UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

**Campus Universitário de Jequié/Bahia**

**Programa de Pós-graduação**

**Educação Científica e Formação de Professores**

PPG.ECFP

Programa de Pós-Graduação em
Educação Científica e Formação de Professores

**A REVERSIBILIDADE NAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS: UM ESTUDO NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

**VANESSA MENDES BRITO**

**2020**

**VANESSA MENDES BRITO**

# A REVERSIBILIDADE NAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS: UM ESTUDO NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Formação de Professores da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia para obtenção do título de Mestra em Educação Científica e Formação de Professores.

**Orientadora: Profª. Drª. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão.**

**JEQUIÉ/BA**
**2020**

B862r Brito, Vanessa Mendes.

A reversibilidade nas operações aritméticas: um estudo no contexto da resolução de problemas / Vanessa Mendes Brito.- Jequié, 2020.

131f.

(Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Formação de Professores da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, sob orientação da Profª. Drª. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão)

1.Reversibilidade 2.Operações Aritméticas 3.Epistemologia Genética I.Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia II.Título

CDD – 372.7

Rafaella Câncio Portela de Sousa - CRB 5/1710. Bibliotecária – UESB - Jequié

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA**

**Campus Universitário de Jequié/Bahia**

**Programa de Pós-graduação**

**Educação Científica e Formação de Professores**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

# A REVERSIBILIDADE NAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS: UM ESTUDO NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

**Autora:** Vanessa Mendes Brito
**Orientadora:** Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina Rocha S. Gusmão

Esse exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Vanessa Mendes Brito e aprovada pela Comissão Avaliadora.

Data: 18/12/2020

Assinatura: ______________________________________
Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina Rocha S. Gusmão

COMISSÃO AVALIADORA

______________________________________
Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina Rocha S. Gusmão

______________________________________
Prof.ª Dr.ª Janice Cássia Lando

______________________________________
Prof. Dr. Thiago da Silva Gusmão Cardoso

**JEQUIÉ/BA**
**2020**

## Agradecimentos


Ao longo desses dois anos, muitos foram aqueles que contribuíram para esta pesquisa, seja esta contribuição de ordem acadêmica, com saberes que ajudaram a condensar as discussões aqui apresentadas, ou pessoal, acalmando a alma ou dando forças para continuar. Acredito que todos foram importantes e que cada contribuição foi significativa, de modo que sou incapaz de organizar meus agradecimentos por ordem de relevância. Assim, tentarei fazer um agradecimento cronológico, apresentando os momentos em que cada um se mostrou mais importante, mesmo que alguns dos nomes aqui citados tenham sido essenciais em todas as etapas do processo.

Primeiramente agradeço à minha família que desde muito cedo me incentivou a estudar e que me serviu de refúgio durante o mestrado. Em especial, ao meu pai, Acácio, e minha mãe, Vaneide, pelos motivos já elencados aqui e por toda a atenção dedicada a mim, sobretudo em meus períodos de férias.

Aos professores da graduação, em especial ao professor Roque Lyrio, que contribuiu de forma valiosa para este trabalho, sugerindo referências e auxiliando na análise e na seleção das definições matemáticas.

Aos colegas de trabalho do IFBA, *campus* Valença, em especial a Daniel Portela, Hilas Almeida e Larissa Feitosa, que me incentivaram em todo o processo de seleção, comemoraram a minha aprovação e a minha partida para Jequié.

Aos amigos: Helenita Sousa, por me enviar o edital de seleção do PPG-ECFP, por estar sempre presente, me apoiando e incentivando; Lucas Souza, por estar sempre à disposição para ouvir e compartilhar as experiências, além de ser meu suporte tecnológico e corrigir meu *abstract*; Ediéllen Rangel e Miéle Júnior, pela amizade e pela receptividade todas as vezes em que eu retornava para Valença; Cleide, pela amizade e parceria, desde a matrícula até a defesa; Leinad, pelo apoio e suporte na solução de alguns dos problemas mais delicados deste processo, pelos cafés, desabafos e gargalhadas; Liliane, ex-irmã de orientação pela presença tímida, mas cuidadosa; Flávio, por acreditar em mim mais do que eu mesma. A todos os demais colegas da turma de 2018.

À minha irmãzinha Martha Raíssa pelos conselhos, atenção, cuidado e, principalmente, por me ajudar a "desenganchar" na escrita e análise dos questionários, tendo o cuidado de ler e reler todo o meu trabalho, sugerir referenciais e me ajudar a ter um olhar menos severo com a minha própria escrita. Eternamente grata por todas as contribuições.

Ao meu primeiro orientador, Jorge Nascimento (Pepeu), pelo incentivo, bom humor, ensinos e disponibilidade.

A todos os professores do PPG-ECFP por todo o aprendizado que me proporcionaram, em especial aos professores Daisi Chapani, Janice Lando, Júlio Razera, Marcos Lopes, Moisés e Paulo Marcelo.

À ex-coordenadora do programa, a professora Maria Cristina (Tina) pela sensibilidade no tratamento a todos os alunos do programa.

À minha orientadora, profª Tânia Gusmão, por aceitar iniciar uma nova orientação, apesar da quantidade de orientandos que já possuía, iniciando um novo projeto comigo no segundo ano do curso. Também pela proposta do tema e pelo acompanhamento na realização desta pesquisa, com respeito e serenidade.

Aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisas em Didática das Ciências Experimentais e da Matemática (GDICEM) pelo compartilhamento de saberes.

A todos os colegas, alunos e amigos do IFBA, *campus* Jequié. Aos alunos, pelas recepções calorosas, abraços e confiança. Vocês me davam energia para perseverar e ser mais leve neste percurso. A todos os colegas de trabalho pela compreensão nas minhas ausências. À equipe multidisciplinar pela amizade, em especial à Camila pelas perguntas difíceis e por insistentemente me incentivar a fazer terapia. À colega Carla pela parceria e cuidado.

Aos colegas do IFBA, *campus* Jacobina, pelo cuidado na etapa final do trabalho, colaborando para que eu tenha mais tempo dedicado à escrita. Em especial aos colegas Ariane, Emanuel, Fabiana e Jociane.

À banca de qualificação, composta pelos professores Eurivalda, Janice e Thiago, pelas valiosas contribuições que me auxiliaram nas etapas finais do trabalho.

Às pessoas que caminharam comigo nos últimos meses de produção acadêmica, algumas delas já citadas, por se fazerem presentes em todo o processo, e, em especial, à minha prima Carla Brito, com quem compartilhei momentos difíceis na minha trajetória pessoal, mas também acadêmica, e que me auxiliou com correções na estrutura do trabalho. À amiga Ana Maria, que esteve comigo no período pós-qualificação e pôde, com a singela companhia nas caminhadas matutinas, me ajudar a ter equilíbrio para concluir meu trabalho. E, por fim, ao amigo Reza Ardian pelas conversas e pela partilha, que, mesmo sem pretensão alguma, me motivavam a continuar e a buscar melhorias a cada semana.

A todos os listados aqui e a qualquer um que não tenha sido possível nomear, meus sinceros agradecimentos. Qualquer gesto ou palavra de carinho foram importantes para mim.

# RESUMO

Esta pesquisa se insere no campo de estudos da aprendizagem da Aritmética, em particular, das operações e suas relações inversas, e foi norteada pela seguinte pergunta: como a reversibilidade influencia o desempenho dos estudantes durante a resolução de problemas aritméticos? Para respondê-la, buscamos inicialmente caracterizar a reversibilidade nas operações aritméticas, tarefa que percorreu desde estudos da Epistemologia Genética de Jean Piaget, até os conceitos e propriedades das operações aritméticas, nas perspectivas acadêmica e escolar. Procuramos também identificar aspectos do desenvolvimento da reversibilidade nas crianças do 5º ano do Ensino Fundamental a partir de três aspectos: flexibilidade, descentração e argumentação. Além disso, analisamos o desempenho destes estudantes à luz do conceito de reversibilidade, por meio de uma abordagem qualitativa de produção e análise de dados. Aplicamos, para tanto, um questionário contendo problemas aritméticos com vinte e seis estudantes de uma escola pública no município de Jequié-Ba e categorizamos suas respostas segundo aspectos da reversibilidade, bem como as técnicas utilizadas na resolução dos problemas, com operações diretas ou inversas. Os resultados apontam para uma relação entre os aspectos reversíveis e o desempenho dos alunos durante a resolução de problemas, além de uma tendência de recorrer aos métodos diretos de resolução, com uma predominância de adições e multiplicações mesmo em problemas construídos com os significados da subtração ou divisão.



**Palavras-chave:** Reversibilidade. Operações Aritméticas. Epistemologia Genética.

## ABSTRACT

This academic research is included in the field of arithmetic learning studies, particularly, of operations and its inverse relations. It was guided by the following question: how does reversibility influence students performance during their process of arithmetic problems solving? To answer this question, we initially tried to characterize reversibility in arithmetic operations starting with Jean Piaget's theory of Genetic Epistemology, including concepts and properties of arithmetic operations through academic and educational perspectives. We also tried to identify reversibility development on children who were studying in the last year of primary school by using three aspects: flexibility, decentration and argumentation. Moreover, we tried to analyze their performance in the light of reversibility concept, by a qualitative approach of data production and analysis. For this purpose, we applied an arithmetic problems questionnaire on twenty six students from 5º year of Fundamental School in Jequié-Bahia, Brazil, and we categorized their answers according to reversibility aspects as well as the strategies used on problem solving, by direct or indirect operations. The results point to a relation between the reversible aspects and the student performance during problem solving, in addition to a tendency to resort to direct methods of resolution, with a predominance of additions and multiplications even in problems constructed with the meanings of subtraction or division.



**Key-words:** Reversibility. Artithmetic Operations. Genetic Epistemology.

## Lista de Ilustrações

**Lista de quadros**

**Lista de Abreviaturas e Siglas**

| | |
|---|---|
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular |
| CEP | Comitê de Ética em Pesquisa |
| EJA | Educação de Jovens e Adultos |
| GDICEM | Grupo de Estudo e Pesquisas em Didática das Ciências Experimentais e da Matemática |
| GHEMAT | Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática |
| GHOEM) | Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática Grupo de Pesquisa História |
| HIFEM | Grupo de Pesquisa História, Filosofia e Educação Matemática |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| UESB | Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia |

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Quem já ministrou uma aula, aplicou uma atividade ou simplesmente teve a oportunidade de assistir a alguma situação desta natureza no Ensino Fundamental, em que se utilizassem problemas envolvendo as operações aritméticas, certamente já teve a oportunidade de ouvir: qual conta é para fazer? É de mais ou de menos? Esses, dentre outros questionamentos, compõem o acervo de dúvidas dos estudantes ao resolverem esses tipos de problemas. Ao refletir sobre a segunda pergunta apresentada, que se refere às operações de adição e subtração, respectivamente, pensamos em tomar como objeto de estudo uma questão em torno de como o aluno compreende as relações entre as operações, sobretudo as inversas, na intenção de trazer contribuições para o tema.

Como licenciada em Matemática, tive, em meu processo formativo, pouco contato com os anos iniciais do Ensino Fundamental, etapa que introduz o estudo da aritmética, desde o conceito de número ao estudo das quatro operações. Minha única experiência, para além da fase em que fui aluna desta etapa de ensino, foi durante meu estágio do curso Normal, a nível médio, no ano de 2005, quando atuei nas 3ª e 4ª séries. Entre os anos de 2008 a 2010, fui professora de Educação Infantil em duas instituições públicas do município de Jacobina, interior da Bahia, única etapa em que atuei como profissional do magistério, pois foi necessária a minha exoneração para cursar a licenciatura em outro município e trilhar novos caminhos.

Minha reflexão sobre o tema que aqui se apresenta só foi possível devido à participação nas discussões do Grupo de Estudo e Pesquisas em Didática das Ciências Experimentais e da Matemática (GDICEM), coordenado pela professora Tânia Gusmão. Era comum nas reuniões do GDICEM ouvir relatos sobre dificuldades com a interpretação de problemas em relação às operações inversas, problemática que tem atingido tanto os professores polivalentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental quanto aos professores de Matemática dos anos subsequentes, tendo em vista o caráter cumulativo dos conteúdos desta disciplina. Nesse sentido, investigar sobre a construção dos conceitos nos anos iniciais, bem como os processos pelos quais os alunos aprendem e utilizam o conhecimento matemático nesta etapa de ensino, não só se mostra pertinente para o licenciado em Matemática, como necessário, devido aos desafios enfrentados pela área tão conhecidos dentro e fora do meio acadêmico.

Iniciamos então uma busca por trabalhos que investigassem questões relacionadas ao ensino ou à aprendizagem da aritmética e encontramos muitas pesquisas referenciadas na Teoria dos Campos Conceituais do teórico francês Gérard Vergnaud. Percebemos que os estudos deste autor tem sido uma fundamentação valiosa para as discussões que envolvem as operações aritméticas do campo aditivo e multiplicativo, assim por ele nomeados.

Vergnaud (2014) defende que para o professor realizar eficientemente sua tarefa de estimular a criança, no sentido de promover uma aprendizagem, ele precisa conhecer, além do que já é proposto pela psicopedagogia sobre comportamento e inteligência da criança, o conteúdo a ser ensinado e suas relações com as atividades possíveis de serem desenvolvidas por elas em seu nível de desenvolvimento ontogenético.

Magina et al (2010), baseando-se nos estudos de Vergnaud e nas classificações dos problemas do Campo Conceitual Aditivo por grau de complexidade de Magina et al (2008), analisaram as estratégias e tipos de interpretação utilizados na resolução de problemas, que envolviam as estruturas aditivas, por 1021 estudantes dos primeiros anos do Ensino Fundamental, oriundos de escola pública. As autoras observaram que o desempenho dos alunos tinha uma queda significativa ao resolverem problemas classificados em maior grau de complexidade, bem como os que possuíam incongruência semântica entre as palavras-chave e a operação a ser realizada. A incongruência semântica sobre as quais as autoras se referem são problemas que, embora utilizem palavras que indiquem uma operação, em sua resolução, o aluno deverá fazer a operação inversa para obter o resultado. Assim, por exemplo, se o problema possui uma palavra-chave que remeta à ideia de adição, o aluno deverá realizar uma subtração.

Ainda sobre as estruturas aditivas, dificuldades semelhantes às encontradas por Magina et al (2010) podem ser observadas no trabalho de

Etchevarria, Campos e Silva (2015). As autoras apresentam parte dos resultados da pesquisa de doutorado da primeira, que realizou um trabalho de formação com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental, buscando avaliar o impacto desta formação no desempenho dos estudantes. A pesquisadora utilizou como fonte para as discussões formativas tanto os estudos de Vergnaud (2014) quanto as classificações de Magina et al (2008) e concluiu que a ampliação do conhecimento das professoras participantes da pesquisa contribui para uma mudança em suas práticas, pois passaram a equilibrar mais os graus de complexidade dos problemas propostos a seus alunos, apesar de ainda utilizarem em maior quantidade os problemas classificados como de menor grau de dificuldade. Já os resultados das atividades diagnósticas aplicadas com os estudantes mostraram que o desempenho deles, em relação aos problemas aditivos, foi crescente nos anos que configuraram a pesquisa.

Especificamente sobre a relação entre as operações inversas, encontramos a pesquisa de Dorneles (2013) que discute o papel do ensino na aprendizagem da relação inversa entre a adição e a subtração com alunos da EJA. No entanto, esta pesquisadora, que realizou uma intervenção utilizando problemas segundo as classificações de Vergnaud, conclui que o trabalho desenvolvido com os alunos não foi suficiente para que eles pudessem atingir um grau de compreensão das estruturas aditivas que lhes permitissem resolver as questões que utilizam a relação inversa entre a adição e a subtração. Ela argumenta que por tratar-se de jovens e adultos, em que muitos deles não frequentavam a escola há um bom tempo, a intervenção pode ter sido apressada, visto que muitos precisavam retomar conceitos e propriedades com as quais não tinham familiaridade.

Em relação à multiplicação, Azerêdo (2013), em sua tese, pesquisou sobre representações semióticas como elementos de mediação pedagógica. Sua pesquisa, que envolveu tanto alunos quanto docentes do 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, problematiza a formação do professor polivalente ao evidenciar o desconhecimento do grupo pesquisado sobre os significados da multiplicação, que na visão de algumas professoras se resumia ao ensino do algoritmo ou à ideia da soma de parcelas iguais. Segundo a autora, em todas as turmas envolvidas em sua pesquisa, a multiplicação era apresentada aos alunos como "forma simplificada da adição". Em relação ao desempenho dos estudantes na resolução de problemas, a autora mostra que a maior quantidade de erros se concentrou nas questões que envolviam o raciocínio combinatório ou a "multiplicação inversa", problema multiplicativo que envolvia um raciocínio inverso, ou seja, uma divisão.

Outro ponto destacado por Azerêdo (2013) foi o desempenho dos estudantes do 3º ano na resolução de problemas multiplicativos ter sido idêntico, ou melhor, nos problemas que envolviam conceitos de proporção, em relação ao desempenho dos alunos do 4º e 5º anos. Resultados semelhantes foram apresentados por Magina e Campos (2008) na pesquisa sobre a perspectiva de alunos e professores em relação ao conceito de fração, da qual concluíram que os prognósticos dos professores a respeito do desempenho dos estudantes estavam muito distantes da realidade, pois não houve diferença expressiva entre os resultados obtidos na 3ª e na 4ª série[1]. As duas pesquisas mostram como os professores tendem a subestimar os alunos dos anos iniciais sobre conceitos relacionados às estruturas multiplicativas, que envolvem multiplicação e divisão.

Numa perspectiva semelhante, Luna (2017) alerta sobre a costumeira ordem para o ensino das operações aritméticas. Em sua pesquisa sobre as concepções dos professores acerca das estruturas multiplicativas, a autora destaca a linearidade presente no ensino de Matemática, na qual os professores dão preferência a ensinar primeiramente o Campo Conceitual Aditivo para, posteriormente, trabalhar com os estudantes o Campo Conceitual Multiplicativo.

> É no saber-ensinar da multiplicação e da divisão que observamos que os professores tomam para si a visão de que o ensino da matemática se resume às quatro operações e ao uso primordial dos algoritmos. Somados a essa problemática, encontramos uma preferência pelo ensino do Campo Conceitual Aditivo e uma dependência desse como pré-requisito para o ensino do Campo Conceitual Multiplicativo. A prática encontra-se ancorada em asserções ou fazem parte de um contexto mais que escolar, mas de vida e formação profissional. (LUNA, 2017, p. 22)

[1] Atualmente 4º e 5º anos.

A pesquisa da autora, que investigava as implicações das concepções e crenças dos professores sobre o ensino do campo multiplicativo, concluiu que as quatro professoras participantes mantinham um padrão linear de ensino que se apoiava principalmente na tabuada, no algoritmo e na ideia da multiplicação como soma de parcelas iguais. Apenas uma professora modificou um pouco o padrão, optando por introduzir primeiro o conceito de fração em suas aulas para depois tratar da divisão, pois concluiu, refletindo sobre sua própria prática, que o ensino do conceito de fração facilitava a aprendizagem da divisão. Por fim, a autora também destaca a ênfase no ensino dos algoritmos das operações em detrimento da construção dos seus significados. Problemática análoga à apresentada em Azerêdo (2013) e que também aparece nas pesquisas de Ferraz (2016) e Silva (2014).

Silva (2014) destaca ainda que é a concepção dos professores de que o algoritmo é um pré-requisito para resolver problemas que impede o trabalho concomitante do campo conceitual aditivo com o campo conceitual multiplicativo. Segundo a autora, os algoritmos aparecem nas concepções dos professores como uma finalidade e não como um meio para resolver problemas aritméticos. Nessa perspectiva, os problemas são utilizados como uma oportunidade de exercitar o algoritmo e a linearidade do ensino das operações se mostra necessária, pois os algoritmos da multiplicação e da divisão recorrem, em sua estrutura, aos algoritmos da adição ou da subtração.

As pesquisas até então apresentadas apontam algumas causas para o baixo desempenho dos estudantes dos anos iniciais em relação à resolução de problemas aritméticos. Uma delas pode ser sintetizada como a primazia do ensino dos algoritmos em relação à construção dos significados das operações aritméticas. Esse dado em pesquisas tão recentes, como as de Azerêdo (2013), Silva (2014), Ferraz (2016) e Luna (2017), evidencia a necessidade de pesquisas voltadas para a prática docente que aprofundem as discussões sobre os fatores que têm contribuído para a permanência de uma prática que contraria os discursos pedagógicos que se aproximam, ou mesmo já tenham alcançado, o status de paradigmas desde o século passado. Muito se fala sobre a realidade da educação no Brasil, a responsabilidade lançada sobre o professor, mas parece haver uma carência de reflexões fundamentadas, metodologicamente definidas, que substanciem esses discursos. Outro fator que conseguimos sintetizar, fruto dos estudos sistemáticos das estruturas dos problemas aritméticos realizados por Vergnaud (2014) e complementados por Magina et al (2008), é a simplicidade dos problemas utilizados nas aulas de Matemática, problema que perpassa questões que vão desde os materiais didáticos utilizados na escola até a formação do professor.

Apesar de esses direcionamentos possuírem ainda perguntas a serem respondidas, a leitura das pesquisas aqui apresentadas nos ajudaram a ratificar a necessidade de investigar um aspecto que aparece de maneira muito sutil em alguns dos problemas como: a incongruência semântica, a "multiplicação invertida" e as insuficiências de significado que geram a pergunta "é de mais ou de menos?", ou seja, as relações inversas.

Identificamos nas pesquisas aqui apresentadas algumas tendências investigativas, voltadas principalmente para aspectos didáticos, para as concepções de professores e para as estratégias dos alunos nas resoluções de problemas. Embora a Teoria dos Campos Conceituais carregue em sua estrutura elementos cognitivistas como, por exemplo, os conceitos de esquema, adaptação (acomodação e assimilação), significante e significado, oriundos da Epistemologia Genética de Jean Piaget e expandidos em Vergnaud (2009), ao voltar um olhar mais atento para a conceituação e organização dos conteúdos, as pesquisas que fundamentam-se em Vergnaud dão menor ênfase aos aspectos ontogenéticos que corroboram para a compreensão dos conceitos e mais à relação entre a criança e o conceito demonstrada através de suas estratégias de resolução de problemas.

Portanto, optamos por realizar um estudo envolvendo a resolução de problemas aritméticos a partir do conceito de *reversibilidade* de Jean Piaget, por duas razões que aqui queremos destacar: por se tratar especificamente de processos de inversão e por ter sua essência em uma propriedade da álgebra dos grupos que muito corrobora para a compreensão do comportamento das operações aritméticas no domínio do Conjunto dos Números Naturais, a propriedade da *existência de simétricos*. Assim, nosso estudo foi norteado pela seguinte questão de pesquisa*: como a reversibilidade influencia o desempenho dos estudantes durante a resolução de problemas aritméticos?*

Assim, visando compreender a influência da *reversibilidade* sobre o desempenho dos estudantes na resolução de problemas aritméticos, estabelecemos os seguintes objetivos:

1) *Caracterizar a reversibilidade nas operações aritméticas;*
2) *Identificar aspectos do desenvolvimento da reversibilidade nas crianças do 5º ano do Ensino Fundamental;*
3) *Analisar o desempenho das crianças do 5º Ensino Fundamental na resolução de problemas aritméticos à luz do conceito de reversibilidade.*

Para alcançar estes objetivos, realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa com alunos do 5° ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública do município de Jequié-BA. Para a produção dos dados, utilizamos uma atividade diagnóstica com questões que nos permitissem verificar tanto o desenvolvimento de aspectos que caracterizam a *reversibilidade* quanto o desempenho dos estudantes na resolução de problemas aritméticos, os quais foram categorizados segundos características da *reversibilidade* e tipo de raciocínio utilizado na resolução dos problemas.

Assim, iniciaremos nossas discussões com uma apresentação da teoria piagetiana e do conceito de *reversibilidade*. Como já destacado aqui, a este conceito está atrelado à Álgebra de Grupos, de modo que consideramos pertinente uma apresentação dos fundamentos da aritmética que explorasse essa definição, sobretudo o axioma da *existência de simétricos*, separando, assim, um tópico para realização deste estudo. Em seguida, uma breve discussão sobre as relações entre as matemáticas acadêmica e escolar foram necessárias para introdução dos elementos pedagógicos como componentes dos conteúdos escolares e não como meros tradutores das ciências produzidas fora da escola. No tópico seguinte apresentamos a aritmética na Matemática Escolar sob a perspectiva das estruturas e significados das operações e dos documentos oficiais para o ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No segundo capítulo apresentamos os aspectos metodológicos desta pesquisa, iniciando com os referenciais utilizados para a produção e a análise dos dados. Em seguida, descrevemos os procedimentos e apresentamos os participantes da pesquisa, o questionário diagnóstico e as categorias de análise.

O terceiro capítulo é constituído pela análise dos dados produzidos. Neste, fizemos uma reflexão mais aprofundada sobre cada questão do questionário, as expectativas de resposta e os resultados obtidos, de maneira descritiva e ilustrada com alguns exemplos extraídos do material produzido.

Por fim, no capítulo IV, tecemos nossas considerações sobre os resultados da pesquisa, confrontando o conteúdo apresentado ao longo do trabalho com os objetivos propostos; as limitações e as perspectivas para pesquisas futuras.

# CAPÍTULO I – O TRATAMENTO DA REVERSIBILIDADE NAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

Cabe-nos detalhar aqui o que temos admitido por *reversibilidade* e sua aplicação no ensino de Matemática, mais especificamente na aritmética dos naturais, que é o nosso campo de estudo. Para tanto, buscaremos inicialmente apresentar uma introdução à Teoria Psicogenética de Jean Piaget para, em seguida, apresentar o conceito de *reversibilidade*. No terceiro subtópico, exploraremos a construção formal da Aritmética dos Naturais, tratando de suas propriedades e utilizando a Álgebra, por ser esta a área do conhecimento capaz de generalizar os conhecimentos aritméticos, para explanar sobre o comportamento das operações no conjunto. Faremos uma breve análise das relações entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar para, em seguida, explanar sobre o ensino deste conhecimento no Ensino Fundamental I.

## 1.1 Introdução à Teoria Psicogenética de Piaget

Intitulada pelo próprio autor de Epistemologia Genética, a teoria de Piaget foi desenvolvida e aprimorada durante décadas de pesquisa e conhecidas por meio de um vasto repertório de publicações, abrangendo artigos e livros. Biólogo de formação, Piaget desde muito cedo demonstrou interesse científico, publicando seu primeiro artigo aos 10 anos de idade e sendo convidado a ocupar o posto de conservador da coleção de moluscos do museu de Genebra quando ainda frequentava a escola secundária. Tendo recebido o grau de doutor aos 22 anos, Piaget, que sempre se interessou em investigar "o problema do conhecimento", passou a buscar treinamento e formação na área de psicologia. Assim, desenvolveu atividades acadêmicas e práticas em duas clínicas psiquiátricas, de onde tirou a inspiração para o que chamou de "método clínico[2]", utilizado futuramente em suas pesquisas. O despertar inicial para as

[2] O método clínico desenvolvido por Piaget consiste de uma observação cuidadosa e ampla do comportamento espontâneo da criança. A maioria dos seus experimentos se iniciava com a proposta de alguma tarefa, sobre a qual buscava seguir o pensamento da criança, para onde quer que ele fosse. Os questionamentos feitos à criança no processo são condicionados às suas ações, de modo que não há uma entrevista padrão. Piaget reconhece os riscos desta metodologia, em que o pesquisador pode de alguma forma sugerir algo à criança ou dar ênfase

investigações que o popularizaram foi a aplicação dos testes de Burt[3] em crianças parisienses, que o levaram a refletir sobre os processos pelos quais as crianças chegavam às respostas, sobretudo às respostas consideradas erradas (FLAVELL, 1975).

Suas primeiras pesquisas, realizadas entre 1921 e 1925 se tornaram seus experimentos mais conhecidos, e mais controversos. Segundo Flavell (1975, p. 4) Piaget ficou "imensamente surpreso com a atenção generalizada que receberam, e aparentemente um pouco decepcionado com o fato de que suas ideias iniciais pudessem ser consideradas pelos outros como uma tomada definitiva de posição". O próprio Piaget identificou erros em seu método investigativo no período, que foi sendo aprimorado pelo autor ao longo dos anos (FLAVELL, 1975). Para Flavell (1975) o fator mais importante na evolução piagetiana, tanto em termos de método quanto em construções teóricas, foi o estudo sistemático do comportamento espontâneo e eliciado dos próprios filhos, realizados com o auxílio de sua esposa Valentine Châtenay. Esses experimentos resultaram na publicação de três livros, além de artigos e resumos em várias outras publicações do autor sobre o desenvolvimento intelectual nos primeiros meses de vida.

Nos anos seguintes, com uma metodologia investigativa melhor definida, Piaget retornou ao estudo das construções intelectuais que se configuram até os anos intermediários da infância, ocasião em que desenvolveu suas pesquisas mais engenhosas e interessantes, investigando a formação do conceito de número, a noção de quantidade, movimento, velocidade, tempo, espaço, mensuração, probabilidade e lógica, em uma busca por uma compreensão da estrutura do pensamento. Tais investigações o conduziram à adoção do modelo de agrupamento, do qual Piaget extraiu o conceito de *reversibilidade* (FLAVELL, 1975). Esse modelo será apresentado ao leitor à medida que adentramos na teoria piagetiana.

---

a aspectos menos significantes do processo e admite que esses erros podem ser cometidos até por pesquisadores experientes. No entanto, Piaget defende que para a natureza de sua pesquisa o método clínico se fez necessário e que o investigador deve suprir as incertezas do método com uma crítica severa dos dados produzidos e uma sutileza interpretativa (FLAVELL, 1975).

[3] Psicólogo inglês, desenvolveu trabalhos sobre análise fatorial dos testes psicológicos e estudos sobre o efeito da hereditariedade na inteligência e no comportamento.

Nosso estudo sobre a *reversibilidade* dentro da Epistemologia Genética iniciou-se com a leitura das traduções de algumas das suas obras originais, a saber, A psicologia da inteligência (2013); A formação do símbolo na criança (2017); Abstração Reflexionante (1995). No entanto, tivemos dificuldades para compreender alguns conceitos que substanciavam sua teoria, pois muitos dos seus termos específicos emergiam nos textos sem que uma definição clara fosse apresentada. Concluímos que para compreender melhor suas discussões seria necessário conhecer uma fração maior da obra do autor, tarefa difícil de ser cumprida diante dos limites para a realização deste trabalho, a saber, o tempo para a realização de um mestrado, a própria formação da pesquisadora, licenciada em matemática, em se tratando de uma obra de psicologia.

Encontramos, porém, no livro A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget (1975), do autor John H. Flavell, uma fonte de grande valia para este trabalho, em que as ideias piagetianas foram sintetizadas e organizadas em uma sequência capaz de possibilitar uma melhor compreensão. No prefácio da obra de Flavell, Piaget declara:

> O objetivo atingido com êxito pelo professor Flavell era muito difícil e exigiu muito trabalho; não só porque tenho escrito muito no processo de pesquisa de problemas diversos [...] mas sobretudo porque não sou um autor fácil; por isso, a apresentação clara e direta que aqui encontramos certamente exigiu um imenso esforço de compreensão e de empatia intelectual. (FLAVELL, 1975, p. XI)

Assim, tomamos o livro de Flavell (1975) como uma referência segura para apresentação das ideias de Piaget, de modo que em muitos momentos, utilizaremos suas definições como referência primeira por se mostrarem mais claras e sucintas, atendendo aos objetivos deste trabalho. Embora o livro de Flavell (1975) sistematize as obras de Piaget publicadas até o início da década de 1960, uma vez que sua publicação original é datada de 1965, não percebemos nas obras que estudamos, publicadas na década de 1970, rompimentos com o que foi apresentado pelo autor. Por fim, aprofundamos o estudo sobre alguns conceitos de Piaget com o estudo do livro *Epistemologia Genética* (PIAGET, 2012).

Piaget considerava a inteligência como “uma extensão de certas características biológicas fundamentais” (FLAVELL, 1975, p. 41). O autor, que também dedicou alguns anos de sua carreira acadêmica ao estudo de moluscos e outros assuntos zoológicos afins, incorporou algumas de suas concepções sobre estas pesquisas à sua teoria psicológica. Nesse sentido, chamou de invariantes funcionais os aspectos que funcionam de maneira idêntica nas estruturas biológicas e cognitivas. Dito isso, destacam-se a *organização* e a *adaptação* como as *invariantes funcionais básicas* da teoria piagetiana (FLAVELL, 1975).

Segundo Piaget (2013), a *organização*, no desenvolvimento cognitivo, se configura como uma estruturação intelectual que estabelece relações múltiplas entre conceitos, significados e ações cognitivas. Já a *adaptação* é o equilíbrio entre as ações do organismo sobre o meio (*assimilação*) e as ações inversas, do meio sobre o organismo (*acomodação*). Na *assimilação*, o organismo incorpora o objeto aos seus esquemas de conduta, modificando-o, impondo-lhe uma estrutura própria. Esse processo assimilativo altera a estrutura do próprio organismo, sua conduta em relação ao objeto e o seu próprio ciclo assimilador. A esse outro processo de alteração dá-se o nome de *acomodação*. Portanto, a *adaptação* é a união desses dois processos e se configura como o "equilíbrio dos intercâmbios entre o sujeito e os objetos" (PIAGET, 2013, p.36).

Para Flavell (1975) os conceitos de *adaptação* e *organização* são dois lados de uma mesma moeda, pois as organizações são criadas a partir das adaptações e estas pressupõem uma coerência subjacente, a organização. Os estudos de Piaget sobre o desenvolvimento das estruturas cognitivas, o levaram a concluir que "a inteligência não passa de um termo genérico que designa as formas superiores de organização ou de equilíbrio das estruturações cognitivas" (PIAGET, 2013, p. 34).

Os conceitos até então apresentados são a essência da teoria de Piaget, pois condicionam a aprendizagem aos aspectos externos com os quais a sua estrutura seja capaz de estabelecer um intercâmbio. Ou seja, à medida que a acomodação altera a conduta do sujeito sobre o objeto e o seu ciclo assimilativo, possibilita a realização de novas assimilações. Essa concepção orienta toda a teoria, que se organiza a partir das análises de períodos ou estágios, que, por sua vez, se caracterizam por níveis de desenvolvimento cognitivo e pela relação que o indivíduo estabelece com o meio.

Outro conceito muito importante na teoria de Jean Piaget é o de *operações*, que são, para o autor, “esquemas de ação construídos pelo sujeito” (PIAGET, 2017, p. 182). Nelas, as ações cognitivas atingem um status especial, passam a ser “organizadas em totalidades coesas com uma estrutura definida e potente” (FLAVELL, 1975, p. 169) e abrangem diferentes esquemas de cognição que se relacionam entre si. Desta definição derivam os termos *pré-operacional*, *operacional concreto* e *operacional formal*, usados por Piaget para designar três dos quatro níveis de desenvolvimento cognitivo estudados pelo autor, nos quais o conceito de *operação* desempenha um papel fundamental (FLAVELL, 1975). Por não ser o foco deste trabalho, elencaremos aqui apenas algumas características básicas de cada período em uma tentativa de exprimir uma ideia geral e situar a *reversibilidade* dentro dela.

O período *sensório-motor* (0 a 2 anos) caracteriza-se principalmente por ser o desenvolvimento que parte de um nível neonatal, no qual a criança é incapaz de fazer uma diferenciação entre o eu e o mundo, para uma organização perceptiva e motora do mundo, ainda não simbólica e essencialmente prática.

No *pré-operatório* (2 a 7 anos) ocorre um desenvolvimento da função simbólica, no qual a criança é capaz de utilizar o pensamento representativo para fazer manipulações simbólicas da realidade. Nesse período, a *centração* do pensamento é uma característica marcante. Por esta razão, a criança tende a focar em um único e saliente aspecto do objeto de interação, em detrimento de outros aspectos importantes, culminando em uma distorção do raciocínio (tentaremos tornar a ideia desta distorção mais clara à medida que a teoria for melhor apresentada). Além disso, o pensamento é ainda *estático*, ou seja, embora seja capaz de focalizar as condições momentâneas de um determinado objeto, a criança tem dificuldades de captar suas condições sucessivas o que dificulta compreender transformações. Tem-se ainda o egocentrismo em relação às representações. Este se apresenta nas dificuldades demonstradas pela criança em considerar o ponto de vista do outro, em justificar o próprio raciocínio e em pensar sobre o seu próprio pensamento. O pensamento neste período ainda não é dotado da *reversibilidade* o que faz com que a criança caia constantemente em contradição ao tentar retornar a uma premissa inicial após uma sequência de operações. A *reversibilidade* do pensamento começa a se manifestar a partir do período operatório concreto (FLAVELL, 1975).

O período *operatório concreto* (7 a 11 anos) é o primeiro em que as ações cognitivas atingem o status de operações que, para Piaget, são domínios próprios dos anos intermediários da infância e da adolescência. Este período é marcado pela formação de sistemas de ações cada vez mais complexos e integrados. Mas, como o próprio nome sugere, as atividades de estruturação e organização da criança neste período são ainda orientadas para objetos e acontecimentos concretos. Assim, embora objetos e acontecimentos sejam capazes de incentivar o pensamento no sentido do que está ausente, ou potencialmente presente, o alcance deste pensamento é ainda pequeno neste período e é constituído de generalizações simples, tendo como ponto de partida sempre o real e não o potencial (FLAVELL, 1975). Por se tratar do período que compreende a faixa etária dos estudantes participantes desta pesquisa, no qual a *reversibilidade* começa a se manifestar, apresentaremos mais detalhes deste período no próximo subtópico, juntamente com a construção da ideia de *reversibilidade* para Piaget.

O último período apresentado por Piaget é o *operatório formal* (11 a15 anos). Este período tem como principal característica a capacidade de distinção entre o real e o possível, da qual derivam outras características. Segundo Flavell (1975, p. 209), "a realidade passa a ser concebida como um subconjunto especial dentro da totalidade de coisas que os dados permitem admitir como hipótese". O pensamento formal é proposicional e caracteriza também o pensamento adulto quando está em sua melhor forma cognitiva (FLAVELL, 1975).

Todas as características cognitivas apresentadas aqui possuem, para Piaget, um caráter evolutivo, o que significa "um movimento ontogenético em direção à diferenciação e ao equilíbrio entre as invariantes funcionais" (FLAVELL, 1975, p. 64). Em outras palavras, as características desenvolvidas em um determinado período continuam a se desenvolver no período subsequente.

## 1.2 A reversibilidade

Para fornecer uma imagem de como o sujeito se organiza, Piaget utilizou modelos lógico-matemáticos, os quais eram considerados pelo autor como padrões ideais de pensamento. Piaget defendia que as crianças do período *operatório concreto* apresentam características cognitivas que sugerem uma estrutura do tipo agrupamento, referindo-se à Álgebra dos Grupos (FLAVELL, 1975). Apresentaremos a seguir uma definição de Grupo:

> Um sistema matemático constituído de um conjunto não-vazio $G$ e uma operação $(x, y) \mapsto x * y$ sobre $G$ é chamado grupo se essa operação se sujeita aos seguintes axiomas:
> *associatividade*
> $(a * b) * c = a * (b * c)$;
> *existência de elemento neutro*
> existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, qualquer que seja $a \in G$;
> *existência de simétricos*
> para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$ tal que $a * a' = e$.
> Se, além disso, ainda se cumprir o axioma da
> *comutatividade*
> $a * b = b * a$, quaisquer que sejam $a$ e $b \in G$,
> O grupo recebe o nome de **grupo comutativo** ou **abeliano**. (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 138, grifo do autor)

Chamamos a atenção para o axioma denominado por Domingues e Iezzi (2003) *existência de simétricos*, o qual Piaget se referia constantemente em suas obras como *reversibilidade*. Segundo Flavell (1975, p.138), havia uma crença em Piaget de que algumas propriedades da álgebra dos grupos, especialmente a *reversibilidade*, "são válidas de maneira muito geral para os casos de adaptação, cuja forma e nível de complexidade sejam radicalmente diferentes", em outras palavras, a reversibilidade permite ao sujeito adaptar-se, equilibrar-se em um universo cada vez mais extenso e complexo. O autor exemplifica afirmando ainda que todas as ações circulares, que se caracterizam por uma ação que é seguida do retorno ao ponto de origem através da ação inversa, possuem pelo menos a característica da *reversibilidade*. Flavell (1975) sintetiza a ideia de *reversibilidade* de Piaget com a seguinte definição:

> [...] uma organização cognitiva é reversível, em oposição à irreversibilidade, quando ela é capaz de percorrer um caminho cognitivo (seguir uma série de raciocínios, uma série de transformações num determinado evento, etc.) e então inverter mentalmente a direção, para reencontrar um ponto de partida não

> modificado (a premissa inicial, o estado inicial do evento, etc.). É reversível também quando compõe, num único sistema organizado, as várias mudanças compensatórias que resultam de uma transformação, e percebendo que cada mudança é anulada pelo inverso (que a compensa), garante uma invariância ou constância que subjaz a todo o sistema. De modo geral, uma forma de pensamento que é reversível, é flexível e móvel, em equilíbrio estável, capaz de corrigir distorções aparentes através de descentrações sucessivas e rápidas. (FLAVELL, 1975, p. 161)

Além disso, entendemos que a *reversibilidade* para Piaget é a habilidade cognitiva que possibilita ao indivíduo realizar *operações*, tanto construindo os sistemas de ações capazes de produzir um efeito desejado, quanto acompanhar esse tipo de raciocínio em uma situação externa, utilizando para isso uma base cognitiva tão sólida e desenvolvida que, ao mesmo tempo em que constrói ou acompanha um determinado esquema de ação, seja capaz de pensar sobre as ações compensatórias capaz de anulá-las.

Percebe-se assim a relação entre o conceito de *reversibilidade* de Piaget e o axioma da *existência de simétricos* na definição de grupo apresentada anteriormente. Cada elemento de um grupo possui um único elemento simétrico que quando operado com o elemento de referência tem por resultado o elemento neutro da operação. Em outras palavras, o simétrico é o elemento que neutraliza um dado elemento do conjunto. Na *reversibilidade* tem-se a construção desse simétrico, ou inverso, capaz de anular uma ação ou esquemas de ações levando o objeto à sua condição inicial.

É importante deixar claro ao leitor que, embora o conceito de *reversibilidade* de Piaget se relacione com o modelo da álgebra dos grupos, o significado da *existência de simétricos*, no estudo de grupos, e a ideia de *reversibilidade*, defendida por Piaget, são essencialmente diferentes. Enquanto o axioma apresentado por Domingues e Iezzi (2003) trata da existência, dentro de um conjunto dotado de uma operação, de elementos que se anulam, ou seja, que quando operados resultam no elemento neutro do grupo, a ideia piagetiana refere-se a uma habilidade cognitiva de organização para a construção desse simétrico, ou inverso, por meio de uma sequência de passos que anulam uma sequência de transformação anterior, conduzindo o pensamento ao seu ponto de origem. Vale lembrar que Piaget utiliza o conceito de grupo como um modelo de estrutura cognitiva. Por esta razão, utilizaremos as nomenclaturas *reversibilidade* e *existência de simétricos*, para referirmo-nos, respectivamente, à habilidade cognitiva e ao axioma de grupos.

Quanto à relação com o desenvolvimento ontogenético, a *reversibilidade* em Piaget é uma característica que se relaciona profundamente com o período operatório concreto. Sobre isso, temos que:

> Piaget parece firmar, a partir de uma fundamentação experimental variada, que as crianças no período operacional concreto realmente apresentam certas qualidades cognitivas generalizadas e mais ou menos intangíveis que sugerem a presença de uma estrutura do tipo agrupamento (não encontradas nas crianças pré-operacionais). [...] Primeiro, estas crianças mais velhas são sistemáticas em seu comportamento cognitivo, ou seja, agem como se suas ações cognitivas tivessem origem num sistema de ações coerente e intercoordenado. Segundo – e Piaget é quase obsessivo a este respeito –, *suas cognições parecem impregnadas de uma ou outra expressão de reversibilidade. Para Piaget, a reversibilidade não se restringe a uma das cinco propriedades de agrupamento; ela é a propriedade central da cognição-num-sistema – aquela que dá origem a todas as demais.* (FLAVELL, 1975, p. 192, grifo nosso).

A centralização da *reversibilidade* no período operatório concreto é uma compreensão que nos permite identificá-la a partir das demais características deste período. Nesse sentido, buscaremos apresentar algumas delas, buscando encontrar os aspectos que se alinham com este conceito central.

A criança neste período demonstra possuir uma base cognitiva mais sólida, flexível, consistente e mais duradoura que a criança no nível pré-operacional. Esta base permite a formação de sistemas de ações, que configuram uma operação, em que uma ação pode anular outra, duas ações podem ser combinadas para produzir uma terceira, ou uma ação pode ser realizada a partir de uma prévia, mesmo que simples, análise de causa e efeito, ou seja, antecipando-se novas ações e consequências futuras (FLAVELL, 1975).

Um exemplo de formação desses sistemas de ações pode ser observado durante uma partida de dominó. Suponhamos a seguinte situação: em sua vez de jogar, o participante observa que nas extremidades do jogo estão os pontos um e quatro. Na sua mão, possui as pedras com os pontos quatro|um, um|dois, um|seis, seis|dois. Desconsiderando para essa análise as quantidades das demais peças já postas no jogo, para o jogador pré-operacional não há grande diferença entre dispensar sua pedra quatro|um ou dispensar as pedras um|dois ou um|seis, por não conseguir prever que a falta da peça com quatro pontos pode diminuir suas possibilidades de jogo em uma rodada futura. Já o jogador do operatório concreto é capaz de organizar suas ações, criar estratégias e optar por dispensar a pedra um|dois ou um|seis, uma vez que suas possibilidades de jogo não seriam reduzidas nesta jogada para uma rodada posterior.

Quanto ao aspecto flexível da base cognitiva, ela surge em oposição ao pensamento estático do período pré-operatório, que dificulta à criança perceber as sequências de ações que compõem uma transformação. A *flexibilidade* do pensamento permite que a criança seja capaz de compreender os passos de uma transformação dada, de modo a corrigir os pré-conceitos, dito de outro modo, os conceitos pré-concebidos nas etapas iniciais desta transformação, a partir de elementos novos que venham a surgir até a sua conclusão (FLAVELL, 1975).

Considerando sua funcionalidade e as mudanças estruturais ocorridas com o advento do período operatório concreto, é possível atribuir também à *flexibilidade*, não somente a ela, a compreensão da relação de causa e efeito, que fazem, por exemplo, os eventos narrativos da criança deixarem de ser meras sequências de acontecimentos, nos quais o uso do conectivo "e" desempenha esse papel sequencial, para tornarem-se um acontecimento único, composto de diversos elementos implicados que conduzem a narrativa àquele fim. Este estabelecimento de relações de causalidade compõe a teoria piagetiana e é inerente ao período operatório concreto (FLAVELL, 1975), mas não encontramos uma conexão direta deste aspecto com a *flexibilidade*, uma vez que a própria *flexibilidade* não possui um conceito tão bem definido nas obras lidas.

Se cruzarmos as definições aqui apresentadas de *reversibilidade* e *flexibilidade*, é fácil perceber porque a segunda é apenas um aspecto da primeira. Ora, se a *reversibilidade* permite que a criança percorra um caminho, uma série de transformações, raciocínios e, além disso, inverta esse processo de modo que encontre sua premissa inicial, isso implica que esta criança é capaz de conectar uma série de acontecimentos a um todo e estabelecer relações de causa e efeito, ou seja, possui ademais um pensamento flexível.

De maneira análoga ao fenômeno da *flexibilidade*, no operatório concreto tem-se a *descentração* do pensamento em oposição ao pensamento centrado do período anterior, que permite à criança analisar os diversos aspectos que compõem um objeto, podendo compensar e equilibrar a distorção decorrente da observação de um único aspecto saliente (FLAVELL, 1975). Usaremos o exemplo apresentado por Flavell (1975), acerca da criança ainda no período pré-operatório, para tornar mais fácil a compreensão desta característica.

> Por exemplo, embora admita que dois recipientes altos e idênticos ($A$ e $A'$) contenham quantidades idênticas de líquido, ela tende a negar esta equivalência de quantidade, quando o conteúdo $A'$ é vertido (diante de seus olhos) para um recipiente $B$, mais curto e mais largo, ou seja, ela afirma que o conteúdo $A$ é maior ou menor que o conteúdo de $B$. [...] Nesta situação, ela se centraliza apenas na largura de $B$ e diz que ele contém mais líquido "porque é mais largo" ou, então, na altura da coluna do líquido em $A$ e diz que $A$ contém mais "porque é mais alto". O que ela deixa de fazer é descentrar, ou seja, levar em conta simultaneamente a largura e a altura, não tendo, assim, elementos para raciocinar que a estreiteza de $A$ é compensada pela sua altura, e que a falta de altura de $B$ é compensada pela sua largura, etc. (FLAVELL,1975, p. 159)

Este exemplo apresentado pelo autor demonstra como o conceito de conservação está intrinsecamente ligado à *descentração* do pensamento. É importante destacar, no entanto, que, embora a criança do operatório concreto seja capaz de acompanhar, em um determinado momento, o conceito de conservação no que diz respeito a quantidades, suas estruturas cognitivas podem não ser capazes de transpor esse conceito para noções de volume, peso e tamanho em um mesmo momento. Isso se dá porque a criança precisa superar aos poucos cada aspecto do objeto observado (FLAVELL, 1975).

Relacionar o conceito de *descentração* ao de *reversibilidade* exigirá um pouco mais de esforço que o aplicado anteriormente ao tratarmos da *flexibilidade*. Por esta razão, recorreremos a um exemplo. Utilizaremos para tanto uma situação problema que compõe a atividade diagnóstica aplicada nesse estudo:

João e Bruno estavam brincando com as operações aritméticas.

**Na primeira rodada, João deve adivinhar qual o número escolhido por Bruno e faz os seguintes comandos:**

- Escolha um número;
- Multiplique esse número por 2;
- Adicione 8 ao resultado encontrado.

Ao término desta sequência, João pediu que Bruno dissesse o valor obtido e "adivinhou" o número escolhido inicialmente por Bruno, a partir do resultado. Sabendo que o valor obtido por Bruno ao término foi 30, você também consegue descobrir qual o número que ele escolheu? Que número foi esse?

Uma criança do 5º ano, que em geral possui idade igual ou superior a 10 anos, ao tentar resolver o problema, pode utilizar a estratégia de tentativa e erro, esquema que em geral já se mostra incorporado nos esquemas de conduta dos estudantes nesta etapa de ensino e que consiste em atribuir valores que se aproxime cada vez mais do resultado esperado, ou, buscar inverter o processo descrito. Através do registro, é possível visualizar o problema da seguinte maneira:

$$\blacksquare \times 2 + 8 = 30$$

Observe que, a inversão do processo apresentado acima deve considerar dois aspectos: a inversão das operações e a inversão da ordem. Caso o estudante se atente a apenas um aspecto do processo, aquele que lhe chame mais a atenção, é possível que tenhamos a seguinte resposta:

$$30 \div 2 - 8 = 7$$

Note que essa segunda expressão acerta ao utilizar o resultado final e as operações inversas da expressão anterior, mas distorce o raciocínio reversível ao centrar em apenas um aspecto da primeira expressão: as operações utilizadas. É possível, portanto, perceber o porquê da *descentração* ser um dos pilares da *reversibilidade*. Segundo Flavell (1975) ela permite uma análise mais profunda dos fenômenos observados, corrigindo distorções e assimilando aspectos para além da superficialidade saliente.

Para finalizar esta seção, apresentaremos outro autor que também estudou a *reversibilidade*, com a mesma essência do conceito utilizado por Piaget, o psicólogo russo Vadim A. Krutetskii. Seu livro foi traduzido para o inglês como *The psychology of Mathmatical Abilities in Schoolchildren* (1968), mas, pela dificuldade de acesso à obra original, apresentaremos a perspectiva do autor a partir da tese de Wielewski[4] (2005), que apresenta uma síntese desta obra. A pesquisa de Krutetskii buscou descrever o talento matemático na resolução de problemas, utilizando, para isso, o que ele chamou de componentes de habilidades matemáticas, muitos deles já existentes na literatura científica das áreas de psicologia e matemática até a sua época (WIELEWSKI, 2005). Dentre os componentes está a *reversibilidade*, a qual foi definida pelo autor como uma "habilidade para inverter um processo mental, isto é, transferir de um processo de resolução a uma sequência inversa de pensamento" (WIELEWSKI, 2005, p. 37).

Para Krutetskii, a *reversibilidade* combina dois processos: i) o estabelecimento de dois modos de associações da forma $A \leftrightarrow B$ ii) pensamento em uma direção inversa do resultado, o que não significa fazer as mesmas sequências de ligações na ordem inversa, pois a inversão pode ter por implicação traçar caminhos diferentes (WIELEWSKI, 2005).

Em sua obra, Krutetskii chega a citar Jean Piaget como um estudioso que muito contribuiu para os estudos das habilidades matemáticas e como referência para o estudo do desenvolvimento ontogenético da cognição, mas o autor opta por utilizar como referência para a sua pesquisa os estudos de psicólogos soviéticos. É importante destacar que tanto a pesquisa em si quanto as opções de Krutetskii em relação aos seus referenciais, têm uma forte influência da cultura soviética e do marxismo, corrente da qual o autor era adepto.

---

[4] Utilizamos Wielewski como referência para a teoria de Krutetskii por se tratar de uma tese de doutorado em que a autora faz um resumo da obra e tenta utilizar seus conceitos em uma pesquisa de aplicação. A obra de Krutetskii foi escrita em russo e possui a tradução apenas para o inglês, a qual não conseguimos acesso por não estar disponível em nenhuma loja física acessível ou virtual no Brasil.

### 1.3 A aritmética dos naturais em uma perspectiva acadêmica

Neste tópico, trataremos um pouco da construção formal do Conjunto dos Números Naturais e das operações aritméticas neste conjunto. Por se tratar de uma construção formal, utilizamos, em alguns trechos pontuais, recursos matemáticos que podem não ser tão comuns a professores das séries inicias. No entanto, a dificuldade que porventura possa existir na compreensão de algum trecho específico, não compromete o entendimento geral da ideia que será apresentada.

Primeiramente, vale entender o quê cabe à Aritmética dentro do universo da Matemática. A palavra Aritmética vem da combinação de duas palavras gregas, *arithmos* e *technes*, que significam, respectivamente, número e ciência. Os pitagóricos, que tinham uma relação quase que religiosa com os números, são considerados os responsáveis pelo nascimento deste ramo da Matemática, embora a considerassem apenas enquanto estudo teórico dos números, deixando de lado os cálculos práticos que eram denominados por eles como *logística* (DOMINGUES, 2009). Atualmente, a Aritmética compreende a teoria dos números e a logística pitagórica, abrangendo desde aspectos exclusivamente teóricos, como os práticos, e pode ser encontrada nos currículos de todas as etapas de ensino. Dentre o universo da Aritmética, nos limitaremos a apresentar apenas as operações no Conjunto dos Números Naturais.

Para definir formalmente o Conjunto dos Números Naturais, recorreremos ao método axiomático, recurso matemático que consiste em tomar certas afirmações como verdadeiras, independente de demonstrações ou explicações formais, e, a partir delas, construir uma nova classe de afirmações, as quais devem ser demonstradas. Esta nova classe se configura, portanto, consequência das afirmações aceitas anteriormente como verdadeiras (DOMINGUES, 2009). Na fundamentação lógica da Aritmética no Conjunto dos Números Naturais, denotados por $\mathbb{N}$, os Axiomas de Peano nos fornecem cinco conceitos primitivos:

$P_1$) Zero é um número natural.

> $P_2$) Se $a$ é um número natural, então $a$ tem um único sucessor que também é um natural.
> $P_3$) Zero não é sucessor de nenhum número natural.
> $P_4$) Dois números naturais que tem sucessores iguais são, eles próprios, iguais.
> $P_5$) Se uma coleção $S$ de números naturais contém o zero e, também, o sucessor de todo elemento de $S$, então $S$ é conjunto de todos os números naturais. (DOMINGUES, 2009, p. 105)

Os Axiomas de Peano se configuram como uma fundamentação lógica do Conjunto dos Números Naturais, que pode ser apresentado também através de seus elementos: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$. Representaremos aqui por $\mathrm{s(a)}$ *o sucessor de* $a$, Domingues (2009) define a adição em $\mathbb{N}$, $(x,\ y\ \in \mathbb{N}) \rightarrow x + y$, por meio das seguintes condições: i) $a + 0 = a$; ii) $a + s(b) = \mathrm{s(a + b)}$ (leia-se: *a* mais o sucessor de *b* é igual ao sucessor de *a* mais *b)*. Percebemos, observando o quinto axioma de Peano, que as duas condições apresentadas pelo autor definem a soma de todos os elementos de $\mathbb{N}$, pois a condição *i)* define a soma do menor elemento do conjunto, o zero (0), e através de *ii)* podemos estender a operação para todo o conjunto $\mathbb{N}$, assim, temos: $a + 0 = a$; $a + 1 = a + s(0) = \mathrm{s(a + 0)} = s(a)$; $a + 2 = a + s(1) = s(a + 1) = s[s(a)]$; e assim sucessivamente. Numa adição $(a + b) = c$, os números representados por $a$ e $b$ são chamados de *parcelas* e $c$ é chamado de *soma* ou *total*.

Além das condições já descritas, a adição goza das seguintes propriedades:

a) Associatividade $(a + b) + c = a + (b + c)$;
b) Comutatividade: $a + b = b + a$;
c) Existência de elemento neutro: $a + 0 = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{N}$;
d) Lei do cancelamento da adição: $a + b = a + c\ \Rightarrow b = c$ (DOMINGUES, 2009).

Retomando os axiomas apresentados anteriormente que determinam um grupo, segundo Domingues e Iezzi (2003), notamos que o conjunto $\mathbb{N}$, dotado da adição $(\mathbb{N}, +)$, não é um grupo aditivo, pois não possui elemento simétrico para todo elemento do conjunto. Vamos explicar melhor: Como $0$ é elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$, pois $\mathrm{a} + 0 = \mathrm{a}$, qualquer que seja $\mathrm{a} \in \mathbb{N}$, temos que o simétrico aditivo de $\mathrm{a}$ é o elemento $\mathrm{a}'$, tal que $\mathrm{a} + \mathrm{a}' = 0$. Assim sendo, a simetria é válida para $\mathrm{a} = 0$, pois $\mathrm{a} + \mathrm{a}' = 0 \Rightarrow 0 + \mathrm{a}' = 0 \Rightarrow \mathrm{a}' = 0$ e $0 \in \mathbb{N}$. Mas, para $a \neq 0$, temos que $a + a' = 0 \Rightarrow a' = -a$. Mas $-a \notin \mathbb{N}$. Logo, 0 é o único elemento do conjunto que possui simétrico aditivo. Portanto, $\mathbb{N}$ não é grupo aditivo.

Em relação à multiplicação, $(x, y) \to xy$ (ou $x \cdot y$), Domingues (2009) a define por meio das seguintes condições: i) $a \cdot 0 = 0$; ii) $a \cdot b^{+} = ab + a$. Mais uma vez, as condições apresentadas podem ser levadas para a multiplicação de qualquer elemento de $\mathbb{N}$, considerando o quinto axioma de Peano, uma vez que a operação está definida para o primeiro elemento do conjunto (o zero) e para o sucessor de qualquer elemento. Assim, temos: $a \cdot 0 = 0$; $a \cdot 1 = a \cdot 0^{+} = a \cdot 0 + a = a$; $a \cdot 2 = a \cdot 1^{+} = a \cdot 1 + a = a + a$; $a \cdot 3 = a \cdot 2^{+} = a \cdot 2 + a = (a + a) + a = a + a + a$ e assim sucessivamente. Em termos de significados, temos aqui a ideia da multiplicação como a soma de parcelas iguais.

Quanto à nomenclatura, na multiplicação $a \cdot b = c$, $a$ e $b$ são *fatores* e $c$ o *produto*.

A multiplicação goza ainda das seguintes propriedades, em $\mathbb{N}$:

a) Associatividade: $a\,(bc) = (ab)c$;
b) Comutatividade: $ab = ba$;
c) Existência de elemento neutro: $a \cdot 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$;
d) Lei do anulamento do produto: $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$;
e) Lei do cancelamento do produto: ($ac = bc$ e $c \neq 0$) $\Rightarrow a = b$;
f) $ab = 1 \Rightarrow a = 1$ e $b = 1$;
g) Distributiva em relação à adição: $a(b + c) = ab + ac$, para todo $a, b$ e $c \in \mathbb{N}$.

Em relação à definição apresentada anteriormente sobre grupos, segundo Domingues e Iezzi (2003), podemos afirmar que o conjunto $\mathbb{N}$, além de não ser grupo aditivo, também não é um grupo multiplicativo, uma vez que não possui o simétrico multiplicativo para todo elemento do conjunto. Vamos explicar melhor: Como 1 é elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{N}$, pois $a \cdot 1 = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{N}$, o simétrico multiplicativo de $a$ é o elemento que aqui representaremos por $a^{-1}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. De imediato, sabemos que não há simétrico multiplicativo para o primeiro elemento do conjunto, a saber, o 0, uma vez que $a \cdot 0 = 0$, qualquer que seja $a \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathbb{N}$ não é um grupo multiplicativo. Vale dizer, no entanto, que, para os demais elementos de $\mathbb{N}$, temos que: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{a}^{-1} = 1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$, mas $\frac{1}{a} \notin \mathbb{N}$, salvo para o caso de $a = 1$. Daí concluímos que 1, o elemento neutro da multiplicação, é o único elemento de $\mathbb{N}$ que possui simétrico multiplicativo em $\mathbb{N}$.

O fato de $\mathbb{N}$ não ser um grupo nem aditivo nem multiplicativo e, além disso, por não atender especificamente ao axioma da *existência de simétricos* da definição de grupos, nos leva às primeiras reflexões a respeito da *reversibilidade* na aritmética dos naturais. Por não haver, em $\mathbb{N}$, elementos capazes de se anularem, ou seja, elementos que quando operados resultam no elemento neutro da operação, não é possível inverter um processo em uma mesma operação matemática dentro dos limites deste conjunto. Assim sendo, as operações inversas à adição e à multiplicação, a saber, a subtração e a divisão, respectivamente, parecem funcionar um suporte à limitação existente no Conjunto dos Números Naturais.

A subtração e a divisão possuem algumas restrições de ordem que não existem na adição e na multiplicação, pois estas, como mostradas anteriormente, são comutativas. Introduziremos, portanto, estas operações com uma apresentação de *relação de ordem*, que por sua vez se apoia na definição de *diferença* que configura a *subtração*.

> Define-se a relação $\leq$ (menor que ou igual) em $\mathbb{N}$ do seguinte modo: se $a, b \in \mathbb{N}$, diz-se que $a \leq b$ se $b = a + u$, para algum $u \in \mathbb{N}$. O número $u$ nessas condições chama-se *diferença* entre $a$ e $b$ e é indicado por $u = b - a$, onde $b$ é o *minuendo* e $a$ o *subtraendo*.
> Assim a subtração $(a, b) \to a - b$ só está definida neste caso para os pares ordenados $(a, b)$ em que $a \geq b$. (DOMINGUES, 2009, p. 41, *grifo do autor*)

É possível observar porque a comutatividade não é válida para a subtração. Observemos que, se $a - b = u$ está definida em $\mathbb{N}$, então $a \geq b$. Notemos ainda que a expressão “maior que ou igual” nos fornece duas possibilidades: i) para $a = b$, temos que a diferença entre $a$ e $b$ é nula, ou seja, $u = 0$; ii) quando $a > b$ (lê-se *a maior que b*), $u > 0$. Daí temos que a diferença $b - a = u'$ não apenas é diferente de $a - b = u$, mas constitui uma total inversão da relação. Nesse caso, como $b \leq a$, temos também duas situações distintas: i) para $b = a$, temos que a diferença entre $b$ e $a$ é nula, ou seja, $u' = 0$; ii) para $b < a$ (lê-se *b menor que a*), $u' < 0$, logo, $u' \notin \mathbb{N}$, uma vez que 0 é o menor natural definido. Para Domingues (2009), esta diferença $(b - a = u')$ pode ser apropriadamente definida a partir de uma ampliação conveniente de $\mathbb{N}$ que dá sentido à diferença em pauta e origem ao chamado Conjunto dos Números Inteiros, denotado por $\mathbb{Z}$. Como nosso campo de estudo está limitado à aritmética dos naturais, e o próprio algoritmo utilizado para o ensino da subtração nas escolas funciona apenas satisfazendo a relação de ordem entre *minuendo* e *subtraendo* (*minuendo* $\geq$ *subtraendo*), não aprofundaremos no estudo do conjunto $\mathbb{Z}$ e prosseguiremos obedecendo a relação estabelecida na aritmética dos naturais. É importante observar que a subtração é aqui definida, em termos de significado, como a diferença $(u)$ entre dois elementos $a$ e $b \in \mathbb{N}$ e tem como premissa a adição $(b = a + u)$.

A divisão pode ser definida a partir da relação multiplicativa entre dois números. Assim, dados $a$ e $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, temos duas possibilidades:

i) $a = bq$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Representa-se por $b|a$. Neste caso, $a$ é chamado *múltiplo* de $b$ que, por sua vez, é chamado *divisor* de $a$. Também podemos dizer que $a$ é *divisível* por $b$. O elemento $q$ pode ser indicado por $q = \frac{a}{b}$ ou por $q = a \div b$ e é chamado de quociente de $a$ por $b$.

ii) $a$ está entre dois múltiplos consecutivos de $b$, ou seja, $bq < a < b(q + 1), q \in \mathbb{N}$. Desse modo, $bq$ é o maior múltiplo de $b$ menor que $a$. A relação $bq < a$ tem por implicação que $a = bq + r, r \in \mathbb{N}$, em que $r$ é a diferença entre $a$ e $bq$, ou seja, $r = a - bq$ e é chamado de *resto*. É importante observar que esta relação também é válida para os casos em que $a < b$, pois $b \cdot 0 < a < b \cdot 1$. Assim, tem-se $q = 0$ e $r = a$, o que satisfaz à relação apresentada.

Nesse sentido, recorremos ao *Algoritmo de Euclides*, ou *Algoritmo da Divisão*, teorema que nos apresenta a divisão de $a$ por $b$, para quaisquer $a$ e $b \in \mathbb{N}$. O referido teorema anuncia que "Para quaisquer $a$ e $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, existe um único par de números $q$ e $r$, de maneira que $a = bq + r\ (r < b)$" (Domingues, 2009, p. 54)[5], onde $a, b, q$ e $r$ são, respectivamente, *dividendo*,

[5] Apesar de não estar explicitado no teorema, Domingues (2009), em sua apresentação inicial, define $q, r \in \mathbb{N}$.

*divisor*, *quociente* e *resto*. É fácil perceber que se $r = 0$, $a = bq$, ou seja, $a$ é *múltiplo* de $b$, como definido anteriormente. Para esse estudo, é importante observar que a divisão foi aqui definida em função da multiplicação, estabelecendo uma relação de dependência com os conceitos multiplicativos.

Tomando por base a explicação feita por Domingues (2009) sobre o usual algoritmo da divisão, buscaremos explicar seu funcionamento aliado ao algoritmo euclidiano, recorrendo a um exemplo. Tomando $a = 250$ (dividendo) e $b = 3$ (divisor), vamos calcular o quociente $(q)$ e o resto $(r)$. Inicialmente fazemos:

$$\begin{array}{r|l} 253 & \underline{\;3\;} \\ -24 & \;8 \\ 1 & \end{array}$$

Na primeira etapa, toma-se $25 \div 3$ e encontra-se os valores 8 e 1 para $q$ e $r$, respectivamente. O que equivale a:

i. $25 = 3 \times 8 + 1 \Rightarrow 250 = 3 \times 80 + 10 \Rightarrow 253 = 3 \times 80 + 13$

Na representação acima, temos $r = 13$, mas $13 > 3$, o que contraria o teorema euclidiano da divisão, portanto devemos utilizar o algoritmo também sobre os números 13 e 3.

ii. $13 = 3 \times 4 + 1$

Juntando (i) e (ii), temos:

$$253 = 3 \times 80 + 13 = 3 \times 80 + 3 \times 4 + 1 = 3 \times (80 + 4) + 1 = 3 \times 84 + 1$$

Retomando a representação usual, temos, portanto:

$$\begin{array}{r|l} 253 & \underline{\;3\;} \\ -24 & 84 \\ \hline 13 & \\ -12 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Assim como na subtração, é fácil perceber que a divisão não é comutativa, uma vez que há uma questão de ordem que determina o comportamento da operação. Como apresentado em ii, para os casos em que $a < b$ (dividendo menor que o divisor), tem-se $q = 0$ e $r = a$. Assim, $a = b \cdot 0 + a$.

O exemplo acima pode ser tomado como contraexemplo para a comutatividade na divisão. Temos $3 = 253 \cdot 0 + 3$, ou seja, valores diferentes para $q$ e $r$.

Os conceitos até aqui apresentados nos fornecem um panorama conceitual da aritmética dos naturais e as relações estabelecidas entre elas. Trazendo para as nossas análises sobre a *reversibilidade*, vamos elencar oito aspectos significativos da construção aqui apresentada para as nossas discussões:

I. A adição se define por si só, não sendo necessária outra operação aritmética para fundamentá-la;

II. O sistema matemático $(\mathbb{N}, +)$ não é grupo. A adição em $\mathbb{N}$ não atende à propriedade da *existência de simétricos*, pois não possui simétrico, ou inverso aditivo, para nenhum de seus elementos diferentes de 0. Dessa característica decorre que, embora em termos de definição a adição seja independente, um processo aditivo só poderá ser revertido, no universo dos naturais, recorrendo-se a outra operação com a qual estabelece uma relação inversa, a subtração;

III. A subtração é definida a partir da adição, não sendo, portanto, uma operação independente;

IV. A subtração não é comutativa, coma é a adição, e, portanto, se estabelece por uma relação de ordem, onde o *minuendo* deve ser maior que ou igual ao *subtraendo*;

V. A multiplicação é definida a partir da adição, como a soma de parcelas iguais;

VI. O sistema matemático $(\mathbb{N},\cdot)$ não é grupo. A multiplicação em $\mathbb{N}$ não atende à propriedade da *existência de simétricos*, pois não possui simétrico, ou inverso multiplicativo, para nenhum de seus elementos diferentes de 1. Dessa característica decorre que um processo multiplicativo só poderá ser revertido, no universo dos naturais, recorrendo-se a outra operação com a qual a multiplicação estabelece uma relação inversa, a divisão;

VII. A divisão definida a partir da multiplicação, mas envolve todas as demais operações aritméticas em sua execução;

VIII. A divisão não é comutativa, como é a multiplicação, e, portanto, estabelece uma relação de ordem entre o *dividendo* e o *subtraendo*, na qual: i) quando o *dividendo* é maior que ou igual ao divisor, tem-se um *quociente* maior que ou igual a 1; ii) quando o *dividendo* é menor que o *divisor*, tem-se o quociente igual a 0 e o resto igual ao próprio *dividendo*.

O resumo que aqui se apresenta refere-se às construções formais das operações aritméticas. Como veremos nos próximos subtópicos, a Matemática Escolar possui uma configuração própria que, em alguns aspectos, pode romper com os preceitos da Matemática Acadêmica.

### 1.4 Matemática Acadêmica *versus* Matemática Escolar: perspectivas de uma relação complexa

A apresentação formal do tópico anterior traz uma breve síntese do que há no campo da Matemática Acadêmica a respeito da aritmética dos naturais. Recorremos ao método axiomático, com suas demonstrações lógico-dedutivas, com o intuito de proporcionar ao leitor justificativas formais para procedimentos que já internalizamos como verdadeiros. Quando tratamos da Matemática escolar, no entanto, que possui objetivos voltados para a formação do indivíduo em ser social, a construção formal que apresentamos não se mostra tão conveniente. Nesse sentido é que a Matemática Escolar, embora possua características em comum com a Matemática Acadêmica, é dotada de uma estrutura própria.

A diferença entre a matemática escolar e a acadêmica, guardadas as devidas proporções, é um ponto de acordo entre as diferentes posições que apresentaremos adiante. Parece-nos crucial fazer uma apresentação coerente deste tópico, com uma breve exposição de duas perspectivas a respeito desta relação, a partir das contribuições dos autores Yves Chevellard, autor de referência da didática francesa na área de Matemática, e do historiador, também francês, da história das disciplinas escolares, André Chervel, buscando um posicionamento a respeito dessa temática.

Ao estabelecer uma relação hierárquica entre as matemáticas acadêmica e escolar, Chevallard, Bosch e Gascón (1997) apresentam como transposição didática as transformações que buscam adaptar para o ensino "a obra matemática", originada historicamente por questões que nem sempre se adequam ao contexto escolar. Os autores dividem esse processo em três etapas: a primeira é a organização da obra matemática, processo que ocorre dentro da comunidade científica e depende das exigências impostas por ela; a segunda etapa é a da transposição didática propriamente dita, onde a obra deverá, necessariamente, sofrer algumas transformações para ser adaptada a uma situação de ensino; e a terceira ocorre dentro do próprio processo didático, originando transformações importantes na obra matemática. Contudo, os autores manifestam uma preocupação com a terceira etapa ao afirmarem que "[...] a escola impõe determinados tipos de exigências totalmente externas à matemática, atribuindo-lhe elementos alheios a ela, que podem **criar obstáculos para a descoberta da verdadeira disciplina matemática**" (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN,1997, p.118, grifo dos autores).

A perspectiva de Chevellard é bastante divulgada nos meios educacionais, e um tanto convidativa a ser vista como apropriada para compreender a relação entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar. Nela, a Matemática Acadêmica, tida como superior, alimenta a matemática elementar, da qual se ocupa as escolas.

O historiador André Chervel (1990), por sua vez, dá outra interpretação ao movimento descrito por Chevellard, Bosh e Gascón (1997) como impositivo, de exigências totalmente externas à Matemática e que lhe atribui elementos alheios. O autor inicia sua discussão expondo que tem prevalecido, tanto no senso comum quanto no meio acadêmico, cita-se inclusive os historiadores da educação, a crença de que a escola ensina ciências produzidas fora dela. O autor argumenta, no entanto, que o ensino, nesta perspectiva, resultaria de um processo de simplificação ou vulgarização desses conhecimentos científicos, por não ser possível ensiná-los conservando a sua integridade original. Diante disso, Chervel (1990) afirma que "Ao lado da disciplina-vulgarização é imposta a imagem da pedagogia-lubrificante, encarregada de lubrificar os mecanismos e de fazer girar a máquina" (CHERVEL, 1990, p. 181). Em resposta, ele defende que as disciplinas escolares não se limitam a uma vulgarização dos saberes científicos, mas constituem-se historicamente como construções da própria escola. Nesse sentido, a pedagogia é um elemento dos conteúdos escolares, que coexiste desde sua criação, capaz de transformar ensino em aprendizagem.

A teoria de Chervel (1990) é sustentada por sua pesquisa sobre o ensino da língua francesa, mas o autor também a defende em relação às demais disciplinas escolares, especialmente para fins de realização de pesquisas históricas. A partir da investigação feita, o historiador conseguiu caracterizar um movimento realizado na escola, a saber, a sistematização da ortografia e da gramática para ensinar leitura aos alunos. Dito de outro modo, a gramática começa a se desenhar no seio da escola, como um método para o ensino de leitura e de escrita.

Em perspectiva similar, o historiador inglês, mais diretamente ligado aos estudos de currículo, Ivor Goodson (1990), advoga a existência de um padrão de explicação para a evolução das disciplinas acadêmicas, que tem origens em práticas escolares, como é o caso da Geografia. Essa disciplina começa a ser ensinada nas escolas de forma muito tímida, disputando espaços no currículo, e a sua permanência nelas foi condicionada aos esforços progressivos de professores, buscando justificar a sua pertinência por meio da criação de associações, organização de eventos, revistas etc., para, apenas posteriormente, ser considerada uma disciplina acadêmica (GOODSON, 1990).

Por sua vez, Jean Hébrard, investigou a escolarização dos saberes chamados elementares, onde identificou como componentes fundamentais a aritmética e a escrita. Segundo o Hebrárd (1990), no período medieval, o comércio se dota de uma cultura profissional específica onde esses conhecimentos passam a ocupar um papel importante. Com o auxílio de especialistas aritméticos, esse conhecimento era compilado por mercadores como uma série de instruções que vieram adentrar as escolas a partir do século XVIII. Assim, a aritmética inserida nos currículos escolares, era uma aritmética prática, imersa na cultura dos mercadores, em uma linguagem vulgarizada, diferente da aritmética das universidades, chegando até ser questionada enquanto saber elementar, tendo em vista seu caráter profissionalizante para um trabalho especializado.

No Brasil, a História da educação matemática vem ganhando força com pesquisas conduzidas por grupos como o Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática (GHOEM), o Grupo de Pesquisa História, Filosofia e Educação Matemática (HIFEM) e o Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT). O GHEMAT, especificamente, tem desenvolvido pesquisas que se filiam às concepções defendidas por Chervel, bem como aos estudos de Dominique Julia sobre Cultura Escolar, procurando demonstrar a historicidade da disciplina matemática, com respeito ao que se ensina, por que se ensina e como se ensina.

Acreditamos que as perspectivas apresentadas, tanto de Chervel quanto de Chevallard, contribuem para uma reflexão sobre os conteúdos das disciplinas escolares e sua relação com o conhecimento científico. A noção de transposição didática nos sugere que todo processo de ensino requer uma reflexão sobre o quê e como ensinar (MOREIRA; DAVID, 2010). No entanto, concordamos com Chervel (1990) de que o saber escolar não se configura uma vulgarização do conhecimento científico e que a escola, em seu processo de busca por uma formação para além do científico, contemplando a formação cultural e social, não se limita a importar conhecimentos produzidos fora dela, pois produz conhecimentos que contemplam seus objetivos educacionais.

Ao refletir sobre os posicionamentos dos dois autores, Moreira e David (2010) discutem as diferenças entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar comparando com as respectivas práticas do matemático (que preza pela abstração e busca permanente de máxima generalidade em processos rigorosamente lógico-dedutivos) e do professor de matemática (que devido ao contexto educativo, usam formas alternativas de demonstrações, argumentações, resultados e apresentação mais descritiva de definições e conceitos). A perspectiva dos autores traduz uma ideia de uma única matemática, mas suas representações e formas de validação se mostram substancialmente diferentes.

Neste trabalho, buscamos nos alinhar à perspectiva de Chervel, na qual a escola produz conhecimento e a pedagogia é um elemento integrante dos conteúdos escolares. Compreendemos que a Matemática Escolar estabelece diferentes significados, representações e “axiomas”, que permitem uma construção diferenciada dos conceitos matemáticos daquela apresentada no tópico anterior.

## 1.5 A aritmética dos Naturais nos parâmetros da Matemática Escolar

Apresentaremos nesse tópico um pouco da Matemática Escolar, seus fundamentos, perspectivas e os documentos que tem norteado sua estrutura enquanto disciplina escolar no Brasil. É importante considerar que a Matemática, como outras disciplinas escolares, está sempre em processo de (re) construção, além de ser alvo de diversos e intensos debates – que vão desde os processos de ensino e de aprendizagem à discussões sobre o currículo e seu papel nos processos formativos. Não há, portanto, como esgotarmos nesse tópico a totalidade dessas discussões, de modo que apresentaremos apenas alguns de seus elementos constitutivos e um pouco dos objetivos educacionais que se tem buscado alcançar com o seu ensino.

Dividiremos essa seção em duas partes. Inicialmente apresentaremos os significados e propriedades das operações aritméticas, tomando por base as contribuições de Gerárd Vergnaud e Maldaner (2016). Em um segundo momento, analisaremos os documentos oficiais que norteiam, ou norteavam até recentemente, as práticas escolares no Brasil. Nesse subtópico, abordaremos alguns aspectos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

### 1.5.1 A aritmética na Matemática Escolar

Como falamos anteriormente, a Matemática Escolar, enquanto corpo do conhecimento com objetivos que se diferenciam da Matemática Acadêmica, estabelece significados e representações diferentes dos que apresentamos até então. Portanto, apresentaremos nesse tópico alguns desses significados, tomando por base as estruturas construídas por Gerárd Vergnaud, as proposições sobre as operações inversas de Maldaner (2016), além de uma breve apresentação das implicações da teoria piagetiana para o ensino da aritmética com as concepções construtivistas segundo Lino Macedo e Constance Kamii.

Vergnaud (2014) defende a ideia de que o professor deve possuir um profundo conhecimento sobre a criança, sua inteligência e comportamento; sobre o conteúdo a ser ensinado além de suas possíveis relações com o desenvolvimento cognitivo da criança. Nesse sentido é que o autor optou por se dedicar ao estudo dos conteúdos matemáticos a partir do ponto de vista do desenvolvimento de esquemas.

Apesar de utilizar muitos conceitos piagetianos em seu trabalho e reconhecer a relevância das produções do autor, Vergnaud (2009) critica Piaget ao afirmar que, devido à sua obsessão em reduzir o desenvolvimento cognitivo da criança a estruturas lógicas, o autor deixou de dar atenção às estruturas dos conteúdos matemáticos e seu papel no desenvolvimento dos esquemas.

É importante destacar que o conceito de esquema é mais bem definido por Vergnaud, uma vez que Piaget se dedicou apenas a criar uma noção de esquema a partir de diversos exemplos. Assim, segundo Vergnaud (2009), esquemas são formas de organização de atividades pelo sujeito em seu processo adaptativo a classes de situações. Nessa definição, os conceitos de *o*rganização e adaptação foram importados da teoria piagetiana tendo, portanto, os mesmos significados já apresentados anteriormente.

Foi na busca por sistematizar os conteúdos matemáticos, em termos de estrutura, significados e situações, que Vergnaud desenvolveu a Teoria dos Campos Conceituais. Para o autor, um Campo Conceitual

> É ao mesmo tempo um conjunto de situações conectado a um conjunto de conceitos. Por esta afirmação, quero dizer que o significado de um conceito não vem de uma única situação, mas de uma variedade delas e, reciprocamente, uma situação não pode ser analisada usando um único conceito, mas vários deles, formando sistemas. (VERGNAUD, 2009, p. 86, **tradução nossa**).

Assim, delimitando os conteúdos matemáticos por campo conceitual é que Vergnaud desenvolveu uma estrutura de significados e situações para as operações aritméticas em dois grandes agrupamentos: o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo.

Em seu livro "A criança a matemática e a realidade" Vergnaud (2014) demonstra sua posição em relação aos significados por trás dos conceitos matemáticos ao apresentá-los sempre em contextos externos à matemática, partindo da linguagem usual, explorando diferentes formas de representação como diagramas e setas, até chegar a escrita matemática formal.

Concordamos com Vergnaud (2014, p. 177) quando afirma que "A adição e a subtração não seriam bem ensinadas se não fosse feita uma referência frequente a situações implicando essas operações". A afirmativa do autor também pode ser aplicada perfeitamente à multiplicação e a divisão. De maneira análoga, entendemos que uma avaliação apropriada dos conhecimentos a respeito das operações aritméticas, bem como das relações que os estudantes conseguem estabelecer entre elas, deve fazer referência a situações problemas em que as operações estão implicadas.

Para exprimir os significados dos problemas que envolvem adição e subtração, Vergnaud (2014) utiliza as noções de composição, transformação e relação. Nesta perspectiva:

> Os números mais simples são os que correspondem às medidas dos conjuntos de objetos isoláveis, aos cardinais: 1, 2,3, 4, ... etc.
>
> Os matemáticos chamam esses números de "números naturais", a eles acrescentando o número 0, que corresponde à medida do conjunto vazio. Eles designam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais:
>
> $$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots n, \dots\}$$
>
> Nesta obra não vamos nos estender a respeito das propriedades matemáticas desse conjunto. Vamos nos contentar em salientar que os números naturais não são nem positivos nem negativos, uma vez que correspondem a medidas e não transformações. Os números naturais são **números sem sinal.**
>
> Se os números naturais são números sem sinal, eles não podem representar transformações posto que estas sejam positivas ou negativas. É preciso então introduzir um outro conjunto de números, dotados de sinais, os "números relativos". Esses números representam adequadamente as transformações aditivas (adições e subtrações) que podem ser aplicadas à medida de um conjunto de objetos isoláveis, acrescentando elementos a este conjunto ou deles os retirando. Vamos designar por $\mathbb{Z}$ este conjunto de números relativos
>
> $$\mathbb{Z} = \{\dots -n, \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots, +n, \dots\}$$

> Os números naturais representam medidas dos conjuntos dos objetos isoláveis. Os números relativos representam as transformações que essas medidas sofrem. (VERGNAUD, 2014, p. 198, grifo do autor)

A definição do autor nos parece um tanto controversa, uma vez que o conjunto $\mathbb{N}$ é, tanto na Matemática Acadêmica quanto na Matemática Escolar, um subconjunto de $\mathbb{Z}$, o que seria impossível segundo a definição de Vergnaud (2014). No entanto, ela se mostra conveniente para compreender o tratamento dos naturais nos anos iniciais, tendo em vista que, embora o conjunto $\mathbb{N}$, enquanto subconjunto de $\mathbb{Z}$, seja composto pelos números positivos e o zero – Vale dizer que não há consenso sobre o pertencimento do 0 ao conjunto $\mathbb{N}$ –, esse sentido não é apresentado nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Nesta etapa, os elementos de $\mathbb{N}$ são mostrados aos alunos como "números sem sinal", conforme explicado pelo autor, e apoiando-se nas operações aritméticas para representações de significados que utilizem números negativos ou positivos. Por exemplo, sabe-se que os números negativos historicamente se constituíram com o objetivo de indicar débitos (DOMINGUES, 2009), mas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, por não terem sido introduzidos ainda os números negativos, quando se apresenta um problema em que existe um débito a ser descontado, recorre-se à subtração, tornando o valor negativo como um subtraendo, sem que se tenha conhecimento de que o débito seria na verdade um número negativo.

Ao utilizar a conveniência da definição dada ao $\mathbb{N}$, Vergnaud (2014) explora os significados dos problemas aditivos em termos de composições, transformações e relações. A composição em Vergnaud (2014) pode ser entendida pela junção de dois "elementos" em um, podendo esses elementos serem duas medidas, uma medida e uma transformação, duas transformações, uma transformação e uma relação, duas relações, duas operações ou quaisquer variações dos elementos citados, desde que possam se tornar um. Já a transformação representa o dinamismo das coisas. Uma transformação é, portanto, o processo que intermedia um estado original e um estado final de um mesmo objeto ou conjunto. É nesse sentido que o autor separa o conjunto $\mathbb{N}$ e o conjunto $\mathbb{Z}$. Para ele, somente um elemento estritamente positivo ou negativo pode representar uma transformação e, em decorrência disso, fez-se necessário um conjunto que representasse exclusivamente esse movimento. Já relação, como o próprio nome sugere, é uma conexão entre dois elementos, o estabelecimento de um elo entre eles. Para facilitar a compreensão dos termos, apresentaremos alguns exemplos retirados do questionário utilizado neste trabalho:

a) As idades de Joana e Gustavo somadas têm por resultado 27. Sabendo que Joana tem 13 anos, quantos anos tem Gustavo? – composição de duas medidas para resultar em uma terceira. Neste problema, um dos termos da composição foi omitido;

b) Numa fazenda, havia 524 bois. Na feira de gado, o fazendeiro vendeu 183 de seus bois e comprou 266 bois. Quantos bois a fazenda passou a ter? – duas transformações sobre uma medida para resultar em outra medida;

c) Dona Angélica tem duas filhas, Amanda e Adriana. Amanda nasceu em 2001, quando Adriana tinha exatos 9 anos. Qual foi o ano de nascimento de Adriana? – uma relação liga duas medidas. No caso, a relação está entre os anos de nascimento de Amanda e Adriana.

Analisando a caracterização dos problemas feitos por Vergnaud (2014) para a educação matemática, em uma perspectiva piagetiana, é possível afirmar que a compreensão das estruturas dos problemas se configura como uma oportunidade para o professor de proporcionar aos seus alunos uma diversidade maior de adaptações (assimilações e acomodações) ao passo que, para resolver problemas com estruturas diversas, o aluno precisará desenvolver uma quantidade maior de esquemas. Embora não seja dito nesses termos, as pesquisas que se fundamentam na teoria de Vergnaud, apresentadas anteriormente, têm adotado esta concepção.

Em relação ao Campo Conceitual Multiplicativo, que abrange multiplicações e divisões, Vergnaud (2014) apresenta duas grandes formas de relação, o isomorfismo de medidas e o produto de medidas. O isomorfismo de medidas é uma relação quaternária – que envolve quatro medidas – entre dois tipos de medidas e carrega consigo a noção de proporcionalidade. Já o produto de medidas é uma relação ternária em que uma medida é produto das outras duas. Esta última relação é encontrada em problemas que envolvem noções de contagem, cálculos de área, dentre outros. Vejamos alguns exemplos:

a) Tenho 3 pacotes de iogurtes. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho? – Duas medidas referem-se a quantidades de iogurtes (4 e 12) e duas medidas referem-se a quantidades de pacotes (1 e 3), caracterizando uma relação quaternária do isomorfismo de medidas.

b) Igor tem 3 calças e 5 camisas para usar na escola. De quantas formas diferentes ele pode se vestir utilizando essas peças? Relação ternária em que 15 é produto de 3 e 5, caracterizando a forma produto de medidas.

As duas grandes classificações apresentadas contemplam uma variedade de problemas multiplicativos que vão muito além dos exemplos dados. Na letra *a*, por exemplo, o problema pode alternar a pergunta para a quantidade de pacotes, fornecendo a quantidade de iogurtes, ou para a quantidade de iogurtes por pacotes, tendo fornecido os demais dados; excluindo ainda as variações em relação aos valores trabalhados, que neste problema se limitam ao domínio do discreto. Utilizamos em nosso questionário diagnóstico, por exemplo, um problema envolvendo o isomorfismo de medidas, que será bem explorado no capítulo da análise. De igual modo, as questões que envolvem produto de medidas possuem uma diversidade de variações que implicam no grau de dificuldade desta classe de problemas.

Retomamos que os Campos Conceituais Aditivos e Multiplicativos, conforme definidos por Vergnaud (2014) contemplam os significados das quatro operações aritméticas em termos de composição, transformação e relação – no Campo Conceitual Aditivo – e em termos de isomorfismo de medidas e produto de medidas – no Campo Conceitual Multiplicativo. Encontramos, no entanto, em Maldaner (2016) alguns significados inerentes especificamente às operações inversas, a subtração e à divisão, que nos pareceu interessantes para abordar nesse trabalho e, portanto, apresentaremos ao leitor.

Em relação à subtração, para além da ênfase no ensino dos algoritmos, Maldaner (2016) critica o fato de esta operação ser ensinada apenas com as ideias de diminuir e retirar. A autora apresenta o seguinte exemplo em que essas ideias não se adequam: “Maria precisa de uma dúzia de ovos para preparar o almoço, mas tem apenas oito. Quantos ovos faltam para que ela possa concluir o almoço?" (MALDANER, 2016, p. 100). A autora afirma que não faz sentido retirar oito de doze sendo que os oito, no contexto dado, ainda não são suficientes.

Assim, Maldaner (2016) apresenta três ideias associadas à subtração: comparar, completar e retirar. A ideia de comparar normalmente precede as outras duas, pois, a partir da comparação, o estudante estabelece a relação de maior e menor entre duas medidas. Quando se trata de valores pequenos, o aluno pode constar quase que imediatamente qual é a diferença, mas, em se tratando de números grandes, a criança pode não ser capaz de quantificá-la, devendo recorrer às ideias de completar ou retirar para resolver o problema.

A ideia de completar é percebida a partir do valor menor, o subtraendo – definido por meio da comparação – e é encontrada em problemas que convidam o estudante a encontrar o valor que falta para chegar ao valor maior, o minuendo (MALDANER, 2016). Por exemplo: "João queria fazer uma lasanha e viu na receita que precisava de 500g de queijo. Ele percebeu que tem apenas 220g em sua geladeira. Quantas gramas de queijo ele ainda precisa comprar?" Nesse sentido, a autora crítica que a subtração seja tratada apenas com a ideia de retirar. Na situação apresentada pelo o problema, por exemplo, retirar não parece fazer muito sentido, uma vez que está faltando uma quantidade de queijo.

A última ideia relacionada à subtração que Maldaner (2016) apresenta é a de retirar, que envolve as duas anteriores. Por exemplo, para retirar o valor 2 do valor 5, o estudante deverá inicialmente comparar os dois valores e completar o 2 para chegar ao 5. Quando subtraímos valores maiores, recorrendo ao algoritmo, a comparação se repete a cada coluna. Vejamos este problema: Juliana tinha 19 bolas de gude e deu 5 delas para sua prima. Com quantas bolas de gude Juliana ficou?

Um dos problemas aditivos que compõem nosso questionário, já apresentado aqui, "As idades de Joana e Gustavo somadas têm por resultado 27. Sabendo que Joana tem 13 anos, quantos anos tem Gustavo?", definimos como um problema de composição, segundo as classificações de Vergnaud, traz consigo os significados da subtração segundo a perspectiva de Maldaner (2016). Por se tratar de uma composição na qual a soma é apresentada e uma das parcelas é omitida, o estudante pode recorrer tanto à ideia de completar quanto de retirar para resolver o problema.

Em relação à divisão, Maldaner (2016) reflete sobre o quanto as crianças já chegam à escola com uma cultura em torno desta operação, pois dividem brinquedos, alimentos ou assistem seus pais repartirem quaisquer objetos entre eles e os irmão etc.; e como a divisão se torna a operação considerada mais difícil pelos estudantes. A autora mais uma vez realça o problema da dependência do algoritmo para o ensino das operações, sobretudo da divisão, e apresenta duas ideias em torno desta operação: a de medir e a de repartir.

Segundo Maldaner (2016), a ideia de medir é usada quando se pretende descobrir quantas vezes certa quantidade cabe dentro de outra. Um exemplo dessa ideia pode ser encontrado no problema 4 do questionário que aplicamos, que enuncia: "João sabe que faltam 31 dias para o aniversário. Quantas semanas completas faltam para o aniversário dele?". Segundo as classificações de Vergnaud, temos neste problema um isomorfismo de medidas, o qual se configura por dois tipos de medidas – dias e semanas – que possuem uma relação de proporcionalidade. Problemas desse tipo, embora remetam à ideia de divisão, podem ser resolvidos recorrendo-se a qualquer uma das quatro operações.

Os problemas que possuem a ideia de dividir igualmente certa medida por outra possuem a ideia de repartir (MALDANER, 2016). Problemas de divisão que envolvem essa ideia são mais recorrentes no cotidiano dos estudantes, como as situações que citamos anteriormente: repartir brinquedos, lanches, dinheiro, etc. Não utilizamos em nosso questionário nenhum problema que utilizasse essa ideia apresentada pela autora.

Maldaner (2016) defende o ensino dos significados das operações aritméticas antes do uso dos algoritmos e observa que o ensino tradicional contribui para uma visão da matemática como demasiadamente abstrata e destinada à compreensão de algumas poucas pessoas. Em suas reflexões a respeito da subtração, a autora destaca o papel fundamental das experiências cotidianas no ensino e pondera:

> Quando observamos os procedimentos de crianças das classes populares na resolução de problemas cotidianos, percebemos que são os mesmos procedimentos que as pessoas em geral usam para resolver seus cálculos no dia a dia. Por exemplo, ao fazer uma compra de R$ 8,90 com uma nota de R$ 10,00, calcula o troco completando o valor da compra até o valor da nota monetária: R$ 0,10 + R$ 1,00 = R$ 1,10. A escola, no entanto, logo que a subtração é introduzida, procura ensiná-la seguindo os passos do algoritmo tradicional e, geralmente, apoiando-se apenas na ideia de retirar. Assim, o que poderia ser resolvido com um procedimento relativamente simples (apoiado na adição), torna-se um cálculo extremamente complicado para a criança, sobretudo quando há necessidade de "empréstimo". Além disso, as contas começam de trás para frente, coisa que não faz parte do domínio da criança e nem do seu universo de significados. (MALDANER, 2016, p. 96).

Analisando as afirmações da autora e suas propostas de atividades para a construção dos significados matemáticos por parte dos alunos – usando materiais concretos e jogos, que possibilitem uma interação das crianças com objetos que possibilitem a formulação de hipóteses e a construção dos conceitos – percebemos uma afinidade entre suas propostas e uma corrente de ensino que foi muito influenciada pelas teorias de Piaget e se insere até os dias atuais nos discursos pedagógicos ao redor do mundo: o construtivismo.

Macedo (2010), tratando da versão piagetiana do construtivismo, o define como a perspectiva em que a produção do conhecimento se constitui enquanto processo formalizante, no qual só fazem sentido as ações espontâneas dos sujeitos, ou as ações neles desencadeadas após a formação de esquemas assimilativos e, por consequência desta definição, "a formalização cedeu lugar à valorização dos conteúdos ou dos contextos de sua produção histórica" (MACEDO, 2010, p. XV). O autor defende, no entanto, que os métodos construtivistas e os não construtivistas se configuram formas complementares de produção de conhecimento, de maneira que, como defensor do construtivismo, o autor não abandona a valorização do uso dos paradigmas do conhecimento nas atividades de ensino, mas defende que o construtivismo e o não construtivismo devem ser integrados e operados de maneira que proporcione maior proveito no processo educativo.

Também inspirada nas pesquisas piagetinas, a pesquisadora Constance Kamii traz uma série de reflexões sobre o ensino e a aprendizagem das operações aritméticas, como resultado de suas pesquisas de intervenção nas quais incentivava a interação da criança com materiais concretos e jogos. A autora argumenta que a teoria piagetiana não é imediatamente clara sobre como se ensinar uma disciplina, mas entra em conflito direto com o ensino tradicional da matemática, que trata a abstração como simbolização, e defende uma reinvenção da aritmética por parte dos estudantes, a partir de situações que favoreçam a construção do conhecimento matemático pelo próprio aluno (KAMI, 1991).

> Dizer às crianças como adicionar, subtrair, multiplicar, dividir e como aplicar cada algoritmo em problemas escritos dificulta o desenvolvimento de seu conhecimento lógico-matemático. A aritmética tem, há muito tempo, sido ensinada como se fosse conhecimento social (convencional), e nós urgentemente precisamos ensiná-la como se fosse conhecimento lógico-matemático (KAMI, 1995, p. 287).

A afirmação da autora, em um livro datado de 1995, se assemelha muito às conclusões das pesquisas recentes sobre o ensino da aritmética citadas na introdução deste trabalho (AZERÊDO, 2013; SILVA, 2014; FERRAZ, 2016; LUNA, 2017), o que demonstra a influência das concepções construtivistas nas produções acadêmicas até os dias atuais.

Sobre a resolução dos problemas aritméticos, Kami (1991) defende a não classificação dos problemas para os estudantes como de adição ou subtração, possibilitando à criança a construção dos seus próprios esquemas de resolução. A autora argumenta ainda que as crianças ficam confusas sobre qual operação usar, adição ou subtração, somente depois de terem recebido instrução da escola.

As pesquisas da autora apresentadas nos livros “Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget” (1991), “Desvendando a aritmética: implicações da teoria de Piaget” (1995) e “Aritmética: novas perspectivas” (1997) representam a tendência das pesquisas sobre a aprendizagem matemática em uma perspectiva piagetiana, na qual os pesquisadores fazem intervenções nas escolas com atividades de cunho construtivistas e apresentam em suas conclusões resultados que destacam os avanços dos estudantes em aspectos como: facilidade na manipulação dos conceitos aritméticos, confiança e autonomia na resolução de problemas ou mesmo motivação. Alguns dos experimentos da autora são inclusive replicados no Brasil (BESSA; COSTA, 2016). Outras pesquisas que demonstram essa tendência podem ser vistas em Roblioglio (2010), Bessa e Leite (2011) e Bessa e Costa (2017).

### 1.5.2 A aritmética nos documentos oficiais

Tomaremos por base nesta seção dois documentos utilizados como fonte para as construções curriculares no Brasil: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), por sua relevância no contexto da Educação Básica como principal documento norteador por mais de 20 anos, sendo, inclusive, o documento referência para o momento curricular pesquisado; e a Base Nacional Comum Curricular, que atualmente fornece um conjunto de "'aprendizagens essenciais" para os diferentes níveis da educação básica. Apesar de ter sido homologada em dezembro de 2017 – para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental – a BNCC traz o ano de 2020 como o prazo para sua efetiva implementação. Esse prazo se justifica pela própria proposta do documento, de se constituir uma base comum e não o currículo em sua totalidade. Assim, no momento desta pesquisa, a saber, 2019, cada sistema de ensino ou unidade escolar estava em processo de adequação de seus currículos, preparando o cenário para implementação da proposta. Desse modo, entendemos que a BNCC não nos fornece a instrução normativa curricular do momento pesquisado, mas faremos uma análise da sua abordagem em relação às operações aritméticas como uma perspectiva para o ensino desse conteúdo nos próximos anos.

Entendemos que os documentos oficiais não se constituem um referencial teórico, por não se caracterizarem como produção de conhecimento. Ao contrário, os documentos oficiais se baseiam em teorias produzidas até a época de sua publicação, sem mesmo referenciar, no decorrer do texto, as obras que lhe embasaram.

Precisamos inicialmente destacar que os documentos aqui analisados diferenciam-se significativamente em termos de objetivos. Os PCN, publicados em 1997, visavam auxiliar o professor na execução do seu trabalho sendo, portanto, um documento de caráter formativo e consultivo para a elaboração das propostas curriculares. A BNCC, por sua vez, "é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2017, p. 5, **grifo do autor**). Nesse sentido, a BNCC demonstra ser, desde a sua definição inicial, um documento de caráter mais enrijecido do que os PCN, característica que é reforçada ao longo de toda a sua estrutura, que delimita e organiza os conteúdos de uma maneira mais sistemática.

É importante observar que os PCN já apontavam para a problemática até hoje destacada pelas pesquisas sobre o ensino de matemática nos anos iniciais da hierarquização dos conteúdos matemáticos e sua linearidade, como podemos observar:

> Quanto à organização dos conteúdos, é possível observar uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-lo. É uma organização, dominada pela idéia de pré-requisito, cujo único critério é a definição da estrutura lógica da Matemática, que desconsidera em parte as possibilidades de aprendizagem dos alunos. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem como elos de uma corrente, encarados cada um como pré-requisito para o que vai sucedê-lo (BRASIL, 1997, p.22)

O documento destaca esse fator também em seus princípios ao afirmar que "o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas" (BRASIL, 1997, p. XX). Nesse sentido, apesar de o documento organizar os conteúdos matemáticos em blocos (Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da Informação) e apresentar orientações gerais de como trabalhá-los por ciclos[6], os PCN buscam

[6] Os PCN organizam suas orientações por ciclos, que são compostos por dois anos letivos consecutivos, chamados séries.

reforçar, ao longo do texto, a importância da integração dos conteúdos no ensino, além de defender a inexistência de uma forma de trabalho única, tornando impossível estabelecer uma sequencia definida para o ensino ou mesmo estabelecer níveis de profundidade dos conteúdos em cada série[7].

Em relação às operações aritméticas, os PCN defendem uma ênfase para o ensino da adição e da subtração no primeiro ciclo (1ª e 2ª série), com a construção dos fatos fundamentais, a identificação de propriedades e regularidades, as situações-problema como dispositivos geradores, a valorização das estratégias pessoais dos estudantes e o desenvolvimento, posterior, das técnicas convencionais de cálculo. É proposto ainda para o primeiro ciclo problemas que envolvam os significados da multiplicação e da divisão para serem resolvidos apenas por meio de estratégias pessoais. Para o segundo ciclo (3ª e 4ª série), os PCN propõem a continuidade do trabalho com situações-problema (percorrendo a análise, interpretação, formulação e resolução), valorizando as estratégias pessoais dos estudantes e desenvolvendo os procedimentos formais para cálculos aritméticos. Recomendam também para este ciclo a introdução do conjunto dos números racionais, do conceito de fração contemplando seus diferentes significados, bem como a adição e a subtração dos números racionais na forma decimal.

Apesar de enrijecer o currículo, no sentido de delimitar quais conteúdos devem ser trabalhados em cada ano letivo, a BNCC parece seguir a mesma tendência dos PCN ao buscar contemplar as conexões entre as operações aritméticas desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Nesse sentido, ela considera tanto a sequencia lógica interna das operações quanto seus significados que transcendem a realidade escolar, possibilitando a introdução da multiplicação e da divisão ainda nos primeiros anos, como podemos observar na quadro 01 a seguir:

[7] Os PCN foram publicados em 1997, antes da obrigatoriedade de matrícula das crianças de 6 anos de idade, estabelecida pela Lei nº 11. 114, de 16 de maio de 2005, que ampliou o Ensino Fundamental de oito para nove anos. Assim, o documento trabalha com os anos iniciais do Ensino Fundamental, 1ª á 4ª séries, que correspondem ao período atualmente conhecido como 2º ao 5º ano.

**Quadro 01: Conteúdos Aritméticos Na BNCC Para Os Anos Iniciais**

<table>
<tr><th>Ano</th><th>Adição</th><th>Subtração</th><th>Multiplicação</th><th>Divisão</th></tr>
<tr><td>1° ano</td><td>• Construção de fatos básicos da adição;<br>• Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar).</td><td>• Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar).</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2° ano</td><td colspan="2">• Construção de fatos fundamentais da adição e da subtração;<br>• Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar).</td><td>• Problemas envolvendo adição de parcelas iguais (multiplicação);<br>• Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte.</td><td>• Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte.</td></tr>
<tr><td>3° ano</td><td colspan="2">• Construção de fatos fundamentais da adição, subtração e multiplicação;<br>• Reta numérica;<br>• Procedimentos de cálculo (mental e escrito) com números naturais: adição e subtração;<br>• Problemas envolvendo significados da adição e da subtração: juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades.</td><td>• Construção dos fatos fundamentais;<br>• Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida;;<br>• Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte.</td><td>• Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida;<br>• Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte.</td></tr>
<tr><td>4° ano</td><td colspan="2">• Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais.</td><td>• Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais;<br>• Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e</td><td>• Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais<br>• Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade,</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | medida;<br>• Problemas de contagem. | repartição equitativa e medida<br>• Números racionais: frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100)<br>• Números racionais: representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro |
| 5ºano | • Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita. | • Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais;<br>• Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?". | • Números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica;<br>• Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica;<br>• Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência;<br>• Cálculo de porcentagens e representação fracionária. |

Fonte: criado pela autora

Em relação à didática, os PCN (BRASIL, 1997), apresentam, como aspectos que devem ser considerados nos processos de ensino aprendizagem, a importância do conhecimento prévio como ponto de partida, do trabalho com diferentes hipóteses e representações, do estabelecimento de relações entre a linguagem matemática e a linguagem materna e o uso de recursos didáticos como suporte para a reflexão dos alunos. Nesse sentido também a BNCC conserva os preceitos propostos pelos PCN ao afirmar que

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também

> considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 2017, p. 261) Checar o ano

É possível fazer uma analogia entre o "ponto de partida", apontado pelos PCN como o conhecimento prévio do estudante, com a noção de "axioma" ou "conceito primitivo" utilizado por Domingues (2009). O conhecimento prévio, fruto das vivências anteriores do estudante dentro ou fora da escola, podem ser considerados os *conceitos primitivos* sobre os quais a Matemática Escolar se sustenta e, além disso, por seu caráter intuitivo, ela dispensa demonstrações formais, como as que constituem a Matemática Acadêmica. As "demonstrações" da Matemática Escolar utilizam recursos didáticos diversos ou exemplos baseados em situações que possam ser vivenciadas pelo estudante, assim como nos conceitos primitivos. Esse caráter intuitivo da Matemática Escolar proposto pelos PCN, e ratificado pela BNCC, reflete muito do que já vinha sendo apontado por pesquisadores, como podemos observar nas pesquisas sobre a História da Matemática Escolar de Wagner Valente[8].

Vale destacar que as operações aritméticas nos anos iniciais do Ensino Fundamental se limitam ao conjunto dos números naturais. Nos PCN, o conjunto dos números racionais começa a ser introduzido no segundo ciclo, mas, no que tange às operações aritméticas, a orientação do documento direciona para sua apresentação apenas quanto resultado das divisões, ou seja, como quociente, além da introdução de adições e subtrações em formas decimais. A BNCC estendeu para a multiplicação e a divisão as operações aritméticas com os racionais, ainda na forma decimal e com representações finitas, diferenciando-se um pouco do que havia sido proposto pelos PCN. O documento também dá maior ênfase ao trabalho com os números na forma de fração.

---

[8] O professor Wagner Rodrigues Valente (UNIFESP) vem desenvolvendo uma série de pesquisas sobre a História da Matemática Escolar no Brasil juntamente com o Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT) do qual é coordenador.

# CAPÍTULO II – ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho se alinha ao perfil de uma investigação qualitativa, conforme apresentada por Bogdan e Biklen (1994, p. 16) onde "os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico". Essa ideia de investigação qualitativa apresentada por Bogdan e Biklen (1994) é defendida por Lüdke e André (2017, p. 4) como o tipo que se encaixa nas necessidades das pesquisas educacionais, nas quais, segundo as autoras, "as coisas acontecem de maneira tão inextricável, que fica difícil isolar as variáveis envolvidas e mais ainda apontar claramente quais são as responsáveis por determinado efeito".

Nos alinhamos com a abordagem fenomenológica-hermenêutica que, em contraposição às pesquisas de origem positivista – sustentadas por uma suposta neutralidade da pesquisa e faz uso de métodos rigorosos de coleta e análise de dados, com mecanismos de controle e uso de instrumentos validados – se baseiam também em processos interpretativos na busca de significados sobre os dados produzidos (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Segundo Cerbone (2014), a palavra fenomenologia remete ao estudo dos fenômenos que, por sua vez, coincide com a própria noção de experiência. "Portanto, prestar atenção à experiência em vez de aquilo que é experienciado é prestar atenção aos fenômenos" (CERBONE, 2014, p. 13). Nesse sentido, buscamos analisar não apenas o objeto experienciado, ou seja, os dados produzidos pela pesquisa, mas todo o conjunto que compõe sua experiência, o contexto da produção desses dados, os aspectos que impactam nos resultados, além do próprio processo de construção do instrumento e a teoria que embasou essa construção, buscando contemplar suas falhas e potencialidades.

Um aspecto importante mencionado pelos filósofos da fenomenologia é a subjetividade do indivíduo que observa o fenômeno. Essa subjetividade, que é apresentada pelos diversos autores desta filosofia como "o eu" ou "o ego", determina não apenas a incompletude de qualquer experiência perceptual, como também sua inadequação diante do caráter transcendental de qualquer fenômeno observado. A inadequação se deve à desanalogia entre o fenômeno e a consciência do fenomenólogo, pois nenhum observador, por mais criterioso que seja, conseguirá exprimir um fenômeno em sua totalidade e sua experiência nunca irá admitir certeza completa, havendo sempre espaço para erros perceptuais (CERBONE, 2014).

O estudo de um fenômeno, portanto, perpassa o papel do indivíduo que se propõe a realizar tal estudo, seu conhecimentos, sua subjetividade e sua capacidade de observação e interpretação. É nesse sentido que esta filosofia se encontra com a hermenêutica, que, segundo Schmidt (2014, p. 12) "é a teoria filosófica do conhecimento que afirma que todos os casos de compreensão envolvem necessariamente tanto uma interpretação quanto uma aplicação". Esta última, a aplicação, pode ser entendida como um processo de transição em que o texto (ou o fenômeno) passa a contemplar o horizonte do intérprete (SCHMIDT, 2014).

Uma pesquisa numa perspectiva fenomenológica-hermenêutica, portanto, caracteriza-se tanto pela descrição do fenômeno, quanto pela experiência vivenciada pelo pesquisador – que nada mais é do que um componente desta experiência – por seu caráter interpretativo, hermenêutico, na busca por captar os diversos fatores subjacentes aos resultados.

## 2.1 Local e participantes da pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma escola pública, municipal, localizada em um bairro periférico do município de Jequié-Ba. Optamos por trabalhar com estudantes da rede pública de ensino que estivessem cursando o 5° ano do Ensino Fundamental, por se encontrarem na etapa do Ensino Fundamental em que os conteúdos aritméticos no universo dos números naturais supostamente já teriam sido trabalhados, segundo as orientações dos documentos oficiais, além de contemplarem a faixa etária correspondente ao período operatório concreto, segundo a classificação dos períodos de desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget.

Moreira e David (2010) destacam que os professores do 3° e 4° ciclos[9] do Ensino Fundamental tendem a considerar os conceitos das operações aritméticas como já acomodados pelos estudantes e as dificuldades apresentadas durante a resolução de problemas persistem com a ampliação do universo trabalhado. Assim, uma das razões para a escolha do 5° ano se deu pela caracterização do estudante em etapa de transição para o 3° ciclo e, portanto, de preparação para a ampliação do universo em que as operações aritméticas são trabalhadas.

Como essa pesquisa busca compreender a influencia do desenvolvimento da *reversibilidade* na criança sobre o desempenho dos estudantes durante a resolução de problemas aritméticos, mostrava-se necessário que a idade dos estudantes pesquisados possibilitasse o desenvolvimento da *reversibilidade* conforme nos apresenta a teoria em que embasamos esta pesquisa, a teoria psicogenética de Jean Piaget. Como o desenvolvimento da *reversibilidade* se dá a partir do período operatório concreto (de 7 a 11 anos), o 5° ano do Ensino Fundamental nos possibilita trabalhar com estudantes em que o período de desenvolvimento ontogenético, em tese, já estivesse desenvolvido ou em desenvolvimento, apresentando aspectos da *reversibilidade*.

Devido à natureza desta pesquisa, submetemos nosso projeto a uma avaliação ética, registrado na Plataforma Brasil com o protocolo n° 17321119.2.0000.0055, tendo sido aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), por meio do parecer n° 3.637.706. Os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (Segundo a Resolução nº 466, de 12 dezembro de 2012) foram entregues a 90 alunos de três turmas do 5º ano na segunda-feira, da semana de aplicação, para que fossem devolvidos, devidamente preenchidos e assinados pelos responsáveis, até a quinta-feira da mesma semana, na qual faríamos a aplicação do questionário. Deste montante, apenas 31 alunos retornaram com os termos assinados. Alguns alunos relataram que seus pais não “deixaram” que

[9] Os autores referem-se aos ciclos de dois anos letivos apresentados pelos PCN. O 3º ciclo correspondia à 5ª e 6ª séries (atualmente 6º e 7º anos) e o 4º ciclo correspondia à 7ª e 8ª séries (atualmente 8º e 9º anos).

participassem da pesquisa, enquanto outros afirmaram simplesmente terem esquecido de mostrar o documento para que assinassem.

Os estudantes que participaram da pesquisa são, de modo geral, de baixa renda e compreendem uma faixa etária de 10 a 13 anos. No momento da aplicação do questionário percebemos ainda que, dentre os participantes da pesquisa, havia cinco deles que não sabiam ler. Um destes estudantes escreveu em todos os espaços, mas suas sequencias de letras não formavam palavras. Concluímos que o estudante estava apenas tentando não deixar a atividade em branco. Os outros quatro, além da escrita, armaram contas com os números que apareciam nos problemas de modo aleatório. Quando consultamos a professora, ela nos confirmou que os alunos não estavam alfabetizados. Para não distorcer demais a análise dos dados, optamos por desconsiderar as respostas destes estudantes, uma vez que eles não possuíam recursos mínimos para responder às questões e, portanto, trabalhamos apenas com as respostas de 26 questionários.

### 2.2 Produção dos dados

O instrumento de produção de dados foi um questionário[10] composto por 11 questões. Conforme a classificação de Fiorentini e Lorenzato (2006), 10 destas questões são classificadas como abertas, ou seja, que não apresentam alternativas para as respostas. Para os autores, este tipo de questão possibilita ao pesquisador captar informações que não tenham sido previstas por ele ou pela literatura e se mostram melhores no processo de produção de dados qualitativos. Uma das questões pode ser caracterizada como mista, que combina uma pergunta fechada com uma parte aberta para justificativa da resposta dada.

Uma apresentação mais detalhada de cada questão será feita concomitantemente à análise, mas apresentaremos aqui, de maneira sucinta, as ideias dos problemas que compõem o questionário aplicado. Neste trabalho, utilizaremos os termos composição, transformação e relações, nos sentidos

---

[10] O questionário utilizado está disponível no Apêndice A da dissertação.

estabelecidos por Vergnaud (2014), para descrever e analisar os problemas aditivos utilizados no questionário. Consideramos nesta escolha os aspectos já discutidos, de como os números naturais são apresentados nos primeiros anos do Ensino Fundamental, além do potencial simplificativo para as discussões. Também utilizamos os significados da subtração e da divisão elencados por Maldaner (2016) para discutir o raciocínio utilizado pelos estudantes na resolução de problemas que traziam esses significados em sua estrutura.

A primeira questão não foi elaborada com a intenção de ser resolvida com operações aritméticas, uma vez que os estudantes não estudaram o conceito de área. Sua resolução dependia exclusivamente da capacidade de *descentração* do pensamento, característica do período operatório concreto no qual começa a se manifestar a *reversibilidade*. Embora esta característica possa ser observada também nas demais questões, a primeira questão nos permite sua análise sem a interferência das operações aritméticas, ou seja, independente de terem aprendido ou não estas operações, seriam capazes de apresentar sua percepção sobre esta questão.

As questões seguintes foram compostas de problemas que dependiam de conhecimentos a respeito das operações aritméticas e seus significados subjacentes. Uma vez conhecidas as quatro operações, as tarefas que exigiam maior esforço dos estudantes eram as de interpretação dos problemas e formulação de estratégias para a sua resolução, uma vez que não foram utilizados números que dificultassem a realização do algoritmo.

Há quatro questões que envolvem problemas direcionados para as estruturas aditivas: as questões 2, 3, 8 e 10, as quais envolvem composições (2 e 8), transformações (3) e relações (10). Os problemas aditivos podem ser resolvidos utilizando adição ou subtração. Também inserimos quatro questões com problemas direcionados para as estruturas multiplicativas, 4, 5, 9 e 11. A quinta questão se destaca por não haver necessidade de realização de cálculos e se caracteriza enquanto questão mista, possui quatro opções, dentre as quais apenas uma é correta, mas disponibilizamos um espaço para justificativa do raciocínio utilizado.

A questão 6 foi elaborada tomando por base as experiências de Piaget (1995) descritas no livro "Abstração Reflexionante", ao tratar das operações aritméticas inversas. A questão consiste em apresentar ao estudante uma sequência de transformações (utilizamos apenas duas) pelas quais passou uma medida e a medida resultante destas transformações. Pede-se então ao estudante que encontre a medida inicial. Independente de chegar à medida correta, a questão visa perceber se os estudantes utilizam a *reversibilidade*, invertendo as transformações para obter a medida inicial. Nesta questão, a ideia de *reversibilidade* aplicada às operações aritméticas aparece de maneira mais explícita.

O instrumento foi constituído de espaços para justificativa das respostas ou explicações sobre o raciocínio utilizado nas questões. Consideramos na elaboração desta estrutura, a possibilidade de a criança participante da pesquisa possuir ou não a habilidade de argumentar ou descrever o próprio raciocínio. Vale lembrar que no período pré-operatório a criança é egocêntrica em relação às representações. Desse fato decorre que ela

> Na ausência da capacidade de se orientar assumindo o papel do outro – não sente necessidade de justificar seu raciocínio para os outros nem de procurar possíveis contradições em sua lógica. Consequentemente, ela acha extremamente difícil tratar seus próprios processos mentais como objeto de pensamento. Por exemplo, ela é incapaz de reconstruir uma cadeia de raciocínios que acabou de fazer; ela pensa, mas é incapaz de pensar sobre o próprio pensamento. (FLAVELL, 1975, p. 158)

Além disso, como não é dotada da *reversibilidade*, a criança do pré-operatório não é capaz de descrever seu raciocínio de maneira coerente, uma vez que não consegue realizar as operações compensatórias de modo a encontrar sua premissa inicial. Isso não ocorre, no entanto, com a criança no período operatório concreto, dotada de *reversibilidade* (FAVELL, 1965).

Retomamos que, por hipótese, os estudantes participantes da pesquisa estão, ou já ultrapassaram, na faixa etária das crianças do operatório concreto, conforme definidas por Piaget, aproximadamente dos 7 a 11 anos. Considerando que se trata de uma aproximação e não um dado imutável, além de que essas características tratam de processos que se desenvolvem cognitivamente, ou seja, uma criança não passa da noite para o dia a ter todas as características do período; a presença, ou a ausência, de justificativa é mais um dado a ser analisado sobre o nível de desenvolvimento cognitivo das crianças.

No dia da aplicação, entregamos a atividade proposta e pedimos aos estudantes que lessem, respondessem com atenção e que tentassem explicar ao máximo o raciocínio utilizado em suas resoluções utilizando os espaços abertos do questionário para esse fim. Durante desenvolvimento da atividade, alguns alunos vinham tirar dúvidas, perguntavam se a conta "era de mais ou de menos" e em alguns momentos chegamos a reler algumas questões com eles, evitando interferir em suas produções individuais das respostas.

### 2.3 Análise dos dados

Corroboramos com Ludke e André (2017, p.57) quando afirma que "É preciso que a análise não se restrinja ao que está explicito no material, mas procure ir mais a fundo, desvelando mensagens implícitas, dimensões contraditórias e temas sistematicamente 'silenciados'" (LÜDKE; ANDRÉ, 2017, p. 57). As autoras sinalizam aspectos importantes a respeito da análise de dados. O primeiro deles reflete sobre a importância do aprofundamento do referencial teórico como arcabouço para a realização das análises, pois fornecem, por assim dizer, uma primeira classificação dos dados:

> Em alguns casos, pode ser que essas categorias iniciais sejam suficientes, pois sua amplitude e flexibilidade permitem abranger a maior parte dos dados. Em outros casos, as características específicas da situação podem exigir a criação de novas categorias conceituais (LÜDKE; ANDRÉ, 2017, p. 57).

Nesse sentido, após o aprofundamento do conceito de *reversibilidade*, organizamos as expectativas das primeiras respostas dos alunos conforme categorias extraídas da formação do pensamento reversível, a saber, pensamento estático ou flexível e pensamento centrado ou descentrado, em que o estático e o centrado são características do período pré-operatório, não dotado de *reversibilidade*, e o flexível e o descentrado são próprios do operatório concreto, dotado da *reversibilidade*. Em algumas situações, no entanto, por falta de elementos suficientes para inserir os estudantes em uma das categorias apresentadas, incluímos a categoria “indeterminado”. Considerando que nossa pesquisa se pauta em uma perspectiva hermenêutica, adotamos em nossa análise o princípio da caridade, ou da boa vontade. Segundo Schmidt (2014, p. 15) “Este princípio afirma que devemos, inicialmente, aceitar que aquilo que foi escrito realmente faz sentido. Se parece haver uma confusão, o intérprete deve trabalhar para esclarecê-la”.

As respostas aos problemas que exigiam cálculos aritméticos, mesmo que mentais, foram categorizadas conforme as escolhas do estudante para a resolução, bem como pelos recursos, mentais ou gráficos, que foram de alguma forma expressos no instrumento.

O quadro a seguir expressa como estão organizadas as nossas análises:

**Quadro 02 – Modelo de análise das questões**

| CATEGORIAS DE RACIOCÍNIO | CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pensamento Estático | Pensamento Flexível | Pensamento Centrado | Pensamento Descentrado | Argumentação Níveis de valoração | | | | Indeterminado | Sem resposta | Total |
| | | | | | Não argumentou | Baixa | Média | Alta | | | |
| **Raciocínio Direto** | | | | | | | | | | | |
| **Raciocínio Inverso** | | | | | | | | | | | |
| **Indeterminado** | | | | | | | | | | | |
| **Sem resposta** | | | | | | | | | | | |
| **Total** | | | | | | | | | | | |

Fonte: criado pela autora

O quadro permite apresentar uma síntese da interpretação feita sobre as respostas dos alunos. É importante destacar que não é possível extrair informações sobre todas as categorias ou sobre todas as características analisadas em cada questão, de modo que não serão usadas todas as categorias em cada questão. Como afirmamos anteriormente, fez-se necessária a criação da categoria "indeterminado" para os casos em que não tínhamos elementos suficientes para uma categorização mais precisa ou não conseguimos compreender o raciocínio utilizado pelo estudante. No caso da coluna, ela permite que possamos inserir a quantidade de alunos que encaixem na categoria expressa na linha, mesmo quando não conseguimos determinar as características do operatório concreto. De maneira análoga, a linha "indeterminado" permite que possamos quantificar as características do operatório concreto, mesmo quando não for possível encaixar os estudantes em alguma categoria de raciocínio para a resolução do problema. Também utilizamos as categorias "sem resposta", que apontam para uma ausência de quaisquer representações na questão analisada. Por fim, apresentamos uma linha e uma coluna nomeadas por "total", que apresentam, no caso da coluna, a quantidade de alunos analisados na linha e, no caso da linha, a quantidade de alunos analisados na coluna. Como foram 26 alunos analisados, o valor referente à soma dos totais na coluna ou na linha será sempre 26.

Quanto aos níveis de argumentação, classificamos como "não argumentou", para os casos em que os alunos se abstiveram em relação à argumentação, e "baixo", "médio" ou "alto", quando houve argumentação, adotando, respectivamente, os seguintes critérios: i) não se fez entender; ii) se fez entender, mas trouxe poucos elementos, insuficientes para descrever o raciocínio utilizado na questão; iii) se fez entender e conseguiu expressar o raciocínio utilizado na questão. Fizeram-se necessários os três níveis de argumentação porque, em algumas situações, não compreendemos o que os alunos tentavam expressar através da escrita. Vale dizer que, para fins de análise, apenas a categoria "nível alto" estará sendo considerada como uma reflexão sobre o próprio pensamento.

Nossa análise se constitui a partir de uma perspectiva interpretativa dos registros dos alunos, das tentativas de elaboração de uma justificativa, amparada pelos nossos referenciais teóricos. Foram considerados como registros, marcas, tais como diferentes formas de montar o algoritmo, desenhos de palitinhos etc., as quais trazem aspectos que possibilitam ao pesquisador imaginar a estratégia utilizada pelo estudante para resolver o problema. Concordando com Vergnaud (2014), a análise dos acertos nos permite saber os meios que a criança utilizou para alcançar o objetivo, o que permite discutir o porquê, dentre as muitas possibilidades de resolução de um problema, aquele método foi o escolhido. No que tange aos erros, a análise se mostra ainda mais necessária, pois permite identificar as dificuldades enfrentadas pela criança elaborar meios para enfrentamento do problema.

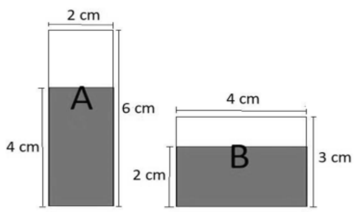
# CAPÍTULO III – ANÁLISE E RESULTADOS

A análise das respostas dos estudantes ao questionário proposto seguirá os seguintes passos: apresentaremos inicialmente a questão, elencando suas características pertinentes à pesquisa e fazendo uma discussão sobre algumas formas de resolução e como elas nos auxiliarão na busca pela resposta à pergunta de pesquisa; logo após, mostraremos o quadro geral de desempenho do grupo; em seguida, serão exibidos alguns exemplos de respostas dadas pelos estudantes, os quais serão analisados um a um.

## Análise da questão 1

Ao refletir sobre as características do período *operatório concreto*, no qual supomos, a princípio, estarem os estudantes do 5º ano, conjecturamos que a *descentração*, habilidade de perceber mais do que um aspecto saliente do objeto, pudesse estar desenvolvida ou em desenvolvimento nos estudantes participantes da pesquisa. Para verificar tal conjectura, propomos a análise de duas figuras, correspondente a questão 1.

1. Observe as figuras em formas de retângulo abaixo e suas regiões pintadas:




a) As figuras retangulares A e B são iguais? Justifique sua resposta.
b) Há um retângulo com mais espaço (área) que o outro? Se sim, qual? Por quê?
c) As áreas pintadas das figuras A e B são iguais ou diferentes? Que fazem elas serem iguais ou diferentes?

Fonte: questionário aplicado pela autora

Para um observador que conhece o conceito de área, é fácil perceber que as figuras, embora sejam diferentes, possuem a mesma área, a saber, $12cm^2$. No entanto, este é um conceito pouco ou não trabalhado nos primeiros ciclos do

Ensino Fundamental. Segundo os PCN (BRASIL, 1997) a noção de área está prevista para ser estudada no *segundo ciclo* (descrito como o período que contempla as 3ª e 4ª séries no documento, atualmente denominados 4º e 5º anos) apenas com comparação de figuras, em malhas quadriculadas, e sem o uso de fórmulas.

Assim, embora os estudantes pudessem estar desenvolvendo uma noção intuitiva de área, não era esperado nesta questão que eles calculassem a área das figuras, pelo menos não convencionalmente. Nosso objetivo foi observar o desenvolvimento da *descentração* do pensamento através das duas situações: duas figuras com áreas iguais, porém formas diferentes; e duas figuras com as áreas iguais e formas iguais, mas em posições diferentes; além da capacidade de explicar o próprio raciocínio. Assim, os alunos poderiam compensar as distorções aparentes percebendo que, embora a figura $A$ seja mais alta, $B$ é mais larga, habilidade que compõe a *reversibilidade* por reciprocidade de relações (PIAGET, 2012). Nesse sentido, considerando que o conhecimento formal do conceito de área ainda não foi construído, a análise do estudante a respeito das figuras depende da *centração* ou *descentração* do seu pensamento.

Vale dizer ainda que a ideia de área foi introduzida na questão com a palavra *espaço*. Os conceitos de área e espaço em Matemática são essencialmente diferentes, uma vez que a área é um conceito estudado no plano que, por sua vez, é um subconjunto do espaço. No entanto, adotamos o termo espaço na questão por considerar que as noções de espaço e forma são trabalhadas com os estudantes desde a educação infantil, sendo mais familiares ao estudante. Entramos, portanto, em uma questão que não poderemos aprofundar para não fugir aos objetivos do trabalho: porque não utilizar uma figura espacial? Para responder este questionamento, recorremos a Lima (2004) ao pontuar que, embora as figuras planas não existam em nosso mundo tridimensional, os estudantes não apresentam dificuldades ao estudá-las sistematicamente, o que ocorre por volta do 6° ou 7° ano, devido ao desenvolvimento de modelos mentais de planificação de superfícies espaciais, realizado muito antes desses estudos sistemáticos, por meio de desenhos de quaisquer natureza. Em relação às figuras espaciais, o autor pontua que, embora estejam presentes em nossa realidade, demonstram maior complexidade no ensino e na aprendizagem, mesmo com a manipulação de materiais concretos, além da dificuldade em representá-las e interpretá-las graficamente.

Consideramos que o uso do termo espaço contribui para uma concretização do que se pede na questão. É importante ressaltar que essa é uma concretização relativa, no sentido aplicado por Piaget no período do operatório concreto. A criança no período em questão já consegue manipular o pensamento representativo decorrente do desenvolvimento da função simbólica, mas esse pensamento é, até essa etapa de desenvolvimento, orientado por acontecimentos, objetos e experiências concretas. Assim, os sistemas operacionais da criança incentivam seu pensamento para o que está ausente ou potencialmente presente (FLAVELL, 1975). É apenas nesse sentido, representativo, que introduzimos a ideia de área com o termo espaço.

O quadro 03 demonstra o desempenho dos alunos na questão 1, de acordo com nossas análises.

**Quadro 03 – Síntese de análise da questão 1**

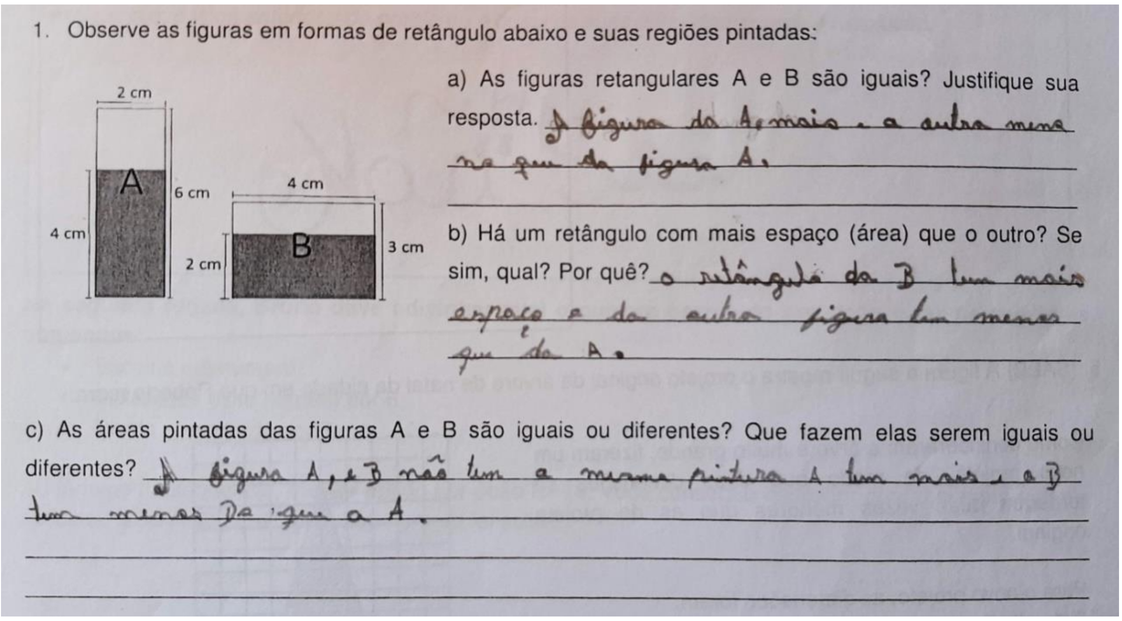
<table>
<tr><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS</th><th>Pergunta a</th><th>Pergunta b</th><th>Pergunta c</th></tr>
<tr><td colspan="2">Pensamento Centrado</td><td>-</td><td>19</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pensamento Descentrado</td><td>-</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Indeterminado</td><td>26</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sem resposta</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total</td><td>26</td><td>26</td><td>26</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Níveis de Argumentação[11]</td><td>Não argumentou</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>Baixo</td><td colspan="3">7</td></tr>
<tr><td>Médio</td><td colspan="3">6</td></tr>
<tr><td>Alto</td><td colspan="3">13</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="3">26</td></tr>
</table>

Fonte: elaborada por BRITO, 2020 com base nos questionários aplicados.

[11] Os níveis de argumentação da questão 1 foram analisados tomando por base as justificativas dos estudantes às três perguntas, a, b e c.

Nas respostas à questão *a* "As figuras retangulares A e B são iguais? justifique sua respost*a*" houve unanimidade entre as respostas dos estudantes sobre as figuras serem diferentes. Quanto às justificativas, 15 (quize) alunos justificaram que uma figura era maior que a outra, destacando as medidas diferentes de altura e largura. No entanto, dentre os que se arriscaram a apontar qual das figuras era maior, 7 (sete) indicaram a figura *A*, por ser mais alta, como podemos observar na figura 1.

**Figura 1 – Registro gráfico da estudante 12 na questão 1**

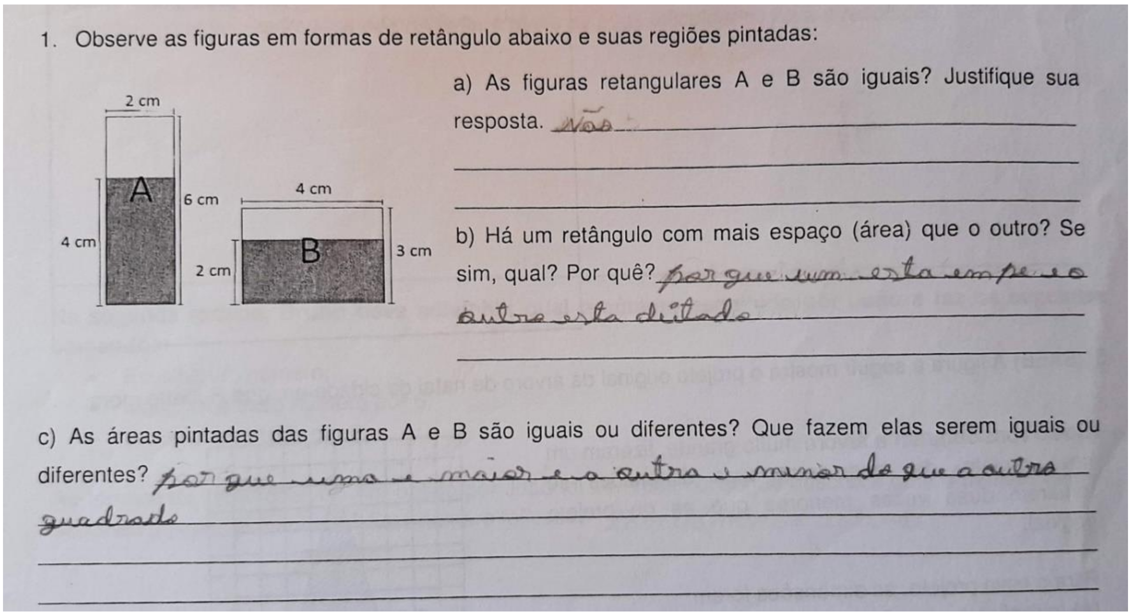



Fonte: questionários aplicados pela autora

A figura 1 demonstra também uma tendência inversa com o uso dos termos espaço e área na questão b [Há um retângulo com mais espaço (área) que outro? Se sim, qual?]. Ao responderem a esta questão, das 26 (vinte e seis) crianças, 7 (sete) afirmaram que a figura B tinha maior espaço (área), normalmente indicando a diferença de centímetros na base das figuras. A aluna 27, por exemplo, ao justificar a resposta da questão a, afirmou: "São diferentes porque a outra é comprida e a outra é mais menor" (sic). Entretanto, ao responder à questão b, sobre qual o retângulo possui maior espaço (área), concluiu que era o retângulo B "Com mais espaço 'area' [...]B" (27) (sic). Apenas 1 (uma) criança afirmou que A tinha maior espaço, as demais crianças não fizeram uma escolha, mas afirmaram que uma era maior e outra menor. A tendência era afirmar que a figura B era mais espaçosa, por ser mais larga. Esse fenômeno demonstra a *centração* de pensamento, pois, embora tenham conseguido observar os dois aspectos – A é mais alta, mas B é mais larga – as crianças não conseguiram fazer essa análise simultânea.

Nas perguntas b e c, categorizamos as respostas pelo parâmetro de *centração* ou *descentração* do pensamento demonstrado, usando também as justificativas da letra a nesta análise. Na pergunta b, agrupamos como pensamento descentrado as que traduziam uma compreensão de que a figura A possui maior altura, mas a figura B possui maior largura e, portanto, suas áreas poderiam ser iguais ou aproximadas. Apenas 2 (duas) respostas se aproximaram dessa ideia, sendo que uma delas, apresentada na figura 2, escreveu uma explicação sem responder "sim" ou "não". Esta resposta pode representar uma tentativa de *descentração*.

**Figura 2 – Registro gráfico da estudante 29 na questão 1**



1. Observe as figuras em formas de retângulo abaixo e suas regiões pintadas:



a) As figuras retangulares A e B são iguais? Justifique sua resposta. Não

b) Há um retângulo com mais espaço (área) que o outro? Se sim, qual? Por quê? porque um esta em pe e o outro esta ditado

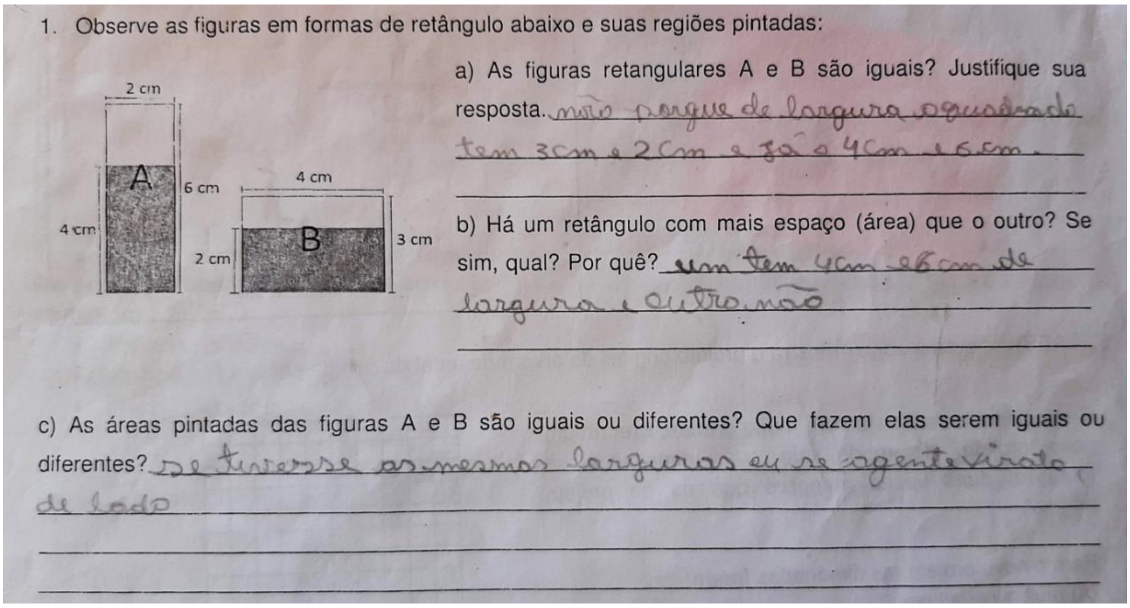
c) As áreas pintadas das figuras A e B são iguais ou diferentes? Que fazem elas serem iguais ou diferentes? porque uma e maior e a outra e menor do que a outra quadrado

Fonte: questionários aplicados pela autora

A resposta da letra *b*, apresentada na figura 2, "porque um esta em pe e o outro esta deitado" (sic), demonstra que a estudante buscou compensar as diferenças entre altura e largura das figuras A e B através de um movimento posicional que pudesse apresentá-las de uma maneira que reduzisse as diferenças. Assim, a estudante demonstrou analisar os dois aspectos, altura e largura, simultaneamente.

Os que não demonstraram *descentração* no pensamento, um total de 18 (dezoito) estudantes, foram agrupados em *centração,* onde a criança tende a focar em apenas um aspecto do objeto de análise. A figura 1 exemplifica essa tendência. Houve 5 (cinco) respostas em que a escrita não permitiu que extraíssemos o raciocínio utilizado pelos estudantes e, portanto, classificamos como indeterminado (Figura 3). Apenas 1 estudante não respondeu à questão.

**Figura 3 – Registro gráfico da estudante 01 na figura 1**


1. Observe as figuras em formas de retângulo abaixo e suas regiões pintadas:

a) As figuras retangulares A e B são iguais? Justifique sua resposta. não porque de largura o quadrado tem 3cm e 2cm e já o 4cm e 6cm.

b) Há um retângulo com mais espaço (área) que o outro? Se sim, qual? Por quê? um tem 4cm e 6cm de largura e outro não

c) As áreas pintadas das figuras A e B são iguais ou diferentes? Que fazem elas serem iguais ou diferentes? se tivesse as mesmas larguras ou se agente virato de lado



Fonte: questionários aplicados pela autora

Uma última observação sobre esta questão refere-se à terceira pergunta, letra *c*, que trata especificamente das áreas pintadas. Diferente do fenômeno observado nas figuras em sua totalidade, além de possuírem as áreas iguais, as figuras pintadas possuem a mesma forma, mas em posições diferentes. Como os estudantes ainda não sabem realizar o cálculo de área, a simples afirmação de que são iguais ou diferentes nada nos diz sobre o raciocínio do estudante em relação às figuras, fazia-se necessário uma justificativa que nos mostrasse se os alunos perceberam ou não a igualdade da forma e a inversão da posição da figura na análise das áreas. Assim, a pergunta c possibilitava aos estudantes duas formas descentradas de interpretação: por inversão, imaginando uma mudança de posição da figura; e por reciprocidade de relações, a altura de A é igual à largura de B e a largura de A é igual à altura de b.

Conforme nossa análise, 19 (dezenove) crianças responderam que as áreas pintadas são diferentes, dentre elas 17 (dezessete) justificaram a resposta (sendo 4 (quatro) classificadas como indeterminadas por não conseguirmos compreender) e 3 (três) não justificaram; 6 (seis) responderam que eram iguais e 1(um) não respondeu. A seguir, apresentaremos na íntegra as respostas dos estudantes que afirmaram serem iguais: “São iguais so mudam as posisões que as figuras estão” (10) (sic); “Se tivesse as mesmas larguras ou se agente virato de lado” (1) (sic) (Figura 3); “O que faz elas ceres igual é a formas de ser quadrado” (31) (sic); “Ela são iguais por quê também ela é são gadir iguais por quê é um gadir e a outra e pequena são gadir e que só a pintura é iguais (6) (sic); “São inguais eu acho só muda que a da letra A têm mais comprimento então por isso fica um maior e outro menor do que o outro” (20) (sic); “o que fais ela ser diferente por quê a B é mais pequena maio por lado e A e maio para cima e pequena por lado mas se virar fica iguais” (26) (sic). Entendemos que a estudante 6 tentou expressar que as figuras A e B são diferentes, porque uma é grande e a outra pequena, no entanto, as partes pintadas (a pintura) são iguais.

Dentre os alunos que consideramos ter respondido que as áreas pintadas das figuras são diferentes, destacamos: “Uma porque e maior e a outra e menor so que os dois tem a mesma fundura” (22) (sic). Tal justificativa a classificamos como de indeterminado, no entanto chamamos a atenção para o emprego da expressão “mesma fundura” que pode, porventura, significar que houve uma compreensão da conservação de área a despeito da posição que estavam dispostas.

Apesar de encontrarem-se na faixa etária que corresponde ao período do operatório concreto, segundo os estágios de desenvolvimento de Jean Piaget (7 a 11 anos), a maioria dos alunos não demonstrou a *descentração* em nenhuma das duas perguntas, sendo que apenas 7 (sete) estudantes demonstraram em uma ou outra, 11 (onze) demonstraram *centração* nas duas respostas e 8 (oito) foram categorizados como indeterminados ou sem resposta. Nossa conjectura para o fenômeno diz respeito à forma como a atividade se apresenta.

Quando criamos a questão em pauta, a fizemos pensando nos conceitos de conservação, o qual Piaget descreveu a partir de experimentos com água, que mudava de um recipiente para outro, quantidade de argila, ou qualquer outro elemento que pudesse ter sua forma alterada, mas conservasse sua quantidade, massa, volume, etc. Utilizamos tal princípio na elaboração das imagens e até tentamos induzir o pensamento das crianças para a associação a alguma figura espacial – o que em algumas respostas parece ter produzido este efeito, como, por exemplo, na resposta do aluno 30 que afirma "uma delas tem mais areia e cm" (sic) – mas é possível que muitos alunos não tenham feito associação similar. Considerando que o período operatório concreto tem, segundo Piaget, como limitação em termos cognitivos, uma abstração orientada por fenômenos concretos, é possível que seja esta uma das razões para o baixo desempenho do grupo.

**Análise da questão 2**

2. As idades de Joana e Gustavo somadas tem por resultado 27. Sabendo que Joana tem 13 anos, quantos anos tem Gustavo?

*Como você tentou resolver este problema? Descreva seus passos.*

Fonte: questionário aplicado pela autora

O enunciado da questão trata da *composição* de um valor, 27, a partir da soma de duas parcelas, das quais uma é conhecida e a outra não. Assim, a operação expressa é uma adição, tendo inclusive feito uso do termo "soma", que especifica o resultado desta operação. No entanto, o problema é facilmente resolvido com uma subtração, quando o aluno a conhece enquanto inversa da adição ou quando tem claros os significados das duas operações que compõem as estruturas aditivas, adição e subtração. No caso, para encontrar a idade de Gustavo, basta retirar de 27 o valor correspondente à idade de Joana, sendo esta a forma inversa e canônica de resolver o problema. O modo direto de resolução é através do processo explicitado no problema, buscando completar o valor que falta da composição para 13 chegar a 27.

Segundo Maldaner (2016), as duas ações apresentadas acima, retirar e completar, compõem, juntamente com a de comparar, os três significados da subtração, ou seja, todas as formas de resolução deste problema apresentam significados da subtração, independente de qual recurso seja utilizado pelo estudante. Neste viés, o fato de se utilizar os significados da subtração não corresponde necessariamente a uma inversão do processo mental. No entanto, dentre os significados apresentados, o de retirar se destaca como a ação que mentalmente anula a ação apresentada no problema, a de compor. Esse entendimento orientou nossa análise em relação às respostas dos estudantes e a *reversibilidade* na resolução do problema, conforme quadro 04.

**Quadro 04 – Síntese de análise da questão 2**

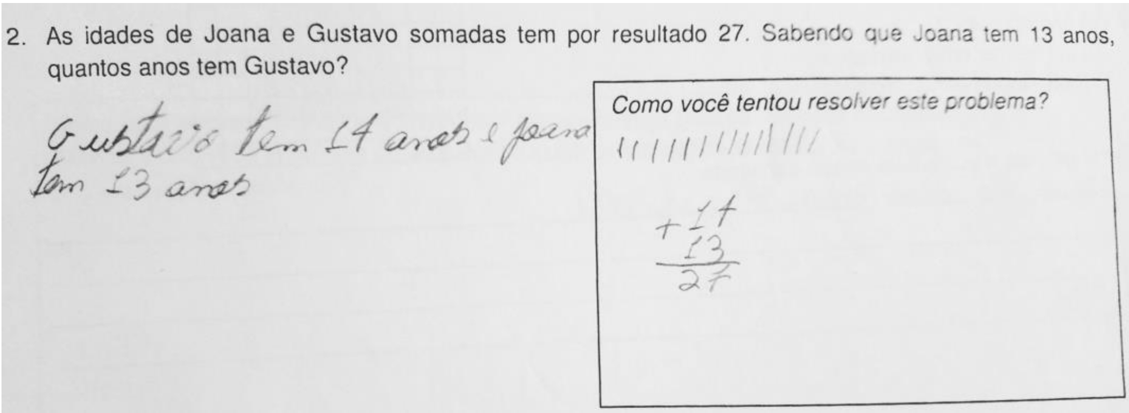
| CATEGORIAS DE RACIOCÍNIO | CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Argumentação Níveis de valoração | | | | Total |
| | Não argumentou | Baixa | Média | Alta | |
| **Raciocínio Direto** | 5 | - | 5 | 1 | 11 |
| **Raciocínio Inverso** | 5 | 3 | 1 | - | 9 |
| **Indeterminado** | 3 | - | 2 | - | 5 |
| **Sem resposta** | 1 | - | - | - | 1 |
| **Total** | 14 | 3 | 8 | 1 | 26 |

Fonte: Elaborada por BRITO, 2020 com base nos questionários aplicados pela autora.

Dos 26 (vinte e seis) participantes, 20 (vinte) chegaram à resposta correta, 5 (cinco) demonstraram equívocos na interpretação e apenas 1 não respondeu. Dentre os que acertaram, 11 resolveram seguindo a indicação semântica do termo “somadas”, fazendo uso da adição, seja por meio do algoritmo ou através da contagem, adicionado um a um até chegar ao número 27. Nem todos os estudantes explicaram suas tentativas de resolução nas respostas, mas alguns, seguindo a orientação da pesquisadora, se arriscaram a descrever seu próprio raciocínio na atividade. Dentre estes, nem todas as argumentações corroboram para que possamos compreendê-las, como a explicação que segue: “Eu coloco que conta de somar por que eu vi que Joana tem 13 e perguntou a idade de Gustavo então eu tentei colocar 13 + 14 e deu vinte e sete 27” (20). A justificativa da aluna 20 é compreensível, no sentido de que é possível saber o que ela quis dizer, mas não exprime o movimento feito para encontrar o número 14. Assim, em nível de argumentação, de reflexão sobre o próprio pensamento, classificamos a estudante com o nível médio de argumentação. Conjecturamos, que ela pode ter realizado uma estimativa, ou somado mentalmente números aleatórios, por tentativa e erro, ou mesmo ter realizado algum outro cálculo mental, o qual não foi capaz de descrever.

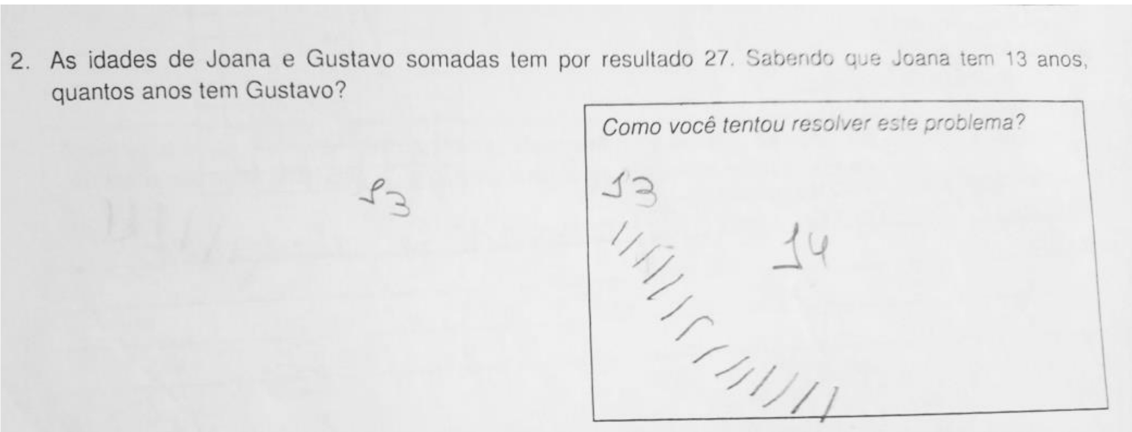
Algumas justificativas, no entanto, foram capazes de exprimir o pensamento do estudante: “Eu contei de 13 a 27 e Gustavo tem 14 anos por que 13 mais 14 da 27” (10) (sic). Essa resposta parece explicitar melhor o movimento feito mentalmente pelo estudante, sendo a única justificativa classificada no nível alto nesta questão. Outros ainda recorreram a uma estratégia valiosa, mas, muitas vezes, pouco incentivada nas práticas escolares, a representação por meio de desenhos.

**Figura 4 – Registro gráfico do estudante 22 na questão 2**




Fonte: questionários aplicados pela autora

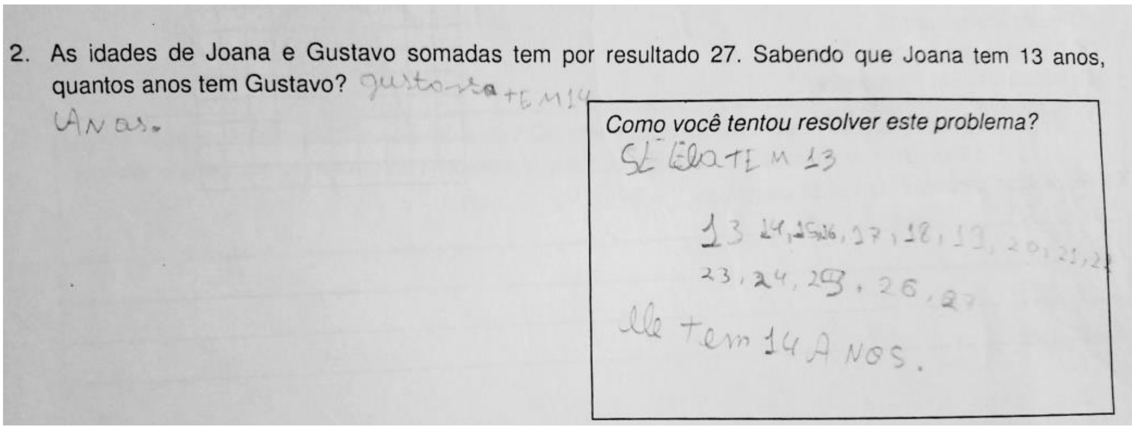
**Figura 5 – Registro gráfico da estudante 27 na questão 2**




Fonte: questionários aplicados pela autora

Em ambas as respostas, os estudantes parecem ter feito o mesmo processo explicado pelo estudante 10. Embora não tenham expressado com palavras o raciocínio utilizado, o registro gráfico nos possibilita inferir isso. A estudante 25 registrou os algarismos:

**Figura 6 – Registro gráfico da estudante 25 na questão 2**




Fonte: questionários aplicados pela autora

A aluna chega ao resultado esperado, 14, mesmo com o registro do número 13 no início da sequência, que poderia levá-la ao erro de incluir este número na contagem, chegando à resposta 15, ao invés de 14. Porém, a estudante parece ter percebido que o número 13 não fazia parte da contagem, uma vez que não colocou uma vírgula em seguida, como fez com os demais números, indicando que ele não faz parte da sequência contada.

As respostas dos 11 (onze) estudantes apresentadas até então demonstram que o raciocínio utilizado por eles envolve o significado de completar, presente na subtração, mas que utiliza, no entanto, a própria ideia inicial de composição para chegar ao resultado. Assim, podemos inferir que não houve inversão, ou seja, os alunos não resolveram a partir de um processo capaz de anular a ação inicial (composição) e sim, desenvolveram uma solução para o problema em um processo direto.

Os demais estudantes que chegaram à resposta correta, a saber, 9 (nove), utilizaram o algoritmo da operação inversa, a subtração, para obter a resposta do problema, tomando $27 - 13 = 14$. Observa-se que estes estudantes, para além do uso do algoritmo, utilizaram o significado de retirar para encontrar o segundo valor da composição apresentada. Esse modo de resolução demonstra que estes alunos compreendem a ação de retirar como uma inversão à ação de compor, demonstrada pela subtração como uma inversão da adição, tendo incorporado estas operações como inversas em seus esquemas de ações. Os alunos utilizaram a subtração como uma ação capaz de anular a anterior (a soma $13 + 14$), colaborando para que o problema seja solucionado com maior facilidade.

É importante ressaltar que não pretendemos defender esta última forma de resolução como melhor ou superior às apresentadas anteriormente. Buscamos, em nossas análises, encontrar características do pensamento reversível nas respostas registradas pelos alunos e caracterizar suas potencialidades na resolução de problemas. Percebe-se que, ao utilizar a operação inversa, os alunos operaram com a *reversibilidade*, uma vez que buscaram inverter o processo apresentado pelo problema. No entanto, por outro lado, os alunos que resolveram nos métodos apresentados anteriormente desenvolveram seus próprios esquemas de ações para encontrar a resposta, chegando ao mesmo resultado.

Apenas as respostas de 5 (cinco) alunos não corresponderam à expectativa para a resolução do problema. Ao responder a questão, eles somaram os dados 13 e 27. O equívoco cometido pelos estudantes é comum no momento da interpretação dos problemas. Nota-se que a presença do termo soma, levou estes estudantes a concluir que os valores dados deveriam ser somados. Os estudantes demonstram possuir o domínio do algoritmo da adição, mas não dominam ainda o significado da operação, não sabendo, portanto, utilizá-lo no contexto da resolução de problemas.

Os alunos que resolveram diretamente, por meio do *complemento*, utilizaram técnicas como contagem por meio de rabiscos, ou números, ou mesmo utilizaram valores hipotéticos que podem ter sido testados – essa técnica, no entanto, não está demonstrada graficamente em nenhuma das atividades analisadas. A primeira demonstra uma abstração[12] pseudo-empírica, ou seja, em um nível já representativo, mas ainda pré-operatório, pois se apoia em resultados observáveis.

No entanto, não podemos descartar a possibilidade de a complementação ser feita mentalmente, sendo inclusive um cálculo mental muito recorrente em situações cotidianas com movimentação de dinheiro, como no exemplo apresentado por Maldaner (2016). Todavia, o que os alunos demonstraram em seus registros foi a resolução por meio do algoritmo, – retomando, 11 (onze) alunos utilizaram o complemento como método de solução: 4 (quatro) deles contaram de 13 a 27, explicitando esse movimento na atividade, e, dos 7 (sete) que resolveram por meio do algoritmo da adição, 5 (cinco) não justificaram como encontraram a parcela 14 e dois tentaram justificar com as afirmações "botei mais 14 e deu 27" e "tentei colocar 13 + 14 e deu 27" – método no qual a solução canônica se mostra mais conveniente, uma vez que o algoritmo da adição requer o conhecimento das duas parcelas, pelo menos em seu uso tradicional.

[12] Piaget define três tipos de abstração: i) a empírica, que se apoia em objetos físicos; ii) a pseudo-empírica, nos níveis já representativos mas ainda pré-operatórios; iii) reflexiva, que se apoia sobre as atividades cognitivas do sujeito (esquemas, ações, estruturas, etc.), característica do operatório concreto. (PIAGET, 1995)

**Análise da questão 3**

| |
|---|
| 3. (SAEB) Numa fazenda, havia 524 bois. Na feira de gado, o fazendeiro vendeu 183 de seus bois e comprou 266 bois. Quantos bois a fazenda passou a ter? |
| *Como você tentou resolver este problema? Descreva seus passos.* |

Fonte: SAEB (Adaptado)

Esse problema envolve duas transformações, uma que subtrai ($-183$) e outra que adiciona ($+266$), sobre uma dada medida, a quantidade de bois. É uma situação que ilustra a propriedade da associatividade, apresentada na definição de grupos. A criança pode resolver uma transformação de cada vez ou iniciar por encontrar a composição das transformações, fazendo $266 - 183$ e depois aplicar a transformação composta sobre a medida inicial.

Esses significados e propriedades apresentados, no entanto, não são claros para o público com o qual estamos trabalhando. Os estudantes precisam refletir sobre uma relação de causalidade e operar sobre ela, ou seja, compreender que a venda de 183 bois tem por efeito uma diminuição na quantidade original, ou seja, 183 bois foram retirados do grupo inicial e retirar significa subtrair. De maneira análoga, a compra de 266 bois tem por efeito um aumento na quantidade original, ou seja, 266 bois foram acrescentados à quantidade original e acrescentar significa adicionar. Esses dois eventos, no entanto, ocorrem simultaneamente, em uma mesma feira, o que torna conveniente pensar em uma composição de transformações.

Na análise desta questão, associamos a relação de causalidade à *flexibilidade* do pensamento, uma vez que, conforme discutido anteriormente, exige uma reflexão por parte da criança sobre as sucessivas etapas que produzem cada uma das alterações no fenômeno observado. Para além da causalidade, o pensamento flexível contempla também a capacidade de interligar os acontecimentos em um todo integrado (FLAVELL, 1975), de modo que, os estudantes que não relacionaram corretamente as operações ao fenômeno apresentado pelo problema e os que o fizeram em apenas uma das operações, foram categorizados como "pensamento estático" em oposição ao "pensamento flexível".

A composição de transformações, ou associatividade, por sua vez, pode ser entendida como uma forma de *descentração, pois* $(a + b) + c = a + (b + c)$ nada mais é do que um mesmo conteúdo apresentado em "formas" diferentes. Contudo, ainda que nenhum estudante tenha resolvido o problema utilizando esta estrutura, não podemos afirmar que este fator representa um pensamento centrado, pois a própria questão apresenta uma ordem de apresentação dos dados que pode ser facilmente seguida pelo estudante. Assim, nossa análise foi sintetizada conforme apresentado na quadro 05:

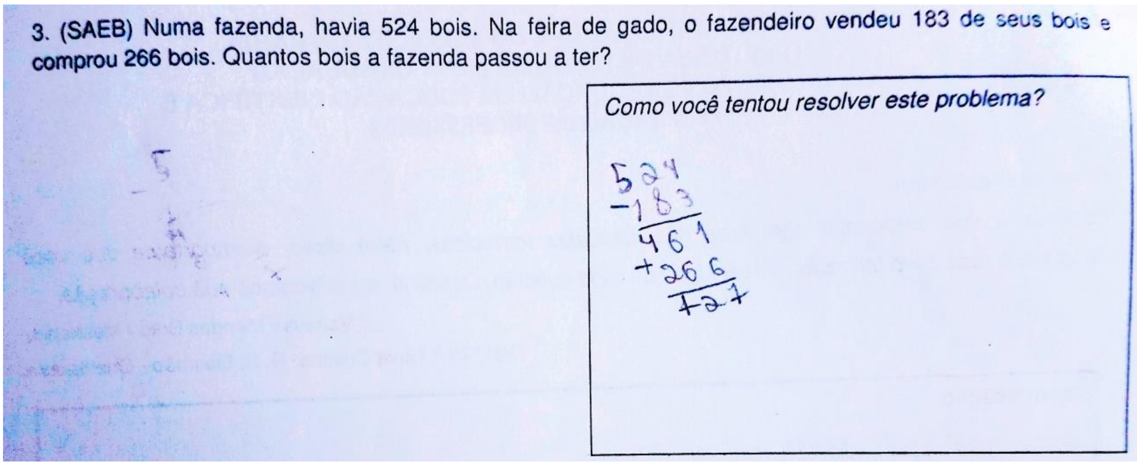
**Quadro 05 – Síntese de análise da questão 3**

<table>
<tr><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS</th><th>Quantidade de alunos por categoria</th><th>Total analisado</th></tr>
<tr><td colspan="2">Pensamento Centrado</td><td>-</td><td rowspan="2">26</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pensamento Descentrado</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pensamento Flexível</td><td>12</td><td rowspan="3">26</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pensamento Estático</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="2">Indeterminado</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Níveis de Argumentação</td><td>Não argumentou</td><td>26</td><td rowspan="4">26</td></tr>
<tr><td>Baixo</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Médio</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Alto</td><td>0</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada por BRITO, 2020 com base nos questionários aplicados pela autora

Dos 26 (vinte e seis) estudantes que participaram da pesquisa, 12 (doze) conseguiram desenvolver o raciocínio correto e realizar as duas transformações solicitadas. Dentre esses 12 (doze), 5 (cinco) estudantes conseguiram interpretar e escolher adequadamente as operações em seus processos de resolução, no entanto erraram o cálculo ou demonstraram dificuldades com o uso dos algoritmos, como exemplificado na figura 7.

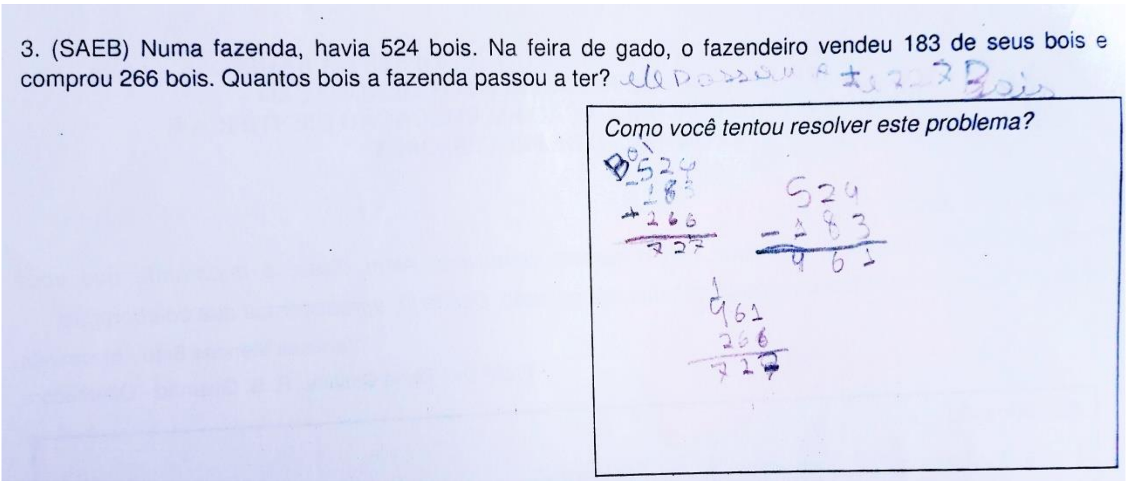
**Figura 7 – Registro gráfico do estudante 23 na questão 3**




Fonte: questionários aplicados pela autora

A figura 7 demonstra que o estudante 23 compreendeu a proposta do problema, utilizando de maneira adequada as operações no processo de resolução. A diferença entre o resultado final do estudante e o resultado esperado é decorrente de uma dificuldade no uso do algoritmo da subtração, quando o algarismo do minuendo é menor que o do subtraendo. Desconsideramos o erro do estudante em nossa sistematização dos dados, tendo em vista que nossa análise foi direcionada às habilidades mobilizadas na compreensão, interpretação e desenvolvimento de estratégias para resolução dos problemas, ou seja, os esquemas de ações representados em suas tentativas de resolução.

**Figura 8 – Registro gráfico da estudante 25 na questão 3**

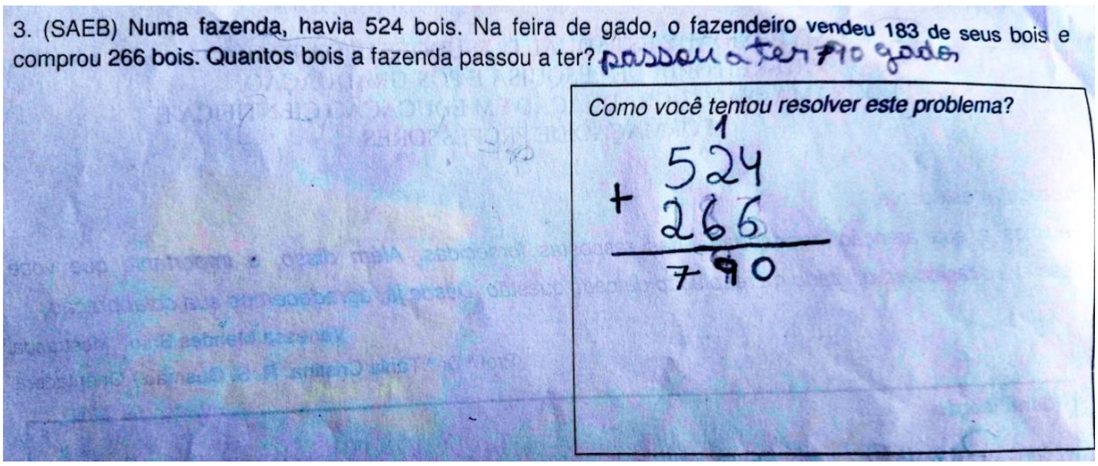



Fonte: questionários aplicados pela autora

O erro cometido inicialmente pela estudante 25, figura 8, foi repetido também pelo estudante 3. Diferentemente dos demais erros de cálculo, estes demonstram uma aparente confusão no raciocínio para além da operacionalidade do algoritmo. Ao realizar operações inversas, simultaneamente, os estudantes demonstraram também uma possível confusão em relação aos significados das operações, considerando que: o resultado da subtração se caracteriza como "resto" ou "diferença" ao passo que o resultado da adição é uma soma; a natureza das operações (soma-se valores versus retira-se valores); o fato de que, na subtração deve haver uma relação de ordem entre minuendo e subtraendo de modo que, se a unidade do minuendo for menor do que a unidade do subtraendo em uma mesma coluna (algoritmo), deve-se retirar uma dezena da unidade seguinte do minuendo, enquanto que na adição nada se retira, apenas acrescenta. Em seguida, a estudante 25 separou as contas, tendo apresentado ainda alguns erros de cálculo, não chegando à resposta correta. O estudante 3, no entanto, não chegou a fazer essa separação e apresentou um resultado equivocado. Diante disso, categorizamos os raciocínios utilizados pelos estudantes 3 e 25, quanto à *flexibilidade* do pensamento, como indeterminado e flexível, respectivamente.

Houve ainda três alunos que realizaram apenas uma das transformações. Os alunos 24 e 18 operaram apenas a transformação −183, enquanto a aluna 01 operou a transformação +266, conforme a figura 9:

**Figura 9 – Registro gráfico da estudante 01 na questão 3**

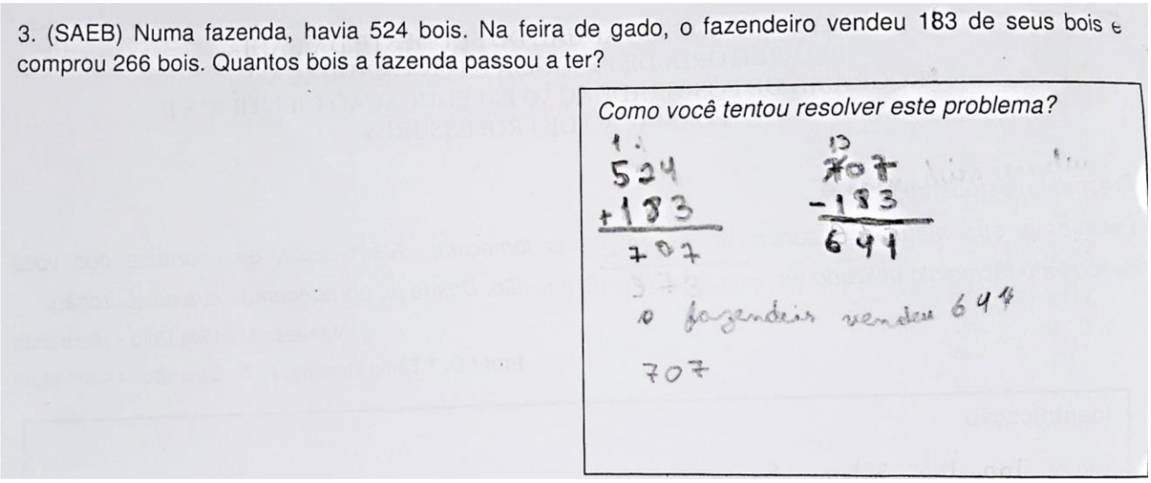



Fonte: questionários aplicados pela autora

É importante observar que −183 representa a primeira transformação apresentada pelo problema, seguida de +266. Não é possível ter certeza se o erro ocorreu por falta de atenção ou alguma dificuldade na interpretação da questão ou mesmo do uso do algoritmo. No entanto, vale observar que a aluna chegou a circular o número "183" no problema e depois apagou (marca difícil de ser observada na imagem), demonstrando que em algum momento chegou a refletir sobre o seu significado no problema, mas acabou não utilizando.

Além das resoluções já apresentadas, em que 12 (doze) conseguiram desenvolver as duas transformações corretamente, 3 (três) alunos desenvolveram apenas uma delas, onze respostas apresentaram distorções de raciocínio que culminaram em resultados equivocados. Uma delas, a do estudante 3, já foi discutida. Analisando os demais erros cometidos pelos estudantes, conseguimos extrair alguns padrões: o primeiro, que está presente em 9 (nove) das 10 (dez) respostas, é a concentração apenas no algoritmo da adição. A estudante 12 foi a única que chegou a realizar uma subtração, como mostra a figura 10.

**Figura 10 – Registro gráfico da estudante 12 na questão 3**


3. (SAEB) Numa fazenda, havia 524 bois. Na feira de gado, o fazendeiro vendeu 183 de seus bois e comprou 266 bois. Quantos bois a fazenda passou a ter?

*Como você tentou resolver este problema?*

524 + 183 = 707

707 − 183 = 641

o fazendeiro vendeu 641

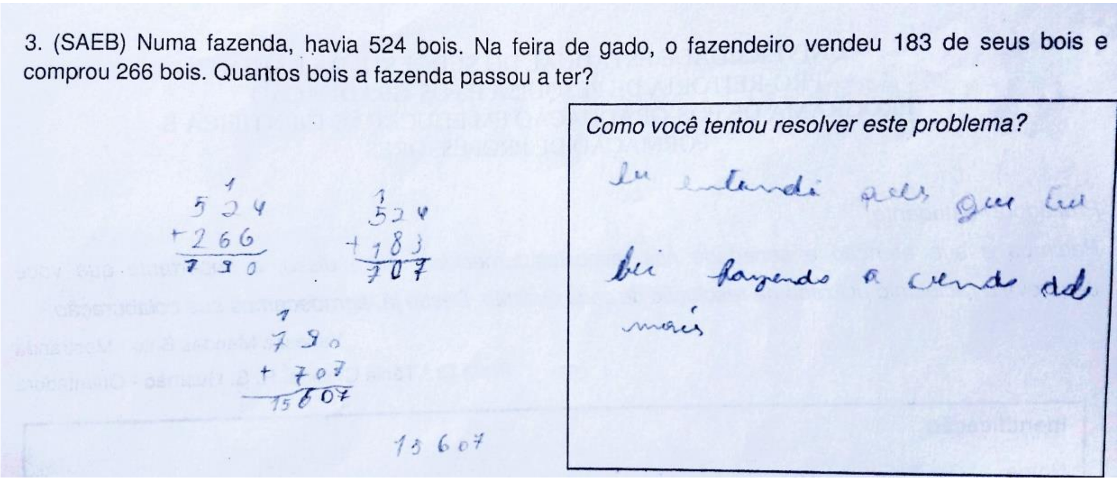
707

Fonte: questionários aplicados pela autora

E possível observar que a estudante somou e, em seguida, subtraiu o mesmo número, 183. O primeiro detalhe a ser observado em seus registros é que ele aparenta não ter percebido que a segunda operação anularia a primeira, e deveria ter por resultado a primeira parcela da adição feita anteriormente, 524. Em outras palavras, a estudante demonstra não compreender a relação inversa entre a adição e a subtração, considerando que ainda não estudaram os simétricos aditivos para fazerem a relação entre +183 e −183. O segundo detalhe a ser observado é que o cálculo da adição foi feito corretamente, o que não aconteceu com o cálculo da subtração, sobre o qual, não conseguimos identificar os processos pelos quais a estudante chegou ao resultado 641.

Como dissemos anteriormente, os nove alunos restantes realizaram apenas cálculos de adição. Quatro estudantes somaram os três dados apresentados, mas um deles, o estudante 9, somou o valor 524 duas vezes, como mostra a figura 11.

**Figura 11 – Registro gráfico do estudante 9 na questão 3**


3. (SAEB) Numa fazenda, havia 524 bois. Na feira de gado, o fazendeiro vendeu 183 de seus bois e comprou 266 bois. Quantos bois a fazenda passou a ter?

Como você tentou resolver este problema?



Fonte: questionários aplicados pela autora

Os registros do estudante demonstram que ele não compreende o caráter sucessivo das transformações, uma vez que ele buscou aplicar as duas sobre a mesma medida original para depois compor em um único resultado, realizando três operações ao invés de duas. Um dado interessante sobre sua estratégia de resolução, é que o estudante operou primeiramente o segundo dado apresentado na questão, fazendo a transformação correta, uma adição, demonstrando a possibilidade de ter tido dúvidas sobre o que fazer com o primeiro dado (−183), que acabou sendo utilizado de maneira equivocada. A presunção de que a criança iniciou pela adição do segundo dado (266) se dá pelo fato dessa conta estar à esquerda, bem como, pelo fato da soma dessa conta ser a primeira parcela da última adição realizada. O terceiro cálculo realizado pelo estudante possui ainda outro equívoco, pois o estudante não posicionou adequadamente as parcelas, de modo que alguns valores ficaram fora da ordem decimal à qual pertenciam. Por esta razão, a soma que deveria resultar em 1.497, resultou em 15.607.

As crianças que acertaram à questão seguiram estritamente as transformações conforme a ordem em que são apresentadas no problema. Nenhum aluno, neste grupo, tentou operar com a regra da associatividade $(a + (b + c) = (a + b) + c)$, que para este problema pode ser representada na forma $((524 - 183) + 266 = 524 + (266 - 183))$ – Neste caso também comutamos, a fim de manter a ralação de ordem da subtração e simplificar a operação $(+(-183))$. – Tendo por base o problema em pauta, esta forma de resolução se caracteriza, segundo Vergnaud (2014) como composição de transformações. Dentre os estudantes que apresentaram resoluções equivocadas, no entanto, quatro registraram a soma de $266 + 183$ como solução para o problema. Não há como saber ao certo se os estudantes buscavam fazer uma composição de transformações, mas, se assim o foi, esses estudantes não conseguiram captar as naturezas inversas das transformações propostas, já que utilizaram a adição em uma composição que deveria retirar 183 de 266. Além disso, nenhum dos estudantes tentou aplicar essa composição sobre a medida original, 524. O último erro registrado foi de um estudante que apenas somou 524 com 183, sobre o qual não conseguimos fazer nenhuma inferência.

O fato de nenhum estudante ter tentado compor as transformações ou mesmo ter operado em uma ordem diferente da apresentada pela questão, nos faz refletir sobre as características do pensamento estático. A feira do gado é um evento único em que ocorrem as 183 vendas e as 266 compras e, embora haja uma ordem de apresentação dos valores, não é possível estabelecer uma ordem dos eventos. É possível conjecturar que mesmo os alunos que conseguiram realizar as transformações pedidas, possam não ter percebido as transformações como um todo integrado, mas como duas etapas sucessivas de um processo. Claro que esta é apenas uma conjectura, pois é possível ter tal compreensão e ainda assim optar por seguir a ordem apresentada.

Retomando os dados quantitativos apresentados, tem-se que, dos 26 (vinte e seis) estudantes participantes, 12 (doze) conseguiram interpretar e aplicar corretamente as operações em suas estratégias de resolução, ainda que alguns tenham cometido algum erro de cálculo ou de execução do algoritmo; três alunos fizeram apenas uma das transformações e 11 (onze) demonstraram não conseguir relacionar a situação problema com as operações a serem realizadas, com foco na adição. Assim, dentre os alunos participantes, tem-se que menos da metade dos alunos conseguiu resolver o problema apresentado, resultado que nos permite levantar algumas hipóteses sobre os erros cometidos: i) os alunos podem não ter conseguido relacionar os termos "venda" e "compra" com os significados de "retirar" e "acrescentar"; ii) os alunos não associaram os significados "retirar" e "acrescentar" às operações subtração e adição, respectivamente. Considerando que os termos utilizados pelo problema possam ser considerados de linguajar comum ou de uso cotidiano, é possível que a relação dos significados com as operações tenha sido a principal causa das dificuldades dos estudantes.

**Análise da questão 4**

4. (SAEB) João sabe que faltam 31 dias para o aniversário. Quantas semanas completas faltam para o aniversário dele?

*Como você tentou resolver este problema?*

Fonte: SAEB (Adaptado)

Este é um problema multiplicativo do tipo isomorfismo de medidas (VERGNAUD, 2014), no qual há um dado implícito. Por tratar-se de um saber cotidiano, o problema pressupõe que o estudante tenha a informação de que uma semana possui 7 dias e, portanto, esse número não é apresentado no problema. Durante a aplicação do questionário, muitos alunos nos procuravam para relatar que não estavam entendo a questão, perguntar como ela deveria ser resolvida e qual “conta” deveria ser feita. Tentamos não interferir nos processos dos estudantes para resolver os problemas, mas acabamos de alguma forma auxiliando e tornando o problema mais compreensível ao perguntar para eles: quantos dias tem uma semana? Após a pergunta, os alunos respondiam corretamente, 7, e, em seguida, voltavam para suas carteiras, demonstrando terem encontrado a solução do problema ou, ao menos, um esclarecimento sobre o que deveria ser feito.

É importante discutir aqui o equívoco cometido na escrita do problema. A primeira sentença não designa de quem é o aniversário, pela falta do pronome possessivo “seu”, o que faz com que não se estabeleça uma relação entre a informação dada na primeira sentença e a pergunta da segunda. Nesse sentido, uma análise matemática mais criteriosa determinaria que o problema em pauta não possui solução. No entanto, o equívoco no enunciado do problema não parece ter interferido nos processos de resolução dos estudantes, que demonstraram relacionar o dado “31 dias” à quantidade que falta para o aniversário de João. Em geral, as dificuldades apresentadas pelos estudantes se referiam ao fato de a questão apresentar apenas um valor numérico, o 31.

Outra particularidade que dever ser observada neste problema é que 31 não é múltiplo de 7, ou seja, não existe um número natural n, tal que $7n = 31$. Sua implicação na prática é que uma quantidade de dias não irá compor as semanas que serão apresentadas no resultado final do problema, o que fez alguns alunos se sentirem inseguros em relação ao resultado que obtinham, quando o obtinham.

É possível resolver esse problema por diversas estratégias e todas elas estarão relacionadas ao significado de medir da divisão. Em um fenômeno análogo ao observado na questão 2, a relação com o significado da divisão não determina que seja esta operação a única estratégia de resolução possível. De fato, o aluno pode recorrer a qualquer uma das quatro operações para responder à pergunta: quantas vezes 7 cabe em 31? Não nos dedicaremos a demonstrar todas essas possibilidades, pois as estratégias dos estudantes nos apresentarão uma diversidade suficiente para nossa discussão.

Vale apresentar, no entanto, uma solução para o problema que nos possibilite elencar algumas particularidades do problema. Utilizando o algoritmo euclidiano da divisão, temos $31 = 7q + r, (r < 7)$, onde $q$, o quociente, seria quantidade de semanas completas (4) e $r$, o resto (3), representa a quantidade de dias excluídos do resultado. Recorremos ao algoritmo euclidiano por trabalhar com números no domínio do discreto, contemplando assim o universo em que estamos trabalhando, o conjunto $\mathbb{N}$. Nota-se que a relação isomórfica das medidas não se dá de forma imediata, uma vez que a relação que se busca é:

| **Semanas** | **Dias** |
|---|---|
| 1 → | 7 |
| 4 → | 28 |

Nenhum dos valores que compõe a relação acima está explicitado no texto. No entanto, isso não significa que o estudante deva desenvolver de maneira sistemática esta estrutura para resolver o problema. Como dissemos anteriormente, apesar de o problema apresentar uma das ideias da divisão, – pois consiste em saber quantas vezes uma semana, ou 7 dias, cabem em 31 dias – ele pode ser resolvido com quaisquer uma das quatro operações.

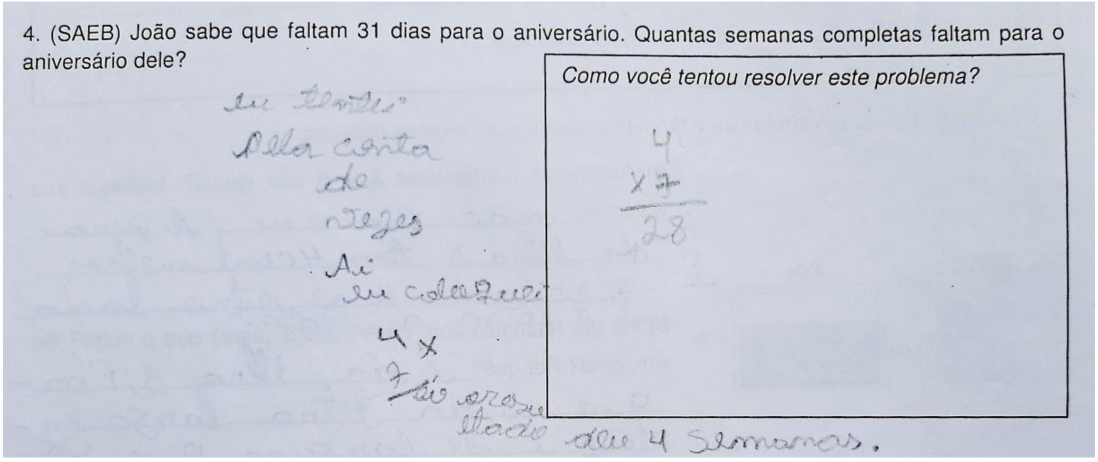
**Quadro 06 – Síntese de análise da questão 4**

| **CATEGORIAS DE RACIOCÍNIO** | **CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Argumentação Níveis de valoração** | | | | **Total** |
| | **Não argumentou** | **Baixa** | **Média** | **Alta** | |
| **Raciocínio Direto** | 7 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| **Raciocínio Inverso** | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| **Indeterminado** | 13 | 0 | 0 | 0 | 13 |
| **Sem resposta** | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| **Total** | 26 | 0 | 0 | 0 | 26 |

Fonte: Elaborada por BRITO, 2020 com base nos questionários aplicados pela autora.

Em relação ao desempenho dos estudantes, dentre os 26 (vinte e seis) alunos participantes da pesquisa, apenas 9 (nove) conseguiram resolver o problema proposto. Destes, 7 (sete) recorreram à multiplicação ou à soma de parcelas iguais, em suas estratégias de resolução, e apenas duas alunas resolveram inversamente, utilizando a divisão.

**Figura 12 – Registro gráfico da estudante 20 na questão 4**

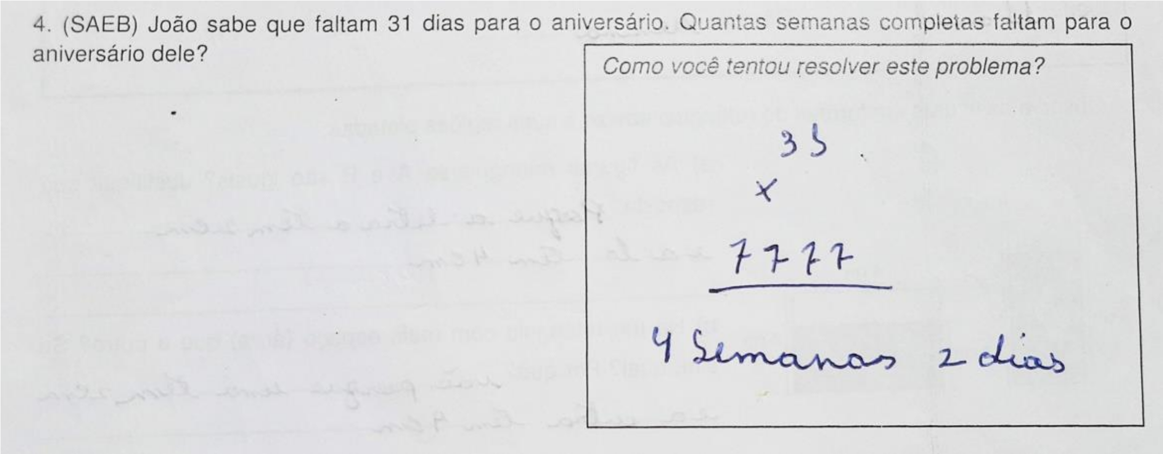



Fonte: questionários aplicados pela autora

A foto não permite perceber, mas há um registro apagado do número 3, indicando que a aluna pode, antes de operar $7 \times 4$, ter operado $7 \times 3$. Utilizamos este registro da estudante por representar os demais acertos que utilizaram a multiplicação, embora, dentre os estudantes que demonstraram ter resolvido o problema, e foram considerados dentre as respostas corretas, 4 (quatro) deles escreveram "28" ou "28 dias" na frente da pergunta, indicando ser esta a resposta final. Todos os estudantes que cometeram esse equívoco em suas respostas haviam resolvido por meio da multiplicação. Portanto, nossa hipótese é que eles concluíram que a resposta à pergunta deveria ser o resultado final, o *produto*, e não um dos fatores da operação.

Alguns alunos, no entanto, embora tenham operado com a multiplicação, o fizeram utilizando representações ou estruturas alternativas, como podemos observar nas figuras 13 e 14.

**Figura 13 – Registro gráfico da estudante 18 na questão 4**


4. (SAEB) João sabe que faltam 31 dias para o aniversário. Quantas semanas completas faltam para o aniversário dele?

Como você tentou resolver este problema?

35

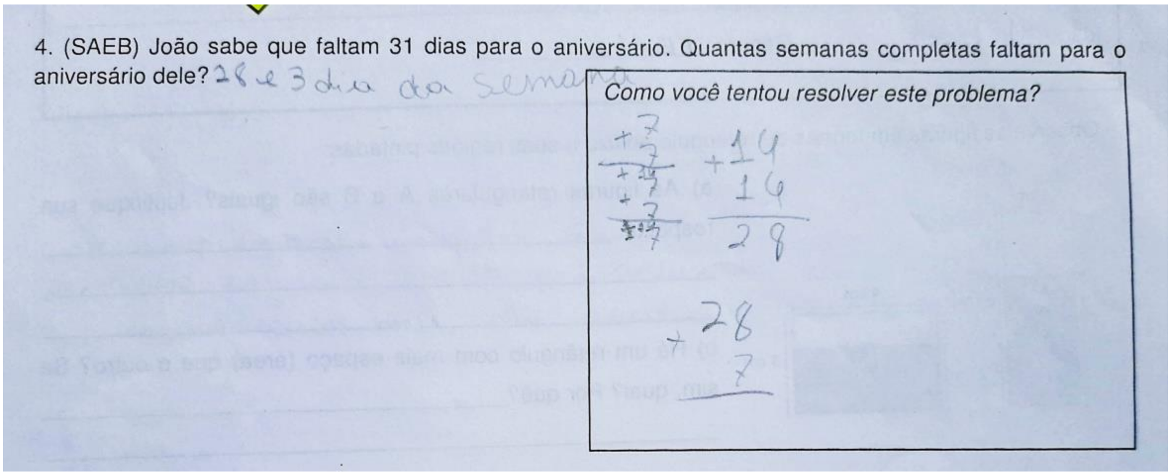
x

7777

4 Semanas 2 dias

Fonte: questionários aplicados pela autora

**Figura 14 – Registro gráfico da estudante 25 na questão 4**


4. (SAEB) João sabe que faltam 31 dias para o aniversário. Quantas semanas completas faltam para o aniversário dele? 28 e 3 dia da semana

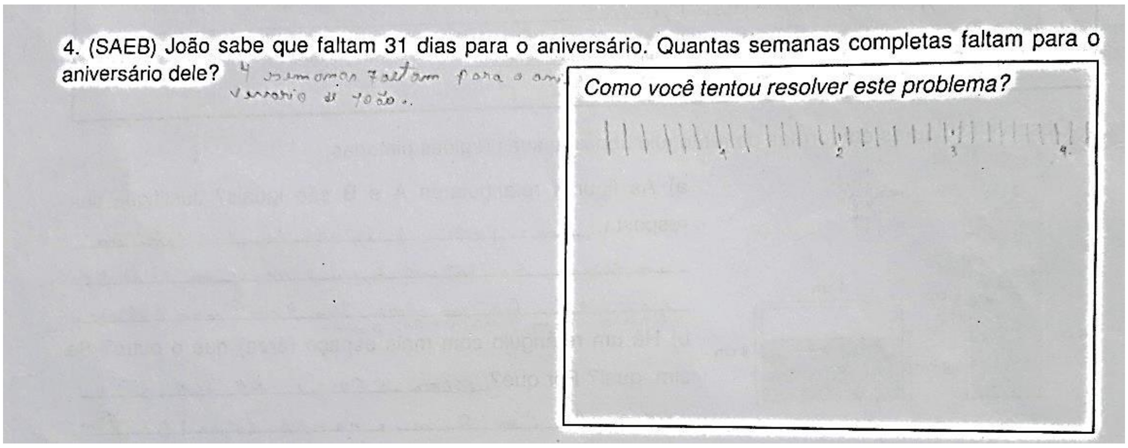
Como você tentou resolver este problema?

Fonte: questionários aplicados pela autora

Embora não utilize em nenhum momento os signos que indicariam a operação efetuada, registro da aluna 18 (figura 13) apresenta uma repetição do algarismo 7, caracterizando um movimento de somas sucessivas até encontrar um valor que se aproximasse do 31, anotado logo acima. O registo da aluna 25 (figura 14), por sua vez, deixa bem explícito o movimento, pois foi estruturado conforme o algoritmo da adição.

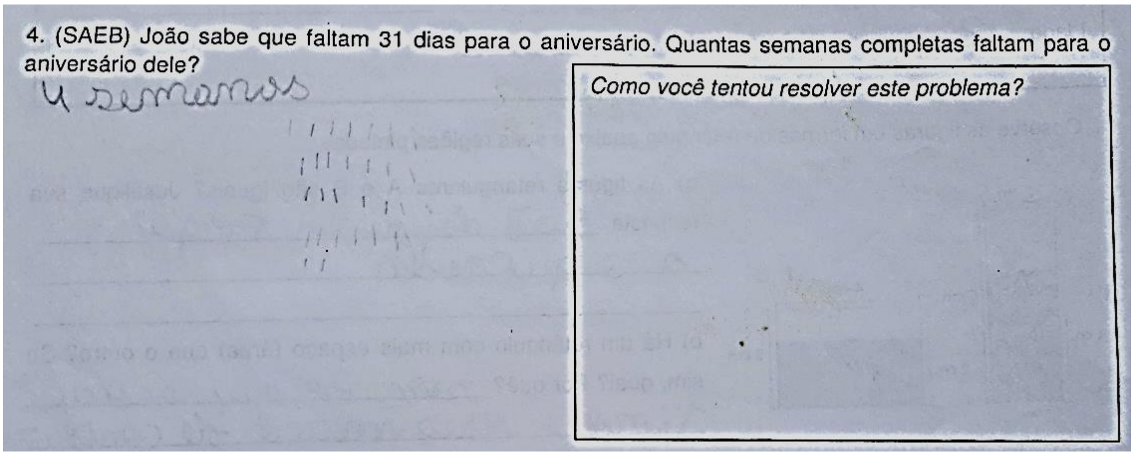
As duas alunas que resolveram o problema por meio da divisão, o fizeram recorrendo à contagem de traços, como podemos observar nas figuras 15 e 16.

**Figura 15 – Registro gráfico da estudante 02 na questão 4**




Fonte: questionários aplicados pela autora

**Figura 16 – Registro gráfico da estudante 21 na questão 4**



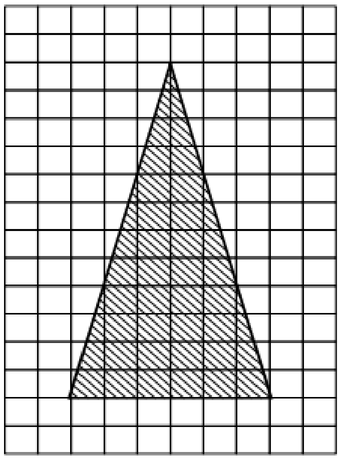

Fonte: questionários aplicados pela autora

A figura 15 mostra que a aluna desenhou inicialmente 31 traços em uma sequência horizontal, no qual, a cada 7 deles, registrou embaixo o número de semanas $(1, 2, 3, 4)$ formando conjuntos de 7, até chegar ao 4. Na última contagem dos conjuntos contou 1 traço a mais, sobrando 2 traços, em vez de 3, mas chegou ao resultado correto, 4 semanas completas. Enquanto a aluna 02 rabiscou 31 traços e foi dividindo de 7 em 7, a estudante 21 (figura 16) desenhou 4 grupos de 7, indicando que ela foi somando.

**Análise da questão 5**

5. (SAEB) A figura a seguir mostra o projeto original da árvore de natal da cidade em que Roberto mora.

Como consideraram a árvore muito grande, fizeram um novo projeto, de modo que suas dimensões se tornaram duas vezes menores que as do projeto original.



Para o novo projeto, as dimensões foram:
(A) multiplicadas por 2.
(B) divididas por 2.
(C) subtraídas em 2 unidades.
(D) adicionada em 2 unidades.

Tente explicar o porquê da opção escolhida.

Fonte: SAEB (Adaptado)

Este problema se caracteriza como produto de medidas, uma relação ternária em que uma medida é produto das outras duas, tanto no plano numérico quanto no plano dimensional (VERGNAUD, 2014). No entanto, tanto a medida do produto quanto a de um de seus fatores são omitidas no problema, convidando o estudante a refletir sobre qual a operação capaz de reduzir duas vezes o tamanho de um projeto, independente de quais sejam os valores das medidas de tal projeto.

Esse problema poderia ser resolvido por meio de uma multiplicação se contemplasse o conjunto $\mathbb{Q}$, tomando $\frac{1}{2} \cdot n$. No entanto, dentro dos limites de $\mathbb{N}$, a multiplicação se constitui como uma operação na qual o produto é quase sempre maior que seus dois fatores, salvos apenas os casos em que um dos fatores é 0 ou 1. De maneira similar, a adição, nos limites dos naturais, sempre resulta em um número maior que suas parcelas, salvos os casos em que uma das parcelas é 0, pois a soma será igual à parcela maior. Assim, o contexto do problema poderia levar os alunos a concluírem que se trata de uma divisão ou uma subtração pelo simples fato de sugerir uma redução de tamanho. No entanto, há um segundo fator que pode influenciar na resposta dos estudantes, o que Magina *et al* (2010) chamaram de incongruência semântica. O problema traz as palavras "vezes" e "menor", que poderiam levar os estudantes a concluírem que se tratava, respectivamente, de uma multiplicação ou uma divisão. Refletindo sobre esse problema à luz das características relacionadas à *reversibilidade*, entendemos que a incongruência semântica é uma forma de *centração* do pensamento, dado que o aluno desconsidera todos os outros elementos fornecidos pelo problema proposto ao focar em uma única palavra que remeta a uma determinada operação. Esse entendimento orientou nossa análise da resposta dos estudantes.

Por ser uma questão mista, as justificativas apresentadas pelos estudantes tiveram um papel fundamental em nossa análise. Assim, as categorias de *centração* e *descentração* só puderam ser definidas pelas justificativas dadas, de modo que os estudantes que não justificaram foram classificados como "indeterminado ou sem resposta", juntamente com as justificativas que não conseguimos compreender. Apresentaremos a síntese da nossa análise por meio de dois quadros relacionando a relação de *centração* e *descentração* do pensamento com os níveis de argumentação dos estudantes (quadro 07) e com as alternativas marcadas (quadro 08).

**Quadro 07 – Síntese de análise da questão 5 (subjetiva)**

| CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS | Níveis de argumentação | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| | Não Argumentou | Baixo | Médio | Alto | |
| **Pensamento Centrado** | - | - | 2 | 1 | 3 |
| **Pensamento Descentrado** | - | - | | 4 | 4 |
| **Indeterminado** | 11 | 0 | 7 | 1 | 19 |
| **Total** | 11 | 0 | 9 | 6 | 26 |

Fonte: elaborada por BRITO, 2020 com base questionários aplicados pela autora.

Como explicado anteriormente, consideramos as justificativas dos estudantes em nível alto de argumentação quando é quando esta expressa o raciocínio utilizado nesta resolução. Nesse sentido, inserimos seis estudantes nesta categoria, ainda que dois deles não tenham escolhido a alternativa que responde corretamente à pergunta do problema. Um dado interessante a ser observado no quadro 07, é que todos os estudantes que categorizamos enquanto descentrados também estão inseridos no nível alto de argumentação. A seguir, no quadro 08, observa-se que todos os alunos desta categoria marcaram a alternativa correta, a letra B – não por coincidência, pois consideramos como critério a correção das possíveis distorções causadas pelos termos "vezes" e "menores", impossibilitando que os alunos que optassem pelas alternativas A ou C fossem categorizados enquanto descentrados – mas nem todos que escolheram a alternativa correta foram categorizados como descentrados, pois alguns não justificaram ou apresentavam justificativas que não nos levaram a nenhuma conclusão de análise.

**Quadro 08 – Síntese da análise da questão 5 (objetiva)**

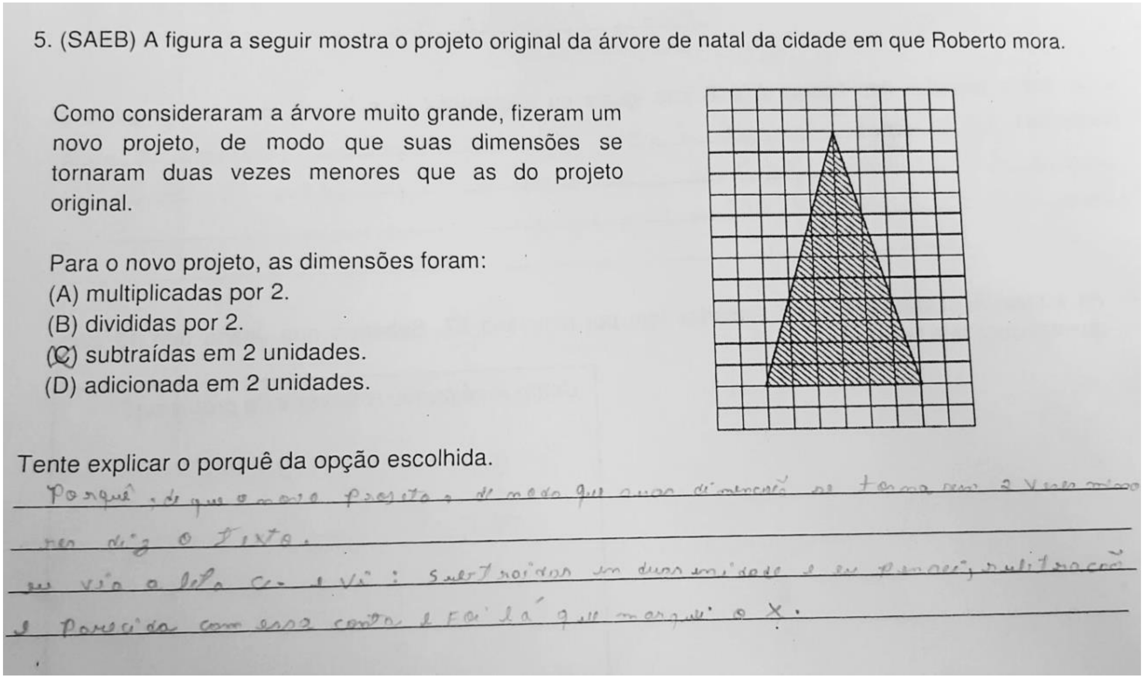
| CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS | Alternativas marcadas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | Sem resposta | Total |
| Pensamento Centrado | 1 | 0 | 2 | 0 | | 3 |
| Pensamento Descentrado | 0 | 4 | 0 | 0 | | 4 |
| Indeterminado | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 19 |
| Total | 7 | 8 | 7 | 1 | 3 | 26 |

Fonte: Elaborada por BRITO, 2020 com base nos questionários aplicados pela autora.

Do total de alunos que respondeu à questão, 11 (onze) deles não tentaram justificar o raciocínio, alguns deixaram em branco, ou afirmaram não saber explicar, ou escreveram "chutei" no local da justificativa. 3 (três) alunos nem mesmo responderam a parte objetiva da questão. No entanto, vale ressaltar que dentre os 23 (vinte e três) alunos que responderam a parte objetiva, 14 (quatorze) deles optaram pela multiplicação ou subtração, demonstrando a associação com os termos "vezes" e "menor" apresentados pela questão, 8 (oito) escolheram a opção correta, (B), e apenas um escolheu a adição como resposta para o problema.

Dentre os alunos que classificamos como pensamento centrado, 1 (uma) aluna argumentou a favor da multiplicação como solução para o problema, por causa do termo “vezes”, e 2 (dois) alunos o fizeram a favor da subtração por causa do termo “menos” como, podemos observar na figura 17:

**Figura 17 – Registro gráfico da estudante 02 na questão 5**


5. (SAEB) A figura a seguir mostra o projeto original da árvore de natal da cidade em que Roberto mora.

Como consideraram a árvore muito grande, fizeram um novo projeto, de modo que suas dimensões se tornaram duas vezes menores que as do projeto original.

Para o novo projeto, as dimensões foram:
(A) multiplicadas por 2.
(B) divididas por 2.
(C) subtraídas em 2 unidades.
(D) adicionada em 2 unidades.

Tente explicar o porquê da opção escolhida.

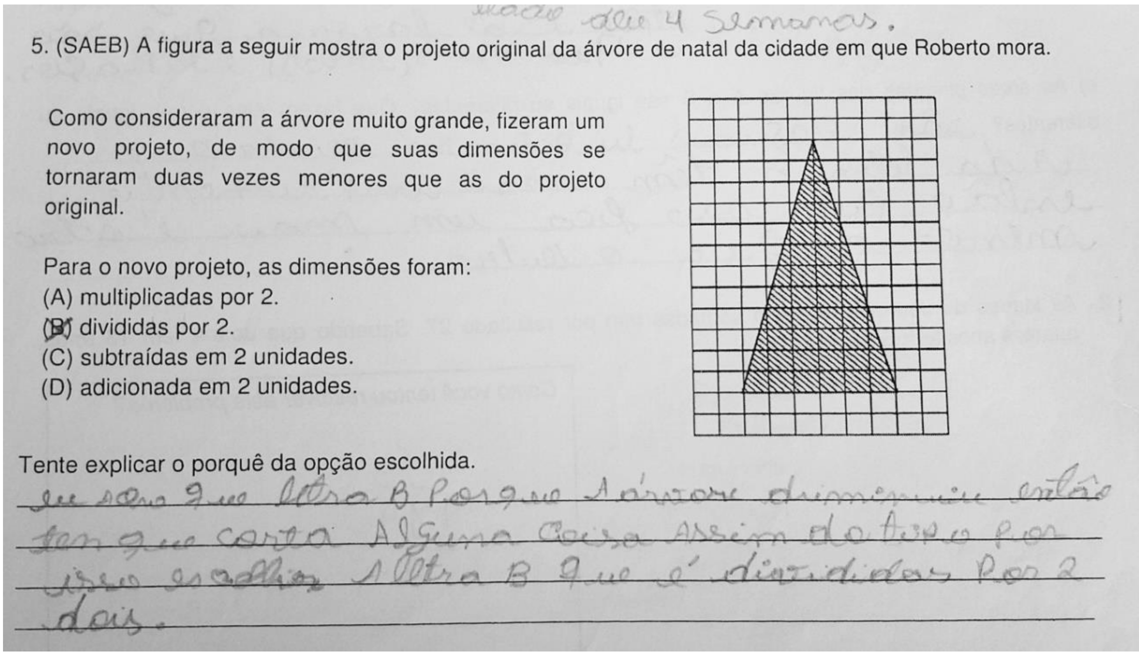
**Transcrição**: Porquê de que o novo projeto, de modo que suas dimencoes se torna sem 2 vezes menores diz o texto.
eu vi a letra c e vi: subtraídas em duas unidade e eu pensei; subtração e parecida com essa conta e Foi lá que marquei o x.

Fonte: questionário aplicado pela autora

A aluna 2 recorreu em sua justificativa ao texto “duas vezes menores” e afirma que a subtração “se parece” com a conta sobre a qual o texto se refere. A referência ao texto e ao termo “subtraídas” como parecida com “essa conta” nos levaram a concluir que a associação foi feita apenas entre as palavras (subtraídas e menos) e não ao significado da subtração em si. Apesar da resposta incorreta, a aluna dois foi a única aluna que inserimos na categoria de *centração* do pensamento que consideramos como nível alto de argumentação, pois, ainda que a associação não seja explicitada na justificativa, a aluna foi capaz de trazer os elementos do texto que a conduziram à escolha da resposta.

Todos os quatro estudantes que demonstraram uma tentativa de *descentração* seguiram a ideia de que o problema propunha uma redução da figura e, portanto, a divisão deveria ser a operação correta, como podemos observar no exemplo da figura 18:

**Figura 18 – Registro gráfico da estudante 20 na questão 5**


de 4 semanas.

5. (SAEB) A figura a seguir mostra o projeto original da árvore de natal da cidade em que Roberto mora.

Como consideraram a árvore muito grande, fizeram um novo projeto, de modo que suas dimensões se tornaram duas vezes menores que as do projeto original.

Para o novo projeto, as dimensões foram:
(A) multiplicadas por 2.
(B) divididas por 2.
(C) subtraídas em 2 unidades.
(D) adicionada em 2 unidades.

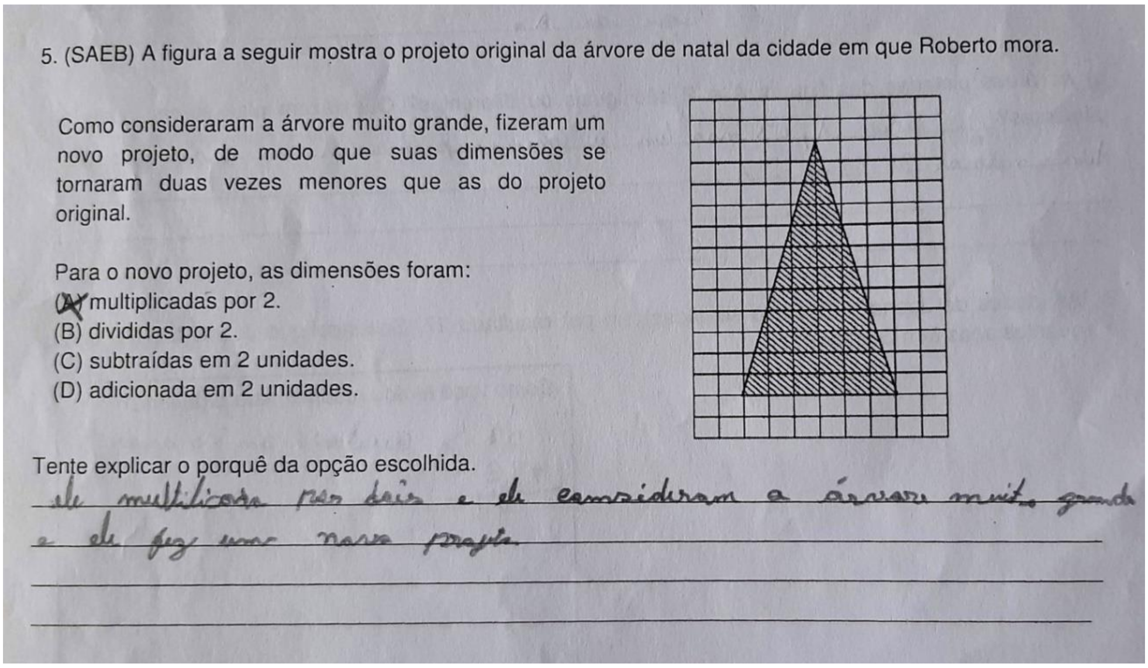
Tente explicar o porquê da opção escolhida.
eu acho que letra B porque A árvore diminuiu então tem que corta Alguma Coisa Assim do tipo por isso escolhi A letra B que é divididas Por 2 dois.

Fonte: questionário aplicado pela autora

A estudante 20 expressou a partir da sua justificativa a associação da divisão com a ideia de redução da área da figura. É claro que uma redução poderia ser feita também por uma subtração, no entanto, o fato de o texto não apresentar nenhuma palavra que remeta a uma divisão, e sim à multiplicação ou subtração, nos levaram a inferir que a aluna não focou nas palavras utilizadas, mas no significado do problema proposto.

A resposta da estudante 12 (figura 19) foi categorizada como nível alto de argumentação, no entanto, não conseguimos encaixar seu raciocínio em nenhuma das categorias cognitivas analisadas e traz uma característica do pensamento que pode se expressar através da linguagem, como veremos a seguir:

**Figura 19 – Registro gráfico da estudante 12 na questão 5**



5. (SAEB) A figura a seguir mostra o projeto original da árvore de natal da cidade em que Roberto mora.

Como consideraram a árvore muito grande, fizeram um novo projeto, de modo que suas dimensões se tornaram duas vezes menores que as do projeto original.

Para o novo projeto, as dimensões foram:
(A) multiplicadas por 2.
(B) divididas por 2.
(C) subtraídas em 2 unidades.
(D) adicionada em 2 unidades.

Tente explicar o porquê da opção escolhida.
ele multiplicou por dois e ele consideram a árvore muito grande
e ele fez uma nova projeto

Fonte: questionário aplicado pela autora

A aluna 12 apresentou uma sequência de acontecimentos, em sua maioria já narrados pela própria questão, apenas com a inserção da sua resposta "multiplicadas por dois" no início da sequência, no qual o erro consiste no "momento" em que a ação correspondente à resposta deveria ocorrer. Ao passo que a pergunta propõe que a criança reflita sobre qual operação reduziria em duas vezes o tamanho do projeto, a aluna parece ter utilizado sua resposta para justificar o fato de o projeto ter ficado muito grande. Chama a atenção também o uso do conectivo "e", que, segundo Piaget, expressa um pensamento que reúne uma sequência de fatos sem necessariamente estabelecer relações implicativas ou causais, usando uma suposta "necessidade lógica[13]" ou uma causalidade física (FLAVELL, 1975). A aluna pode tanto ter escolhido a alternativa da multiplicação em razão da indicação semântica "vezes" e a utilizado no início da sentença buscando construir uma nova sequência causal, diferente da apresentada pelo problema, que resultasse em um aumento – já

[13] À grosso modo, a necessidade lógica se refere à resistência da criança a uma mudança de posicionamento diante de uma contra-sugestão. Uma criança operacional mantém sua resposta, quando correta (verdadeiro conhecimento) e rejeita uma sugestão contrária em decorrência de sua necessidade lógica. Já a criança pré-operatória mantém sua resposta incorreta e estado epistêmico (falso conhecimento) diante de uma contra-sugestão mediante uma pseudo necessidade lógica (ou semilógica), por falta de operações inversas (LOURENÇO, 2019; PIAGET, 2012).

que a multiplicação pode ser entendida nesta fase como uma operação que aumente e não diminua – quanto pode ter realmente desconsiderado a sequência causal apresentada pelo problema e entendido que a pergunta se direcionava ao projeto maior. Em ambos os casos, a estudante demonstra uma fragilidade nos aspectos relacionados à causalidade, o que a conduz ao erro.

**Análise da questão 6**

6. João e Bruno estavam brincando com as operações aritméticas.
**Na primeira rodada, João deve adivinhar qual o número escolhido por Bruno e faz os seguintes comandos:**

- Escolha um número;
- Multiplique esse número por 2;
- Adicione 8 ao resultado encontrado.

Ao término desta sequência, João pediu que Bruno dissesse o valor obtido e "adivinhou" o número escolhido inicialmente por Bruno, a partir do resultado. Sabendo que o valor obtido por Bruno ao término foi 30, você também consegue descobrir qual o número que ele escolheu? Que número foi esse?

*Como você tentou resolver este problema? Descreva seus passos. Se você não conseguiu, tente explicar o que você entendeu do problema e quais as suas dificuldades para a resolução.*

Fonte: questionário aplicado pela autora

Esta questão foi elaborada a partir de uma experiência feita pelo próprio Piaget, apresentada no livro "Abstração Reflexionante" (PIAGET, 1995). Nela, o pesquisador "adivinhava" o número escolhido por uma criança e perguntava à outra como ele havia encontrado a resposta. Alinhado com a teoria do autor, o experimento demonstrou que as crianças com mais de 7 anos, que estavam desenvolvendo os aspectos da *reversibilidade*, conseguiam concluir que o autor utilizava as operações inversas e conseguiam reconstruir o caminho inverso para encontrar o valor original.

Essa questão foi considerada difícil pelos alunos. Dos 26 (vinte e seis) alunos participantes, 14 (quatorze) responderam apenas "não sei", "não entendi" ou "não consegui"; 1 (um) aluno não fez nenhum registro; 2 (dois) alunos responderam utilizando um dos valores dados pela questão; 7 (sete) alunos esboçaram diferentes tipos de resposta (apresentaremos mais à frente); e apenas 2 (duas) alunas conseguiram chegar à resposta correta.

Embora os alunos participantes da pesquisa tenham, de modo geral, apresentado um baixo desempenho na maioria das questões, não é possível atribuir o baixo desempenho neste problema aos mesmos fatores que nos demais – ou não apenas a estes – pois este problema possui algumas especificidades que buscaremos elencar agora. O experimento feito por Piaget se deu por meio de entrevista, de modo que as crianças não precisavam ler sobre a situação do jogo, pois faziam parte dele. A estrutura apresentada em nosso questionário requer um texto longo, em que a criança precisa imaginar a situação descrita, o que desfaz o dinamismo do experimento original, onde o pesquisador realizava o processo oralmente. Ainda em comparação com o experimento original, tem-se o fator motivação. Jogos são atividades que motivam as crianças, especialmente quando comparado com um instrumento como o utilizado nesta pesquisa, com características que se assemelham às provas e testes, utilizados em geral para "medir" o conhecimento dos estudantes e classificá-los através do sistema de notas.

Outra característica importante, comparando com os demais problemas do próprio questionário, é o fato de a questão não trabalhar com uma situação hipotética que utilize elementos contáveis[14] que possam ser ilustrados na imaginação do aluno. O número neste problema não está inserido em um contexto externo à matemática como nos problemas anteriores. Neste sentido, esta questão não trabalha com os significados das operações, apenas com suas relações, sobretudo as inversas. O problema propõe encontrar uma medida original que, após duas transformações[15], uma aditiva e uma multiplicativa,

[14] Não utilizamos o termo concreto porque os problemas anteriores não necessariamente utilizam elementos concretos. Os problemas das questões 2 e 4, por exemplo, trabalham, respectivamente, com anos e dias. São elementos contáveis, mas não tangíveis.

[15] Estamos utilizando o termo transformações em um significado mais piagetiano do que o proposto por Vergnaud (2014), que o emprega apenas em situações do Campo Conceitual Aditivo. No problema em pauta, uma das transformações refere-se a uma multiplicação. A ideia, portanto, é de uma modificação em um dado original que se transforma para produzir

produziu por resultado o número 30. Assim, há mais do que uma medida ocultada: a primeira a ser encontrada é o número 22, tomando $30 - 8 = 22$. A segunda, que é a resposta do problema, possui uma relação de dependência com a primeira, pois se deve tomar $22 \div 2 = 11$.

Apropriando-nos e estendendo mais uma vez a nomenclatura dada por Vergnaud (2014) para os procedimentos de resolução de transformações nas quais se busca encontrar o estado inicial, chamaremos de procedimento canônico o procedimento simplificado de inversão das operações e de procedimento do estado inicial hipotético ao procedimento no qual se testa valores e realiza as transformações de forma direta.

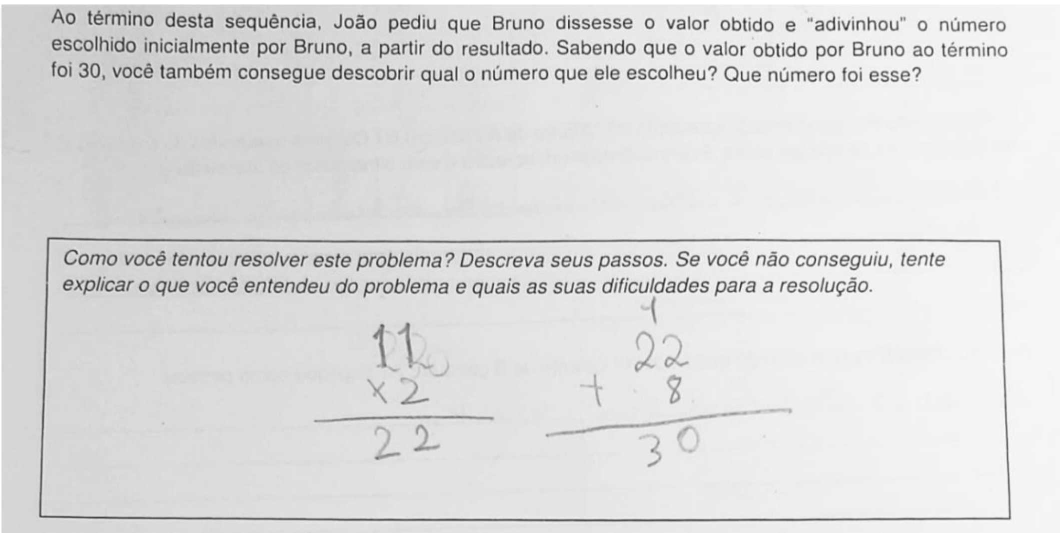
Cada um desses procedimentos é capaz de expressar alguma coisa sobre as características que compõem a *reversibilidade*. O procedimento canônico caracterizaria uma inversão do pensamento, com aspectos tanto da *flexibilidade* do pensamento, ao passo que se faz necessário uma compreensão da relação causa e efeito para entender qual operação gerou o resultado parcial ou o resultado final, quanto da *descentração*, capaz de corrigir as distorções em relação à inversão das operações, bem como da ordem dos números e das operações, pois não basta inverter a operação, faz-se necessário a inversão da ordem na qual as operações são realizadas e dos valores apresentados. O uso do estado inicial hipotético, por sua vez, pode demonstrar que a criança ainda não desenvolveu os aspectos aqui elencados, ou não sente segurança ainda em relação a eles. No entanto, Vergnaud (2014) destaca que a resolução por este método demonstra que o estudante compreendeu a situação apresentada, o que possibilita a descoberta do procedimento canônico.

Não há muita clareza quanto ao método utilizado pelas duas alunas que resolveram o problema sobre como encontraram a resposta. Apenas podemos afirmar que as estudantes não apresentaram nos cálculos ou na justificativa – apenas uma tentou justificar – referência alguma às operações inversas, divisão ou subtração, como podemos ver nas figuras 20 e 21:

---

um terceiro. Em Vergnaud (2014), chamaríamos de um produto de medidas e uma transformação.

**Figura 20 – Registro gráfico da estudante 01 na questão 6**

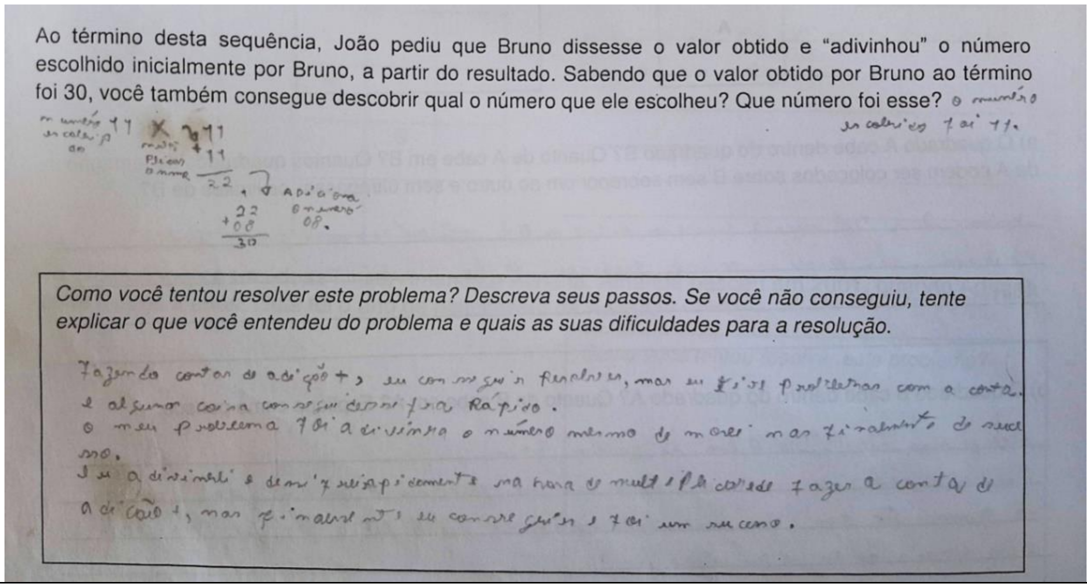

Ao término desta sequência, João pediu que Bruno dissesse o valor obtido e "adivinhou" o número escolhido inicialmente por Bruno, a partir do resultado. Sabendo que o valor obtido por Bruno ao término foi 30, você também consegue descobrir qual o número que ele escolheu? Que número foi esse?

Como você tentou resolver este problema? Descreva seus passos. Se você não conseguiu, tente explicar o que você entendeu do problema e quais as suas dificuldades para a resolução.

$$11 \times 2 = 22 \qquad 22 + 8 = 30$$

Fonte: questionários aplicados pela autora

**Figura 21 – Registro gráfico da estudante 02 na questão 6**


Ao término desta sequência, João pediu que Bruno dissesse o valor obtido e "adivinhou" o número escolhido inicialmente por Bruno, a partir do resultado. Sabendo que o valor obtido por Bruno ao término foi 30, você também consegue descobrir qual o número que ele escolheu? Que número foi esse?

$$11 + 11 = 22 \qquad 22 + 08 = 30$$

Como você tentou resolver este problema? Descreva seus passos. Se você não conseguiu, tente explicar o que você entendeu do problema e quais as suas dificuldades para a resolução.

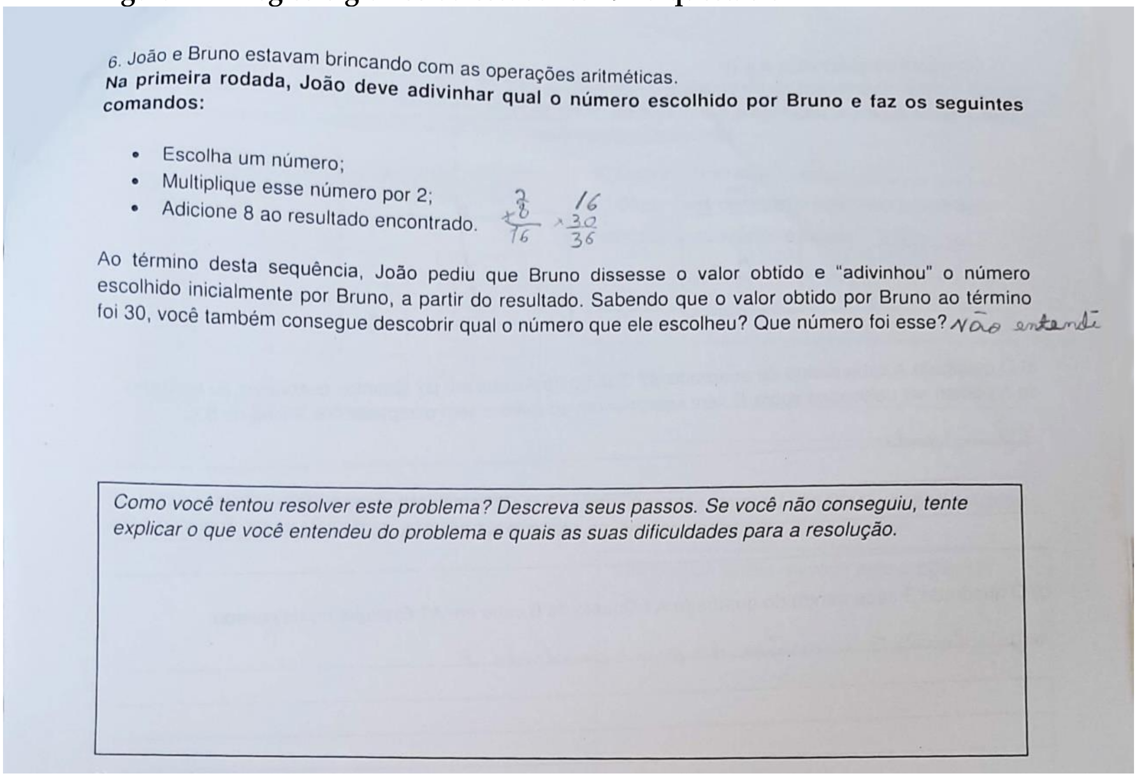
**Transcrição**: Fazendo contas de adição +, eu conseguir Resolver, mas eu tive problemas com a conta. e algumas coisas consegui dessifrar Rápido.
o meu problema foi advinhar o número mesmo demorei mas finalmente de sucesso.
eu adivinhei e dessifrei rapidamente na hora de multiplicar e de fazer a conta de adição +, mas finalmente eu conseguir e foi um sucesso.

Fonte: questionários aplicados pela autora

A justificativa da estudante 2 (figura 21) transparece a ideia de que o procedimento para resolução do problema foi o chamado por Vergnaud (2014) de estado inicial hipotético. A aluna se refere apenas às operações de adição e multiplicação e, sobre esta última, afirma ainda ter "decifrado" que poderia fazer uma adição, o que ela realmente fez: uma soma de parcelas iguais. A estudante 1 (figura 17) também não explicou como resolveu o problema, mas, assim com a aluna 2, apenas realizou as operações diretas, explicitadas pelo problema, o que nos faz pensar que ela encontrou a resposta por meio do mesmo método.

Dentre os alunos que se arriscaram a tentar resolver o problema, sem sucesso, o cálculo desenvolvido pela estudante 29 chama atenção quanto a alguns aspectos, como podemos observar na figura 22.

**Figura 22 – Registro gráfico da estudante 29 na questão 6**



6. João e Bruno estavam brincando com as operações aritméticas.
**Na primeira rodada, João deve adivinhar qual o número escolhido por Bruno e faz os seguintes comandos:**

- Escolha um número;
- Multiplique esse número por 2;
- Adicione 8 ao resultado encontrado.

Ao término desta sequência, João pediu que Bruno dissesse o valor obtido e "adivinhou" o número escolhido inicialmente por Bruno, a partir do resultado. Sabendo que o valor obtido por Bruno ao término foi 30, você também consegue descobrir qual o número que ele escolheu? Que número foi esse? Não entendi

*Como você tentou resolver este problema? Descreva seus passos. Se você não conseguiu, tente explicar o que você entendeu do problema e quais as suas dificuldades para a resolução.*

Fonte: questionários aplicados pela autora

O primeiro fator a ser observado na tentativa de resolução da estudante é que ela aparenta não ter compreendido a relação de causa e efeito que se apresenta no problema. Essa inferência se deve ao fato de a estudante não ter utilizado a medida final, 30, nem como ponto de partida – para a resolução pelo método canônico – nem como resultado final – para a resolução por estado inicial hipotético. É interessante observar também que a estudante manteve tanto a ordem das operações quanto a ordem dos valores apresentados pela questão, procedimento que remete à resolução por estado inicial hipotético. No entanto, ao desconsiderar a hipótese de uma medida inicial, que seria multiplicada por 2, as medidas seguintes ocuparam posições equivocadas no processo de resolução, embora a estudante tenha acertado na ideia de utilizar o resultado da primeira operação como primeira parcela da segunda. O foco da estudante nas medidas fornecidas pelo problema pode demonstrar uma *centração* do pensamento, tendo em vista que a criança desconsiderou toda a situação hipotética descrita.

Os outros seis estudantes rabiscaram alguma tentativa de resolução ou escreveram alguma explicação sobre a qual nada conseguimos inferir, são elas: $30 \cdot 8 = 30$ (estudante 4); $30 + 8 = 110$ e $110 + 2 = 330$ (estudante 20); $6 \cdot 2 = 12$ (estudante 21); entendi que estavam brincando e um acertou (estudante 22); $10 + 10 + 10 = 30$ (estudante 25); $2 - 8 = 6$ (estudante 28).

Como discutido anteriormente, o problema apresentado nesta questão possui algumas características que tornam sua resolução mais difícil que as demais, no entanto, considerando que se trata de uma turma de 5º ano, em que os estudantes supostamente já conhecem e já realizaram diversas atividades envolvendo estas operações, inclusive com números racionais em sua forma decimal, o desempenho dos estudantes foi abaixo do esperado.

## 3.1 Síntese das análises

Buscando compreender melhor a relação entre o desempenho dos estudantes e as categorias investigadas, buscamos traçar um perfil, sintetizando as respostas dos alunos às seis questões analisadas. Na questão 1, analisamos a partir do parâmetro da *centração* ou *descentração* do pensamento. Na questão 2, assim como na questão 4, classificamos as respostas pelo raciocínio utilizado: direto ou inverso. Na questão 3, utilizamos a legenda *Completo* para os estudantes que utilizaram corretamente as operações para cada uma das transformações, ainda que tenham tido algum problema no uso do algoritmo; e *Incompleto*, para os estudantes que realizaram apenas uma etapa corretamente.

Sobre a argumentação e os níveis de valoração, organizamos em baixo (*B*), médio (*M*) e alto (*A*) como nas análises anteriores. Marcamos um *X* acrescido na unidade *i* para a recorrência na análise das questões. Em geral, as justificativas analisadas correspondem às questões 1, 2 e 5, por falta de elementos argumentativos nas demais. O quadro a seguir é uma tentativa de representar a síntese de nossas análises.

**Quadro 09 – Perfil de raciocínio dos estudantes por questão**

| Aluno | Argumentação Níveis de Valoração | | | Descentração Questão 1 | Resolução Questão 2 | Flexibilidade Questão 3 | Resolução Questão 4 | Descentração Questão 5 | Resolução Questão 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | B | M | A | | | | | | |
| 1 | | Xi | Xi | Descentrado | Inverso | Incompleta | Direto | Indeterminado | Direto |
| 2 | | | Xii | Centrado | Inverso | Flexível | Inverso – traços | Centrado | Direto |
| 3 | Xi | Xi | | Centrado | Inverso | Erro | Sem resposta | Não Argumentou | Sem resposta |
| 4 | | Xiii | | Indeterminado | Erro | Erro | Erro | Não Argumentou | Indeterminado |
| 6 | | Xii | | Descentrado | Erro | Erro | Erro | Indeterminado | Indeterminado |
| 8 | | Xi | Xi | Indeterminado | Direto | Flexível | Erro | Não argumentou | Indeterminado |
| 9 | | Xiii | | Centrado | Erro | Erro | Direto | Indeterminado | Sem resposta |
| 10 | | | Xiii | Descentrado | Direto | Flexível | Erro | Descentrado | Sem resposta |
| 12 | | Xi | Xi | Centrado | Erro | Erro | Erro | Indeterminado | Sem resposta |
| 13 | Xii | Xi | | Centrado | Inverso | Flexível | Erro | Não argumentou | Sem resposta |
| 16 | | | Xi | Centrado | Direto | Erro | Direto | Sem resposta | Sem resposta |
| 17 | Xi | | | Indeterminado | Erro | Erro | Erro | Indeterminado | Sem resposta |
| 18 | | Xi | | Indeterminado | Inverso | Incompleta | Direto | Sem resposta | Sem resposta |
| 19 | Xi | Xi | | Indeterminado | Sem resposta | Erro | Erro | Indeterminado | Sem resposta |
| 20 | | Xi | Xii | Descentrado | Direto | Flexível | Direto | Descentrado | Indeterminado |
| 21 | Xi | | Xi | Centrado | Inverso | Flexível | Inverso – traços | Sem resposta | Indeterminado |
| 22 | Xi | Xi | Xi | Indeterminado | Direto | Flexível | Erro | Centrado | Sem resposta |
| 23 | | Xi | Xi | Indeterminado | Direto | Flexível | Sem resposta | Não argumentou | Sem resposta |
| 24 | Xi | Xi | | Centrado | Direto | Incompleta | Direto | Centrado | Sem resposta |
| 25 | | Xi | Xi | Sem resposta | Direto | Flexível | Direto | Não argumentou | Indeterminado |
| 26 | | Xi | Xi | Descentrado | Inverso | Erro | Erro | Descentrado | Sem resposta |
| 27 | Xi | Xi | Xi | Centrado | Direto | Flexível | Erro | Descentrado | Sem resposta |
| 28 | | Xii | Xi | Centrado | Inverso | Flexível | Erro | Indeterminado | Indeterminado |
| 29 | Xi | Xi | Xi | Descentrado | Inverso | Flexível | Erro | Indeterminado | Indeterminado |
| 30 | | Xi | | Centrado | Direto | Erro | Sem resposta | Não Argumentou | Sem resposta |
| 31 | Xi | | | Descentrado | Direto | Erro | Sem resposta | Sem resposta | Sem resposta |

Fonte: Elaborada por BRITO, 2020 com base nos dados do questionário aplicado pela autora.

Das seis questões analisadas, cinco delas deveriam ser resolvidas por meio das operações aritméticas, questões de 2 a 6. Nenhum dos 26 (vinte e seis) estudantes participantes da pesquisa respondeu corretamente aos cinco problemas e apenas 1 (um) acertou quatro questões. A moda se limitou a dois acertos (11 alunos); seguida pelos alunos que não acertaram nenhuma questão e os que acertaram três questões (5 alunos em cada); e os alunos que acertaram apenas uma questão (4 alunos).

A segunda questão obteve o melhor desempenho dos estudantes – 20 alunos conseguiram resolver o problema. Relacionando com a categorização feita na primeira questão, dentre os 7 (sete) estudantes que demonstraram um pensamento descentrado, apenas 1 (um) errou a resolução da segunda questão. Destes, (três) 3 resolveram pelo método canônico, invertendo a composição apresentada, e outros 3 (três) optaram pela complementação. De igual modo, dentre os 11 (onze) alunos que demonstraram o pensamento centrado na primeira questão, 2 (dois) não conseguiram resolver a segunda, 5 (cinco) deles resolveram pelo método da complementação e 5 (cinco) pelo método canônico. Assim, nada é possível concluir em relação a estes grupos a partir dos dados da questão 2, visto que os resultados foram proporcionalmente similares.

É importante retomar, no entanto, um dado mencionado na análise da segunda questão: o fato de que todos os erros de resolução do problema seguiram o mesmo padrão: a soma dos valores dados na questão, 27 e 13, que contradiz a ideia de que a medida 27 é uma composição da medida 13 com um número oculto. Retomaremos esta informação mais à frente, após a análise das demais questões e seus erros de resolução.

O mesmo fenômeno observado entre a primeira e a segunda questão, ocorre entre a primeira e a terceira. Dos 7 (sete) alunos que categorizamos como descentrados, 3 (três) resolveram corretamente as duas transformações, 3 (três) não conseguiram associar os significados às operações correspondentes e 1 (uma) aluna realizou apenas uma transformação. Entre os categorizados como centrados na primeira questão, o desempenho foi proporcionalmente similar, sendo que um total de 6 (seis) dos 11 (onze) alunos demonstraram a *flexibilidade*, 4 (quatro) cometeram equívocos na escolha das operações e apenas 1 (um) errou a questão.

Em relação aos erros dos alunos na terceira questão, gostaríamos de retomar que dentre os 10 (dez) alunos que demonstraram não saber qual operação utilizar para as transformações sugeridas, 8 (oito) deles tentaram somar todos os dados das questões ou somar as duas transformações sugeridas. Mais uma vez, a tendência nos erros dos estudantes foi em adicionar mesmo quando deveriam subtrair.

Em relação às três primeiras questões, observa-se uma redução tanto quantitativa quanto qualitativa nas respostas dos estudantes às questões 4, 5 e 6. Embora haja uma mudança quanto ao conteúdo das questões, uma vez que os conceitos das estruturas multiplicativas passam a ser requeridos apenas a partir da quarta questão, o fenômeno pode ter sido causado também por algum cansaço ou desmotivação em relação à atividade, pois o fenômeno se mantém nas questões seguintes (que retomam as estruturas aditivas), motivo pelo qual optamos por não inseri-las nas análises.

Comparando os resultados da segunda e da quarta questão, observa-se que as duas alunas que resolveram de maneira inversa (alunas 2 e 21), por meio da ideia de quantos “setes” cabem em 31, resolveram a segunda questão pela forma canônica, também inversa, e demonstraram a *flexibilidade* na terceira questão. Quanto à *descentração*, no entanto, as duas alunas foram categorizadas como centradas. Dentre os 7 (sete) alunos que resolveram de maneira direta, utilizando a multiplicação, apenas 1 (um) utilizou a inversão no segundo problema (aluna 1), todos os demais utilizaram o complemento como técnica de resolução, ou seja, também resolveram diretamente.

Os erros da quarta questão, assim como os erros da segunda e da terceira, apresentaram padrões. Nesta questão, no entanto, temos duas classes de erros que gostaríamos de destacar. A primeira refere-se aos erros dos estudantes que consideramos ter resolvido a questão, já mencionado no tópico específico de análise. Dos 9 (nove) alunos que consideramos ter resolvido o problema, 4 (quatro) deles apresentaram como resposta final o número de dias que as quatro semanas compõe: 28. Retomamos que este erro parece decorrer do fato de que estes alunos resolveram o problema por meio da multiplicação ou da soma de parcelas iguais e parecem ter tomado como resposta do problema o resultado final das operações, o produto ou a soma.

A segunda classe corresponde aos erros dos estudantes que demonstraram não compreender o significado do problema da quarta questão, não conseguindo resolvê-lo nem de maneira direta nem inversa, compreendendo um total de 12 (doze) alunos. Neste grupo, 7 (sete) alunos somaram ou multiplicaram as medidas 31 e 7 – a medida 31 foi fornecida pela questão e a medida 7 foi um dado que muitos alunos foram induzidos a encontrar quando vinham nos perguntar sobre como resolver o problema. Os alunos demonstraram não compreender a ideia do "quantas vezes 7 cabe em 31", realizando apenas as operações positivas (adição e multiplicação) de maneira equivocada.

Na quinta questão, é possível perceber que há uma conservação quanto à categoria da *centração* ou *descentração* do pensamento em relação à primeira questão, com exceção do aluno 27 – que modificou a categoria – e os indeterminados, que não foram categorizados por insuficiência de elementos, já que os estudantes não justificaram suas opções. Retomamos que o parâmetro utilizado na categorização da *descentração* nesta questão já pressupõe a escolha da alternativa correta, aliada a uma justificativa coerente para a resposta, sendo que outros 4 (quatro) alunos marcaram a opção correta, no entanto não apresentaram justificativas que demonstrassem terem utilizado alguma lógica de resolução e sim uma semilógica intuitiva.

Os dados da sexta questão são insuficientes para fazermos uma análise que vá além do porquê essa questão foi tão difícil para os estudantes, a qual acreditamos já ter sido suficientemente discutida no tópico específico. Retomamos apenas que nenhum aluno conseguiu inverter as transformações nela apresentadas, pois, as únicas duas alunas que resolveram o problema, o fizeram pelo método do "estado inicial hipotético", ou seja, de maneira direta.

Outro aspecto que buscamos analisar foi a argumentação. Um total de 15 (quinze) alunos conseguiram explicar, em pelo menos uma das questões, o raciocínio utilizado, mas observa-se que apenas o aluno 10 conseguiu explicar seu raciocínio em três questões, além de ter demonstrado a *descentração*, na primeira e na quinta questão, e a *flexibilidade* na terceira. Dos 7 (sete) alunos que consideramos descentrados, 5 (cinco) deles demonstraram um nível alto de argumentação em alguma das questões, enquanto menos da metade – 5 (cinco) em um total de 11(alunos) – dos categorizados como centrados conseguiram explicar o raciocínio utilizado.

As características da *reversibilidade* que nos propomos a estudar nesta pesquisa, a saber, a *descentração*, a *flexibilidade* e a capacidade de explicar o próprio raciocínio, aparecem de maneira muito esporádica nas respostas, de modo que a inconstância dos aspectos reversíveis e a limitação quantitativa e qualitativa dos dados não nos permite fazer muitas inferências entre elas e o desempenho dos estudantes. No entanto, alguns aspectos são possíveis de serem destacados.

Observando os perfis dos estudantes participantes da pesquisa, apresentados no quadro 9, é possível perceber que 8 (oito) deles não demonstraram nenhuma das habilidades que investigávamos, nem mesmo foi possível compreender as justificativas apresentadas, quando apresentavam. Dentre esses estudantes, 3 (três) não acertaram nenhuma das cinco questões aritméticas propostas, 3 (três) acertaram apenas uma questão e os 2 (dois) restantes acertaram duas questões – que foi a moda em relação ao desempenho do grupo como um todo. Por outro lado, os 7 (sete) alunos com os melhores desempenhos na resolução dos problemas – que acertaram 3 ou 4 dos cinco problemas aritméticos – demonstraram pelo menos dois dos três aspectos analisados, são eles os estudantes 1, 2, 10, 20, 21, 25 e 27.

Apesar das análises de duas dos cinco problemas aritméticos (as questões 3 e 5) terem sido categorizadas com implicações diretas às características da *reversibilidade*, a segunda, a quarta e a sexta questões não seguiram esse critério na categorização, o que na prática significa que os alunos poderiam ter demonstrado um desempenho razoável nas questões aritméticas, mesmo sem demonstrar as características da *reversibilidade* em nossa análise – caso, por exemplo, do estudante 24.

Consideramos, no entanto, que o fato de os alunos não terem demonstrado alguma (ou mais) das características analisadas nas questões propostas, não significa que elas não a tenham desenvolvido, ou não as estejam desenvolvendo. É importante frisar que o questionário aplicado se configura um recurso limitado para a identificação dos aspectos aqui estudados, especialmente se comparado com o método clínico utilizado por Piaget, com entrevistas personalizadas às particularidades de cada criança participante de suas pesquisas.

Assim, por exemplo, o fato de termos categorizado alguns estudantes na categoria "*centração* de pensamento" na primeira ou na quinta questão, não significa que o aluno não seja capaz de descentrar em outras situações, uma vez que as questões propostas são apenas alguns exemplos de situações que podem explorar tal habilidade, mas não únicas. Sobre isso, Flavell (1975) destaca que, enquanto observa as características de um objeto, a criança pode descentrar, compensar as distorções de uma percepção momentânea, em relação a quantidades, por exemplo, e não demonstrar tal *descentração* em relação ao peso do mesmo elemento analisado. O exemplo dado pelo autor se refere ainda à análise de objetos que podem ser tocados e manipulados, o que é inexistente em nossa pesquisa, de modo que a análise dos estudantes se limita a uma percepção visual. Assim, nossa análise é limitada aos aspectos que os alunos foram capazes de demonstrar em relação ao instrumento, não sendo, portanto uma verdade absoluta em relação a essas características nos estudantes.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso estudo sobre a *reversibilidade* nas operações aritméticas buscou responder à seguinte pergunta de pesquisa: *Como a reversibilidade influencia o desempenho dos estudantes durante a resolução de problemas aritméticos?* Para tanto, tomamos o conceito de *reversibilidade* dos estudos de Jean Piaget, que defendia ser esta uma propriedade central das operações concretas – período que compreende os 7 aos 11 anos – na qual a criança começa a demonstrar diversas habilidades cognitivas que a diferencia da criança pré-operacional.

Para responder à pergunta, nos debruçamos sobre os seguintes objetivos: i) Caracterizar a *reversibilidade* nas operações aritméticas; ii) Identificar aspectos do desenvolvimento da *reversibilidade* nas crianças do último ano do Ensino Fundamental I; iii) Analisar o desempenho das crianças do Ensino Fundamental na resolução de problemas aritméticos à luz do conceito de *reversibilidade*.

O primeiro objetivo, de cunho teórico, exigiu que percorrêssemos desde alguns aspectos da Epistemologia Genética de Jean Piaget até o estudo sobre a natureza das operações aritméticas no universo dos naturais e suas consequências para o ensino. Nesse estudo, discutimos a relação feita pelo próprio Piaget da *reversibilidade* como uma das propriedades da Álgebra dos Grupos, a *existência de simétricos*. O autor, que buscava encontrar aspectos do desenvolvimento da inteligência tomando por base padrões lógicos, utilizou esta propriedade como modelo representativo da habilidade de realizar operações na forma ↔, que significa elaborar, ao mesmo tempo, uma cadeia de raciocínios e as operações que a compensem, ou seja, as ações inversas capazes de anular as anteriores, retornando ao ponto de origem.

Buscando desvelar os conceitos que compõem estas operações e que fazem os processos de inversão não serem, muitas vezes, simples de serem executados, fizemos uma organização sistemática das operações aritméticas enquanto saber acadêmico. Embora os conceitos deste ponto de vista sejam muitas vezes mais complexos de serem compreendidos, acreditamos que o tópico em pauta auxilia na visualização conceitual dos cálculos de inversão a partir das questões de ordem, comutatividade e relações de dependência entre as operações aritméticas. Além disso, o tópico esclarece alguns conceitos mobilizados no Ensino Fundamental I enquanto um corpo de conhecimento que será ampliado e melhor explorado nos anos que seguem do Ensino Fundamental II.

Na organização da Matemática Escolar, no entanto, esses conceitos são ressignificados. Nela, as questões de ordem, por exemplo, que limitam a subtração e a divisão, são apresentadas em contextos externos à Matemática, nos quais as vivências das crianças podem trazer *pré-conceitos*, formados a partir das suas interações sociais e com o meio, que podem subsidiar suas *ações* ou *esquemas de ações* diante dos problemas. É nesse sentido que as operações aritméticas se inserem no conceito de *operações* de Piaget, que demanda um corpo de significados e de sistemas que se interrelacionam.

Trazendo para o contexto das operações aritméticas, as *operações* piagetianas se revelam na forma como o estudante desenvolve um raciocínio que culmine em uma adição, subtração, multiplicação ou divisão; atividade que demanda atribuições de significados em cada uma delas e não uma simples execução de algoritmo. A própria definição do termo em Piaget traz que a operação é um sistema que tem seus significados inseridos em outros sistemas, nos quais ela se constitui apenas uma parte. Ainda que esses sistemas subjacentes estejam inativos no momento em que a criança opera, são potencialmente realizáveis e podem reger as ações por ela executadas (FLAVELL, 1975).

Entendemos daí, por exemplo, que subtrair é compreender os significados que compõem tal operação; é *completar*, se necessário, compreendendo que o valor adicionado se constitui a *diferença* entre uma medida maior e uma menor, ainda que a operação utilizada tenha sido, por fim, uma adição; ou *retirar*, quando este caminho se mostrar mais conveniente. Por fim, compreender a subtração não como uma operação isolada, mas um *sistema de ações* que se relaciona com outro sistema subjacente, a adição, que, embora esteja inativa no momento em que o estudante opta por *retirar*, existe enquanto ação inversa, sendo potencialmente realizável e se constituindo enquanto ação que anule a anterior.

Nesse viés, a organização dos conteúdos aritméticos por campos conceituais, aditivo e multiplicativo de Vergnaud, se alinha com o sentido de *operações* piagetianas. Desta forma de organização do conhecimento aritmético, dos significados atribuídos às operações e da definição de *reversibilidade* com a qual estamos trabalhando, tem-se que os problemas que envolvem inversão podem ou não ser resolvidos com a operação inversa, uma vez que as operações se relacionam entre si. No entanto, nos casos em que a inversão do processo se apresenta como uma resolução *canônica*, que possibilita uma resolução simplificada, e observa-se uma tendência a técnicas de resolução como a do "estado inicial hipotético", é possível observar elementos que apontam para um estado irreversível do pensamento.

Cabe-nos refletir então sobre o segundo objetivo desta pesquisa: até que ponto conseguimos identificar aspectos do desenvolvimento da *reversibilidade* nas crianças participantes desta pesquisa? Dentre os três objetivos que nos propomos neste trabalho, este parece ser o mais desafiador, tanto pela natureza das informações que se fazem necessárias para alcançá-lo quanto pelas limitações do instrumento utilizado, decorrentes do curto tempo para sua elaboração/aprimoração diante da densidade do referencial teórico utilizado nesta pesquisa.

Como um adendo às informações referentes a este segundo objetivo, mostra-se pertinente apresentar aqui as limitações do instrumento utilizado, ainda que como orientação sobre cuidados a serem tomados em pesquisas futuras. A primeira delas é o seu caráter não interativo, uma vez que ele não permite, por exemplo, a utilização de objetos para explorar melhor os conceitos de *descentração* e *flexibilidade*, e o recurso da fala, através da qual as crianças poderiam expressar melhor seus métodos de resolução de problemas, além de possibilitar uma intervenção da pesquisadora, a fim de explorar melhor os registros difíceis de ser compreendidos por meio de perguntas.

Outra limitação observada diz respeito ao comportamento dos estudantes em relação ao questionário. Embora este tenha sido pensado com o intuito de dar liberdade às crianças para rabiscar, justificar suas respostas e realizar os cálculos, no momento da aplicação percebemos uma resistência dos alunos em expressar suas ideias no instrumento, rabiscando muitas vezes as carteiras para fazer os cálculos. Ainda que tenha sido explicado que a atividade não tinha por objetivo a reprovação ou a classificação dos estudantes, e tenhamos ratificado diversas vezes que eles deveriam registrar todos os passos dados no desenvolvimento de suas estratégias de resolução, alguns alunos se sentiam inseguros e pareciam escrever no instrumento apenas o que acreditavam que poderia estar certo. É possível que esse comportamento seja decorrente da utilização de estruturas similares em avaliações que tem por objetivo a mensuração dos conhecimentos dos estudantes que culminam na classificação da classe.

Em relação às características da *reversibilidade*, nos ousamos a identificar três delas, a saber, a *flexibilidade* do pensamento, a *descentração* e a capacidade de refletir e explicar o próprio raciocínio. Apesar de não abrangerem, nominalmente, todos os aspectos que constituem as operações concretas e, por consequência, a *reversibilidade*, acreditamos que as características aqui destacadas carregam elementos representativos dos aspectos apresentados por Piaget para este período, uma vez que todas as características destacadas pelo autor se relacionam e, em alguns momentos, parecem até se fundir.

Para exemplificar, tomemos o egocentrismo em relação às representações, a qual Piaget destaca enquanto característica marcante do período pré-operatório, que deve ser superada nas operações concretas quando, forçada pelas interações sociais, a criança começa a questionar o seu próprio raciocínio e perceber suas distorções e contradições (FLAVELL, 1975). É possível perceber que nessa habilidade o desenvolvimento de uma necessidade lógica, uma análise causal e uma *descentração* – à medida que refletir sobre o ponto de vista do outro e questionar o próprio raciocínio se configura um desfoque do seu ponto de vista como único e absoluto com um olhar para os demais aspectos que possam corrigir distorções dentro do próprio raciocínio.

Assim, tomamos as três características como representativas e buscamos relacionar com a *reversibilidade* em nosso referencial. No entanto, reconhecê-las por meio de um recurso com limitações como o questionário que utilizamos, não é uma tarefa fácil, de modo que as conclusões que aqui apresentamos se referem apenas ao que foi possível extrair das respostas àqueles problemas específicos.

Considerando os períodos piagetianos de desenvolvimento cognitivo, os resultados obtidos parecem distanciar-se do que a teoria prevê para a faixa etária analisada, 10 a 13 anos, na qual as crianças poderiam ter desenvolvidas as características do período operatório concreto, que compreende dos 7 aos 11 anos, e, portanto, da *reversibilidade*. Como afirmamos anteriormente, 8 (oito) estudantes não demonstraram as características estudadas em nenhuma das seis questões propostas; os demais, 18 (dezoito), demonstraram uma ou outra (ou todas) ao longo da atividade, seja por meio das justificativas ou mesmo pela resolução dos problemas.

Podemos visualizar esses dados a partir de duas perspectivas: a primeira se refere às possíveis explicações da própria teoria para o fenômeno observado e a segunda das fragilidades da teoria em si. Buscaremos apresentar brevemente as duas, antes de seguir para o terceiro objetivo desta pesquisa.

À luz da própria teoria, podemos ponderar sobre o desenvolvimento dos aspectos cognitivos por meio da interação entre o sujeito e o meio, uma vez que Piaget considera a inteligência como uma forma superior de adaptação (assimilação e acomodação), organização e equilíbrio. Considerando, pois, que esse desenvolvimento pressupõe um desequilíbrio inicial, que force o sujeito a assimilar, acomodar e assim alterar o seu ciclo assimilativo, é possível que uma explicação piagetiana para o desenvolvimento tardio de algumas habilidades se sustente na carência destas situações interativas que provoquem desequilíbrio, adaptação e, consequentemente, a aprendizagem.

Traduzindo nossa fala anterior e contextualizando com a realidade escolar, é possível fazer uma ponte entre essa argumentação teórica e as conclusões das pesquisas de Azerêdo (2013), Silva (2014), Ferraz (2016) e Luna (2017), apresentadas na introdução deste trabalho. O que as autoras apresentam é uma realidade escolar em que os alunos não são desafiados, mas introduzidos a uma série de regras e submetidos a uma limitada classe de problemas que restringe as possibilidades de construção de diferentes esquemas de resolução. Embora o desenvolvimento cognitivo se dê em espaços diversos, a escola se constitui um ambiente institucionalizado no qual o a criança deve vivenciar uma série de novas aprendizagens e, por aprendizagem, entenda-se desequilíbrio e adaptação.

No entanto, vale destacar os limites da teoria, uma vez que é possível que a Epistemologia Genética de Piaget não seja suficiente para explicar os dados que temos obtidos neste trabalho. Além de possíveis falhas na teoria, algumas delas destacadas pelo próprio Flavell (1975) – como uma aparente obsessão de Piaget com a *reversibilidade* e sua incessante busca por comprovar suas suspeitas em relação às habilidades cognitivas – temos um perfil de crianças participantes da pesquisa distintos do perfil investigado por Piaget. Flavell (1975) aponta que Piaget pouco descrevia o perfil das crianças investigadas em suas pesquisas, no entanto é possível fazer tal afirmação considerando simplesmente as diferenças culturais que marcam o cenário da nossa pesquisa – uma escola periférica no município de Jequié, interior da Bahia, Brasil – e o campo das investigações de Piaget – na cidade de Genebra, Suíça.

O que nos leva ao terceiro objetivo desta pesquisa: analisar o desempenho das crianças do Ensino Fundamental na resolução de problemas aritméticos à luz do conceito de *reversibilidade.* Acreditamos que este objetivo foi em parte contemplado por meio do próprio referencial e em etapas anteriores à análise, quando justificamos a inserção de categorias cognitivas em problemas aritméticos, no entanto, buscamos fazer conexões com habilidades que se relacionam com a *reversibilidade*, mas poucas reflexões foram feitas até então sobre os resultados e a *reversibilidade* em sua totalidade.

A síntese de análise que fizemos no final do capítulo anterior nos aponta alguns aspectos importantes a serem destacados aqui. É possível observar uma relação entre as demonstrações da habilidade de argumentação, a *descentração* e a *flexibilidade* em relação ao desempenho dos estudantes, mais facilmente observáveis quando direcionamos a atenção aos estudantes que não demonstraram nenhuma destas habilidades, pois também demonstraram os mais baixos desempenhos nas questões, ao passo que os estudantes que tiveram os melhores desempenhos, demonstraram pelo menos duas das habilidades analisadas – 5 (cinco) dos 7 (sete) estudantes demonstraram as três habilidades estudadas.

Trazendo esses elementos para a questão da *reversibilidade*, frisamos que o questionário utilizado nesta pesquisa foi elaborado contendo questões que trouxessem mais significados da subtração e da divisão, de modo que esperávamos observar as estratégias de resolução dos estudantes diante destes problemas. Os resultados apresentados mostram uma predominância de resolução por meio da adição e da multiplicação, fenômeno observável na questão 2 e, principalmente, nas questões 4 e 6. Apesar de, como discutido anteriormente, serem processos válidos de resolução, as soluções canônicas se mostram a maneira mais eficiente de resolução para esses tipos de problemas, por se mostrarem convenientes para quaisquer que sejam as medidas apresentadas.

A tendência pelas resoluções por meio da adição e da multiplicação, mesmo em problemas com significados da subtração e da divisão, demonstram um pensamento que se direciona em apenas um sentido (→), enquanto que a *reversibilidade* em Piaget pressupõe um pensamento (↔) que consegue construir, ao mesmo tempo, as ações compensatórias capazes de anular a ações originais. Pensando nisso é que refletimos sobre os erros cometidos pelos estudantes na resolução dos problemas.

Em relação ao erro da segunda questão – a operação $27 + 13$, quando o 13 deveria ser uma parcela e o 27 a soma – é um indício de *irreversibilidade* do pensamento. Note que em uma segunda leitura do problema, para uma criança capaz de questionar o próprio raciocínio e descentrar o pensamento – observando as distorções que possam ter sido originadas pelo uso do termo “somadas” no texto do problema – poderia perceber que $40 + 13 \neq 27$. No entanto, retomar a leitura do problema após sua resolução aproxima a criança da habilidade de argumentar e descrever o próprio raciocínio, habilidade que se desenvolve a partir do momento que a criança o questiona. Vale destacar que, dentre os 5 (cinco) estudantes que erraram a segunda questão, apenas um demonstrou uma boa argumentação e em apenas um dos problemas.

Os erros da quarta questão demonstram tanto aspectos irreversíveis quanto alguns riscos das resoluções por meio das operações diretas em problemas que apresentam significados das operações inversas. Na primeira classe de erros, tem-se um grupo de alunos que "resolveu" o problema, mas não conseguiu identificar a resposta na resolução. Este grupo, composto por 6 (seis) estudantes, também demonstrou aspectos irreversíveis.

Uma das possíveis causas para o erro pode ser associada a um pensamento estático – oposto à *flexibilidade* do pensamento que compõe o pensamento reversível – pois, embora os estudantes tenham entendido que em 31 dias cabem 4 semanas completas, não conseguiram acompanhar a transformação proposta pelo problema, transformar os dias em semanas entre o dado enunciado pela questão e suas respostas. A segunda possível causa para o erro diz respeito à própria definição de *reversibilidade*, considerando que, embora tenham "resolvido" o problema, ao utilizarem a adição e a multiplicação, os alunos não perceberam que a resposta não era o produto ou a soma, mas a quantidade de parcelas ou um dos fatores. Nesse sentido, os alunos parecem perder o raciocínio original que os conduziram aos seus métodos de resolução, aspecto marcante na definição piagetiana de *reversibilidade*, em que a criança, por não inverter um processo feito, perde sua premissa original.

A segunda classe de erros da quarta questão se assemelha ao erro da segunda questão, exceto pelo fato de que não há nenhuma indicação semântica à multiplicação ou à adição neste problema. Não conseguimos fazer inferências em relação aos aspectos reversíveis ou irreversíveis destas respostas, por não conseguirmos compreender o raciocínio utilizado pelos estudantes, mas o fato de optarem por adicionar ou multiplicar os valores fornecidos pelo problema de maneira indiscriminada demonstra, ao menos, uma maior facilidade na execução destes algoritmos em relação aos da subtração ou divisão.

Observa-se que os alunos de modo geral demonstraram insegurança ou mesmo dificuldades na utilização de processos inversos aos apresentados pelos problemas. Esses aspectos se manifestam através dos erros, dos métodos alternativos de resolução dos problemas propostos ou, com olhares piagetianos, na escrita dos alunos ou mesmo em comportamentos não passíveis de serem observados em um questionário.

Nesse sentido, pensamos que a tradução de conceitos lógicos e semi-lógicos em ações ou discursos infantis é uma relevante contribuição da teoria piagetiana para área da Educação Matemática. Apesar de muitas das críticas direcionadas à sua pesquisa se referirem à sua obsessão em "diagnosticar" estruturas cognitivas através da experimentação, suas reflexões sobre as ações da criança, a interiorização dessas ações com o avanço dos períodos e estágios, além do acervo criado em suas investigações e seus esforços de tradução da linguagem infantil para uma linguagem dura, demonstrando as contradições, limitações e avanços em cada estágio, podem contribuir para um olhar diferenciado em relação a essas estruturas. Embora a intenção do autor tenha sido estudar a gênese do conhecimento, e as estruturas lógicas tenham sido um meio para este fim, os estudos de Piaget trazem muitos elementos, pouco explorados até então, que podem contribuir para esta área.

Nossa expectativa é que o presente estudo possa trazer reflexões sobre os aspectos que podem intervir nos processos de resolução de problemas, desde a significação das operações a aspectos cognitivos mais amplos, possíveis de serem observados para além dos limites dos conteúdos matemáticos trabalhados pela escola, como a linguagem, a *flexibilidade*, a *descentração* do pensamento, as relações causais etc. Espera-se também que outros trabalhos possam aprofundar as discussões aqui propostas, as quais foram restringidas pelas limitações do instrumento utilizado na produção dos dados.

Por fim, como uma pesquisa qualitativa de caráter hermenêutico, em contraposição a uma visão positivista da produção científica, esta pesquisa apresenta as informações obtidas em nosso trabalho de produção de dados sob a ótica de um pesquisador, um sujeito situado, o que exclui qualquer suposta neutralidade em nossa análise. É importante ratificar minha posição enquanto licenciada em Matemática ao olhar para a aprendizagem desta disciplina nos anos iniciais. O olhar para estes conteúdos nesta pesquisa se direcionam também para o conhecimento matemático a ser construído nos anos seguintes, em que o licenciado em Matemática deve articular a ampliação dos conhecimentos aritméticos construídos nos primeiros no conjunto $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Q}$, para todas as formas de representação deste último, bem como para o Conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$, a universalização em $\mathbb{R}$ e, posterior ao Ensino Fundamental, no Conjunto dos Números Complexos $\mathbb{C}$.

# REFERÊNCIAS

AZERÊDO, M. A. de. **As representações semióticas de multiplicação**: um instrumento de mediação pedagógica. 2013. 279 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: < https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/4819/1 /arquivototal.pdf >. Acesso em: 29 nov. 2020

BESSA, Sônia; LEITE, Elnaque Costa. Sigificado, utilidade e representação gráfica de adição de estudantes o 4º ano do Ensino Fundamental. In: BESSA, Sônia (org.). **Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática**: formulação de professores e estudantes. Curitiba: Appris, 2020. Cap. 3. p. 45-64. (Formação de Professores).

BESSA, Sônia; COSTA, Váldina Gonçalves da. Operação de multiplicação: possibilidades de intervenção com jogos. In: BESSA, Sônia (org.). **Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática**: formulação de professores e estudantes. Curitiba: Appris, 2020. Cap. 3. p. 45-64. (Formação de Professores).

BESSA, Sônia; LEITE, Váldina Gonçalves da. desafios e situações-problema: opões à compreensão das operações aritméticas. In: BESSA, Sônia (org.). **Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática**: formulação de professores e estudantes. Curitiba: Appris, 2020. Cap. 5. p. 87-114. (Formação de Professores).

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução: Maria João Sara dos Santos; Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, 2017. 466p.

CERBONE, David R.. **Fenomenologia**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2019. 292 p. (Série Pensamento Moderno).

CHERVEL, A. **História das disciplinas escolares**: reflexões sobre um campo de pesquisa. Tradução: Guacira Lopes Louro. 177-229. Teoria & Educação, 2, 1990.

CHEVALLARD, Y.; BOSH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 1997. 335 p.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. Florianópolis: Ufsc, 2009. 346 p.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G.. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003. 368 p.

DORNELES, C. L. **Adição, subtração e cálculo relacional**: uma intervenção com alunos do proeja fic/ensino fundamental. 2013. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/69936>. Acesso em: 29 nov. 2020

ETCHEVERRIA, T. C.; CAMPOS, T. M. M.; SILVA, A. F. G. Campo Conceitual Aditivo: um estudo com professoras dos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [s.l.], v. 29, n. 53, p. 1181-1200, dez. 2015. FapUNIFESP (SciELO). Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2015000301181 &lng=pt&nrm=iso>. Acessos em 28 nov. 2020.

FERRAZ, S. R. **Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo**: um estudo com alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2016. 218 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/69936>. Acesso em: 29 nov. 2020

FLAVELL, J. H. **A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget**. Tradução: Maria Helena Souza Patto. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1975.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006. 227 p. (Coleção formação de professores).

GOODSON, I. Tornando-se uma matéria acadêmica: padrões de explicação e evolução. Teoria & Educação, Porto Alegre: **Pannonica,** v. 1, n. 2, p. 230-254, 1990.

HÉBRARD, J. **A escolarização dos saberes elementares na época moderna**. Teoria e Educação, n. 2, 1990, p. 65-110.

JULIA, Dominique. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, n. 1, p. 9-43, 2001.

KAMII, Constance. **Reinventando a aritmética**: implicações da teoria de jean piaget. 4. ed. Campinas: Papirus, 1991. 308 p. Tradução Elelnisa Curt, Marina Célia M. Dias, Maria do Carmo D. Mendonça.

KAMII, Constance. **Desvendando a aritmética**: implicações da teoria de jean piaget. Campinas: Papirus, 1995. 299 p. Tradução Marta Rabioglio e Camilo F. Ghorayeb.

KAMII, Constance. **Aritmética: novas perspectivas**. Implicações da teoria de Jean Piaget. 6. ed. Campinas: Papirus, 1997. 237 p.
Tradução Marcelo Cestari T Lellis, Marta Rabioglio e Jorge José de Oliveira.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 5. ed. Rio de Janeiro: SMB, 2004. v. 2.

LOURENÇO, O. A compreensão da ideia de necessidade lógica em crianças: o efeito das contra-sugestões. **Análise Psicológica**, [S.L.], v. 37, n. 3, p. 249-268, 3 set. 2019. ISPA - Instituto Universitario. Disponível em: < http://publicacoes.ispa.pt /index.php/ap/article/view/1576 >. Acesso em: 29 nov. 2020.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação e abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2017.

LUNA, J. M. O. de. **As concepções e as crenças do professor sobre a multiplicação e a divisão para ensinar crianças de anos iniciais**. 2017. 163 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação, Cultura e Comunicação, Duque de Caxias, 2017.

MACEDO, Lino de. **Ensaios Construtivistas**. 6. ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2010. 172 p. (Coleção Psicologia e Educação).

MAGINA, S.; CAMPOS, T.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração**: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S. M. P et al. As Estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro Primeiras Séries do Ensino Fundamental. **Zetetiké:** Cempem, Fe, v. 18, n. 34, p. 15-50, jul. 2010. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646679/13581>. Acesso em: 12 mai. 2020.

MALDANER, A. **Aprendendo Matemática nas séries iniciais**. Porto Alegre: Mediação, 2016.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências.** V7(1), pp. 7-29, Porto Alegre. 2002. Disponível em:< https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/ index.php/ienci/article/view/569 >. Acesso em: 29 nov. 2020

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S.. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

ONUCHIC, L. de la R. MORAIS, R. dos S. Uma abordagem histórica da resolução de problemas. In: ONUCHIC, L. de La R et al (orgs). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. 160 p.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança**: imitação, jogo e sonho, imagem e representação. Tradução: Álvaro Cabral; Christiano Monteiro Oiticica. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

PIAGET, J. **A psicologia da inteligência**. Tradução: Guilherme João de Freitas Teixeira. Petrópolis: Vozes, 2013.

PIAGET, J. **Astração Reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Tradução: Fernando Becker; Petronilha Beatriza Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. 4. ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2012. 123 p. (Textos de psicologia).

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

ROBIOGLIO, Marta. Exercitando o cálculo mental em jogos In: BESSA, Sônia (org.). **Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática**: formulação de professores e estudantes. Curitiba: Appris, 2020. Cap. 8. p. 155-176. (Formação de Professores).

SCHMIDT, Lawrence K.. **Hermenêutica**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2014. 261 p. (Série Pensamento Moderno).

SILVA, P. A da. **Campo Multiplicativo das Operações**: uma iniciativa de formação com professores que ensinam matemática. 2014. 173 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Disponível em: < >. Acesso em:

VALENTE, W. R. O que é número? Intuição versus Tradição Na História Da Educação Matemática. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 12, n. 24, p. 21-36, abr. 2012. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.12,no24/2%20-%20Valente%20-%20final.pdf>. Acesso em: 12 mai. 2020.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. **Human Development**, [s.l.], v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009. S. Karger AG. Disponível em:

<https://www.karger.com/ Article/Abstract/202727# >. Acesso em: 28 nov. 2020. http://dx.doi.org/10.1159/000202727.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lúcia Faria Moro- ed. ver. – Curitiba: Ed. da UFPR, 2014.

WIELEWSKI, G. D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas**: uma apresentação contextualizada da obra de krutetskii. 2005. 407 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005. Disponível em < https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10914 >. Acesso em: 29 NOV. 2020

# APÊNDICES

# APÊNDICE A – Questionário Diagnóstico aplicado

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES

*Prezado(a) estudante,*

*Pedimos a sua atenção e seriedade nas respostas fornecidas. Além disso, é importante que você descreva o raciocínio utilizado na resolução de cada questão. Desde já, agradecemos sua colaboração.*

Vanessa Mendes Brito - Mestranda

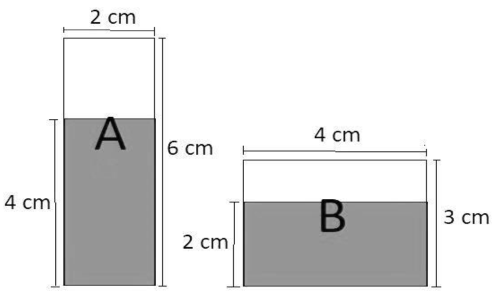
Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina. R. S. Gusmão - Orientadora

**Identificação**

Nome: ____________________________________________________________

Idade:____________________ Gênero: ___________________

1. Observe as figuras em formas de retângulo abaixo e suas regiões pintadas:




a) As figuras retangulares A e B são iguais? Justifique sua resposta. ____________________________________________
____________________________________________________
____________________________________________________

b) Há um retângulo com mais espaço (área) que o outro? Se sim, qual? Por quê?________________________________
____________________________________________________
____________________________________________________

c) As áreas pintadas das figuras A e B são iguais ou diferentes? Que fazem elas serem iguais ou diferentes? ________________________________________________________________
____________________________________________________________________
____________________________________________________________________
____________________________________________________________________

2. As idades de Joana e Gustavo somadas tem por resultado 27. Sabendo que Joana tem 13 anos, quantos anos tem Gustavo?

*Como você tentou resolver este problema?*

3. (SAEB) Numa fazenda, havia 524 bois. Na feira de gado, o fazendeiro vendeu 183 de seus bois e comprou 266 bois. Quantos bois a fazenda passou a ter?

| *Como você tentou resolver este problema?* |
|---|

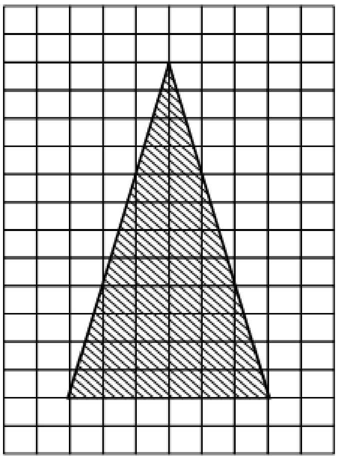
4. (SAEB) João sabe que faltam 31 dias para o aniversário. Quantas semanas completas faltam para o aniversário dele?

| *Como você tentou resolver este problema?* |
|---|

5. (SAEB) A figura a seguir mostra o projeto original da árvore de natal da cidade em que Roberto mora.

Como consideraram a árvore muito grande, fizeram um novo projeto, de modo que suas dimensões se tornaram duas vezes menores que as do projeto original.

Para o novo projeto, as dimensões foram:
(A) multiplicadas por 2.
(B) divididas por 2.
(C) subtraídas em 2 unidades.
(D) adicionada em 2 unidades.



Tente explicar o porquê da opção escolhida.

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

6. João e Bruno estavam brincando com as operações aritméticas.
**Na primeira rodada, João deve adivinhar qual o número escolhido por Bruno e faz os seguintes comandos:**

- Escolha um número;
- Multiplique esse número por 2;
- Adicione 8 ao resultado encontrado.

Ao término desta sequência, João pediu que Bruno dissesse o valor obtido e “adivinhou” o número escolhido inicialmente por Bruno, a partir do resultado. Sabendo que o valor obtido por Bruno ao término foi 30, você também consegue descobrir qual o número que ele escolheu? Que número foi esse?

| |
|---|
| *Como você tentou resolver este problema? Descreva seus passos. Se você não conseguiu, tente explicar o que você entendeu do problema e quais as suas dificuldades para a resolução.* |

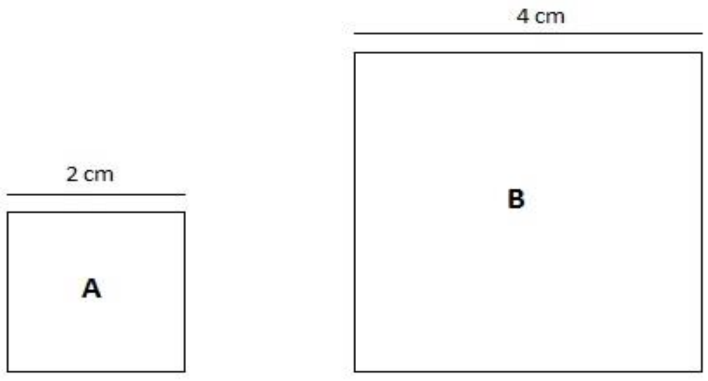
**Na segunda rodada, Bruno deve adivinhar qual o número escolhido por João e faz os seguintes comandos:**

- Escolha um número;
- Multiplique esse número por 6;
- Divida o resultado por 3;

Ao término da sequencia, o valor obtido por João foi 14. Você consegue descobrir qual o número que ele escolheu a partir do resultado? Que número foi esse?

| |
|---|
| *Como você tentou resolver este problema? Descreva seus passos. Se você não conseguiu, tente explicar o que você entendeu do problema e quais as suas dificuldades para a resolução.* |

7. Considere os quadrados A e B:




a) O quadrado A cabe dentro do quadrado B? Quanto de A cabe em B? Quantos quadrados do tamanho de A podem ser colocados sobre B sem sobrepor um ao outro e sem ultrapassar os limites de B?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

____________________________________________

b) O quadrado B cabe dentro do quadrado A? Quanto de B cabe em A? Explique como pensou.

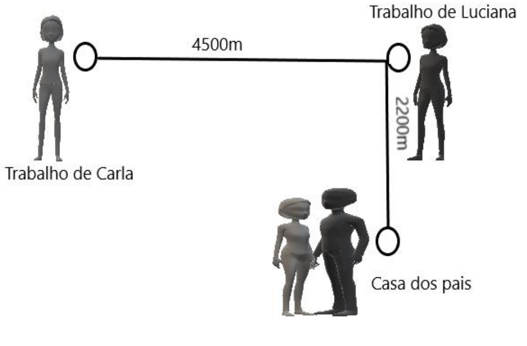
______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

8. As irmãs Carla e Luciana combinaram de almoçar com seus pais. Saindo de carro do trabalho, Carla percorreu 4500m para buscar Luciana no trabalho dela e seguirem juntas para a casa de seus pais, a 2200m de distância do trabalho de Luciana. Após o almoço, Carla voltou, também de carro, pelo mesmo caminho, passando no trabalho de Luciana primeiro e depois seguindo para o seu trabalho. No total, quantos metros Carla percorreu de carro?




*Como você tentou resolver este problema?*

9. Observe a tabela abaixo. Os números da área branca são resultados de uma operação entre o número da linha e o da coluna correspondente na região pintada. Sabendo que a operação é a mesma para toda a tabela, tente preencher os espaços em branco. Caso consiga, responda:

| ? | 0↓ | 1↓ | 2↓ | 3↓ | 4↓ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 → | 0 | | | | |
| 1 → | | 1 | | | |
| 2 → | | | 4 | | |
| 3 → | | | | 9 | |
| 4 → | | | | | |

a) Qual é a operação? ______________________

b) Como você conseguiu descobrir a operação realizada e completar a tabela? ______________
_________________________________________
_________________________________________
_________________________________________
_________________________________________
_________________________________________
_________________________________________

10. Dona Angélica tem duas filhas, Amanda e Adriana. Amanda nasceu em 2001, quando Adriana tinha exatos 9 anos. Qual foi o ano de nascimento de Adriana?

*Como você tentou resolver este problema?*

11. Lucas tem três, duas calças e dois pares de sapatos. Quantas combinações de vestimentas diferentes ele pode fazer usando uma camiseta, uma calça e um sapato?

*Como você tentou resolver este problema?*

## APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO/RESPONSÁVEIS

# TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO/RESPONSÁVEIS

Prezado (a) Senhor (a), o menor ______________________________________________, sob sua responsabilidade, está sendo convidado (a) como voluntário (a) a participar da pesquisa intitulada “O Pensamento Reversível nas Operações Aritméticas: um estudo sobre os Obstáculos na Aprendizagem”. Com este estudo, eu, Vanessa Mendes Brito, aluna do Curso de Mestrado em Educação Científica e Formação de professores de Ciências e Matemática – PPG-ECFP, da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) e a pesquisadora Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina R. S. Gusmão, pretendemos analisar as origens das dificuldades de aprendizagem de estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental, na resolução de problemas aritméticos (que envolvem adição, subtração, multiplicação e divisão) que envolvem o pensamento reversível. Consideramos importante o estudo deste tema, pois poderá auxiliar tanto aos professores dos primeiros ciclos do fundamental a construir estratégias no intuito de evitar a formação ou a estabilização desses obstáculos em suas práticas, como aos professores das séries seguintes que se deparam com esses obstáculos ao ampliar o estudo das operações aritméticas para o conjunto dos números racionais. Caso você concorde na participação do menor supracitado como voluntário (a) desta pesquisa, aplicaremos uma atividade escrita, contendo problemas envolvendo as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e, havendo a necessidade de compreender melhor as respostas apresentadas pelo menor, realizaremos uma entrevista sobre os procedimentos utilizados pelo estudante durante suas tentativas de resolução dos problemas propostos, que poderá ser gravada em formato de áudio. Este estudo apresenta risco mínimo, podendo haver desconforto e fadiga durante o período de resolução de problemas, os quais podem ser resolvidos com pequenos intervalos durante a realização da atividade. Assim, caso o menor sinta algum incômodo intenso em alguma etapa da pesquisa, se isso ocorrer por meio da utilização de algum instrumento de produção de dados ou qualquer outro tipo de situação que possa emergir, o menor poderá deixar de participar da etapa. Salientamos que este estudo poderá trazer benefícios à comunidade escolar, uma vez que uma melhor compreensão das dificuldades dos estudantes durante a resolução de problemas aritméticos mostra-se essencial no aprimoramento das práticas escolares e, consequentemente, pode melhorar o desempenho dos estudantes na aprendizagem matemática nas séries seguintes. Para participar desta pesquisa, o menor sob sua responsabilidade e você não irão ter nenhum custo nem receberão qualquer vantagem financeira. Vocês terão todas as informações que quiserem sobre esta pesquisa, estando o menor livre para participar ou recusar-se a participar. Como responsável pelo menor, você poderá retirar seu consentimento ou interromper a participação dele a qualquer momento. A participação dele é voluntária e o fato de não deixá-lo participar não vai trazer qualquer penalidade ou mudança na forma em que ele é atendido pela pesquisadora responsável. As pesquisadoras tratarão a identidade de todos os participantes com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resolução Nº 466/12 do Conselho Nacional de Saúde), utilizando as informações somente para os fins acadêmicos e científicos. Os resultados desta pesquisa estarão à sua disposição quando finalizados e serão publicados de forma anônima na dissertação do Mestrado e em revistas especializadas. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com as pesquisadoras por cinco anos, e após esse tempo serão destruídos. O menor não será identificado em nenhuma publicação. Você poderá solicitar esclarecimentos antes, durante e depois da realização da pesquisa, com a pesquisadora Vanessa Mendes Brito, por meio do e-mail anessamendes@gmail.com e do telefone (75) 99250-4931, ou com a Orientadora Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão: professorataniagusmao@gmail.com e também no comitê em Pesquisa da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (CEP), que analisou esta pesquisa, através do e-mail cepuesb.jq@gmail.com ou pelo telefone (73) 3528-9727 ou ainda no seguinte endereço: Universidades Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, Comitê em Pesquisa da UESB – CEP/UESB, Módulo Administrativo, Sala do CEP/UESB, Rua José Moreira Sobrinho, s/n, Jequiezinho, Jequié- BA, CEP- 45206-510. Este termo de consentimento, por meio do qual você declara que concorda deixar o menor sob sua responsabilidade participar da pesquisa, encontra-se impresso em duas vias originais, sendo que uma será arquivada pela pesquisadora responsável e a outra será fornecida a você. Desde já, agradeço sua atenção e colaboração!

Jequié - BA, ____ de ________________ de 2019.

______________________________ ______________________________

Assinatura do responsável | Assinatura do pesquisador

## APÊNDICE C – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

### TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

Conforme Resolução nº 466/2012 do Conselho Nacional de Saúde – CNS

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa "O Pensamento Reversível nas Operações Aritméticas: um estudo sobre os Obstáculos na Aprendizagem". Neste estudo pretendemos analisar as origens das dificuldades de aprendizagem dos estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental, na resolução de problemas aritméticos que envolvem o pensamento reversível. O motivo que nos leva a estudar esse assunto é a carência de estudos sobre o pensamento reversível, que é uma habilidade cognitiva que pode auxiliar o estudante a resolver problemas aritméticos com maior grau de dificuldade. Para este estudo adotaremos o(s) seguinte(s) procedimento(s): aplicaremos uma atividade contendo problemas que envolvem as quatro operações, os quais você tentará resolver e explicar como você pensou aquele método de resolução e, caso a gente não consiga compreender seus passos na tarefa, realizaremos uma entrevista posteriormente para que você possa nos explicar melhor.

Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em todas as formas que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não causará qualquer punição ou modificação na forma em que é atendido (a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Este estudo apresenta risco mínimo de desconforto ou cansaço ao realizar a atividade. Caso isso aconteça, você poderá parar um pouco, tomar uma água e voltar para concluir a atividade.

Além disso, você tem assegurado o direito a compensação ou indenização no caso de quaisquer danos eventualmente produzidos pela pesquisa. Esse estudo poderá trazer benefícios à comunidade escolar, uma vez que uma melhor compreensão das dificuldades dos estudantes durante a resolução de problemas aritméticos mostra-se essencial no aprimoramento das práticas escolares e, consequentemente, pode melhorar o desempenho dos estudantes na aprendizagem matemática nas séries seguintes.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizados. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este Termo de Assentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma delas será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, _______________________________________________fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma via deste Termo de Assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Jequié, ____ de ______________ de _____

___________________________________

Assinatura do (a) menor

___________________________________

Assinatura do (a) pesquisador(a)

**Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:**

**Pesquisador(a) Responsável:** Vanessa Mendes brito

Endereço: Avenida Lomanto Júnior, 2120, Apto 08. Joaquim Romão. Jequié - Ba

Fone: (75) 992504931 / E-mail: anessamendes@gmail.com