível atribuir um único valor para a energia.

---

<sup>2</sup>A resolução da equação (2.50) encontra-se no Apêndice B. Página 73.



**Figura 14:** Gráfico da distribuição de probabilidade  $\|A(E)\|^2$

Dessa forma mostramos as propriedades dos estados instáveis e de que forma é determinada sua energia levando-se em conta a vida média de um estado. Assim, podemos dizer que o tempo que um núcleo instável leva para decair tem influência sobre a precisão da energia de um estado nuclear.

## 2.4 Transição entre Estados

Na subseção anterior deste capítulo, foi apresentada a constante de desintegração radioativa  $\lambda$  de forma empírica. Nesta subseção, iremos obter uma expressão teórica para constante de decaimento  $\lambda$  através de um modelo físico. Utilizaremos a bem conhecida técnica da teoria de perturbação em Mecânica Quântica [40, 41, 39].

Seja

$$H = H_0 + V, \quad (2.53)$$

onde  $H$  é o hamiltoniano do sistema perturbado,  $H_0$  é o inicial do sistema, chamado de hamiltoniano não perturbado cuja solução é conhecida e  $V$  é uma pequena perturbação em comparação a  $H_0$ .

Como o hamiltoniano  $H_0$  satisfaz a equação do auto-valores, temos assim que,  $H_0 \psi_n = E_n \psi_n$ . As auto-funções de  $H_0$  formam uma base completa na qual a função de onda total pode ser expandida como  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t) \psi_n(\mathbf{r}) e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}}$ .

Substituindo a equação (2.53) e  $\Psi$  na equação de schrödinger  $H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$  encontramos

$$(H_0 + V) \sum_n a_n(t) \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} = i\hbar \sum_n \left( \dot{a}_n(t) \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} + a_n(t) \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \left(-\frac{iE_n}{\hbar}\right) \right), \quad (2.54)$$

onde  $\dot{a}_n$  representa a derivada de  $a_n(t)$  em relação ao tempo.

Com base na equação (2.54), obtemos a igualdade

$$\sum_n a_n(t) H_0 \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} + \sum_n a_n(t) V \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} = i\hbar \sum_n \dot{a}_n(t) \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} + \sum_n a_n(t) E_n \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}. \quad (2.55)$$

Como  $H_0 \Psi_n = E_n \psi_n$  simplificamos a equação (2.55) e encontramos

$$\sum_n a_n(t) V \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} = i\hbar \sum_n \dot{a}_n(t) \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}. \quad (2.56)$$

Baseando-se nas propriedades de ortogonalização dos  $\psi_n$ , onde  $dv$  representa o elemento de integração do volume, podemos dizer que

$$\int \psi_k^* \psi_n dv = \delta_{kn}, \quad (2.57)$$

sendo que  $\delta_{kn}$  representa o delta de Kronecker.

Multiplicamos à esquerda por  $\psi_k^*$  e resolvemos a integral no espaço das coordenadas, temos então,

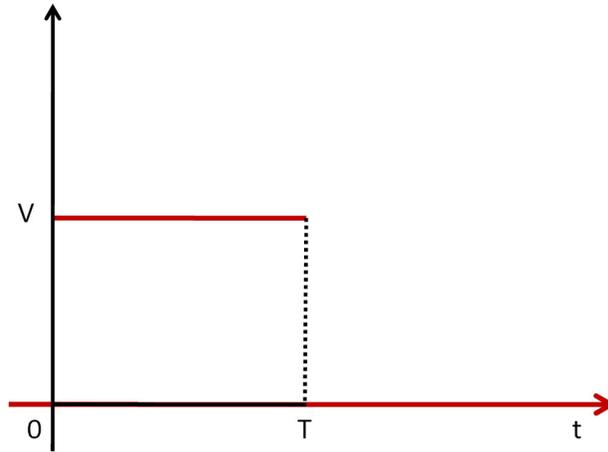
$$\int i\hbar \sum_n \dot{a}_n(t) \psi_k^* \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} dv = \int \sum_n V a_n(t) \psi_k^* \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} dv, \quad (2.58)$$

que corresponde a

$$i\hbar \dot{a}_k(t) e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} = \sum_n a_n(t) V_{kn} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}, \quad \text{que implica em,} \quad (2.59)$$

$$\dot{a}_k = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n(t) V_{kn} e^{i\frac{(E_k - E_n)t}{\hbar}}. \quad (2.60)$$

No gráfico da Figura 15, consideramos uma perturbação que começa a atuar no tempo  $t = 0$  quando o sistema não perturbado encontra-se num certo auto-estado  $\psi_m$ . A perturbação se mantém num valor pequeno e, depois de um curto intervalo de tempo  $T$ , se anula novamente para  $t > T$ .



**Figura 15:** Gráfico representando a perturbação  $V$  no intervalo de tempo ( $t = 0$  a  $t = T$ )

Partindo dessa hipótese podemos afirmar que as condições

$$\begin{cases} a_m = 1 \\ a_n = 0, \text{ se } m \neq n \end{cases}$$

são válidas para  $t < 0$  e aproximadamente também para  $t > 0$ . Com isso podemos obter o valor da amplitude dado por

$$a_k = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T V_{km} e^{i\frac{(E_k - E_m)t}{\hbar}} dt. \quad (2.61)$$

Para resolver a integral da equação (2.61) definimos  $\omega = \frac{E_k - E_m}{\hbar}$ . Como  $V_{km}$  é uma constante pode sair da integral e assim reescrevemos a integral correspondente da seguinte forma

$$a_k = -\frac{i}{\hbar} V_{km} \left( \int_0^T \cos(\omega t) dt + i \int_0^T \sin(\omega t) dt \right), \quad (2.62)$$

que pode ser escrita como

$$a_k = -\frac{i}{\hbar} V_{km} \left( \sin(\omega T) \frac{1}{\omega} - i \cos(\omega T) \frac{1}{\omega} + \frac{i}{\omega} \right). \quad (2.63)$$

Logo encontramos que

$$a_k = V_{km} \frac{(1 - e^{i\frac{(E_k - E_m)T}{\hbar}})}{E_k - E_m}. \quad (2.64)$$

Para determinar a probabilidade de encontrar o sistema no estado  $k$ , temos que

$$\begin{aligned}
 P_k &= \|\langle \Psi, \psi_k \rangle\|^2, \\
 P_k &= \left\| \int \psi_k^* \Psi dV \right\|^2, \\
 P_k &= \left\| \int \psi_k^* \sum_n a_n \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} dV \right\|^2, \\
 P_k &= \left\| \sum_n a_n \int \psi_k^* \psi_n dV e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \right\|^2.
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Utilizando a condição de normalização conforme equação (2.57), obtemos

$$\begin{aligned}
 P_k &= \left\| a_k e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} \right\|^2, \\
 P_k &= \|a_k\|^2 \left\| e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} \right\|^2 \\
 P_k &= \|a_k\|^2 \\
 P_k &= a_k^* a_k.
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Assim, podemos obter a constante de decaimento  $\lambda$  como a razão entre a probabilidade  $P_k$  dividido pelo intervalo  $T$

$$\lambda = \frac{P_k}{T} = \frac{\|a_k\|^2}{T}. \tag{2.67}$$

Logo, a constante de decaimento total é dada pela soma sobre todos os estados:

$$\lambda = \sum_{k \neq m} \lambda_k = \frac{\sum \|a_k\|^2}{T}. \tag{2.68}$$

Como  $\|a_k\|^2 = a_k^* a_k$  temos que

$$\|a_k\|^2 = \frac{1}{(E_k - E_m)^2} \|V_{km}\|^2 (1 - e^{\frac{i(E_k - E_m)T}{\hbar}}) (1 - e^{-\frac{i(E_k - E_m)T}{\hbar}}). \tag{2.69}$$

Rearranjando os termos da equação, encontramos:

$$\|a_k\|^2 = -\frac{\|V_{km}\|^2}{(E_k - E_m)^2} (-2 + e^{\frac{i(E_k - E_m)T}{\hbar}} + e^{-\frac{i(E_k - E_m)T}{\hbar}}). \tag{2.70}$$

Temos então que

$$\|a_k\|^2 = 4 \frac{\|V_{km}\|^2}{(E_k - E_m)^2} \text{sen}^2 \frac{\Delta E}{2\hbar} T, \tag{2.71}$$

sendo  $\Delta E = E_k - E_m$ .

Se houver um número grande de estados  $k$  disponível e se for definido  $\rho(E)$  como a densidade de estados disponíveis em torno da energia  $E_k$ , escrevemos

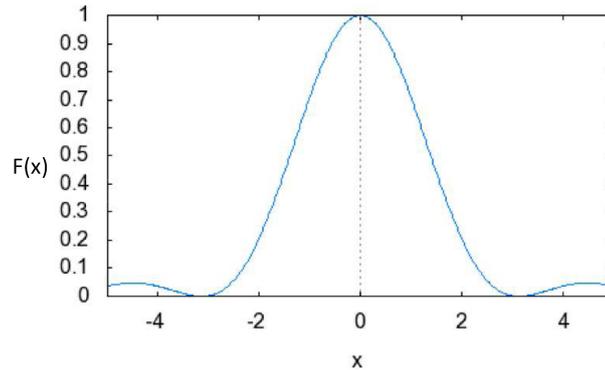
$$\lambda = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \|a_k\|^2 \rho(E_k) dE_k, \quad (2.72)$$

equivalente a

$$\lambda = \frac{4}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \|V_{km}\|^2 \frac{\text{sen}^2\left[\frac{E_k - E_m T}{2\hbar}\right]}{(E_k - E_m)^2} \rho(E_k) dE_k. \quad (2.73)$$

Essa é a equação que representa o modelo físico que determina probabilisticamente o valor  $\lambda$  da constante de decaimento radioativo.

Se supusermos que  $V_{km}$  e  $\rho$  não variam significativamente em um pequeno intervalo de energia  $E_k$  próximo a  $E_m$  e que essas quantidades podem sair da integral e sabendo-se que a função  $\frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$ , cujo gráfico está representado na Figura 16, só tem amplitude significativa próximo à origem,



**Figura 16:** Gráfico da função  $f(x) = \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$

podemos então escrever a expressão final

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \|V_{km}\|^2 \rho(E_k). \quad (2.74)$$

A equação (2.74), conhecida como regra de Fermi, permite determinar a constante de decaimento a partir de funções de onda dos estados iniciais. Dessa forma, podemos determinar o valor da constante de decaimento radioativo através de um modelo físico.

## 2.5 Decaimento Alfa

O decaimento alfa é um tipo de decaimento radioativo que ocorre quando há emissão pelo núcleo atômico de uma partícula alfa, obedecendo a equação relativística de energia  $E = [m(Z,A) - m(Z-2,A-4) - m_\alpha]c^2 > 0$ , onde  $m(Z,A)$  é a massa do núcleo de número de massa  $A$  e número atômico  $Z$  e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo, sendo que essa energia se transforma em energia cinética adquirida pelo núcleo emitido, que é a própria partícula alfa. Esse processo envolve dois núcleos  $X$  e  $Y$  com a forma de  $X_Z^A \rightarrow Y_{Z-2}^{A-4} + He_2^4$  onde o núcleo de hélio  $He_2^4$  é a partícula alfa.

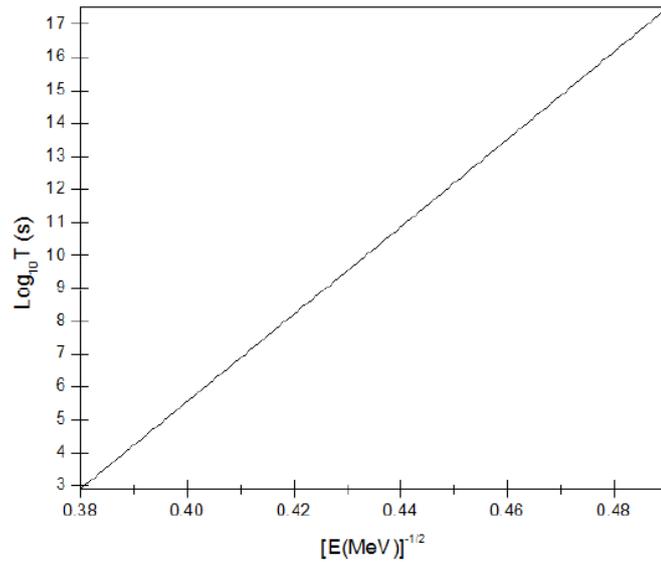
Em qualquer processo de decaimento tem-se como referência fatores experimentais como a energia cinética da partícula e a meia-vida em que ocorre o processo. Assim, Geiger e Nuttall, em 1911, encontraram uma relação empírica entre a energia cinética da partícula e a meia-vida do decaimento que ficou conhecida como Lei de Geiger-Nuttall [46]. Especificamente, a Lei Geiger-Nuttall estabelece uma relação inversa entre a meia-vida e a energia total disponível para o processo, ou seja, isótopos com períodos de vida curta emitem partículas alfa mais energéticas que os de vida mais longa. Essa lei é representada pela equação

$$\log_{10}T = aE^{-\frac{1}{2}} + b, \quad (2.75)$$

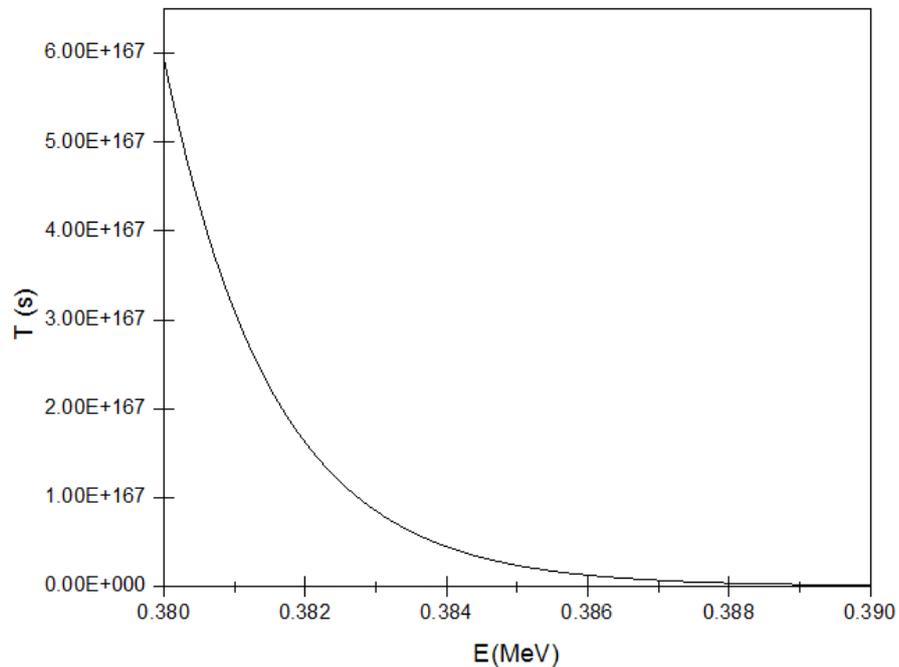
onde  $T$  é a meia-vida,  $E$  é a energia de desintegração da partícula alfa e  $a$  e  $b$  são constantes obtidas através de ajustes dos dados para os núcleos par-par<sup>3</sup>, os valores de  $a$  e  $b$  variam de acordo com o decaimento de diferentes isótopos (Figuras 17 e 18).

---

<sup>3</sup>Núcleo par-par possui número par de prótons e número par de nêutrons



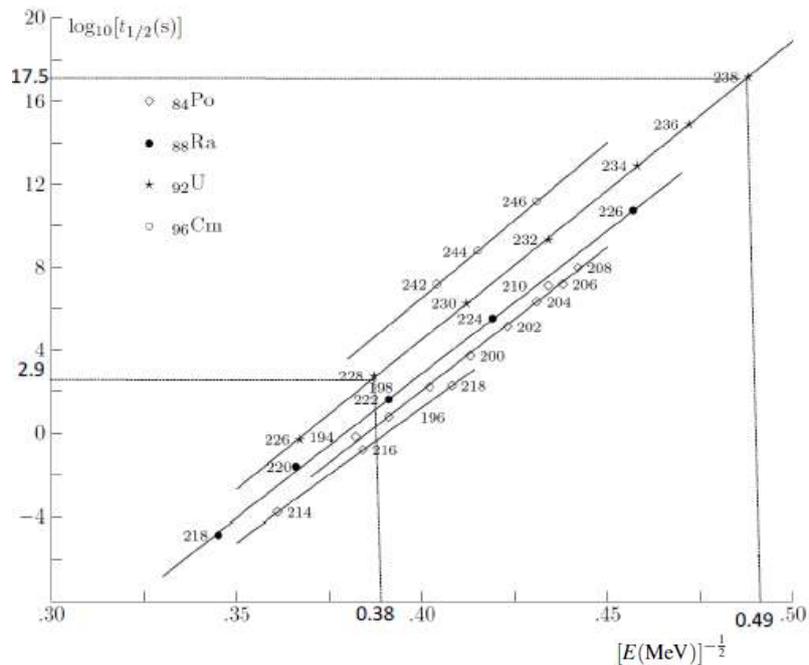
**Figura 17:** Gráfico da relação entre  $\log T \times E^{-\frac{1}{2}}$ .



**Figura 18:** Gráfico da relação entre  $T \times E$ .

Na Figura 19, temos a relação entre o logaritmo da meia-vida do decaimento alfa e a raiz do inverso da energia de desintegração para núcleos par-par. A Lei de Geiger-Nuttall estabelece que os isótopos de um dado elemento estão situados em uma reta e que se os núcleos são ímpares e ímpar-ímpar<sup>4</sup> continuam obedecendo a regra, entretanto a relação linear é menos clara.

<sup>4</sup>Núcleo ímpar-ímpar possui número ímpar de prótons e número ímpar de nêutrons



**Figura 19:** Relação entre as grandezas  $\log T \times E^{-\frac{1}{2}}$  pela regra de Geiger-Nuttall através de dados empíricos [5].

Com base na Figura 19, como exemplo, iremos determinar os valores de  $a$  e de  $b$  usando a Lei de Geiger-Nuttall, equação (2.75), para o  $^{92}\text{U}$  onde encontraremos a equação para o urânio com massa atômica 228 que equivale a

$$2,9 = 0,38a + b, \quad (2.76)$$

e já para o urânio com massa atômica 238 temos a equação

$$17,5 = 0,49a + b. \quad (2.77)$$

Resolvendo o sistema formado por (2.76) e (2.77) obtemos que  $a = 132,725 \text{ s.MeV}^{1/2}$  e  $b = -47,536 \text{ s}$ .

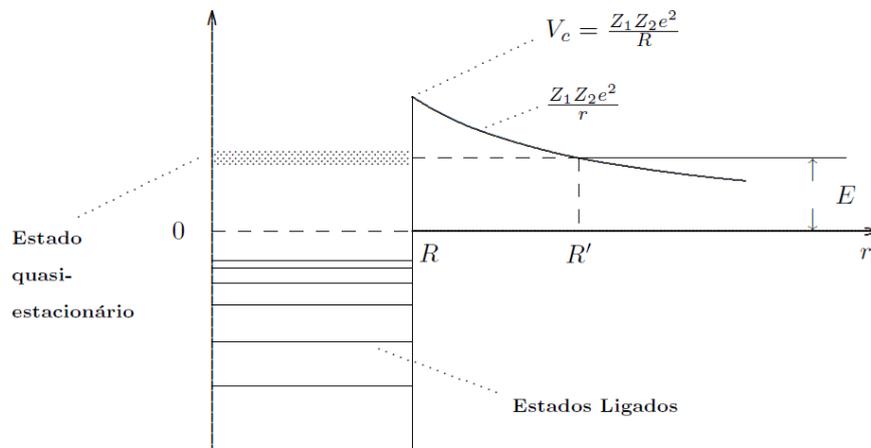
Com a finalidade de aprofundarmos o estudo da partícula alfa, iremos apresentar a teoria desenvolvida por Gamow e, independentemente, Condon em 1928, que tem por base a mecânica quântica [48, 47]. Essa teoria se baseia na hipótese de que a partícula alfa está pré-formada no interior do núcleo podendo sair deste e atravessar a barreira formada pelos potenciais coulombiano e nuclear.

A sofisticação da teoria refere-se a um fator de pré-formação, que é a probabilidade de que dois nêutrons e dois prótons tenham condições de serem emitidos pelo núcleo sob a forma

de partícula alfa e a partir daí é possível explicar o comportamento das meias-vidas de muitos emissores alfa.

A Figura 20 representa a interação entre a partícula alfa e o resto do núcleo. O potencial dentro do núcleo é atrativo e fora dele a partícula alfa sente a repulsão coulombiana do núcleo residual de carga  $Z_2$ . Por Convenção  $E = 0$  indica o estado da partícula alfa infinitamente afastado do núcleo com energia cinética nula. Valores típicos para a Figura 20 seriam  $E = 4,2\text{MeV}$  e  $R' = 3,0 \times 10^{-14}$  para o  $^{238}\text{U}$  [43].

Inicialmente a partícula alfa em um núcleo instável ocupa um estado quase estacionário, com  $E > 0$ . Quando existe o choque com a parede pela partícula alfa a probabilidade de fuga do núcleo é extremamente pequena, não nula. Pelo efeito túnel, a partícula alfa pode atravessar a barreira e ser libertada com energia cinética  $E_\alpha$ , com  $E - E_\alpha$ , ficando como energia de recuo do núcleo residual



**Figura 20:** Barreira de potencial para uma partícula alfa no interior do núcleo. O poço tem largura  $R$  e a barreira tem espessura  $R' - R$  e altura  $E$ .

Ressaltamos que estamos considerando um modelo para o núcleo com simetria esférica e com potencial coulombiano dado por  $V(r) \approx \frac{1}{r}$  e, como a carga de elétrons do núcleo é dada por  $q_1 = Z_1e$  e a carga de elétrons da partícula alfa é  $q_2 = Z_2e$ , então temos que no sistema de unidades Lorentz-Heaviside

$$V(r) = \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad (2.78)$$

e com valor máximo,  $V_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}$ .

Quando a barreira de potencial é maior, temos que a espessura a atravessar é maior e o núcleo tem uma vida mais longa. Isso reflete a ideia de meia-vida, apresentada neste capítulo, onde os tempos de meia-vida de alguns elementos radioativos são muito longos, isso quer dizer que o tempo de meia-vida depende da barreira de potencial. Podemos exemplificar essa ideia com o radionuclídeo  $^{238}\text{U}$ , cuja meia-vida é cerca de 4,5 bilhões de anos. Para esse caso, a espessura da barreira a ser atravessada é bem maior do que a de um isótopo de meia-vida curta, como o radônio ( $^{222}\text{Rn}$ ) que é de 3,82 dias.

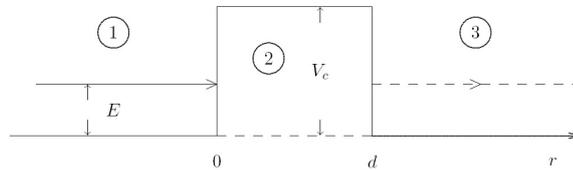
A probabilidade de uma partícula alfa atravessar a barreira no intervalo  $dt$  é dada pelo produto de duas outras probabilidades. A primeira corresponde à trajetória da partícula alfa cruzar a superfície do núcleo naquele instante, dada aproximadamente por  $\frac{vdt}{R}$  onde  $v$  é a velocidade escalar da partícula e  $R$  o raio do núcleo. A segunda consiste na probabilidade da partícula alfa conseguir atravessar a barreira, que é o coeficiente de transmissão

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}, \quad (2.79)$$

onde  $F$  é a amplitude de transmissão e  $A$  é a amplitude incidente. Temos então que

$$\lambda dt \cong \frac{vdt}{R} T. \quad (2.80)$$

Para determinar o coeficiente de transmissão que utilizaremos na Página 47, por simplicidade, iremos resolver primeiro o problema da barreira retangular, Figura 21. Nesse caso, usaremos o caso mais simples em que o momento angular  $l$  é nulo.



**Figura 21:** Barreira de potencial na coordenada radial.

Considere a equação de Schrödinger independente do tempo [39, 40, 49, 41]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi, \quad (2.81)$$

representando por  $u(r)$  a parte radial de  $\psi$ . Aplicando a técnica de separação de variáveis

obtemos

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]u = 0, \quad (2.82)$$

onde  $m$  é a massa reduzida do sistema partícula-núcleo,  $E$  é a energia total,  $r$  é a coordenada radial e  $V(r)$  é a energia potencial.

Para resolver a equação diferencial (2.82) iremos dividir em três casos: Na região 1, a equação diferencial (2.82) fica igual a

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}Eu = 0. \quad (2.83)$$

Para resolver a equação definimos

$$s^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2.84)$$

onde

$$s = \pm i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (2.85)$$

Dessa forma podemos dizer que a equação (2.82) apresenta solução oscilatória na região 1, conforme Figura 21, onde a energia da partícula é maior que a energia de potencial, e como a onda vem da esquerda e é refletida, temos a seguinte solução:

$$u_1(r) = \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r}, \quad (2.86)$$

sendo

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (2.87)$$

e  $m$  representa a massa reduzida do sistema partícula-núcleo.

Na região 2, a energia da partícula é menor que a energia potencial. Partindo da equação diferencial (2.82), neste caso definimos

$$s^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[E - V_0], \quad (2.88)$$

e

$$s = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}. \quad (2.89)$$

Logo, a solução da equação diferencial (2.82) é uma exponencial real

$$u_2(r) = \alpha_2 e^{k_2 r} + \beta_2 e^{-k_2 r}, \quad (2.90)$$

onde

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}, \quad (2.91)$$

Já na região 3, a equação (2.82) fica igual a equação (2.83). Entretanto a equação (2.82) na Figura 21 apresenta solução oscilatória, onde a energia da partícula é maior que a energia de potencial e, como a onda vem da esquerda, a solução é dada por

$$u_3(r) = \alpha_3 e^{ik_1 r}. \quad (2.92)$$

Sabemos que a função de onda e sua derivada são funções contínuas, veja por exemplo em Griffiths [40]. Nos pontos  $r = 0$  e  $r = d$ , temos que

$$u_1(0) = u_2(0), \quad u'_1(0) = u'_2(0)$$

$$u_2(d) = u_3(d), \quad u'_2(d) = u'_3(d). \quad (2.93)$$

Substituindo  $r$  por 0 nas equações (2.86) e (2.90), temos que  $u_1(0) = \alpha_1 + \beta_1$  e que  $u_2(0) = \alpha_2 + \beta_2$  então  $u_1(0) = u_2(0)$  equivale a

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2. \quad (2.94)$$

Substituindo  $r$  por 0 nas derivadas das equações (2.86) e (2.90) temos que

$$\begin{aligned} u'_1(r) &= ik_1 \alpha_1 e^{ik_1 r} - ik_1 \beta_1 e^{-ik_1 r} \\ u'_1(0) &= ik_1 (\alpha_1 - \beta_1), \end{aligned} \quad (2.95)$$

e que

$$\begin{aligned} u'_2(r) &= k_2 \alpha_2 e^{k_2 r} - k_2 \beta_2 e^{-k_2 r} \\ u'_2(0) &= k_2 (\alpha_2 - \beta_2) \end{aligned} \quad (2.96)$$

que equivalem a

$$ik_1 (\alpha_1 - \beta_1) = k_2 (\alpha_2 - \beta_2). \quad (2.97)$$

Determinamos até o momento as equações correspondentes a  $u_1(0) = u_2(0)$  e  $u'_1(0) = u'_2(0)$ . Iremos encontrar agora as equações correspondentes às equações  $u_2(d) = u_3(d)$  e  $u'_2(d) = u'_3(d)$ , então iremos substituir  $r$  por  $d$  na equação (2.90) e na equação (2.92) assim,

$$\alpha_2 e^{k_2 d} + \beta_2 e^{-k_2 d} = \alpha_3 e^{ik_1 d}. \quad (2.98)$$

Substituir  $r$  por  $d$  na derivada das equações 2.90 e 2.92 temos que

$$k_2(\alpha_2 e^{k_2 d} - \beta_2 e^{-k_2 d}) = ik_1 \alpha_3 e^{ik_1 d}. \quad (2.99)$$

Logo, com o sistema formado pelas equações (2.94), (2.97), (2.98) e (2.99), obtemos as condições

$$\left( \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2, \\ ik_1(\alpha_1 - \beta_1) = k_2(\alpha_2 - \beta_2), \\ \alpha_2 e^{k_2 d} + \beta_2 e^{-k_2 d} = \alpha_3 e^{ik_1 d}, \\ k_2(\alpha_2 e^{k_2 d} - \beta_2 e^{-k_2 d}) = ik_1 \alpha_3 e^{ik_1 d}, \end{array} \right). \quad (2.100)$$

cujas incógnitas são  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .

Com a finalidade de encontrar o coeficiente de transmissão, que é a probabilidade da partícula alfa atravessar a barreira, iremos explicitar a razão entre as constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  do sistema (2.100) como

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{1}{2}(e^{(ik_1+k_2)d} + e^{(ik_1-k_2)d}) + \frac{iq}{4}(e^{(ik_1+k_2)d} - e^{(ik_1-k_2)d}), \quad (2.101)$$

sendo  $q = \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2}$ . Então

$$\left| \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right|^2 = \frac{1}{4}(e^{(ik_1+k_2)d} + e^{(ik_1-k_2)d})^2 + \frac{q^2}{16}(e^{(ik_1+k_2)d} - e^{(ik_1-k_2)d})^2.$$

Com o auxílio da identidade,  $\sinh^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}) - \frac{1}{2}$  pode ser reescrita como

$$\left| \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right|^2 = e^{2ik_1 d} \left( 1 + \frac{1}{4}(4 + q^2) \right) \sinh^2(k_2 d) \quad (2.102)$$

Finalmente substituindo  $q$  em função de  $k_1$  e  $k_2$  obtemos

$$\left| \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right|^2 = \left( 1 + \frac{1}{4} \left( 2 + \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 + \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right) \right) \sinh^2(k_2 d). \quad (2.103)$$

Como

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}} = \sqrt{\frac{V_0-E}{E}} = \sqrt{\frac{V_0}{E} - 1}, \quad (2.104)$$

então

$$\left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 = \left( \sqrt{\frac{V_0}{E} - 1} \right)^2 = \frac{V_0}{E} - 1, \quad (2.105)$$

dessa forma podemos determinar o coeficiente de transmissão sendo

$$T = \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right|^2 = \left( \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( 2 + \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 + \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right) \right] \sinh^2(k_2 d) \right)^{-1}, \quad (2.106)$$

então,

$$T = \left( 1 + \frac{1}{4} \left[ \left( 2 + \frac{V_0 - E}{E} + \frac{E}{V_0 - E} \right) \right] \sinh^2(k_2 d) \right)^{-1}. \quad (2.107)$$

Arrumando a equação anterior temos

$$T = \left( 1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{V_0^2}{E(V_0 - E)} \right] \sinh^2(k_2 d) \right)^{-1}.$$

Adicionando e subtraindo  $V_0^2$  ao denominador da fração da equação (2.108) encontramos

$$T = \left( 1 + \frac{V_0^2}{V_0^2 - (V_0 - 2E)^2} \sinh^2(k_2 d) \right)^{-1}. \quad (2.108)$$

Pode-se fazer uma aproximação considerando que a partícula alfa possui alta energia de modo que o comprimento de onda  $\lambda_2 = \frac{1}{k_2}$  é muito menor que a largura da barreira, isto é no limite em que  $k_2 d \gg 1$ ,  $d \gg \frac{1}{k_2} = \lambda_2$ , temos que

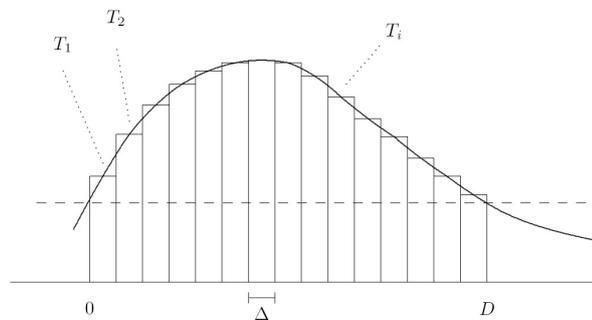
$$\sinh^2(k_2 d) \cong \frac{1}{4} e^{2k_2 d} \quad (2.109)$$

conduzindo a

$$T \cong 4 \frac{V_0^2 - (2E - V_0)^2}{V_0^2} e^{-2k_2 d}. \quad (2.110)$$

Note que o coeficiente de transmissão cai exponencialmente com a largura da barreira.

Uma barreira qualquer pode ser subdividida em barreiras retangulares de largura pequena, conforme podemos ver na Figura (22),



**Figura 22:** Barreira de forma arbitrária subdividida em barreiras retangulares

Como  $\Delta$  representa a largura de cada barreira e fazendo com que o limite  $\Delta \rightarrow 0$ , temos

$$\begin{aligned} T &\cong \lim_{n \rightarrow \infty} \prod e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_i - E)} \Delta}, \\ T &\cong \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_i - E)} \Delta \right], \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$T \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{2m(V(r) - E)} dr \right), \quad (2.112)$$

onde  $R$  e  $R'$  estão definidos na Figura 20.

Considerando

$$k(r) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V(r) - E)}, \quad (2.113)$$

temos que

$$T \propto e^{-2 \int k(r) dr}. \quad (2.114)$$

Considerando o caso mais geral de momento angular  $l \neq 0$ , podemos generalizar a equação (2.113) para

$$k^2(r) = \frac{2m}{\hbar^2} \left[ V(r) + \frac{l(l+1)}{2mr^2} \hbar^2 - E \right], \quad (2.115)$$

sendo

$$\frac{l(l+1)}{2mr^2} \hbar^2 \quad (2.116)$$

o termo centrífugo [39, 41, 49].

Supondo que a barreira tem a forma do potencial coulombiano entre  $R'$  e  $R$ , para o caso onde o momento angular  $l = 0$ , podemos dizer que

$$T \propto e^{-2G}, \quad (2.117)$$

onde  $G$  é o fator de Gamow definido por

$$G = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_R^{R'} \sqrt{V(r) - E} dr. \quad (2.118)$$

Substituindo o potencial coulombiano  $V(r)$  da equação (2.78) temos que

$$G = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E} dr. \quad (2.119)$$

Ao integrarmos<sup>5</sup> a equação (2.119) obtemos que

$$G = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} Z_1 Z_2 e^2 \gamma(x), \quad (2.120)$$

onde  $\gamma(x) = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}$ , sendo  $x = R/R' = E/V_c$ , com

$$V_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_0(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})}, \quad (2.121)$$

onde  $r_0$  é o raio efetivo do núcleo para emissão e  $A_1$  é o peso atômico da partícula alfa e  $A_2$  é o peso atômico do elemento radioativo.

Com base na equação (2.80), encontramos o valor de  $v$ , onde  $v$  é a velocidade escalar da partícula alfa. Isso nos permite determinar a seguinte equação

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R'} = E = \frac{1}{2} m v^2, \quad (2.122)$$

que nos leva a encontrar a constante de decaimento da partícula alfa dada pela equação,

$$\lambda \cong \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2m}{E}} \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} Z_1 Z_2 e^2 \gamma \left( \frac{R}{R'} \right) \right]. \quad (2.123)$$

onde a massa da partícula alfa é de  $6,6430 \times 10^{-24}$  g.

Dessa forma, como a regra de Geiger-Nuttall estabelece a relação entre o logaritmo da meia-vida do decaimento e a raiz do inverso da energia de desintegração, onde a constante de decaimento  $\lambda$  varia lentamente com o inverso da raiz quadrada da energia  $E$ , podemos verificar esse fato no exemplo a seguir:

Para o cálculo de  $\lambda$  através da expressão teórica assumimos os valores para  $r_0 = 1,2$  fm e de  $r_0 = 1,3$  fm, conforme Tabela 3.

**Tabela 3:** Meias-vidas calculadas para dois valores de  $r_0$  e sua comparação com valores experimentais [5].

Elemento	Z	A	E(MeV)	$t_{\frac{1}{2}}$ [exp(s)]	$t_{\frac{1}{2}}$ [calc(s)] $r_0 = 1,2$ fm	$t_{\frac{1}{2}}$ [calc(s)] $r_0 = 1,3$ fm
Po	84	215	7,53	0,18	$0,45 \times 10^{-5}$	$0,18 \times 10^{-6}$
Po	84	218	6,11	$1,82 \times 10^2$	1,79	0,072
Ac	89	211	7,63	0,25	$0,3 \times 10^{-3}$	$0,45 \times 10^{-5}$

O que se observa é que, quando se altera os raios em 10%, a meia-vida pode variar com

<sup>5</sup>A integral foi resolvida através do Software Maxim [50].

um fator 30. Essa diferença entre os valores calculados e os experimentais ocorre pelo fato do modelo ter sido desenvolvido para núcleos esféricos e os emissores alfa se situam, em sua maioria, onde há deformação do núcleo no estado fundamental.

Nesta seção fizemos o estudo do decaimento alfa partindo inicialmente de definições da partícula alfa, em seguida mostramos a relação de Geiger-Nuttal que estabelece a relação inversa entre a meia-vida e a energia total do processo. Aprofundamos com o problema da barreira de potencial, com a compreensão da teoria de Gamow, 1928 sobre o efeito túnel, ou tunelamento, compreendido com o advento da mecânica quântica, que consiste no processo de fuga de uma partícula alfa e a possibilidade dela atravessar o potencial da barreira com energia cinética [48]. Por fim, escrevemos uma fórmula para determinar o coeficiente de transmissão  $\lambda$  do decaimento alfa que pode ser comparada com dados experimentais.

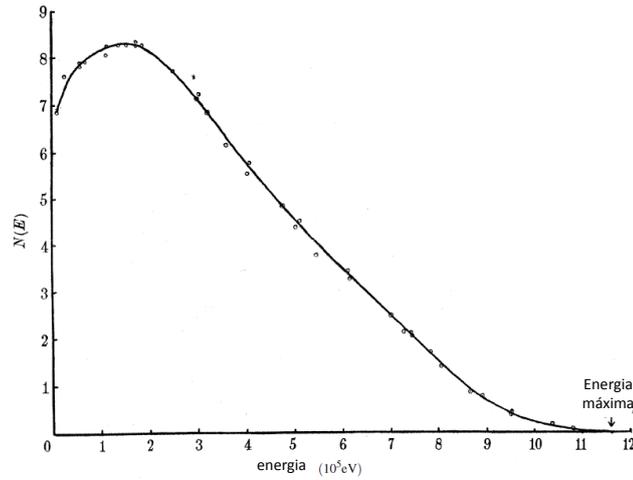
## 2.6 Decaimento Beta

O decaimento beta é um tipo de radiação ionizante em que há emissão de elétrons pelo núcleo do átomo. É a forma mais comum de desintegração radioativa, sendo detectado em isótopos de praticamente todos os elementos, com a exceção dos mais pesados ao final da carta dos nuclídeos com núcleos com número de massa  $A < 150$ . Exemplos de nuclídeos emissores beta puros<sup>6</sup>:  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^{14}\text{C}$ ,  ${}^{32}\text{P}$ ,  ${}^{35}\text{S}$ ,  ${}^{45}\text{Ca}$  e  ${}^{90}\text{Sr}$ .

Quando uma partícula beta é emitida há um espectro contínuo de energia, conforme podemos ver na Figura 23, a energia máxima do espectro difere para diferentes nuclídeos. Foi com base na existência em espectros contínuos de energia que, em 1934, Wolfgang Pauli calculou que havia uma diferença entre a energia das partículas antes e depois do desdobramento [51]. Para explicá-la ele postulou a existência de uma partícula com massa insignificante e carga elétrica nula.

---

<sup>6</sup>Beta puro é o tipo de transição no qual só ocorre a emissão  $\beta$ . Na maioria dos casos a emissão beta ocorre deixando um excesso de energia no núcleo, emitindo posteriormente radiação gama para atingir o estado fundamental. Podemos citar como exemplo o decaimento do nuclídeo  ${}^{60}_{27}\text{Co}$ .



**Figura 23:** Curva de distribuição de energia  $\beta^-$  para RaE -  $^{210}\text{Bi}$  [6].

Posteriormente, essa partícula recebeu o nome de neutrino, cunhado por Enrico Fermi, devido a sua neutralidade excepcional [52]. O neutrino foi observado pela primeira vez por Reines e Cowan em 1953 entre as partículas geradas por um reator nuclear de alta potência [53], sendo detectado mais tarde o antineutrino por Reines e Cowan [54]. Após a morte de Cowan, Reines recebeu o Prêmio Nobel em Física pela descoberta do neutrino.

Os neutrinos e antineutrinos são partículas com pequena massa  $\mu \leq 5 \times 10^{-4} m_0$ , onde  $m_0$  é a massa de repouso do elétron e pósitron, ou uma energia de repouso de 250 eV ou menos [16]. Sendo que possuem carga elétrica zero, mas carregam energia, e de spin  $\frac{1}{2}$ , interagindo com outras partículas através da interação fraca.

No processo da emissão beta o elétron é criado no instante da emissão por intermédio da interação fraca. A interação fraca é responsável pelo decaimento beta e pela transformação de um nêutron em um próton com a emissão de um elétron e um antineutrino



ou a transformação de um próton em um nêutron com a emissão de um pósitron e um neutrino



Os neutrinos, por não possuírem carga elétrica, não são afetados pela interação eletromagnética e, por isso, sempre que um neutrino estiver envolvido em uma reação ocorre apenas a interação fraca. As partículas mediadoras da interação fraca são os bósons  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ , que possuem massa quase cem vezes maior que a massa do próton.

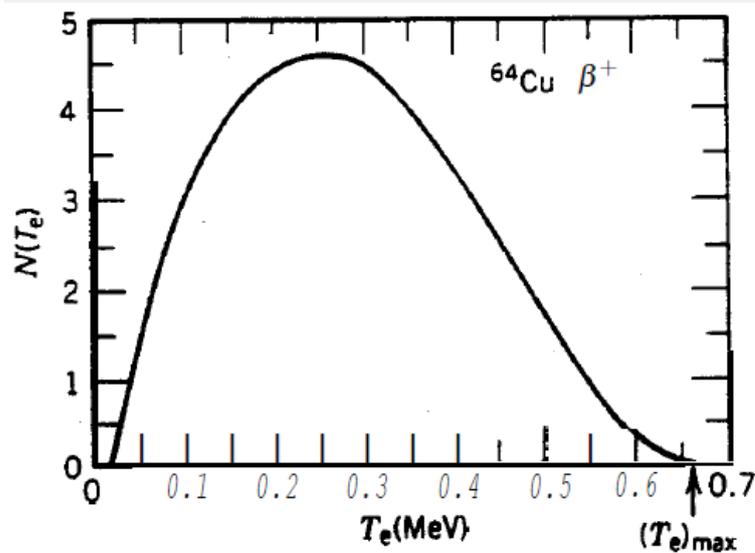
O processo de decaimento beta ocorre através de dois tipos de emissão: a beta negativa e a beta positiva. A emissão da partícula beta negativa  $\beta^-$  (elétron), ocorre quando o núcleo tem excesso de nêutrons e há emissão de um elétron e um antineutrino  $\bar{\nu}$ . A transformação de um nêutron em um próton nesse processo pode ser representada pela transformação (2.124), de acordo com a equação



As partículas beta negativas são emitidas em um espectro contínuo de energia, conforme a Figura 23, variando de zero até um valor máximo. Para os nuclídeos mais comuns<sup>7</sup>, a energia máxima está na faixa entre 0,005 e 3,5 MeV [55].

No caso do decaimento beta negativo a partícula emitida é o antineutrino. Assim, toda vez que um átomo emite uma partícula,  $\beta^-$ , o mesmo se transforma em um outro elemento químico com o mesmo número de massa, uma vez que o nêutron que havia antes foi substituído por um próton, entretanto o seu número atômico aumenta uma unidade.

Já a emissão da partícula beta positiva (pósitron),  $\beta^+$ , ocorre quando o núcleo tem excesso de prótons e há emissão de um nêutron e um pósitron<sup>8</sup>. De forma análoga às partículas beta negativas, as partículas beta positivas também são emitidas com um espectro contínuo de energia, representado na Figura (24), onde  $N(T_e)$  é o número relativo de partículas beta e  $T_e(\text{MeV})$  é a energia cinética das partículas beta. Para os nuclídeos mais comuns a energia máxima está na faixa entre 0,3 a 1,4 MeV [55].



**Figura 24:** Curva de distribuição de energia  $\beta^+$  para  ${}^{64}\text{Cu}$  [7].

<sup>7</sup>Exemplo de nuclídeos emissores beta:  $H^3$ ,  $C^{14}$ ,  $Na^{24}$ ,  $P^{32}$  e  $Sr^{90}$ .

<sup>8</sup>Pósitron é a partícula beta positiva

O processo de desintegração beta positiva é chamado de captura eletrônica que ocorre quando o núcleo tem excesso de prótons. Então, o núcleo captura um dos elétrons de seu próprio átomo, esse elétron combina-se com um próton e em seguida é convertido em um nêutron liberando um neutrino. Essa transformação pode ser representada por (2.125), de acordo com a reação



Para determinar a massa das partículas  $\beta^-$  e  $\beta^+$  descrevemos inicialmente a massa do neutrino, que pode ser obtida através do balanço de massa de uma desintegração  $\beta$ , dada por

$$Q = m_{Z,A}c^2 - m_{Z\pm 1,A}c^2 - m_e c^2 - m_\nu c^2. \quad (2.128)$$

onde  $Q$  é a energia disponível no decaimento beta.

Considerando a massa do neutrino  $m_\nu = 0$  e escrevendo a equação (2.128) em termos das massas atômicas  $M_{Z,A}$  temos

$$M_{Z,A}c^2 = m_{Z,A}c^2 + Zm_e c^2 - \sum_1^Z B_i, \quad (2.129)$$

em que  $B_i$  é a energia de ligação do  $i$ -ésimo elétron. Assim podemos escrever a energia disponível no decaimento beta, equação (2.128), da seguinte forma

$$Q = M_{Z,A}c^2 - Zm_e c^2 + \sum_1^Z B_i - [m_{Z\pm 1,A}c^2 - (Z\pm 1)m_e c^2 + \sum_1^{Z\pm 1} B_i] - m_e c^2. \quad (2.130)$$

Se forem desprezadas as energias de ligação dos últimos elétrons podemos igualar os dois somatórios e escrever a equação(2.130) para as duas formas de desintegração  $\beta$

$$Q_{\beta^-} = (M_{Z,A} - M_{Z+1,A})c^2 \quad (2.131)$$

$$Q_{\beta^+} = (M_{Z,A} - M_{Z-1,A} - 2m_e)c^2. \quad (2.132)$$

Isso mostra que o decaimento  $\beta^-$  só é possível se o núcleo pai for maior do que o núcleo filho e no decaimento  $\beta^+$  aparece uma parcela adicional de duas massas eletrônicas em  $Q$ . Observa-se que nos casos  $\beta^-$  e  $\beta^+$  o valor de  $Q$  é repartido na forma de energia cinética do elétron (pósitron), do antineutrino (neutrino) e de uma parcela pequena de energia de recuo do núcleo residual. Com isso podemos dizer que se  $M_{Z,A} > M_{Z+1,A}$  pode ocorrer a emissão de um elétron entretanto, se  $M_{Z,A} > M_{Z-1,A}$  então pode ocorrer uma captura eletrônica uma vez que a energia é positiva.

O estudo do decaimento beta não se limitaria a essa seção, uma vez que a sofisticação da teoria é bastante ampla. Dessa forma, fica como sugestão para um maior aprofundamento do decaimento beta, o estudo do processo de transições da Teoria de Fermi, que é capaz de descrever os espectros de energia do decaimento beta, possibilitando uma compreensão qualitativa dos valores das meias-vidas desse decaimento. Essa teoria traz uma abordagem sobre a taxa de transição sendo proporcional à resistência da ligação entre estados inicial e final, calculados para densidade de estados finais disponíveis para o sistema. Nessa teoria, os vetores do spin do elétron e do antineutrino libertados são paralelos e contribuem para o balanço do momento angular. Indicamos como referências para o estudo da Teoria de Fermi [5, 43, 52, 16, 56]

Além das transições da Teoria de Fermi, é interessante o estudo da teoria de Gamow-Teller que nada mais é do que uma extensão da teoria do decaimento beta e descreve a violação da paridade relativa à interação fraca em termos de física nuclear. Essas transições, não fazem parte da Teoria de Fermi tendo em vista que os vetores do spin do elétron e do antineutrino libertados são anti paralelos e não contribuem para o balanço do momento angular. Por fim, seria interessante aprofundar o conhecimento sobre a captura eletrônica que foi descrita de forma simplificada no estudo do decaimento  $\beta^+$ . Indicamos como referências para o estudo da Teoria de Gamow-Teller [5, 16, 57] e para a captura eletrônica [5, 16].

Portanto, neste capítulo, apresentamos uma abordagem teórica da radioatividade através do desenvolvimento dos modelos efetivos físicos e matemáticos que envolve os fundamentos da radioatividade. Todo o capítulo teve como alicerce as leis básicas da mecânica quântica.

Iniciamos com o estudo do fenômeno da radioatividade dos núcleos instáveis, onde descrevemos inicialmente o processo de desintegração radioativa, apresentando a constante de decaimento de forma empírica como um processo estatístico e aleatório. Resolvemos o sistema de equações diferenciais acopladas de primeira ordem de uma série radioativa de  $k$  termos comprovando pelo método de indução matemática.

Com a finalidade de aprofundar na teoria da radioatividade, desenvolvemos o estudo das propriedades de transição de funções de onda dos estados inicial e final e com isso mostramos um modelo para a constante de decaimento  $\lambda$  que pode ser facilmente comparada através de dados experimentais. Além desse estudo, descrevemos o decaimento alfa apresentando a Lei de Geiger - Nuttall, que estabelece uma relação inversa entre a meia-vida e a energia total do processo.

Apresentamos a Lei de Gamow que parte da hipótese que a partícula alfa está pré-formada no interior no núcleo podendo, através do efeito túnel, atravessar a barreira de potencial para uma partícula no interior do núcleo. Desenvolvemos o processo de decaimento beta, a desco-

berta do neutrino e a representação desse decaimento através de espectros contínuos de energia.

Todo o conhecimento teórico dos fundamentos da radioatividade apresentado neste capítulo é de extrema importância para o entendimento da radioatividade em sua essência física. No Capítulo 3, aprofundaremos o conhecimento sobre a radioatividade em dimensão ambiental, onde realizamos um estudo de caso do Distrito Uranífero de Lagoa Real - BA. Esse estudo é baseado em pesquisas realizadas nessa região com o intuito de diagnosticar a concentração do urânio e seus descendentes radioativos, no solo, água e dentes de pessoas da região. Diagnosticar também a atividades alfa total e beta total na água, avaliando se os impactos ao meio ambiente estão relacionados a aspectos naturais ou é de responsabilidade da ação do homem nas atividades de mineração e beneficiamento do urânio.

### **3 ESTUDO DE CASO: O DISTRITO URANÍFERO DE LAGOA REAL**

A única jazida de urânio em operação na América Latina está situada no Distrito Uranífero de Lagoa Real, onde existe a Unidade de Concentrado de Urânio (INB - Caetité). A Unidade da INB em Caetité é uma usina que faz o beneficiamento do urânio extraído da mina Cachoeira, localizada no Distrito de Juazeiro, pertencente ao município de Caetité. Desde a sua instalação, no ano de 2000, muito se tem a discutir, inclusive organizações não governamentais (ONGs) manifestam preocupações em relação à atividade de mineração do urânio e produção do *yellow cake*.

Por outro lado, a INB afirma que suas modernas instalações não liberam rejeitos industriais para o meio ambiente e que o processo tecnológico utilizado recicla e reutiliza a água em ciclo fechado, sem descartá-la. Sobre os rejeitos sólidos, que são os materiais constituídos pelo minério lixiviado, ou seja, de onde se retirou o urânio, afirma que estes são dispostos em pilhas envolvidos pelo estério da mina<sup>1</sup> em depósito estéril, que posteriormente é submetido a um processo de recuperação através da cobertura do solo [58].

Diante disso, torna-se importante fazer um estudo de caso sobre a região com vista a compreender melhor a problemática da extração e beneficiamento de urânio no Distrito Uranífero de Lagoa Real. Assim, neste capítulo, abordaremos essa região através da análise da literatura, obteremos uma visão geral sobre os impactos causados ao meio ambiente e à população residente na região como um todo.

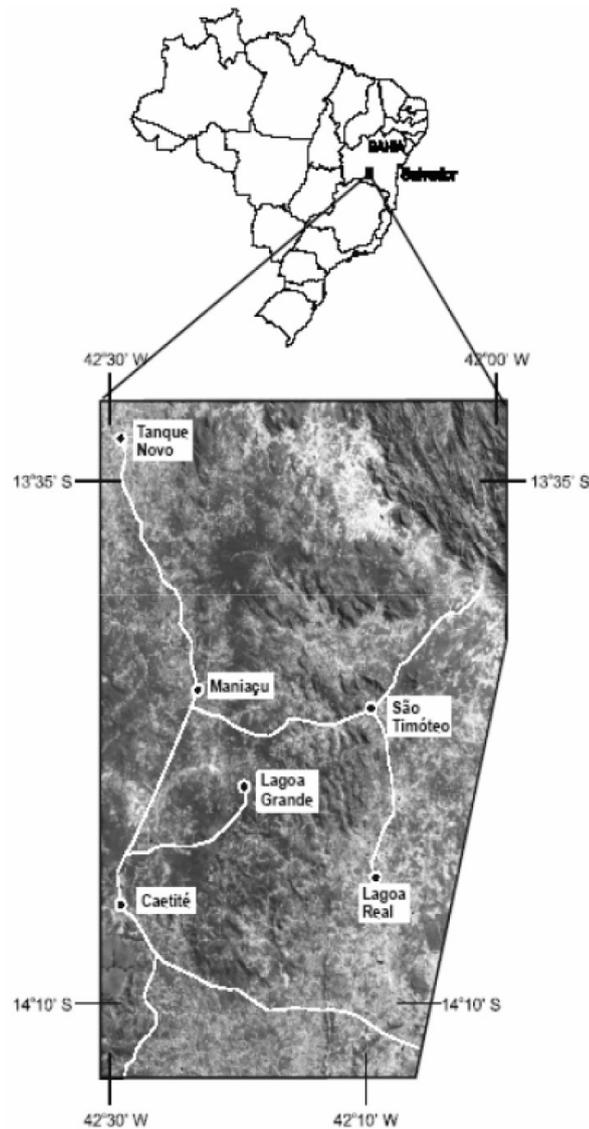
#### **3.1 A Região do Distrito Uranífero de Lagoa Real**

O Distrito Uranífero de Lagoa Real está localizado numa região montanhosa do centro-sul do Estado da Bahia, a sudoeste de Salvador e a cerca de 40 km das cidades de Caetité e Lagoa

---

<sup>1</sup>Estério da mina é o material produzido sem urânio

Real, sendo limitado pelas coordenadas geográficas com latitudes de  $13^{\circ}45'S$  e  $14^{\circ}13'S$  e longitudes de  $42^{\circ}04'W$  e  $42^{\circ}32'W$ . Possui uma área de aproximadamente  $1200 \text{ km}^2$  e está inserido no quadrilátero formado pelos municípios de Caetité, Lagoa Real, Maniaçu e São Timóteo, conforme Figura 25. Segundo dados do IBGE, 2010, a população estimada na região é de 102 544 mil habitantes [59].



**Figura 25:** Localização da área do levantamento aerogeofísico do projeto São Timóteo, Bahia (gamaespectrometria e magnetometria), na imagem Landsat - 5TM [8].

O acesso rodoviário à região pode ser de várias formas: Salvador / Vitória da Conquista é feito pelas rodovias asfaltadas BR 324 e BR 116 e Vitória da Conquista/ Caetité, pela BR 030. Por Belo Horizonte, são duas as vias de acesso a região: Belo Horizonte/ Montes Claros, pela BR 040 e BR 135, Montes Claros/Guanambi, pela BR 122 e BA 122, Guanambi/ Caetité, pela BR 030, totalizando 840 km e Belo Horizonte/ Vitória da Conquista, pela BA 262 , BR 116 e BR

381, Vitória da Conquista/ Caetité BR 030, perfazendo 1150 km [1]. O acesso para a Unidade de Concentrado de urânio (INB - Caetité), saindo de Caetité, se dá pela rodovia asfaltada BA 12 até Maniaçu sendo percorridos mais 12 km de estrada sem pavimentação.

O clima no Distrito Uranífero de Lagoa Real pode ser classificado como semi árido a semi úmido a seco, com média de chuvas aproximadamente de 800mm/ano. Possui duas estações bem definidas: seca de maio a setembro e úmida de outubro a abril [59]. A temperatura nos municípios varia na faixa de 14,5°C a 33°C [59].

A vegetação dominante da região é a Caatinga, nos pontos mais elevados ocorre cerrado denso, de natureza semi-agreste e de porte médio. Em meio ao cerrado, denominado localmente de *gerais*, surgem ilhas de mata com características de floresta tropical, chamadas de capões. Além da Caatinga, a vegetação da região caracteriza-se também pela presença do Cerrado e Floresta Estacional Decidual [60].

A geologia é composta por rochas metamórficas como os granulitos, migmatitos e gnaisses dos Blocos Paramirim [61]. A unidade vulcanos sedimentar Ibitira-Brumado corresponde a rochas supracrustais, anfibolitos, formação ferrífera bandada, *gnaisse*s, *metacherts*, mármore e xistos, inclusive cinturões granito-greenstones e além disso as rochas da área de estudo exibem uma foliação milonítica heterogeneamente desenvolvida, dando origem a um arranjo de meta-granitóides isotópicos. No contexto geoeconômico, a jazida do mineral urânio do Distrito Uranífero de Lagoa Real possui mineralização monometálica de urânio, tendo como rocha hospedeira a Albitito metassomático, tipo metassomatito granítico cálcio sódico [62].

O relevo é composto por três unidades principais: a unidade plano, que é a porção topográfica mais elevada; a unidade encosta que é a porção topográfica intermediária; e as baixadas aluvionares que ocupam as calhas e planícies de inundação das principais drenagens da região [60]. As baixadas aluvionares fazem parte das calhas dos vales e planícies de inundação e se relacionam com as principais drenagens da região, sendo preenchidas por sedimentos aluvio-coluvionares, de composição areno-argilosa de granulometria fina a média [63]. Além disso, apresenta relevo colinoso que é moldado pela ação erosiva dos rios São João e Paramirim [63].

A região é drenada pelo Riacho das Vacas que atravessa a mina de urânio, na margem direita as sub-bacias dos córregos Gameleira, Cachoeira e do Engenho e, na esquerda, o córrego Varginha, pertencentes a bacia hidrográfica do Rio de Contas. Destacando que todos os rios são de regime temporário, ou seja, secos no inverno e torrenciais na estação chuvosa [63].

A província uranífera de Lagoa Real foi descoberta durante a execução de uma série de levantamentos aerogeofísicos, entre 1976 e 1977, quando foram identificadas 19 áreas minera-

lizadas, sendo mais tarde identificadas outras 14 ocorrências uraníferas na região, totalizando 33 ocorrências que compõem a reserva [1]. O projeto básico da unidade de mineração e beneficiamento de urânio em Caetité-BA foi concluído em 1996, definido como uma lavra a céu aberto na Jazida de Cachoeira, Figura 26, com potencial inicial de gerar cerca de 400 toneladas de *yellow cake*, onde a INB tem por meta dobrar a sua produção com a mineração subterrânea da mina [1].



**Figura 26:** Jazida da Cachoeira. Bancadas de 5 metros de altura e bermas de 3 metros de largura. Profundidade de 50 metros. (Outubro de 2003)[9].

A INB - Caetité, Figura 27, iniciou suas atividades no ano de 2000 e é explorada até hoje, abastecendo as usinas nucleares brasileiras de Angra 1 e 2. É um empreendimento minério-industrial empreitado através de um consórcio de embresas brasileiras, onde a atividade de mineração e produção do *yellow cake* é executada pelas Indústrias Nucleares do Brasil (INB), controlada pela Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) e subordinada ao Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI) [1]. A área ocupada pela INB localiza-se no Distrito de Maniaçu, pertencente ao Município de Caetité, tendo em suas proximidades várias comunidades, dentre elas a de Juazeiro e de Varginha.



**Figura 27:** Vista aérea da unidade de mineração e beneficiamento de urânio URA-Caetité [1].)

O Município de Caetité localiza-se a 757km da capital da Bahia (Salvador), possui altitude de 825m com temperatura média anual de  $21,4^{\circ}C$  e fica situado cerca de 20km a nordeste da INB. No censo 2010, o município de Caetité possuía população de 47.515 habitantes, sendo 21.631 habitantes moradores da zona rural. Na zona rural a população se ocupa com a criação de gado e cultivo de mandioca, feijão, cana-de-açúcar, milho dentre outros produtos [59].

O abastecimento de água na zona urbana do município é fornecido pela Empresa Baiana de Saneamento Básico - EMBASA através da captação a partir de uma represa no Rio do Antônio. Na zona rural, a água consumida pela população e de uso na agricultura não é tratada, sendo proveniente de diversos poços artesanais e rios, incluindo água do Riacho das Vacas localizado na zona rural do município de Caetité.

No caso do Distrito Uranífero de Lagoa Real, a INB informa que a concentração de urânio nas águas dos poços nas proximidades da INB - Caetité são monitorados desde 1990 e não houve aumento com a implantação da unidade de mineração em 2000. A INB realiza coletas várias vezes ao ano, como vemos na Figura 28, em águas dos poços, das chuvas, dos riachos [10].



**Figura 28:** Funcionário da INB fazendo a monitoração de água [10].

Entretanto, segundo o Relatório da Missão Caetité: violações de Direitos Humanos no Ciclo Nuclear em Dhesca, 2011, apesar da INB afirmar que coleta amostras de água dos poços da região em intervalos regulares de 60 ou 90 dias para análises, os moradores nunca receberam informações da empresa sobre a qualidade da água [64].

Ainda sobre a questão da qualidade da água potável dos poços da região do Distrito Uranífero de Lagoa Real, o Relatório do Greenpeace, Ciclo do Perigo: Impactos da Produção de Combustível Nuclear no Brasil [15], apresenta que existe contaminação da água por urânio na região de Caetité.

Nesse relatório, o Greenpeace chamou atenção nacional e internacional para a questão da qualidade da água na região, tendo em vista que amostras de água coletadas em poços utilizados para consumo na vila de Juazeiro, pertencente ao município de Caetité, revelaram altas concentrações de urânio [15]. Essas concentrações correspondiam ao dobro do limite estabelecido pela Organização Mundial de Saúde (OMS) estando acima do índice previsto pela legislação brasileira do Conselho Nacional de Meio Ambiente (CONAMA), que é  $0,02\text{mgU/L}$ , cerca de  $20\text{ppb}$  [15].

Recentemente, nessa região, foram desenvolvidas várias pesquisas com o objetivo de investigar os reais riscos que o urânio pode causar à saúde da população residente e ao meio ambiente [65, 66, 32, 67]. Esses trabalhos refletem sobre a questão da radioatividade natural e sobre a atividade de mineração e beneficiamento do urânio que ocorre no município de Caetité.

As pesquisas que selecionamos para realizar o estudo de caso neste trabalho, foram realizadas utilizando amostras de solo, água ou de dentes humanos. A partir dos resultados obtidos, conhecemos e fizemos o diagnóstico sobre a questão da exposição ao radionuclídeo urânio e seus descententes radioativos, com base nas análises das pesquisas realizadas, tendo proporcionado o monitoramento da contaminação ambiental da região de estudo.

## 3.2 Radioatividade Presente na Água e Solo da Região

Na região em estudo foi realizada pesquisa, em 2011, por Almeida, tendo como tema a dose de exposição radiométrica no entorno da mina de Caetité [65]. O objetivo principal do trabalho foi a identificação de potenciais problemas no Distrito Uranífero de Lagoa Real, onde foi avaliada a escala do impacto radioecológico ambiental resultante da mobilização de materiais da mina de urânio de Caetité - BA. Também foi determinada a concentração dos radionuclídeos  $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$  e  $^{40}\text{K}$ , baseando-se no fato de que a irradiação do corpo humano se dá a partir de fontes externas principalmente pela radiação gama emitida pelas séries do  $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$  e a partir do potássio 40.

Através da coleta de amostras de água e solo da região do Distrito Uranífero de Lagoa Real é possível verificar experimentalmente a ocorrência de radioisótopos, a taxa de dose anual de radiação a que a população de Caetité está exposta. Dessa forma, torna-se possível também verificar se a mobilização do minério na mina de Caetité está provocando contaminação ambiental com radionuclídeos naturais.

Após análise dos dados sobre a água coletada por Almeida, foi verificado que a maioria dos valores das concentrações de  $^{238}\text{U}$  encontrados nas amostras não são superiores ao limite

estabelecido pela Organização Mundial de Saúde (OMS) para água potável, que é de 15 ppb [65].

Em duas fazendas na área rural do município de Lagoa Real foram encontradas concentrações de  $^{238}\text{U}$  superiores à média de concentração determinada para a água da região de Caetité. O poço com alta concentração de urânio localiza-se na Fazenda Rebouças, situada a 100 metros de distância de outro poço que foi condenado após investigação do Greenpeace devido a alta concentração de radionuclídeo na água considerada imprópria para consumo [68].

A justificativa para interdição, segundo o Greenpeace, está relacionada com a contaminação devido às atividades da mineração de urânio pela INB. Fato esse que não seria possível, pois o poço que se localiza na Fazenda Rebouças, cerca de 20 km ao norte do centro de Caetité, não fica próximo da unidade da INB, pois a INB explora a parte da mina cujo corpo fica a leste, 20 km a nordeste de Caetité. O que pode ter ocorrido deve-se ao fato da proximidade da Fazenda Rebouças a um dos corpos da mina de urânio da região ainda não explorado, e processos naturais de movimentação desses radionuclídeos do solo para a água podem ter causado a contaminação.

São feitas as seguintes considerações no trabalho de Almeida: pelas posições geográficas da unidade da INB - Caetité e da Fazenda Rebouças não há conexão hidráulica, pois as rochas da região impedem a passagem de água de um lençol para outro, então a Fazenda Rebouças deve conter naturalmente altas concentrações de  $^{238}\text{U}$  em seu solo que, através de processos naturais de lixiviação, podem alcançar o lençol freático de onde se coleta a água para seus moradores. Assim, não é provável que a INB seja responsável pela alta concentração do  $^{238}\text{U}$  [65].

Podemos perceber que amostras de solo coletadas no Distrito de Maniaçu encontraram valores bastante próximos ao indicado pela North American Shale Composite (NASC) para concentração de  $^{238}\text{U}$  [65]. Os valores do radionuclídeo do  $^{232}\text{Th}$  foram superiores aos recomendados pela NASC, com média de 30 ppm [65]. Destaca-se que as maiores concentrações dos radionuclídeos  $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$  e  $^{40}\text{K}$  foram encontradas nas amostras do solo.

Com a finalidade de avaliar a radioatividade natural em águas potáveis, de superfície e subterrâneas da região de Caetité-BA, foi desenvolvido, em 2011, por Silva, estudo para determinar as atividades alfa e beta total e as concentrações de urânio, em águas de abastecimento público, superficiais e subterrâneas da região de Caetité, Lagoa Real e parte de Livramento de Nossa Senhora [21]. Tendo em vista que a água potável é uma das principais vias de entrada de radionuclídeos no corpo humano e como a região do Distrito Uranífero de Lagoa Real é rica em minério, é importante avaliar os recursos hídricos utilizados pela população.

Embora a população urbana dos municípios de Caetité, Lagoa Real e de Livramento de Nossa Senhora utilizem água encanada e tratada provenientes do abastecimento público, na zona rural a população utiliza água para consumo e irrigação, dentre outras atividades, sem nenhum tipo de verificação radiométrica [69]. Outro fator relevante na região está relacionado aos longos períodos de estiagem e da intermitência dos rios da região, o que leva a abertura de poços e cisternas para o aproveitamento das águas subterrâneas do cristalino e de pequenas represas, reservatórios e barragens que são abastecidos durante a ocorrência das chuvas que, na região de estudo, se caracteriza por elevada variabilidade na distribuição espacial e temporal [69].

Verificamos que após as análises das amostras coletadas no período de chuvas, somente um poço tubular, localizado na zona rural do município de Lagoa Real, apresentou concentração alfa total acima do recomendado pela OMS e determinações do Ministério da Saúde (MS) que é de  $0,5Bq/L$  [67]. Na análise para a atividade beta total, das amostras analisadas três apresentaram valores superiores ao recomendado pela OMS e MS que é de  $1Bq/L$ , sendo duas referentes a dois pontos de coleta na zona rural de Lagoa Real e uma no mercado municipal da cidade de Lagoa Real. Com relação à concentração de urânio no município de Caetité, dois pontos na zona rural apresentaram valores acima dos limites do Conselho Nacional do Meio Ambiente (CONAMA).

No período seco, ao serem analisadas as amostras para avaliação da atividade alfa total, foram encontrados valores superiores ao recomendado pela OMS e MS em um ponto situado no povoado de Juazeiro, na zona rural de Caetité. No ponto de Lagoa Real, houve uma redução dos valores encontrados no período chuvoso [67]. Em relação a atividade beta total, as três amostras que apresentaram concentrações acima de  $1Bq/L$  foram as mesmas do período chuvoso. O ponto de Caetité citado também apresentou concentração de urânio acima dos valores recomendados pela CONAMA para água filtrada e não filtrada [67].

A sazonalidade não interferiu significativamente nos resultados dos níveis de radioatividade alfa e beta total e nas concentrações de urânio na região de Caetité, Livramento de Nossa Senhora [67]. A maioria dos resultados encontrados estão abaixo do nível de orientação, de  $15\mu.L$  recomendado pela OMS em 2008 e CONAMA. Diante disso, as pesquisas indicam que a presença de radionuclídeos, na região do Distrito Uranífero de Lagoa Real, independe da atividade de mineração e que provavelmente se dá pela concentração natural do radionuclídeo urânio na água e solo [65, 67].

### 3.3 Contaminação Ambiental por Urânio em Caetité

Em 2007, foi desenvolvido estudo sobre a contaminação ambiental por urânio no município de Caetité - BA, utilizando dentes como bioindicadores [32]. O objetivo principal do trabalho refere-se à avaliação da contaminação por urânio que estão expostas às populações residentes em áreas contaminadas, ou próximas a agentes contaminadores, através da quantificação dos níveis desse elemento em dentes [32].

Tanto o urânio como outros metais pesados têm afinidade com os ossos, podendo depositar-se nesses órgãos substituindo o cálcio por serem acumulados em grandes proporções [33]. Isso ocorre devido à afinidade iônica uma vez que o osso é um dos mais importantes acumuladores biológicos de radionuclídeo de vida longa e, quanto maior for a meia-vida e mais lento for o decaimento, mais lento será a sua eliminação do corpo [69].

Dentes humanos são utilizados em pesquisas em substituição a ossos humanos, por possuírem a mesma afinidade iônica por metais e por serem de fácil aquisição [69]. Além disso são bioindicadores de exposição crônica a metais pesados.

Os residentes do município de Caetité apresentaram, em média, incorporação de urânio superior aos outros municípios. A concentração de urânio medida em Caetité é cerca de 2 vezes maior que em Lagoa Real e 5 vezes maior do que em Igaporã [32]. Com relação a Caetité, foi verificado que a concentração média dos seus residentes equivale a 52,3 ppb<sup>2</sup> que é 100 vezes superior que a média mundial 0,5 ppb [33]. Além disso, comparando com a ingestão média mundial de urânio através de alimentos e água que é igual a 1 e  $2\mu U/dia$ , em Caetité esses valores seriam superiores a 100 e  $200\mu U/dia$ .

Isso sugere dizer que quanto maior a proximidade com a Unidade de Concentrado de Urânio (INB - Caetité) maior a contaminação ambiental. Assim, as populações da região de estudo, em maior destaque a de Caetité, estão sujeitas a riscos radiobiológicos bastante superiores a outras regiões do Brasil e do resto do mundo. Além disso, como existe a correlação entre incorporação e ingestão, a concentração de urânio na dieta de alimentos e água dos residentes de Caetité é igualmente muito elevada .

Além da pesquisa realizada por Prado, em 2007, usando dentes como bioindicadores, no ano de 2011, foi realizada pesquisa sobre a dose devido à incorporação de radionuclídeos pela população do entorno de minas de urânio brasileiras também usando dentes como bioindicadores. Sendo que, em 2011, o trabalho de Guimarães verificou a concentração dos isótopos naturais de meia-vida longa,  $^{238}U$ ,  $^{232}Th$  e do  $^{40}K$  [32, 66].

---

<sup>2</sup>ppb - partes por bilhão

Sabemos que a atividade de mineração de urânio pode elevar a concentração de materiais radioativos naturais o que leva a produzir um aumento da radioatividade de fundo, comprometendo tanto o meio ambiente quanto a saúde da população local [69]. Diante disso, verificamos que o trabalho realizado por Guimarães se propõe a avaliar a escala do impacto radioecológico ambiental na atividade de mineração da mina e em seu entorno, dando ênfase na mineração de urânio no município de Caetité [66].

Em Caetité, os resultados encontrados para a concentração de  $^{238}\text{U}$  nas amostras de dentes da população foi na média de  $0,007 \text{ ppm}^3$ , inferior ao valor de referência para o mesmo radionuclídeo, publicada pela (UNSCEAR), que para ossos humanos é de  $0,008 \text{ ppm}$  [18]. Dessa forma a população de Caetité não estaria sujeita a uma maior exposição à radiação causada pelo radionuclídeo  $^{238}\text{U}$  incorporado [69].

Mas com relação às concentrações de  $^{232}\text{Th}$  na região, estas estão acima do valor de referência publicado pela UNSCEAR (2008). Já para as concentrações do  $^{40}\text{K}$  os valores foram baixos e isso se deve ao fato do potássio, em sua maioria, se acumular nos músculos e não nos dentes.

Diante disso, podemos dizer que como o solo da região é rico em urânio, provavelmente a elevada concentração do radionuclídeo e a incorporação nos dentes de radioisótopos pela população de Caetité é de origem natural. Isso significa dizer que não se pode afirmar que a atividade de mineração e beneficiamento do urânio na região em estudo tem aumentado a radiação de fundo e concentração do urânio.

### 3.4 Avaliação de Impactos Ambientais

A partir do estudo realizado com base nas abordagens dos pesquisadores, foi possível obter uma visão geral sobre a questão da contaminação por radionuclídeos na região do Distrito Uranífero de Lagoa Real [69]. Com relação a concentração média de  $^{238}\text{U}$  nas amostras de dentes da população de Caetité, encontramos no trabalho de Prado [32], o equivalente a  $52,3 \text{ ppb}$ , que é 100 vezes superior que a média mundial  $0,5 \text{ ppb}$ . Enquanto que em Guimarães [66], equivale a  $0,007 \text{ ppm}$ , inferior ao valor de referência para o mesmo radionuclídeo, publicada pela UNSCEAR, 2008, que para ossos humanos é de  $0,008 \text{ ppm}$  [18]. Portanto, esses resultados divergem, uma vez que o valor encontrado por Prado [32], é 7 vezes maior do que o valor de referência da UNSCEAR e 8 vezes maior do que o valor encontrado no trabalho de Guimarães [66], 2011.

---

<sup>3</sup>ppm - partes por milhão.

Sobre a ingestão média de urânio através de alimentos e água pela população de Caetité, para Prado et. al. [32], comparando-a com a ingestão média mundial que é igual a 1 e  $2\mu U/dia$ , em Caetité esses valores seriam superiores a 100 e  $200\mu U/dia$ , e como existe a correlação entre incorporação e ingestão, a concentração de urânio na dieta de alimentos e água dos residentes de Caetité é igualmente muito elevada. Já em Guimarães et. al. , a população de Caetité não estaria sujeita a uma maior exposição à radiação causada pelo radionuclídeo incorporado. Assim sendo, há divergência entre os trabalhos sobre a incorporação em dentes por urânio, através da ingestão de alimentos e água, pela população de Caetité [32, 66].

Levando em conta a concentração de urânio na água na região de estudo, das pesquisas abordadas temos que, em Almeida , dois pontos de coleta localizados em duas fazendas na área rural do município de Lagoa Real apresentaram concentrações de  $^{238}U$  superiores à média de concentração determinada para a água da região de Caetité [65]. Em Silva, no período chuvoso, dois pontos localizados na zona rural do município de Caetité, apresentaram valores acima do limite do CONAMA e, no período seco, apenas um ponto apresentou concentração de urânio acima dos valores recomendados pela CONAMA, mas não da OMS [67]. Deste modo, verificamos que existe concentração de urânio nas águas da região do Distrito Uranífero de Lagoa Real, sendo que no trabalho de Silva, a concentração foi encontrada no município de Caetité e na pesquisa de Almeida a concentração de urânio foi encontrada no Município de Lagoa Real [21, 65].

Com relação à Atividade Alfa Total e à Atividade Beta Total na região de estudo somente no trabalho de Silva, 2011, houve análises, tendo sido constatado que, no período chuvoso, apenas um poço tubular, localizado na zona rural do município de Lagoa Real, apresentou concentração alfa total acima do recomendado pela OMS e determinações do Ministério da Saúde (MS) [67]. Na análise para a atividade beta total, das amostras analisadas, três apresentaram valores superiores ao recomendado pela OMS e MS que é de  $1Bq/L$ , sendo duas referentes a dois pontos de coleta na zona rural de Lagoa Real e uma no mercado municipal da cidade de Lagoa Real [67].

No entanto, no período seco, foram encontrados valores para atividade alfa total superiores ao recomendado pela OMS e MS em um ponto situado no povoado de Juazeiro na zona rural de Caetité. No ponto de Lagoa Real, houve uma redução dos valores encontrados no período chuvoso [67]. Em relação à atividade beta total, as três amostras que apresentaram concentrações acima de  $1Bq/L$  foram as mesmas do período chuvoso [67].

Em se tratando da concentração de urânio no solo da região o único trabalho que analisou solo foi o de Almeida, que indica que um ponto localizado no Distrito de Maniaçu obteve valor

bastante próximo ao indicado pela NASC.

Para concentração de tório na região, o trabalho de Almeida, em análise de solo, afirma que a presença do radionuclídeo  $^{232}\text{Th}$  foi superior ao recomendado pela NASC, com média de 30 ppm, exceto nos da zona rural de Lagoa Real e em dois pontos no município de Caetité [65]. Em Guimarães, as concentrações de  $^{232}\text{Th}$  na região estão acima do valor de referência publicado pela UNSCEAR (2008) [66]. Logo existe concentração de  $^{232}\text{Th} \times 10^{-3}$  em média de  $45 \pm 17$  na região do Distrito Uranífero de Lagoa Real.

Com relação à contaminação por atividade de mineração e beneficiamento do urânio pela INB-Caetité, temos que, quanto maior a proximidade com a unidade da INB-Caetité maior a contaminação ambiental [69]. Entretanto a pesquisa realizada por Prado não conclui que a atividade de mineração é responsável pela contaminação e justifica que o solo da região é rico em urânio [32].

Em Guimarães, a incorporação nos dentes de radioisótopos pela população de Caetité é de origem natural, não tendo influência da atividade de mineração e beneficiamento do urânio da região [66].

Já Almeida indica que, pelas posições geográficas da unidade da INB - Caetité e da Fazenda Rebouças, onde localiza-se o ponto de coleta de água, com alta cocentração de urânio, não existe conexão hidráulica com a unidade da INB - Caetité, tendo em vista que as rochas da região impedem a passagem de água de um lençol freático para outro [65]. Então, a Fazenda Rebouças deve conter naturalmente altas concentrações de  $^{238}\text{U}$  em seu solo que, através de processos naturais de lixiviação, podem alcançar o lençol freático de onde se coleta a água para seus moradores [69]. Como a mina explorada lacializa-se no município de Caetité, e a contaminação por urânio se dá no ponto situado em Lagoa Real, então não é provável que a unidade da INB - Caetité seja responsável pela alta concentração do  $^{238}\text{U}$ .

Por fim, Silva mostra que os níveis altos de concentração de urânio no município de Lagoa Real estão relacionados com a concentração natural desse radionuclídeo no solo e que esses valores são compatíveis com valores encontrados em regiões de alta radioatividade natural [67].

Com base nas informações obtidas a partir do estudo de caso de trabalhos de pesquisa realizados no Distrito uranífero de Lagoa Real, sobre a concentração de urânio no solo, água e dentes, e atividade alfa e beta total na água, constatamos que os resultados indicam que a contaminação da região de estudo se dá pela concentração natural do radionuclídeo urânio na região [65, 66, 32, 67].

## 4 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Neste trabalho foram desenvolvidos estudos relacionados com os aspectos da radioatividade natural, onde foi apresentado uma compreensão de toda a problemática da radioatividade no meio ambiente e os impactos provocados por ela. Apresentamos, também, informações referentes ao contexto da radioatividade de forma empírica onde, a partir de conhecimentos sobre os decaimentos múltiplos, foi possível obter a solução matemática de um série radioativa de  $k$ -membros.

Com o auxílio da mecânica quântica, abordamos modelos físicos e matemáticos versando sobre as propriedades de estados nucleares instáveis. Descrevemos ainda modelos físicos e matemáticos para os processos do decaimento múltiplos, emissão da partícula alfa e decaimento beta.

A partir dessa visão geral sobre os preceitos da radiotividade, realizamos um estudo de caso dos trabalhos de Prado, Guimarães, Almeida e Silva, realizados no Distrito Uranífero de Lagoa Real-BA. As pesquisas sugerem que não se pode responsabilizar as Indústrias Nucleares do Brasil (INB) pela contaminação da área de estudo através da atividade de mineração e beneficiamento do urânio e que, provavelmente, essa contaminação se dá devido à presença de radionuclídeos da região que se caracteriza como rica em minério do urânio. Ressaltamos que a população da região de estudo, em especial os residentes nos municípios de Caetité e de Lagoa Real, tem maior risco de contaminação por urânio e seus radionuclídeos descendentes.

O presente estudo pode contribuir para a compreensão da radioatividade como um todo. Iniciando com o conhecimento do elemento urânio, utilizado nas usinas para produção de energia nuclear, aprofundando em seguida com modelos físicos matemáticos da radioatividade, que darão um embasamento para profissionais de várias áreas, em especial aos da área ambiental e, por fim, o estudo de trabalhos relevantes realizados na região do Distrito Uranífero de Caetité contribui para que a população tenha conhecimento da real situação da radioatividade a que está exposta.

Para a compreensão da radioatividade e da física nuclear se faz necessário o conhecimento das leis físicas e de uma abordagem ambiental sobre os prós e os contras de suas aplicações decorrente da sua importância no mundo contemporâneo. Dessa forma, se faz necessário a ampliação de pesquisas no campo teórico e experimental envolvendo a essência da radioatividade e o estudo dos impactos ambientais.

Verificamos a importância de se conhecer os fundamentos da radioatividade, por isso sugerimos em trabalhos futuros ampliação do estudo do decaimento beta e o desenvolvimento do estudo do decaimento gama com base na teoria de campos. Além disso, sugerimos o desenvolvimento de pesquisas no campo experimental em outros pontos de coleta de água, solo, em alimentos e materiais de construção do Distrito Uranífero de Lagoa Real para uma melhor compreensão sobre a alta concentração de radionuclídeos, e se esta é de origem natural ou tem se elevado por ação humana.

## APÊNDICE A – Decaimentos Múltiplos

No presente apêndice iremos resolver explicitamente o sistema de equações diferenciais acopladas para o caso  $k = 4$  indicando a solução para o caso  $k = 5$ . Isso nos permitirá compreender a solução apresentada no Capítulo 2, Página 27.

Primeiro consideremos o caso em que temos quatro elementos radioativos, ou seja,  $k = 4$  onde a série radioativa é dada por

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3, \\ \frac{dN_4}{dt} = \lambda_3 N_3. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Precisamos determinar o valor de  $\lambda_3 N_3$  assim resolvemos a equação diferencial

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo  $N_2$  da equação (2.27) temos

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) - \lambda_3 N_3. \quad (\text{A.3})$$

Passando  $\lambda_3 N_3$  para o primeiro lado e multiplicando toda equação por  $e^{\lambda_3 t}$  obtemos

$$\frac{dN_3}{dt} e^{\lambda_3 t} + \lambda_3 N_3 e^{\lambda_3 t} = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) e^{\lambda_3 t}. \quad (\text{A.4})$$

Integrando em ambos os lados, obtemos:

$$N_3 e^{\lambda_3 t} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} N_1(0) e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_1(0) e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t} + E. \quad (\text{A.5})$$

De acordo com a condição inicial (2.7)  $t = 0$  e  $N_3(0) = 0$  então a constante  $E$  é dada por

$$E = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} N_1(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_1(0), \quad (\text{A.6})$$

$$E = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_1(0). \quad (\text{A.7})$$

Assim temos

$$N_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_1(0) e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_1(0) e^{-\lambda_3 t}. \quad (\text{A.8})$$

Encontrada a equação que representa  $N_3$  substituímos agora em  $\frac{dN_4}{dt} = \lambda_3 N_3$

$$\frac{dN_4}{dt} = \lambda_3 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \lambda_3 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_1(0) e^{-\lambda_2 t} + \lambda_3 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_1(0) e^{-\lambda_3 t}. \quad (\text{A.9})$$

Integrando ambos os lados da equação temos

$$N_4 = -\frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_1(0) e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_1(0) e^{-\lambda_3 t} + F, \quad (\text{A.10})$$

onde  $F$  é outra constante.

De acordo com a condição inicial (2.7)  $t = 0$  e  $N_4(0) = 0$  assim

$$N_4(t) = N_1(0) \left( -\frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_3 t} + 1 \right). \quad (\text{A.11})$$

A solução do sistema (A.1) que representa  $k = 4$  onde  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}, \\ N_2(t) = N_1(0)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_2 t}\right), \\ N_3(t) = N_1(0)\left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}e^{-\lambda_2 t} \right. \\ \quad \left. + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}e^{-\lambda_3 t}\right), \\ N_4(t) = N_1(0)\left(-\frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}e^{-\lambda_2 t} \right. \\ \quad \left. - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}e^{-\lambda_3 t} + 1\right). \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

Por analogia com os casos anteriores, não é difícil ver, através do Software Maxima [50], que para o caso  $k = 5$ , com  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$  chegamos ao resultado

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}, \\ N_2(t) = N_1(0)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)}e^{-\lambda_2 t}\right), \\ N_3(t) = N_1(0)\left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}e^{-\lambda_2 t} \right. \\ \quad \left. + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}e^{-\lambda_3 t}\right), \\ N_4(t) = N_1(0)\left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)}e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right. \\ \quad \left. e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)}e^{-\lambda_3 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right. \\ \quad \left. e^{-\lambda_4 t}\right), \\ N_5(t) = N_1(0)\left(-\frac{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)}e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right. \\ \quad \left. e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)}e^{-\lambda_3 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right. \\ \quad \left. e^{-\lambda_4 t} + 1\right). \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

## APÊNDICE B – Resolução da Equação da Amplitude

Com a finalidade de resolver a equação (2.50) da amplitude, seção 2.3, página 33, dada por

$$A(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^{+\infty} e^{i\left(\frac{E-E_0}{\hbar} - \frac{\lambda}{2}\right)t} dt, \quad (\text{B.1})$$

iremos inicialmente resolver a integral  $\int_0^{+\infty} e^{i\left(\frac{E-E_0}{\hbar} - \frac{\lambda}{2}\right)t} dt$ . Consideramos  $\frac{(E-E_0)}{\hbar} = X$  para facilitar os cálculos. Assim escrevemos a integral como

$$\int_0^{+\infty} e^{i\left(\frac{E-E_0}{\hbar} - \frac{\lambda}{2}\right)t} dt = \int_0^{+\infty} \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt + i \int_0^{+\infty} \text{sen} Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt, \quad (\text{B.2})$$

E com a finalidade de facilitar os cálculos iremos resolver cada integral separadamente. Inicialmente iremos resolver a  $\int_0^{+\infty} \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt$  pelo método de integração por partes, então

$$\int \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = -\frac{2}{\lambda} \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} - \frac{2X}{\lambda} \int \text{sen} Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt. \quad (\text{B.3})$$

Aplicando novamente o método de integração por partes temos

$$\int \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = -\frac{2}{\lambda} \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} + \frac{4X}{\lambda^2} \text{sen} Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} - \frac{4X^2}{\lambda^2} \int \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt, \quad (\text{B.4})$$

equivalente a

$$\left(1 + \frac{4X^2}{\lambda^2}\right) \int \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = -\frac{2}{\lambda} \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} + \frac{4X}{\lambda^2} \text{sen} Xte^{-\frac{\lambda t}{2}}, \quad (\text{B.5})$$

assim

$$\int_0^{\infty} \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = -\frac{2\lambda}{4X^2 + \lambda^2} \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} + \frac{4X}{4X^2 + \lambda^2} \text{sen} Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} \Big|_0^{\infty}, \quad (\text{B.6})$$

logo

$$\int_0^{\infty} \cos Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = -\frac{2\lambda}{4X^2 + \lambda^2} \quad (\text{B.7})$$

Como resolvemos a integral (B.7) precisamos agora resolver a integral  $\int_0^{+\infty} \text{sen}Wte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt$ . Utilizando o mesmo processo, ou seja o método de integração por partes obtemos que

$$\int \text{sen}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = -\frac{2}{\lambda} \text{sen}Wte^{-\frac{\lambda t}{2}} + \frac{2X}{\lambda} \int \text{cos}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt. \quad (\text{B.8})$$

Aplicando novamente o método de integração por partes temos

$$\int \text{sen}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = -\frac{2}{\lambda} \text{sen}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} - \frac{4X}{\lambda^2} \text{cos}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} - \frac{4X^2}{\lambda^2} \int \text{sen}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt, \quad (\text{B.9})$$

que corresponde a

$$\left( \frac{\lambda^2 + 4X^2}{\lambda^2} \right) \int \text{sen}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = -\frac{2}{\lambda} \text{sen}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} - \frac{4X}{\lambda^2} \text{cos}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}}, \quad (\text{B.10})$$

assim

$$\int_0^{+\infty} \text{sen}xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = -\frac{2\lambda}{4X^2 + 1} \text{sen}Xte^{-\frac{\lambda t}{2}} - \frac{4X}{4X^2 + \lambda^2} \text{cos}xte^{-\frac{\lambda t}{2}} \Big|_0^{\infty}, \quad (\text{B.11})$$

logo

$$\int_0^{+\infty} \text{sen}xte^{-\frac{\lambda t}{2}} dt = \frac{4X}{4X^2 + \lambda^2} \quad (\text{B.12})$$

Após ter encontrado as soluções das integrais (B.7) e (B.12) obtemos a solução da integral (B.2)

$$\int_0^{+\infty} e^{\left(i\frac{(E-E_0)}{\hbar} - \frac{\lambda}{2}\right)t} dt = -\frac{2\lambda}{4X^2 + \lambda^2} + \frac{4Xi}{4X^2 + \lambda^2} \quad (\text{B.13})$$

Dessa forma encontramos a resolução da integral da equação (B.1) basta agora substituí-la para determinar a amplitude  $A(E)$ .

Sabendo-se que

$$A(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^{+\infty} e^{\left(i\frac{(E-E_0)}{\hbar} - \frac{\lambda}{2}\right)t} dt, \quad (\text{B.14})$$

para encontrar o valor da amplitude  $A(E)$  substituiremos o resultado da integral e o valor de  $W$  que fica da seguinte forma

$$A(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left( -\frac{2\lambda}{4\frac{(E-E_0)^2}{\hbar} + \lambda^2} + \frac{4i\frac{(E-E_0)}{\hbar}}{4\frac{(E-E_0)^2}{\hbar} + \lambda^2} \right). \quad (\text{B.15})$$

simplificando encontramos que

$$A(E) = \frac{-\frac{2\lambda\hbar + 4i(E-E_0)}{\hbar}}{\frac{\lambda^2\hbar^2 + 4(E-E_0)^2}{\hbar^2}} \quad (\text{B.16})$$

logo

$$A(E) = -\frac{1}{\lambda \frac{\hbar}{2} + 2\pi i(E - E_0)}. \quad (\text{B.17})$$

Assim obtemos a equação que representa a amplitude  $A(E)$ .

## **APÊNDICE C – Grandezas e suas Unidades na Radioatividade**

As antigas civilizações possuíam a necessidade de medir e como em cada país e em cada região existia um sistema de medida próprio, houve a necessidade de ser criado um sistema de medidas unificado, tendo em vista que existia muito problema no comércio e na indústria devido à diferença de valores para unidades de medir que não possuíam correspondências entre si. Diante disso, foi criado, em 1789, pela Academia de Ciência da França, o Sistema Métrico Decimal, que era um sistema de medidas baseado em constantes não arbitrárias, com três unidades básicas: o metro, o litro e o quilograma.

Entretanto o Sistema Métrico Decimal não se tornou universal e, devido aos avanços na ciência e na tecnologia, tornou-se necessário fazer medições mais precisas de modo a abranger as diversas grandezas físicas. Com isso, em 1960, o Sistema Métrico Decimal foi substituído pelo Sistema Internacional de Unidades - (SI) através da Conferência Geral de Pesos e Medidas. A versão atual do SI em português substitui a tradução do SI de 2007 que é uma tradução da versão original [70, 71] .

No SI podemos encontrar também as unidades utilizadas para expressar as grandezas relacionadas com a intensidade das fontes emissoras e os efeitos produzidos pela radioatividade [70]. Para estabelecer os princípios e os sistemas da proteção radiológica, foram desenvolvidas, por duas entidades internacionais que cooperam entre si, a ICRU (International Commission for Radiation Units and Measurements) e a ICRP (International Commission on Radiation Protection), grandezas dosimétricas específicas com a finalidade de medir tanto a exposição externa como a exposição interna do homem à radiação [13].

As radiações ionizantes são associadas a diversas grandezas dosimétricas que se apresentam em três principais categorias: grandezas físicas, grandezas de proteção e grandezas operacionais. Entretanto as grandezas de proteção e grandezas operacionais são utilizadas, desde 1985, especificamente para proteção radiológica.

As grandezas físicas descrevem as radiações externas, já as radiações internas, são mais difíceis de se estimar pois dependem de outros parâmetros relacionados a fatores anatômicos e fisiológicos do corpo humano [17]. Por isso, com a finalidade de descobrir se um dado indivíduo está dentro dos limites de exposição, se fez necessário introduzir as grandezas operacionais, para monitoração ambiental e individual e assim é possível estimar o limite superior dos valores das grandezas de proteção nos tecidos ou órgão ou no corpo exposto à radiação externa [72].

## C.1 Grandezas Físicas

### C.1.1 Atividade

A Atividade é uma grandeza física que corresponde ao número de desintegrações de uma amostra radioativa por unidade de tempo, levando em conta apenas as fontes emissoras, não se importando com o tipo de energia ou o tipo de radiação emitida. As unidades empregadas para a atividade são:

*curie* (Ci), onde  $1\text{Ci} = 3,7 \times 10^{10}$  desintegrações/s;

*rutherford* (Rd), em que  $1\text{Rd} = 10^6$  desintegrações/s

*becquerel* (Bq), sendo  $1\text{Bq} = 1$  desintegração/s  $= 0,27 \times 10^{10}\text{Ci}$  desintegrações/s. Sendo que somente a unidade *becquerel* (Bq) pertence ao SI [70].

### C.1.2 Exposição (X)

A exposição (X) é uma grandeza física que expressa a ionização pelos raios X ou gama tendo o ar como meio de interação, sendo definida apenas para fótons, numa gama de energia fixa, que interagem com o ar. Assim, em se tratando de um tecido vivo ou em outro material, é praticamente impossível medir a exposição [72].

A equação que representa a grandeza exposição (X) é dada por

$$X = \frac{\Delta Q}{\Delta m}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\Delta Q$  é a soma das cargas elétricas de todos os íons de um mesmo sinal produzidos pelo ar, e  $\Delta m$  representa a massa do volume de ar produzido quando todos os elétrons e pósitrons liberados pelos fótons da radiação X ou gama são completamente freados no ar.

A unidade empregada para a exposição no SI é o coulomb por quilograma de ar (C/kg) e a unidade tradicional é o roentgen (R). O nome roentgen é uma homenagem ao físico alemão Wilhelm Conrad Roentgen que descobriu os raios X [70].

Um roentgen mede a quantidade de radiação necessária para liberar cargas positivas e negativas de uma unidade eletrostática de carga (esu) em um centímetro cúbico de ar em pressão e temperatura normais. Assim,  $1\text{roentgen} \equiv 1\text{R} = 1\text{esu}/1\text{cm}^3$  de ar  $= 2,58 \times 10^{-4}$  C/kg de ar.

### C.1.3 Kerma

O kerma (kinetic Energy Released per unit of Mass), representado por  $K$ , mede a quantidade de energia que é transferida a partir de fótons de elétrons por unidade de massa a uma determinada posição. Sendo definido como o quociente de  $dE_{t,r}$ , por  $dm$ ,

$$K = \frac{dE_{t,r}}{dm}, \quad (\text{C.2})$$

onde  $dE_{t,r}$  é o valor esperado da soma das energias cinéticas iniciais de todas as partículas liberadas por partículas não carregadas no elemento do material de massa  $dm$  e  $E_{t,r} = E_{\text{transferida}}$  [13].

Como em boa parte dos casos práticos, o valor do kerma e o valor da dose absorvida não se diferem sensivelmente, então usa-se a kerma como uma boa aproximação da dose absorvida. Dessa forma, expressa-se a kerma com as mesmas unidades da dose absorvida. A unidade de kerma no SI utiliza o nome gray<sup>1</sup> (Gy) no lugar de joule por quilo (J/kg).

## C.2 Grandezas de Proteção

### C.2.1 Dose Absorvida

A dose absorvida ( $D$ ) é a grandeza física básica usada em proteção radiológica, utilizada para todos os tipos de radiações ionizantes e qualquer geometria de irradiação. É definida como o quociente entre a energia média depositada,  $d\bar{\epsilon}$ , absorvida por um elemento de volume do material e a massa,  $dm$ , onde  $d\bar{\epsilon}$  é a energia média cedida à matéria de massa  $dm$  por radiação ionizante [13]

$$D = \frac{d\bar{\epsilon}}{dm}. \quad (\text{C.3})$$

A unidade especial para a dose absorvida recomendada pela ICRU é o rad (*Radiation Absorbed Dose*), onde  $1\text{rad} = 100\text{erg/g} = 10^{-2}\text{J/kg}$  em que a dose de 100 erg de energia é definida por grama de matéria [73]. A unidade de energia erg é descrita mais adiante na seção 3, deste

<sup>1</sup>O gray é aplicado universalmente para todos os tipos de dosimetria da radiação ionizante, ou seja, radiação causada por campos de radiação externos X, gama, nêutrons e partículas carregadas

apêndice.

O SI utiliza o nome gray (Gy) no lugar de joule por kilograma (J/kg) para a unidade de dose absorvida, sendo que 1 Gy é a absorção de 1 J de radiação por 1 kg de matéria equivalente a 100 rad [70].

Veremos a seguir um exemplo do cálculo da dose absorvida. Exemplo: Injeta-se intravenosamente mercúrio-197 que emite radiação gama em um paciente com 74 kg. Calcule a dose absorvida pelo paciente em rad e em Gy, se a energia total absorvida pelo organismo do paciente for  $7,4 \times 10^{-2}$ J.

$$D = \frac{E}{m} = \frac{7,4 \times 10^{-2} \text{J}}{74 \text{kg}} = 10^{-3} \text{Gy}, \quad (\text{C.4})$$

encontramos então que

$$10^{-3} \text{Gy} = 10^{-3} \times 10^2 \text{rad} = 10^{-1} \text{rad} \quad (\text{C.5})$$

## C.2.2 Dose Equivalente

Danos biológicos que são causados pela radiação não dependem somente da energia depositada mas também da natureza da partícula ionizante. Levando-se em conta esses fatores foi introduzida a grandeza dose equivalente ou equivalente de dose, que possui maior significado biológico que a dose absorvida, pois permite relacionar os vários efeitos biológicos de vários tipos de radiação e medir a dose de radiação num determinado tecido.

A dose equivalente  $H_{T,R}$ , em tecidos ou órgãos  $T$  devido à radiação  $R$ , é dada por

$$H_{T,R} = w_R D_{T,R}, \quad (\text{C.6})$$

onde  $D_{T,R}$  é a média da dose de radiação absorvida  $R$  em tecidos  $T$  e  $w_R$  é o fator de ponderação da radiação. No caso de existirem radiações e energias com distintos valores de  $w_R$ , o valor da dose equivalente total no órgão ou no tecido  $T$  é dado por

$$H_T = w_R D_{T,R} \quad (\text{C.7})$$

Para compreender este efeito, a ICPR introduziu os fatores de ponderação  $w_R$  da radiação, sendo este fator adimensional e independente do órgão ou tecido [12]. A Tabela 3, apresenta os valores de  $w_R$  para os diferentes tipos de radiação

No SI a unidade da dose equivalente é o Sievert (Sv) no lugar de joule por kilograma (J/Kg) [70]. O nome da unidade Sievert foi dado em homenagem ao médico sueco Rolf Maximilian

**Tabela 4:** O Fator de Ponderação da Radiação  $w_R$ , [12].

Radiação	$w_R$
raios-X e raios- $\gamma$	1
Elétrons e múons, todas as energias	1
Nêutrons < 10 keV	5
Nêutrons 10 keV - 100 keV	10
Nêutrons 100 keV - 2 MeV	20
Nêutrons 2 MeV - 20 MeV	10
Nêutrons > 20 MeV	5
Prótons > 2 MeV	5
Partículas- $\alpha$ , fragmentos de fissão e núcleos pesados	20

Sievert que estudou os efeitos biológicos da radiação. Os sub múltiplos do Sievert são o centisievert (cSv) que é a centésima parte do sievert, 1/100; o milisievert (mSv) a milésima parte do sievert, 1/1000 e o microsievert ( $\mu$  Sv), a milionésima parte do sievert, 1/1000000.

A seguir temos um exemplo da dose equivalente referente à ingestão por uma pessoa de uma pequena quantidade de trítio.

Exemplo: Uma pessoa ingere uma pequena quantidade de trítio que emite radiação beta de 18 keV. A dose média absorvida pelo tracto gastrointestinal é de 500 mrad. Determine a dose equivalente em rem e em Sv.

Solução:

$$H_{T,R} = w_R D_{T,R} \quad (\text{C.8})$$

pela tabela 4 temos que  $w_R = 1$ , logo  $H_{T,R} = D_{T,R}$  assim a dose equivalente em rem corresponde a  $H_{T,R} = 500 \text{ mrem} = 5 \text{ mSv}$ .

### C.2.3 Dose Efetiva

A dose efetiva (E) é a soma ponderada das doses equivalentes em todos os tecidos e órgãos especificados do corpo, dada pela expressão

$$E = \sum_T w_T \sum_R w_R D_{T,R} \quad \text{ou} \quad E = \sum_T w_T H_T, \quad (\text{C.9})$$

onde  $H_T$  ou  $w_R D_{T,R}$  é a dose equivalente de um órgão ou tecido  $T$  e  $w_T$  é o fator de ponderação para órgãos e tecidos [13]. A unidade para a dose efetiva é a mesma que para dose absorvida, J/kg, e seu nome especial é o sievert (Sv)[13].

A Tabela 5 apresenta os valores de  $w_T$  para os diferentes tipos de órgãos e tecidos.

**Tabela 5:** Fatores de Ponderação para Órgãos e Tecidos  $w_T$ , [13].

Tecido ou Órgão	$w_T$
Mama, Medula óssea, Pulmão, Estômago, Restantes <sup>1</sup>	0,12
Gônadas	0,08
Bexiga, Esôfago, Fígado, Tireóide	0,04
Superfície Óssea, Glândulas Salivares, Pele, Cérebro	0,01

### C.3 Grandezas Operacionais

De acordo com a ICPR, grandezas operacionais para monitoração externa podem ser definidas com características metrológicas e levando-se em conta as diferentes eficácias de danos para diferentes tipos e energia da radiação [14]. São elas: o equivalente de dose pessoal  $H_p(d)$  e o equivalente de dose ambiente  $H^*(d)$ .

As grandezas operacionais utilizam os fatores de qualidade da radiação  $Q$ , como fator de peso, em lugar dos fatores de ponderação da radiação  $w_R$ . Os fatores de qualidade de radiação são dados em função da transferência linear de energia não restrita [14]. Na tabela 6 encontra-se os valores para  $Q$ .

**Tabela 6:** Fator de Qualidade ( $Q$ ) em Função da Transferência Linear de Energia não Restrita na Água,  $L$ , [14].

$L$ na água ( $keV/\mu m$ )	$Q(L)$
< 10	1
10 a 100	$0,32La^{2,2}$
> 100	$\frac{300}{\sqrt{100}}$

<sup>1</sup>Os órgãos restantes corresponde a um conjunto de 13 órgãos e tecidos, como intestino delgado; coração; músculos; pâncreas; vesícula biliar; útero/cérvix; próstata; rins; região aérea extra-torácica; nodos linfáticos; mucosas orais timo e baço.

### C.3.1 Equivalente de Dose Pessoal

A grandeza Equivalente de Dose Pessoal ( $H_p(d)$ ) é uma grandeza operacional para monitoração individual externa, sendo o produto da dose absorvida em um ponto, na profundidade  $d$  do corpo humano, pelo fator de qualidade da radiação nesse ponto [14].

### C.3.2 Equivalente de Dose Ambiental

A grandeza  $H^*(d)$  é uma grandeza operacional para monitoração de área em ambientes de trabalho, sendo o produto da dose absorvida em um ponto pelo fator de qualidade da radiação correspondente ao que seria produzido em uma esfera de tecido equivalente de 30 cm de diâmetro, na profundidade  $d$  [14].

Para radiação fortemente penetrante, é adotada a profundidade de 10 mm e o valor obtido pode ser usado como estimativa da dose efetiva. Para radiação fracamente penetrante, é adotada a profundidade de 0,07 mm e o valor obtido pode ser usado para estimar a dose equivalente na pele e extremidades [14].

## C.4 Unidades de Energia

No SI a unidade de radiação e das grandezas ligadas ao átomo e ao núcleo é geralmente expressa em elétron-volt (eV), sendo que um eV corresponde à energia cinética adquirida por um elétron ao ser acelerado por uma diferença de potencial elétrico de 1 volt . Onde  $1\text{eV} = 1\text{V} \times 1,602 \times 10^{-19}\text{J}$  tendo por múltiplos:  $1\text{GeV}=10^9\text{ eV}$ ,  $1\text{MeV}=10^6\text{ eV}$  e  $1\text{KeV}=10^3\text{ eV}$  [70].

A teoria do eletromagnetismo aplicada à eletrodinâmica quântica e à relatividade utiliza unidades fora do SI associadas ao sistema CGS (sistema de unidades coerentes de três dimensões baseado em três unidades mecânicas: centímetro, grama e segundo) e sistema gaussiano CGS, onde o símbolo da unidade de energia erg representa a grandeza energia em que  $1\text{erg} = 10^{-7}\text{J}$  e  $1\text{eV} = 1,602 \times 10^{-6}\text{erg}$  [70].

## Referências

- [1] INB - Indústrias Nucleares do Brasil “Unidades Produtoras”, <http://www.inb.gov.br/> 2013. Acesso em 10 de abril 2013.
- [2] IBRAM - Instituto Brasileiro de Mineração “Informações e Análises da Economia Mineral Brasileira”, <http://www.ibram.org.br/sites/1300/1382/00000284.pdf> 2010. Acesso em 14 de abril 2013.
- [3] INB - Indústrias Nucleares do Brasil “Reservas Brasileiras de Urânio em Tonelagem de  $U^3O^8$ ”, <http://www.inb.gov.br/> 2013. Acesso em 08 de Junho 2013.
- [4] ELETROBRAS - Centrais Elétricas Brasileiras S.A, “Reservas Nacionais de Urânio”, <http://www.elektrobras.com/> 2001. ELETROBRAS. Acesso 10 de maio 2013.
- [5] BERTULANI, A. C.; SCHECHTER, H. *Introdução à Física Nuclear*, UFRJ, Rio de Janeiro, 2007.
- [6] NEARY, G. J. “The  $\beta$  Ray Spectrum of Radium E”, *Proceedings of Physical & Engineering Sciences*, n 71, pp. 79, (1940).
- [7] EVANS, R. D. *The Atomic Nucleus*. McGraw -Hill, New York, 1955.
- [8] PASCHOLATI, E. M.; SILVA, C. L.; COSTA, S. S.; OSAKO, L. S.; AMARAL, G.; RODRIGUEZ, I. P. “Novas ocorrências de urânio na região de Lagoa Real, a partir da superposição de dados geofísicos, geológicos e de sensoriamento remoto”, *CPRM - Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais*, 2003.
- [9] FUZIKAWA, K. "Jazida da Cachoeira. Bancadas de 5 metros de altura e bermas de 3 metros de largura. Profundidade de 50 metros", *46º Congresso Brasileiro de Geologia CDTN/CNEN*, 2003.
- [10] TRANJAN, A. "Tudo que você precisa saber sobre as águas de Caetité", *DAQUI - Boletim Informativo*, INB, 2008.
- [11] INB - Indústrias Nucleares do Brasil “Histórico da Produção da INB - Caetité”, <http://www.inb.gov.br/> 2013. Acesso em 01 de Junho 2013.
- [12] ICPR, “Radiation Protection, Recommendations of the International Commission on Radiological Protection”, *Pergamon Press*, n 21, 1991.
- [13] ICPR, “The 2007 Recommendations of the International Commission on Radiological Protection”, *Pergamon Press*, n 37, 2007.
- [14] ICPR, "Resolução Nº 102, de 22 de dezembro de 2010. Posição regulatória 3.01 /002", *Diário Oficial. Ministério da Ciência e Tecnologia. República Federativa do Brasil*, 2010.

- [15] TEULE, R.; AMARAL, A.; D'ÁVILA, N.; LENER, R. "Ciclo do Perigo: Impactos da Produção de Combustível Nuclear no Brasil. Denúncia: Contaminação da Água por Urânio em Caetité - Bahia", *GREENPEACE*, 2008.
- [16] KAPLAN, I. *Física Nuclear*, Guanabara Dois, segunda edição, São Paulo, 1962.
- [17] OKUNO, E.; CALDAS, I. L.; CHOW, C. *Física para Ciências Biológicas e Biomédicas*, HARBRA, segunda edição, São Paulo, (1982).
- [18] UNSCEAR - United Nations Scientific Committee on the Effects of Atomic Radiation. Sources and Effects of Ionizing Radiation, "Radioproteção e Dosimetria: Fundamentos", *UNCEAR*, 2008.
- [19] BONOTO, D. M. *Radioatividade nas Águas da Inglaterra ao Guarani*, UNESP, São Paulo, 2004.
- [20] EISENBUD, M. *Environmental radioactivity: From Natural, Industrial, and Military Sources*, Academic Press, Orlando, 1987.
- [21] SILVA, L. S. "Avaliação da radioatividade natural em águas potáveis, de superfície e subterrâneas da região de Caetité-BA", Dissertação - Mestrado em Tecnologia e Aplicações, *USP - IPEN- Universidade de São Paulo*, São Paulo, 2011.
- [22] ICPR, "Radiation Protection, Recommendations of the International Commission on Radiological Protection", *Pergamon Press*, n 23,1993.
- [23] SANTOS, A. J. G. "Regulamentação e Decisões na Avaliação de Impacto Ambiental dos Resíduos Contendo Radioatividade", *Associação Brasileira de Energia Nuclear - ABEN. International Nuclear Atlantic Conference - INAC*, Santos - SP, 2005.
- [24] JEFFREY, P.; KOPLAN, M. D. "Toxicological Profile for Uranium", *ATSDR - Agency for Toxic Substances and Disease Registry*, Estados Unidos, 1999.
- [25] OLIVEIRA, M. A. IAEA - International Atomic Energy Agency "Uranium Exploration in Brazil - IAEA", <http://www.iaea.org> 2004. Acesso em 12 de junho 2013.
- [26] SCHMOLL, O.; HOWARD G.; CHILTON J; CHORUS I. WHO - World Health Organization, "Protecting Groundwater for Health", *WHO*, 2006.
- [27] GORDON, S. *Link Between Ore Bodies and Biosphere Concentrations of Uranium*, Atomic Energy Control Board, Canadá, 1992.
- [28] MS - Portaria Ministério da Saúde, "Dispõe sobre os procedimentos de controle e de vigilância da qualidade da água para consumo humano e seu padrão de potabilidade", *Diário Oficial*, de 12 de dezembro de 2011.
- [29] GASCOYNE, M. "High Levels of Uranium and Radium in Ground waters at Canada's Underground Research Laboratory, Lac du Bonnet", *Applied Geochemistry*, n 4, pp. 577-591, 1989.
- [30] COTRUVO J.; FAWELL J. K.; GIDDINGS M.; JACKSON P.; MAGAR Y.; NGOWI, V. F.; OHANIAN E. WHO - World Health Organization, "Uranium in Drinking-water Quality", *WHO*, 1995.

- [31] AMORIM, L. C. A. "Os biomarcadores e sua Aplicação na Avaliação da Exposição aos Agentes Químicos Ambientais", *Revista Brasileira de Epidemiologia*, São Paulo, Vol 6. n 2, 158–170, 2003.
- [32] PRADO, G. R.; NETO, J. D. T. A.; SARKIS, J. E. S.; GERALDO, L. P.; MULLER, R. M. L.; GARCIA, F.; OLIVEIRA, M. C. B.; GUEVARA, M. V. M.; RODRIGUES, G.; MESA, J.h.; RODRIGUES, T. E. "Evaluation of Incorporation from Contaminated Areas Using Teeth as Bioindicators - A case study", *Radiation Protection Dosimetry Note 130*, 2008.
- [33] PRADO, G. R. "Estudo de contaminação ambiental por urânio no município de Caetité-BA, utilizando dentes humanos como bioindicadores", Dissertação DE Mestrado em Desenvolvimento Regional e Meio Ambiente UESC - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2007.
- [34] ANEEL - Agência Nacional de Energia Elétrica, "Energia Nuclear Fontes não-renováveis", <http://www.aneel.gov.br>, 2008. Acesso em 04 de abril 2013.
- [35] MARINHO, S. "O Brasil tem um pré-sal de urânio a explorar", <http://oglobo.globo.com/economia/o-brasil-tem-um-pre-sal-de-uranio-explorar-diz-novo-presidente-da-inb-8054541> 08/04/2013. Agência O Globo. Acesso em 28 de abril 2013.
- [36] BULCÃO, L. "Angra 3 vai operar só em maio de 2018, dois anos depois do previsto", <http://g1.globo.com/> 07/06/2013. Globo.com. Acesso 10 de junho 2013.
- [37] FRANÇA, A. "INB e Galvani formalizam exploração de Santa Quitéria", *Revista Brasil Nuclear*, Ano 15, Número 35, 2010.
- [38] IBRAM - Instituto Brasileiro de Mineração "Brasil terá Mina Subterrânea de Urânio", <http://www.ibram.org.br> 2013. Acesso em 10 de abril 2013.
- [39] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics*, John Wiley, New York, 1977.
- [40] GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2011.
- [41] SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [42] PLANCK, M. "On the Law of the Energy Distribution in the Normal Spectrum", *Annalen der Physik*, Berlin, Vol. 4, pp. 553, 1901.
- [43] EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*, Editora Campus, 21ª edição, Rio de Janeiro, 1979.
- [44] STEWART, J. *Cálculo, Volume 2*, Cengage Learning, 2001.
- [45] BATEMAN, H. "The Solution of a System of Differential Equations Occurring in the Theory of Radio-Active Transformations", *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Cambridge, 423–427, 1910.

- [46] GEIGER, H.; NUTTALL, J. M. "Ranges of a particles from Radioactive Substances", *Philosophical Magazine*, n 22, 613, 1911.
- [47] CONDON, E. U.; GURNEY, R. W. "Quantum Mechanics and Radioactive Disintegration", *Nature* 122, 1928.
- [48] GAMOW, G. "Zur Quantentheorie des Atomkernes / On Quantum Theory of Atomic Nuclei", *Zeitschrift für Physik*, n 51, pp. 204, 1928.
- [49] LEVINE, I. N. *Quantum Chemistry*, Chemistry Department Brooklyn College City University of New York, quinta edição, New York, 2000.
- [50] Software Maxima, "Maxima, a Computer Algebra System", <http://maxima.sourceforge.net>.
- [51] PAULI, W. "Rapports du Septième Conseil de Physique Solvay", *Bruxelas*, 1933, *Gauthiers-Villars & Cie*, 1934.
- [52] FERMI, E. "Beta Decay", *Zeitschrift für Physik*, Springer-Verlag, n 88, pp. 161, 1934.
- [53] REINES, F.; COWAN, C. L. "Detection of the Free Neutrino; a confirmation", *Science*, v. 124, pp. 103, 1956.
- [54] REINES, F.; COWAN, C. L. "Detection of the Free Antineutrino", *Physical Review*, v. 117, pp. 159-173, 1960.
- [55] Xavier, A. M.; Moro, J. T.; Heilbron, P. F. "Princípios Básicos de Segurança e Proteção Radiológica", *Universidade Federal do Rio Grande do Sul*, Terceira Edição Revisada, 2006.
- [56] WILSON, F. L. "Fermi's Theory of Beta Decay", *American Journal of Physics*, **Volume 36**, n 12, pp. 1150–1160, 1988.
- [57] GAMOW, G.; TELLER, E "Selection Rules for the  $\beta$  Disintegration", *George Washington University*, p. 1–9, 1936.
- [58] CNEN - Comissão Nacional de Energia Nuclear, "Resolução CNEN 19/85. Gerência de Rejeitos Radioativos em Instalações Radioativas", *Diário Oficial da União* 17/12/85, 1985.
- [59] IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística "Boletim Censo 2010", <http://www.censo2010.ibge.gov.br/> 2010. Acesso em 20 de abril 2013.
- [60] SEI - Superintendência de Estudos Econômicos e Sociais da Bahia, "Informações Geoambientais", <http://www.sei.ba.gov.br/geoambientais> 2013. Acesso em 10 de julho 2013.
- [61] ARCANJO, J. B. A. "Projeto Vale do Paramirim: Estado da Bahia", *CPRM - Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais*, Salvador, 1999.
- [62] MATOS, E. C.; SILVA, J. R. A.; RUBINI, L. A. "Província Uranífera de Lagoa Real - Garantia de Fornecimento de Concentrado de Urânio (DUA) para as Necessidades Brasileiras", *Revista de Geologia*, 2003.

- [63] LAMEGO, F. F.; FERNANDES, H. M.; FRANKLIN, M. R.; FLEXOR, J.; FONTES, S. L.; PEREIRA, S. R.; NASCIMENTO, F. M. F. "Impactos de Mineralização e Sustentabilidade no Semi-árido. Estudo de caso: Unidade de Concentração de Urânio - Caetité", *XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Rio de Janeiro, 2003.
- [64] DHESCA - Plataforma Brasileira de Direitos Humanos Econômicos, Sociais, Culturais e Ambientais, "Relatório da Missão Caetité: Violações de Direitos Humanos no Ciclo do Nuclear", <http://www.dhescabrasil.org.br/> 2011. DHESCA. Acesso 04 de abril 2013.
- [65] ALMEIDA, G. M.; CAMPOS, S. S.; GENARRI, R. F.; SOUZA, S. O. "Determination of the Concentration of Radionuclides in Soil and Water Next the Uranium Mine Of Caetité-BA", *International Nuclear Atlantic Conference - INAC*, 2011.
- [66] GUIMARÃES, V. S.; BRASIL, I. M. M.; CAMPOS, S. S.; GENARRI, R. F.; ATTIE, M. R. P.; SOUZA, S. O. "Dose due the Incorporation of Radionuclides Using Teeth as Bioindicators nearby Caetité Uranium Minas", *World Academy of Science, Engineering and Technology* 80, 2011.
- [67] SILVA, L. S.; PECEQUILO, B. R. S.; SARKIS, J. E. S.; NISTI, M. B. "Uranium Concentrations in the Water Consumed by the Resident Population in the Vicinity of the Lagoa Real Uranium Province", *International Nuclear Atlantic Conference - INAC*, **Volume 1**, pp. 01–09, 2011.
- [68] ALMEIDA, G. M. "Dose de Exposição radiométrica no entorno das minas de Caetité-BA e Santa Quitéria-CE", Dissertação - Mestrado em Física, *UFS - Universidade Federal de Sergipe*, Sergipe, 2011.
- [69] OLIVEIRA, S. L.; THIBES, R. S.; CAMPOS, S. S. "Evaluation of Environmental Impacts Arising from Uranium Extraction in Lagoa Real Bahia", *International Nuclear Atlantic Conference - INAC*, 2013.
- [70] "1ª Edição Brasileira da 8ª Edição do BIPM", *Sistema Internacional de Unidades*, 2012.
- [71] "1ª Edição Brasileira da 8ª Edição Revisada do BIPM", *Sistema Internacional de Unidades*, 2007.
- [72] NOZ, M. E.; MAQUIRE JR, G. Q. "Radiation Protection, in The Health Sciences", *Word Scientific Publishing Co. Pte. Ld. Singapore*, Singapore, 2007.
- [73] ICRU, "Uranium Concentrations in the Water Consumed by the Resident Population in the Vicinity of the Lagoa Real Uranium Province", *Radiation Quantities and Units, International Commission on Radiological Units and Measurements*, 1971.