**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA**
Programa de Pós-Graduação
- Educação Científica e Formação de Professores -

**PPG.ECFP**
Programa de Pós-Graduação em
**Educação Científica e Formação de Professores**

# O ENSINO DE GEOMETRIA E SUA ABORDAGEM EM LIVROS DIDÁTICOS (1976-1985)

**ELCIANE DE JESUS SANTOS**

**2022**

**ELCIANE DE JESUS SANTOS**

# O ENSINO DE GEOMETRIA E SUA ABORDAGEM EM LIVROS DIDÁTICOS (1976-1985)

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Formação de Professores da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia para obtenção do título Mestre em Educação Científica e Formação de Professores*

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Janice Cassia Lando

**Jequié/BA - 2022**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

***"O ensino de geometria e sua abordagem em livros didáticos (1976-1985)"***

Autor: Elciane de Jesus Santos
Orientadora: Janice Cassia Lando

Esse exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Elciane de Jesus Santos, e aprovada pela Comissão Avaliadora.

Data: 04/05/2022
Assinatura: ____________________
Prof.ª Dr.ª Janice Cassia Lando

COMISSÃO AVALIADORA

____________________
Prof.ª Dr.ª Janice Cassia Lando

____________________
Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

Eliene Barbosa Lima
____________________
Prof.ª Dr.ª Eliene Barbosa Lima

2022

**Dedicatória**

Luiza Rodrigues, Elciene Santos e Eliane Nascimento,
pelo apoio incondicional. O amor e a gratidão que tenho
por vocês são imensuráveis.

**Agradecimentos**

Um poeta espanhol, Antonio Machado, mencionou: "Caminhante, não há caminho, o caminho se faz ao caminhar", e eu posso afirmar que neste caminho que trilhei até agora tenho muito a agradecer àqueles que com paciência e sabedoria contribuíram em meu trajeto.

Agradeço primeiramente a Deus, meu Senhor, meu tudo!

Aos meus familiares, pais, irmãos, sobrinhos, amigos e cunhados, os quais muitas vezes suportaram minha ausência mesmo habitando espaço em comum.

A minha orientadora, Janice Lando, pela amizade, instruções, disponibilidade, por tantos momentos bons que me proporcionou nessa trajetória. Mulher que admiro, pela eficiência, sabedoria, sensatez e tantas outras qualidades.

Aos professores, Roque Lyrio, pela doação, e Jamille Vilas Bôas, pelo empréstimo, de coleções que utilizei para análise nesta dissertação, e pelo apoio mesmo antes de ingressar no mestrado, bem como a Rodrigo Santana, Betânea Ferraz, José de Anchieta Rabelo e Dionéia Gabino, por buscarem em outro estado (Piauí) e enviarem alguns livros de algumas coleções.

Ao pessoal do Núcleo de Estudo e Pesquisa em História, Educação e Matemática (NEPHEMAT), em especial Inês Freire, pelas ricas discussões que tivemos e oportunidades de aprendizagem.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Formação de Professores (PPG-ECFP), por tantos momentos de aprendizagem.

Às professoras da banca de qualificação e defesa Tânia Gusmão e Eliene Lima, pela leitura cuidadosa e contribuições valiosas para aprimoramento da nossa pesquisa.

À Lúcia Vilella, pela disponibilização da lista, por ela elaborada, de livros publicados pela Editora Nacional. Aos responsáveis pelo Repositório Institucional (RI) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e aos Responsáveis pelo Museu da Imagem e do Som, por disponibilizarem as entrevistas as quais tive acesso.

Aos meus colegas do mestrado.

Por fim, não menos importante, a você, leitor, que destinou um tempo para leitura deste trabalho.

## RESUMO

A matemática ensinada no Brasil atravessou diversas reformulações, como a ocorrida em meados de 1950 a 1970. A abrangência de elementos possíveis de serem estudados referentes ao ensino de matemática no decorrer do tempo, em especial durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM), é múltipla, nesse sentido esta pesquisa tem como temática o ensino de geometria no período de perda do protagonismo do MMM, apoiando-se nos livros didáticos de 5ª a 8ª séries, material que foi utilizado como principal fonte para a pesquisa. Este estudo tem como objetivo analisar historicamente a geometria abordada nos livros didáticos no período de perda do protagonismo do MMM, entre os anos de 1976 e 1985. Esse recorte temporal tem início com a publicação no Brasil do livro *Fracasso da Matemática Modena,* de autoria de Morris Kline, e se encerra em 1985, ano em que iniciou-se o processo de elaboração da primeira de uma série de reformas, empreendidas no Brasil por Secretarias Estaduais e Municipais de Educação, que buscavam rever as ideias do MMM e incorporar resultados de pesquisas na área de Educação Matemática (PIRES, 2000). Esta pesquisa está amparada em uma história cultural, na perspectiva de Roger Chartier (1990; 1991). Diante disso buscou-se responder a questão norteadora: Que geometria foi abordada nos livros didáticos de 5ª a 8ª séries no período de perda do protagonismo do MMM, no período de 1976 a 1985? Por meio da análise de duas coleções de Castrucci e demais autores (1976; 1985) e duas de Sangiorgi (1979; 1985) perceberam-se permanências, com pequenas variações, – Geometria de Euclides; teoria dos conjuntos no ensino da geometria; abordagens intuitiva e dedutiva; dentre outras – e mudanças – construções com régua e compasso; geometria das transformações; a presença de Tendências da Educação Matemática – a Resolução de Problemas e a Informática; dentre outras.

**Palavras-chave**: História da Matemática Escolar. Ensino de Geometria. Livro Didático. Movimento da Matemática Moderna.

## ABSTRACT

Mathematics taught in Brazil went through several reformulations, such as the one that took place in the mid-1950s to 1970s. The range of possible elements to be studied about mathematics teaching over time, especially during the Modern Mathematics Movement (MMM), is multiple. In this sense, this research has as its theme the teaching of geometry in the period of loss of protagonism of the MMM, based on textbooks from 5th to 8th grades, material that was used as the main source for the research. This study aims to analyze historically the geometry addressed in textbooks in the period when the MMM lost its leading role, between 1976 and 1985.
This time frame begins with the publication in Brazil of the book Fracasso da Matemática Modena, by Morris Kline, and ends in 1985, the year in which the process of elaborating the first of a series of reforms that were undertaken in the Brazil by State and Municipal Education Departments. This research is supported by a cultural history, in the perspective of Roger Chartier (1990; 1991). Thus, we sought to answer the guiding question: What geometry was addressed in the 5th to 8th grade textbooks in the period of loss of protagonism of the MMM, from 1976 to 1985? Through the analysis of two collections by Castrucci and other authors (1976; 1985) and two by Sangiorgi (1979; 1985), we noticed permanences, with small variations, – Euclid's Geometry; set theory in geometry teaching; intuitive and deductive approaches; among others – and changes – constructions with ruler and a pair of compasses; geometry by transformations; the presence of trends in mathematics education – problem solving and informatics; among others.



**Keywords**: History of school mathematics. Geometry teaching. Textbook. Modern Mathematics Movement.

**Lista de Ilustrações**

**Lista de Quadros**

## Lista de Abreviaturas e Siglas

| | |
|---|---|
| APOS | Acervo Pessoal de Osvaldo Sangiorgi |
| BDTD | Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações |
| CADES | Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| CECIBA | Centro de Ensino de Ciências da Bahia |
| CENP | Coordenadoria de Ensino e Normas Pedagógicas |
| CNEM | Congresso Nacional de Ensino de Matemática |
| FFCLUSP | Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da USP |
| GEEM | Grupo de Estudo e Ensino de Matemática |
| GEEMPA | Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre |
| GEPEM | Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática |
| GRUEMA | Grupo de Ensino de Matemática Atualizada |
| ICMI | International Commission on Mathematical Instruction |
| IMPA | Instituto de Matemática Pura e Aplicada |
| IMUK | Internationale Mathematische Unterrichtskommission |
| LDB | Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional |
| MMM | Movimento da Matemática Moderna |
| NEDEM | Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática |
| OECE | Organização Europeia de Cooperação Econômica |
| PROED | Processo entre a Exposição e a Descoberta |
| PUC | Pontifícia Universidade Católica |
| SMSG | School Mathematics Study Group |
| UFBA | Universidade Federal da Bahia |
| UFJF | Universidade Federal de Juiz de Fora |
| UFSC | Universidade Federal de Santa Catarina |

| | |
|---|---|
| UNIBAN | Universidade Bandeirantes |
| USP | Universidade de São Paulo |

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

"A incompreensão do presente nasce, fatalmente, da ignorância do passado".
Marc Bloch

Mesmo com a alta relevância da geometria e de sua significância na sociedade, o seu ensino tem sofrido oscilações[1] no que se refere à ênfase com que esteve presente nos currículos, e em alguns períodos da história foi diminuída sua importância no ensino da matemática escolar. Fillos (2006) declara que uma dessas mudanças no currículo se deu com o advento do Movimento da Matemática Moderna (MMM), e com isso conteúdos significativos, como os geométricos, tiveram mudanças de abordagem, diante da valorização do método algébrico.

O ensino de geometria tem sofrido reformulações se adequando às necessidades e às exigências de cada época; fatores externos e internos, como, por exemplo, a relação entre professor e texto de ensino, como destaca Schubring (2003), têm sido fortes influenciadores para o ensino de matemática, e nesse sentido, entender a sua história por meio de uma história cultural e da apropriação deste material, com base em Chartier (1990; 1991), torna-se pertinente. Essa pertinência não está relacionada a uma compreensão direta da situação atual do ensino de geometria, pois como afirma Valente (2013, p. 29), baseado em Chartier, "Não há uma transmissão direta, linear, do passado para o presente. A história não é regida por leis de causa e consequência.", está associada à possibilidade de "[...] levar o leitor a se apropriar de instrumentos críticos que podem ser úteis para o estudo de sua própria sociedade" (CHARTIER, 1997 apud VALENTE, 2013, p. 27), no caso desta pesquisa, "instrumentos críticos" referentes ao ensino de geometria na atualidade.

[1] Ver mais sobre essas oscilações em Miguel, Fiorentini e Miorim (1992).

Uma dessas reformulações ocorreu em meados do século XX, por meio de uma reformulação do ensino escolar de matemática, posteriormente, conhecido como Movimento da Matemática Moderna. Os idealizadores desse Movimento, segundo Guimarães (2007), justificaram a necessidade de reestruturação no ensino de matemática devido ao desenvolvimento da Matemática, às necessidades de natureza social e ao progresso científico e tecnológico. Diante disso, entendiam que a exigência de uma formação escolar diferente da que vinha sendo propiciada tornou-se mais intensa[2]. Assim, se propôs reformulações curriculares para o ensino de matemática, de uma maneira geral, e de geometria, em particular. Para o ensino de matemática prevaleceu,

> [...] uma concepção estruturalista da Matemática de inspiração bourbakista, com as implicações correspondentes no que se refere à Matemática para ser ensinada no ensino secundário: a ênfase na unidade da Matemática (a ideia da "fusão" Aritmética/Álgebra e da "síntese" Álgebra/Geometria, a integração da Trigonometria em outros tópicos ao longo do currículo); a importância dada à Álgebra e à Geometria vectorial, bem como às estruturas matemáticas; a orientação axiomática do ensino, isto é, a organização do currículo tendo como última meta o estudo axiomático da Matemática; a preocupação com o rigor e com a linguagem e simbologia matemáticas. (GUIMARÃES, 2007, p. 43)

Para o ensino de geometria foram apresentadas duas propostas no Seminário de Royaumont, na França, no ano de 1959. Uma exposta por Dieudonné[3], em que seguia a visão de Félix Klein[4] na qual a geometria deveria ser estudada por meio de grupos de transformações com valorização

[2] "No Brasil, a Matemática Moderna veio como uma alternativa ao ensino tradicional que, apesar de demonstrar certa estabilidade de conteúdo e metodologia em livros e programas de ensino, recebia críticas por adestrar os alunos em fórmulas e cálculos sem aplicações; apresentar a Matemática em ramos estanques e isolados, entre outras." (SOARES, 2005, p. 2).

[3] Jean Dieudonné (1906-1992) foi um matemático francês, membro do grupo Bourbaki.

[4] "Felix Christian Klein nasceu na Alemanha no ano de 1849. Em seu ingresso na Universidade de Bonn em 1865 Klein decide concentrar seus estudos em duas áreas: Matemática e Física. Em 1868 ele obtém o título de doutor ao concluir sua tese relacionada ao campo da Geometria". (SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 305).

da Álgebra e da Geometria Vetorial; a outra proposta feita por Botsch[5], mantinha a abordagem axiomática, todavia apresentava novos conjuntos de axiomas (MATOS; LEME DA SILVA, 2011).

Diante desse contexto de reforma no exterior, direcionamos nosso olhar para o MMM no Brasil, como ocorreu a sua apropriação, e percebemos que as características desse movimento de reforma no século XX nos diferentes estados brasileiros foram distintas, mostra disso foi a abordagem do ensino de geometria que teve ações diferenciadas em que alguns estados se apresentaram com propostas inovadoras enquanto outros com propostas mais tímidas[6]. Nesse sentido, o MMM pode ser entendido como movimentos (no plural) devido às múltiplas peculiaridades e modificações sofridas nas diferentes localidades (GARNICA; SOUZA, 2012).

O ensino de matemática tem sofrido influências da sociedade em caráter econômico, social e cultural ao longo do tempo, diante disso, compreender a história de certo período, em que determinadas obras didáticas foram elaboradas, se torna imprescindível. Nesse sentido, a pesquisa histórica, numa perspectiva da história cultural, para Chartier, possibilita compreender que "[…] as clivagens culturais não estão forçosamente organizadas segundo uma grade única do recorte social" (CHARTIER, 1991, p. 180) e sim de uma grade diversificada. Para esse autor, (CHARTIER, 1991, p. 183-184), "a história cultural separa-se sem dúvida de uma dependência demasiadamente estrita de uma história social dedicada exclusivamente ao estudo das lutas econômicas", e acrescenta ainda que,

> […] história deve ser entendida como o estudo dos processos com os quais se constrói um sentido. Rompendo com a antiga ideia que dotava os textos e as obras de um sentido intrínseco, absoluto, único [...], dirige-se às práticas que,

[5] Otto Botsch (1905-1990, República Federal da Alemanha), diretor do Helmholtz-Gymnasium em Heidelberg. Participou do Seminário de Royaumont como um dos oradores convidados, não foi um dos delegados da Alemanha Ocidental. (SCHUBRING, 2014, tradução nossa).

[6] Freire (2009) e Camargo (2009), referindo-se à proposta desenvolvida na Bahia, consideraram como inovadoras devido a sua aproximação com o ideário modernizador no que tange ao ensino de geometria. Já Ferreira (2006), em sua análise dos livros de Sangiorgi, considera que esse autor apresentou mudanças tímidas para o ensino de Geometria.

> pluralmente, contraditoriamente, dão significado ao mundo. (CHARTIER, 2002, p. 27).

O tratamento dado na utilização dos recursos produzidos ou adquiridos pela sociedade assim como sua forma de interpretá-los poderá ressignificar e distanciar da essência, nesse viés as interpretações utilizando as práticas de apropriação cultural se destacam como formas singulares de interpretação. Para Chartier (1988, p. 26),

> A apropriação, tal como a entendemos, tem por objectivo uma história social das interpretações, remetidas para as suas determinações fundamentais (que são sociais, institucionais, culturais) e inscritas nas práticas específicas que as produzem.

Para ele (1988) a apropriação não se restringe apenas a reprodução de elementos recebidos, as pessoas criam e recriam culturalmente, ou seja, se apropriam de forma distinta de determinados objetos culturais.

Buscando produzir uma história do ensino de geometria nos livros didáticos do ensino básico, faz-se pertinente analisar esse documento, pois "[…] os livros didáticos ante os novos tempos de História Cultural, tornaram-se preciosos documentos para escrita da história dos saberes disciplinares." (VALENTE, 2007, p. 41).

No entanto, esta concepção sobre a importância dos livros didáticos para a escrita da história da ciência e história da educação é relativamente recente. No que se refere à história da ciência, até o início da década de 1960 eram "[…] tratados mais ou menos com desdém, sendo considerados desinteressantes ou até mesmo entediantes". (SCHUBRING, 2003, p. 7). Ainda de acordo com Schubring (2003, p. 7-8),

> O interesse historiográfico tendia a focalizar as realizações dos cientistas mais notáveis. Razões sociológicas podem ser responsáveis por tais preferências: parte da fama costumava passar para o historiador que estudava um pesquisador ou intelectual muito importante, e não havia recompensas comparáveis para quem estudasse livros didáticos e seus

> autores.

Na história da educação, segundo Choppin (2002, p. 10), "os trabalhos, os mais acadêmicos, que tratam dos manuais antigos não aparecem antes de 1960 [...]". Esse autor ressalta ainda,

> É no decorrer dos anos 1970, que os historiadores começam a manifestar um real interesse pelo livro e pela edição escolares. O fim da década testemunha essa tomada de consciência com a publicação, quase concomitante, de contribuições que sublinham a importância que revestiu o manual como fonte para os historiadores da educação, em diferentes países. (CHOPPIN, 2002, p. 11).

Todavia, no que se refere ao uso do livro didático no ensino brasileiro[7], principalmente de matemática, esse recurso tem desempenhado função importante desde os primeiros ensinamentos, ou seja,

> Desde os seus primórdios, ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. (VALENTE, 2008, p. 141).

Nesse sentido os livros didáticos têm assumido função importante para a educação ao longo dos anos, contribuindo como elemento fundamental "da língua, da cultura e dos valores das classes dirigentes. Instrumento privilegiado de construção de identidade, geralmente ele é reconhecido, assim como a moeda e a bandeira, como um símbolo da soberania nacional e, nesse sentido, assume um importante papel político" (CHOPPIN, 2002, p. 553). O livro didático também, segundo Choppin (2002), abarca ainda a possibilidade de estudos/análises em distintas funções, sendo elas: referencial, denominada também como curricular ou programática, função que permite a transmissão de conceitos tidos como essenciais às gerações posteriores; instrumental,

[7] Silva (2012, p. 807) indica que "No caso brasileiro, a utilização mais sistemática do livro didático no ensino remonta ao período imperial".

função que abarca os métodos de aprendizagem, os exercícios e as atividades; ideológica e cultural, nessa função o livro é considerado "como um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das classes dirigentes" e pode tender a aculturar ou doutrinar; e documental, tanto pelo aspecto icônico ou textual, ou seja, é compreendido como uma fonte rica de elementos a serem explorados. (CHOPPIN, 2002, p. 553).

Neste trabalho, foi adotado como recorte temporal para a pesquisa o período em que se acentuaram as críticas ao MMM. Iniciando em 1976, pois interpretamos que esse ano foi um marco importante no que se refere ao início da perda de protagonismo do MMM, uma vez que as críticas que existiram desde o princípio do movimento aumentaram no início dos anos setenta, se intensificando com a circulação em solo brasileiro da tradução do livro *O fracasso da matemática moderna*[8], de autoria do professor norte-americano Morris Kline, publicada em 1976. (SOARES, 2007). No Brasil, segundo Soares (2007, p. 116), esse livro "[...] foi bastante divulgado no país e hoje é tido como um marco quase que definitivo para o fim do Movimento da Matemática Moderna". Nesse mesmo período, a pauta crítica esteve presente em jornais brasileiros, até mesmo com a presença de comentários de Osvaldo Sangiorgi, um dos professores que mais defenderam o movimento no Brasil (SOARES, 2007).

O ano de 1976 também é apontado como um marco para o "esgotamento do Movimento da Matemática Moderna" por Burigo (1989, p. 225):

> Em 1976 foi realizado o último curso do GEEM para professores, preparando o concurso para o magistério que acabou se constituindo num momento de desnudamento da situação do ensino. Em 1976, foi publicado o livro de Morris Kline. E foi também em 1976 que, pela primeira vez desde o Congresso de São José dos Campos (em 1966), profissionais do ensino de matemática de todo país se reuniram, na preparação de sua participação no III Congresso Internacional de Educação Matemática que deveria se realizar naquele mesmo ano. (BÚRIGO, 1989, p. 225).

[8] Publicado originalmente em 1973 com o título *Why Johnny can't add: the failureof the new math*, traduzido no Brasil por Leonidas Gontijo de Carvalho.

Em relação às discussões sobre o MMM no III Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado naquele ano, Burigo (1989, p. 226) cita o depoimento de Castrucci, o qual indica que "[...] o congresso foi marcante pelas 'críticas tremendas' que foram feitas à matemática moderna".

O recorte temporal se encerra em 1985, ano em que iniciou-se o processo de elaboração da primeira de uma série de reformas[9] que foram empreendidas no Brasil por Secretarias Estaduais e Municipais de Educação. Essa primeira reforma, de acordo com Pires (2000), denominada Propostas Curriculares para o ensino de 1º e 2º graus, foi implantada na rede pública estadual de São Paulo. Em relação a essas reformas, Pires (2000, p. 49) afirma: "Pode-se dizer que, em geral, guardam muitas semelhanças entre si, na medida em que procuram incorporar as discussões dos inúmeros encontros regionais e nacionais dos grupos de educação matemática". Ao comparar essas reformas com reformas de outros países, Pires (2000, p. 60) conclui:

> Nas reformas mais recentes (dos anos 80/90) podemos identificar pontos em comuns e, apesar de terem se desenvolvido de forma bastante autônoma e diferenciada em diferentes países, ao contrário de sua antecessora, tinham como ponto de partida a incumbência de rever os princípios da Matemática Moderna.

Foram analisadas 4 (quatro) coleções de 5ª a 8ª séries do primeiro grau, intituladas *Matemática* (1976), dos autores Benedito Castrucci, Ronaldo Garibaldi Peretti e José Ruy Giovanni; *A conquista da Matemática* (1985) com autoria de José Ruy Giovanni e Benedito Castrucci; *Matemática* (1979) e *Matemática* (1985), ambas de Osvaldo Sangiorgi. Como mencionado anteriormente, a escolha das coleções ocorreu devido à sua utilização e divulgação no território nacional, ao vínculo desses autores com o ensino de geometria, bem como suas atuações na produção de livros didáticos, tendo

---

[9] Pires (2000) analisou as reformas da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo; as propostas dos governos de Pernambuco, do Espírito Santos, da Bahia e de Minas Gerais; bem como os Parâmetros Curriculares Nacionais.

em vista que eles já tinham publicações antes do período pesquisado, além de que Castrucci e Sangiorgi tinham participação significativa nas discussões acerca das ideias modernizadoras e eram defensores da sua inserção no ensino de matemática no Brasil.

Para além dos livros didáticos, utilizamos como fontes jornais da época, entrevistas realizadas com os autores Benedito Castrucci e Osvaldo Sangiorgi, anais de eventos da época em estudo, entre outros documentos disponíveis no Repositório Institucional (RI) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)[10].

Diante do exposto buscamos responder nossa questão norteadora da pesquisa: Que geometria foi abordada nos livros didáticos de 5ª a 8ª séries no período de perda do protagonismo do Movimento da Matemática Moderna, no período de 1976 a 1985? Diante dessa questão foi formulado o objetivo da pesquisa, analisar historicamente a geometria abordada nos livros didáticos no período de perda do protagonismo do MMM, entre os anos de 1976 e 1985.

Este trabalho foi estruturado em capítulos. No primeiro capítulo discorremos sobre o Movimento da Matemática Moderna no âmbito nacional e internacional, bem como o que era proposto para a Geometria em termos de ensino.

No segundo capítulo, com base no levantamento de dados no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), foi feito um mapeamento e análise de pesquisas referentes à geometria nos livros didáticos, ou seja, foi realizado um estudo do tipo estado da arte.

Os trabalhos denominados estado da arte, segundo Ferreira (2002), se configuram pelo caráter bibliográfico, mapeando e discutindo as produções referentes a determinado campo de conhecimento, "[...] tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares [...]" (FERREIRA, 2002, p. 258). Essa modalidade, estado da arte, permite conhecer as produções referentes à determinada temática,

---

[10] https://repositorio.ufsc.br/

verificando como foi abordada, qual a metodologia utilizada, dentre outros, ou seja, possibilita discutir os estudos já elaborados.

Este levantamento teve como fonte documental o Catálogo de Teses e Dissertações da (CAPES), analisando toda produção no que diz respeito aos trabalhos que abordassem a temática do ensino de geometria nos livros didáticos correlacionada ao MMM. Alguns dos trabalhos por serem anteriores ao Catálogo da CAPES consta apenas a indicação da referência[11], fazendo-se pertinente buscar informações a respeito deles na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), no entanto tiveram o mesmo tratamento durante a análise, a exemplo, tivemos a dissertação de Ana Celia da Costa Ferreira, intitulada *Propostas Pedagógicas de Geometria no Movimento Paranaense de Matemática Moderna* que é anterior à Plataforma Sucupira[12], portanto não estando disponível o trabalho completo no Catálogo da CAPES.

A escolha desse Catálogo deu-se por ser uma das principais bases de dados que concentra as produções acadêmicas. Foram encontradas doze dissertações e uma tese, concluídas entre os anos de 2006 e 2010, inclusive estes. Destacamos, ainda, que das treze dissertações e teses localizadas, sete foram excluídas deste estudo; cinco por não abordarem a análise de livros didáticos, uma por tratar da geometria no colegial, e outra por analisar livros referentes ao ensino primário, resultando na análise de seis dissertações.

Finalizamos esse capítulo abordando a perda do protagonismo do MMM diante das acentuadas críticas.

No terceiro capítulo trazemos uma abordagem do ensino de geometria nos livros didáticos de Benedito Castrucci por meio das coleções *Matemática* (1976), com autoria de Benedito Castrucci, Ronaldo Garibaldi Peretti e José Rui Giovanni, e *A conquista da matemática* de (1985), com autoria de José Rui Giovanni e Benedito Castrucci, buscando compreender como os autores se apropriaram da geometria nessas coleções.

[11] Nas referências constam os elementos indicados pela ABNT NBR 6023.

[12] A Plataforma Sucupira é uma "[...] ferramenta on-line para coletar informações, realizar análises, avaliações e servir como base de referência [...]" do Sistema Nacional de Pós-Graduação (SNPG). (BRASIL, 2022, s.p.).

No quarto capítulo discorremos sobre o ensino de geometria na produção didática de Osvaldo Sangiorgi, olhando o contexto sócio-histórico no qual está inserido e as coleções: *Matemática (1979)* e *Matemática* (1985), na qual discutimos e analisamos essas obras e possíveis alterações e continuidades no tratamento com a geometria.

Na última seção apresentamos as considerações finais referentes à nossa pesquisa mostrando como os autores abordaram o ensino de geometria nas coleções verificando as permanências e modificações e a (re)leitura para o ensino de geometria nas décadas em que se acentuaram as críticas ao movimento de reforma curricular para o ensino de matemática em meados do século XX.

# CAPÍTULO 1
# A GEOMETRIA NO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

O ensino de matemática em geral, e o de geometria em particular, no decorrer do século XX, foi influenciado por dois movimentos internacionais de modernização da matemática escolar. O primeiro deles, nas décadas iniciais, e o segundo, a partir da década de 1950.

O primeiro movimento internacional para a modernização do ensino de Matemática teve origem em 1908, durante o IV Congresso Internacional de Matemáticos, com a criação da *Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (IMUK)/ Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM)[13], que mais tarde (1952)[14] passou a ser conhecida como *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). As atividades dessa Comissão chegaram ao fim no ano de 1920[15]. (SCHUBRING, 2004).

A relevância deste movimento pode ser constatada devido à matemática ter sido a única dentre as disciplinas a propor tal reformulação, de acordo com Schubring (2004, p. 13) "este movimento pela matemática não foi somente a primeira atividade internacional que visava reformas curriculares. Pode-se até mesmo dizer que ele foi único entre as disciplinas escolares".

---

[13] Para maiores informações sobre o primeiro movimento internacional de Reforma Curricular ver Schubring (1999; 2004) e Miorim (1998).

[14] Essa discrepância em relação à extinção ou não da Comissão na década de 1920, foi explicada por Kilpatrick (2008, p. 1, tradução nossa) da seguinte forma: "A Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) foi estabelecida como uma comissão da União Matemática Internacional (IMU) na reunião de 1952 da assembléia geral da IMU em Roma. Ambas as organizações eram reencarnações: a ICMI foi a sucessora da Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM [...]), que havia sido organizada em 1908 no congresso internacional em Roma, funcionou entre congressos até a Primeira Guerra Mundial, foi revivida em 1928, e então foi dissolvida em 1939 (embora seu secretário-geral, Henri Fehr, afirmasse que tecnicamente ainda existia em 1952, quando se tornou oficialmente anexada à IMU; Lehto, 1998, p. 316). [...]. Antes de 1952, 'a Comissão estava ligada não à IMU, mas aos Congressos Internacionais. Cada Congresso deu-lhe um mandato para o período entre dois Congressos, ou seja, por quatro anos, e nomeou um Comitê para coordenar suas atividades' (p. 65)."

[15] As atividades foram prejudicadas no decorrer da Primeira Guerra Mundial, de 1914 a 1918; vale destacar que as ações não foram totalmente paralisadas nesse período, e sim enfraquecidas. (SCHUBRING, 2004).

Esse Primeiro Movimento Internacional de Reforma Curricular mostrou-se produtivo, dada as expressivas publicações[16], se considerarmos o curto espaço de tempo em que ocorreram as discussões, bem como a movimentação entre países e as correspondências. (SCHUBRING, 1999).

Para liderar a reforma, foram eleitos três matemáticos, Felix Klein, George Greenhill e Henri Fehr, para as respectivas funções de presidente, vice-presidente e secretário geral, compondo dessa forma o núcleo central do comitê. O comitê tinha como objetivo, indicado pelo Congresso que o havia criado, "[...] obter informações a respeito da situação em que se encontrava o ensino de Matemática nas escolas secundárias dos vários países." (MIORIM, 1998, p. 73). Contudo, no decorrer dos trabalhos o Comitê não se restringiu ao levantamento de informações, passou a "[...] atuar como um agente de mudanças [...]" (SCHUBRING, 2004, p. 19). Essas mudanças seriam orientadas por "três características principais":

> 1 – Predominância do ponto de vista psicológico.
> 2 – Subordinação da escolha, da matéria a ensinar às aplicações da matemática ao conjunto das outras disciplinas.
> 3 – Subordinação da finalidade do ensino às diretrizes culturais da nossa época. (KLEIN apud ROXO, 2004, p. 153).

De acordo com Silva e Pietropaolo (2014), o ensino de geometria era proposto que ocorresse pelas Transformações Geométricas, buscando familiarizar os alunos com as características das figuras, explorando-as não apenas em seu estado fixo como também valorizando os movimentos, considerando que antes a geometria era proposta por meio dos teoremas e de modo estático.

Em seus livros, Klein utiliza as transformações "[…] para movimentar pontos, retas, segmentos e figuras geométricas no plano cartesiano. As simetrias de reflexão e de rotação, a translação, a homotetia e a semelhança de figuras são representadas por meio de seu aspecto funcional". (SILVA;

[16] "A lista oficial dessas publicações, apresentada em 1920 quando do encerramento das atividades do comitê, tinha 294 títulos publicados em 17 países". (SCHUBRING, 1999, p. 37).

PIETROPAOLO, 2014, p. 314-315). Essa proposta de Klein para o ensino de geometria na reforma do início do século influenciou, mesmo após sua morte em 1925, um novo movimento internacional de reforma a partir da segunda metade desse século.

Em 1959, um segundo movimento internacional de reforma do ensino de matemática ganhou força. Denominado posteriormente de Movimento da Matemática Moderna (MMM), teve como objetivo uma reforma curricular, ou seja, mudanças nos conteúdos matemáticos e nos métodos de ensino de matemática, renovação iniciada primeiramente no ensino secundário, depois difundida no ensino primário.

O MMM tinha como pano de fundo, no que diz respeito ao momento histórico, uma sociedade vivendo o pós II Guerra Mundial preocupada com um "suposto atraso tecnológico" e com a "expansão industrial" que conduziria "à reconstrução pós-guerra" (PIRES, 2000, p. 9), que buscava o desenvolvimento econômico e tecnológico.

Diante deste cenário, o entendimento por parte de matemáticos, educadores e professores, de que o ensino de matemática precisava ser reformulado, ganhou força, e no Seminário de *Royaumont* realizado em 1959, pela Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE), começaram a ser delineados os ideais do movimento. Os proponentes da reforma, neste segundo movimento, apresentaram três finalidades,

> a) a Matemática como método de ensino liberal (meio de formar o espírito);
> b) a Matemática, base para a vida e para o trabalho (instrumento necessário a todos);
> c) a Matemática, enquanto propedêutica (preparação para os estudos universitários). (OECE, 1961a, p. 64 apud GUIMARÃES, 2007, p. 29)[17].

[17] "No entanto, a encerrar as conclusões do relatório, [...], a primeira das finalidades anteriormente apresentadas não aparece, mantendo-se apenas as outras duas que visavam a preparação dos alunos para a vida quotidiana e para continuação dos seus estudos". (GUIMARÃES, 2007, p. 29).

Para Soares (2001, p. 27), "pretendia-se modernizar o currículo e o ensino de Matemática para adequar a formação matemática dos estudantes ao desenvolvimento científico e tecnológico que as nações ocidentais testemunhavam". Os objetivos do Seminário de *Royaumont*, segundo Moon (1986, p. 49, tradução nossa), eram:

> (a) Esclarecer e resumir as principais reflexões sobre a matemática e o currículo da matemática nas escolas elementares e secundárias, o recrutamento e a formação do professor de matemática e a pesquisa necessária em educação matemática.
> (b) Especificar (i) os objetivos da educação matemática; (ii) as mudanças específicas desejáveis no conteúdo da instrução; (iii) novos objetivos, novos materiais e novos métodos de instrução e (iv) formação contínua de professores necessária para a reforma da educação matemática.
> (c) Indicar os procedimentos e meios específicos que podem ser considerados em qualquer país que busque obter um fornecimento mais adequado – tanto em número como em qualidade – de matemáticos para ensino e pesquisa e de pessoas matematicamente competentes na ciência, indústria e governo.
> (d) Sugerir ação de acompanhamento adequada, tanto nacional quanto internacionalmente; (incluindo outras ações da OEEC).[18]

Diante desses objetivos, pode-se perceber que pretendiam tanto propor mudanças curriculares quanto discutir acerca da forma como essas renovações poderiam ser efetivadas na prática pedagógica dos professores.

O Seminário de *Royaumont* contou com a presença de matemáticos de renome como, Jean Dieudonné, Marshall Stone, Gustave Choquet, Howard

---

[18] (a) To clarify and summarize the foremost thinking on mathematics and the mathematics curriculum in the elementary and secondary schools, the recruitment and training of teacher mathematics and the needed research in mathematics education.
(b) To specify (i) the purposes of mathematics education; (ii) the specific changes desirable in the content of instruction; (iii) new goals, new materials and new methods of instruction and (iv) further teacher training necessary for reform um mathematics education.
(c) To indicate the specific procedures and means that might be considered in any country seeking to obtain a more adequate supply – both in number and quality – of mathematicians for teaching and research and of mathematically competent persons in science, industry and government.
(d) To suggest appropriate follow-up action, both nationally and internationally; (including further action by OEEC). (MOON, 1986, p. 49).

Fehr, E. G. Beagle e Lucienne Felix, dentre outros. As ideias defendidas nesse Seminário, e especificadas em Dubrovnik[19], no ano de 1960, influenciariam posteriormente reformulações curriculares no Brasil sob a liderança de nomes como Osvaldo Sangiorgi, Omar Catunda e Martha Dantas, por exemplo.

De acordo com Soares (2001), a proposta do movimento para o ensino secundário almejava a inserção dos temas, "[…] teoria dos conjuntos; conceitos de grupo, anel e corpo; espaços vetoriais; matrizes; álgebra de Boole; noções de cálculo diferencial e integral e estatística". (SOARES, 2001, p. 46). Os trabalhos do grupo Bourbarki foram tomados como referências na reformulação curricular no que se refere à Matemática.

O MMM foi influenciado, segundo Guimarães (2007), pelas ideias estruturalistas da Matemática e da Psicologia. Na Matemática, a concepção bourbakista, tendo maior destaque a proposta apresentada por Dieudonné, membro desse grupo, que considerava haver três pilares que sustentam tal ideia com relação ao ensino de Matemática e são elas, "a unidade da Matemática, o método axiomático e o conceito de estrutura matemática" (GUIMARÃES, 2007, p. 23). Na Psicologia, as pesquisas de Piaget, que "[…] defendeu a correspondência entre as estruturas matemáticas conhecidas, base de toda a 'arquitetura' bourbakista da matemática […] e as estruturas operatórias da inteligência, […]" (GUIMARÃES, 2007, p. 23).

O MMM tinha o intuito,

> […] aproximar a Matemática desenvolvida na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área […] as propostas defendidas pelo movimento enfatizam as estruturas algébricas, a teoria dos conjuntos, a topologia, as transformações geométricas, entre outras. (DUARTE; SILVA, 2006, p. 88).

[19]A sessão de trabalho de Dubrovnik, de acordo com Guimarães (2007), ocorreu em 1960, teve a participação de professores matemáticos, professores de matemática universitários, de escolas secundárias e de instituições de formação de professores, foi um desdobramento do Seminário de *Royaumont*, ocorrido em 1959. Essa sessão de trabalho contou com a participação de dezesseis professores, com duração em torno de um mês, que resultou em "[...] propostas de programas para os vários ciclos do ensino secundário [...]" que foram reunidos no livro intitulado "Um programa moderno de Matemática para o ensino secundário". (GUIMARÃES, 2007, p. 22).

A geometria para o ensino, por muito tempo, foi apresentada nos manuais e livros didáticos com enfoque na geometria clássica, era "[…] dotada de uma abordagem preponderantemente rigorosa e quase sempre axiomático-dedutiva […]" (MIORIM; MIGUEL; FIORENTINI, 1993, p. 20). Nesse sentido, vale salientar: "A geometria clássica, que é a geometria euclidiana, baseada no grupo isométrico, foi desenvolvida por Euclides e seus continuadores de maneira estática". (CATUNDA; DANTAS, [1979][20], p. 6).

Com o advento do MMM, na década de 1960, segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), a abordagem euclidiana clássica passou a ser considerada como inadequada para o ensino, fazendo pertinentes geometrias mais "rigorosas e atualizadas", como o que propunha Felix Klein, participante ativo do primeiro movimento reformulador da matemática escolar – a geometria das transformações – na qual "[...] os conceitos de função e de grupo desempenham papel de destaque [...]" ou, ainda, "[...] a apresentação baseada nos conceitos de espaço vetorial e transformação linear." (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 47).

Assim, o MMM propunha um ensino de matemática diferente da abordagem clássica. No intuito de uma melhor compreensão sobre o MMM, apresentamos na sequência esse movimento no Brasil e as propostas referentes ao ensino da geometria.

## 1.1 O Movimento da Matemática Moderna no Brasil

Autores como Lavorente (2008), Rios (2010), Ferreira (2008) e Mendonça (2016) afirmam que o contexto de transformações sociais, no Brasil, em meados do século XX, com o crescente desenvolvimento industrial e o êxodo rural se assemelhava com outros países exigindo dessa forma um ensino de matemática que acompanhasse tal industrialização e urbanização.

[20] No documento histórico não consta o ano de publicação, todavia no livro de *Resumos de Conferências e Comunicações da 5ª Conferência Interamericana de Educação Matemática*, p. 72, publicado em 1979, consta o trabalho com o mesmo título da fonte que tivemos acesso. Tais informações encontram-se disponíveis em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/200252. Acesso em: 05 fev. 2022.

> Com a industrialização, o governo propôs a reformulação do ensino secundário, a fim de adequá-lo às necessidades do mercado de trabalho; o ensino secundário precisaria ter um caráter mais prático, terminal e/ou formador de quadros técnicos. (RIOS, 2010, p. 51).

A inquietação dos professores com o ensino de matemática é acentuada nesse período se fortalecendo nos Congressos Nacionais de Ensino de Matemática - de 1955 a 1966 foram realizados cinco desses congressos (SOARES, 2001). "Neles começaram a ser discutidas novas direções para o ensino da Matemática no que diz respeito à metodologia, treinamento e formação de professores, currículos, material didático, etc". (SOARES, 2001, p. 67).

No Brasil, os congressos intensificaram as discussões referentes às propostas de modernização, podendo destacar o I Congresso Nacional de Ensino da Matemática no curso Secundário, em 1955, sediado na Bahia, que reuniu 115 pessoas de várias localidades, número considerado significativo, dada as dificuldades de locomoção na época (DIAS, 2011). Nesse primeiro congresso discutiu-se "[…] problemas relacionados ao ensino da Matemática" (MIORIM, 1998, p. 111).

As influências dos ideais reformadores do MMM nos Congressos se fizeram presentes "[…] de forma tímida nos três primeiros: em Salvador (1955), Porto Alegre (1957) e no Rio de Janeiro (1959). E, de maneira mais acentuada, nos últimos: em Belém (1962) e em São José dos Campos (1966)" (LIMA *et al.,* 2010, p. 16 ). Nos dois primeiros congressos estiveram presentes resquícios do ideário de Klein referente ao primeiro movimento modernizador (SOARES, 2005).

A relevância em continuar as discussões tornou-se pertinente levando ao segundo congresso em 1957, ocorrido em Porto Alegre, em que uma primeira sugestão relacionada às novas propostas para o ensino da matemática foi apresentada por Ubiratan D'Ambrósio: "a introdução do estudo de propriedades de diferentes conjuntos numéricos e de estruturas algébricas de operações, assim como das estruturas que podem ser observadas nas transformações geométricas". (DUARTE; LEME DA SILVA, 2006, p. 89-90).

A partir do quarto congresso as discussões sobre a reforma, ocorreram de forma mais sistematizada, no qual

> Foram realizadas sete aulas-demonstração enfocando o tratamento moderno de certos tópicos da Matemática na escola secundária, duas apresentações do desenvolvimento moderno de assuntos de Matemática e três palestras relativas à introdução da Matemática Moderna na escola secundária (SOARES, 2005, p. 6).

Já no V Congresso, foi proposta a articulação entre os ensinos secundário, primário e universitário. Nesse encontro houve participações de matemáticos estrangeiros[21] pela primeira vez, também ocorreram divisões das sessões de estudos em três partes, da qual a primeira tratava de "[…] problemas da Teoria dos Conjuntos e de Lógica Matemática aplicada ao ensino"; a segunda, para aqueles que já possuíam algum conhecimento em Matemática Moderna, abordou "[...] tópicos de Álgebra Moderna e Espaços Vetoriais"; e a terceira contemplava "[...] problemas de tratamento moderno da Geometria e Lógica Matemática" (SOARES, 2001, p. 6).

Os primeiros sinais mais significativos do MMM no Brasil, ou seja, indícios da constituição de um grupo de estudos cujo propósito principal estava relacionado ao MMM, segundo rememorou Castrucci (1989), emergem a partir do momento em que Sangiorgi não se restringe ao contato com a reforma via publicações vindas da Europa e dos Estados Unidos. Ele buscou contato por meio da participação em curso de verão no Kansas (Estados Unidos), e isso possibilitou a socialização com as discussões de reforma e com lideranças como George Springer, que veio posteriormente ao Brasil para ministrar cursos de Lógica Matemática. (CASTRUCCI, 1989).

O GEEM foi um grupo de estudos originado em São Paulo, em 1961,

[21] "Marshall Stone (EUA), George Papy, da Bélgica; Hector Merklen, do Uruguai e Helmuth Renato Völker, da Argentina" (SOARES, 2001, p. 6).

sob a liderança de Osvaldo Sangiorgi. Esse autor elaborou coleções de livros didáticos, ofertou cursos de capacitação para os professores, como também participou e organizou congressos e simpósios tratando sobre a reforma curricular. (MATOS; LEME DA SILVA, 2011).

Benedito Castrucci, professor e autor de livros didáticos, que também era membro do GEEM, foi considerado como um dos principais responsáveis pela reformulação do ensino de geometria no GEEM que tratava das modernizações apresentadas pelo MMM. Para Leme Silva (2008) as obras de Castrucci para a geometria trazem uma nova linguagem utilizando uma roupagem atrelando a simbologia presente na teoria dos conjuntos; essa autora apresenta, ainda, que Castrucci comentou que houve uma algebrização da geometria.

Estamos evidenciando esses dois professores, por serem os autores que destacamos na análise dos livros didáticos escolhidos como fontes desta pesquisa, todavia outros tantos professores de igual relevância fizeram parte desse grupo de estudos, por exemplo, Elza Gomide, Irineu Bicudo, Lucília Bechara, Luiz Henrique Jacy Monteiro, Manhúcia Perelberg Liberman, Omar Catunda, Renate Watanabe, Ruy Madsen Barbosa, Scipione de Pierro Neto, Ubiratan D’Ambrosio, entre outros. (LIMA, 2006).

Em 1962, no Paraná, o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM), coordenado pelo professor Osny Antônio Dacól, apresentava também proposta para o ensino de matemática, propondo formação acadêmica para o professor, construção de material específico, trazendo uma reformulação curricular, tendo em vista o que apresentava o MMM. (FISCHER, 2008).

O Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre (GEEMPA) criado no Rio Grande do Sul, em 1970, teve grande participação no cenário do ensino de matemática durante o MMM com incentivo da professora Esther Grossi, desenvolvendo didática para esta área, sob forte influência das ideias de Piaget e do professor Zoltan Paul Dienes, principalmente para o ensino o primário e secundário. O grupo também desenvolvia atividades de pesquisa, formação do professor e divulgação do ensino de matemática. (FISCHER, 2008).

Ainda durante o MMM, em 1976, no Rio de Janeiro, o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM) iniciou suas atividades. A respeito de sua criação, a professora Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, primeira presidente, narrou a experiência vivenciada com o Grupo de Estudos de Matemática do Estado da Guanabara (GEMEG) como base para a implantação do GEPEM.

> No Brasil, alguns grupos se associaram ao movimento [MMM]: [...] No Rio de Janeiro, alguns professores idealistas, sob a liderança do professor Arago Backx, fundaram, em 1970, o Grupo de Estudos de Matemática do Estado da Guanabara (GEMEG). Por falta de recursos financeiros, o GEMEG não conseguiu desenvolver o programa a que se propunha. A partir da experiência do GEMEG, após várias reuniões preliminares em que se ajustaram os propósitos e se fixar nas bases para uma ação futura, 32 professores assinaram a Ata da Assembléia Geral de Criação do GEPEM, realizada na Escola Israelita Brasileira Eliezer Steinberg, no dia 24 de fevereiro de 1976. (LOPES, 1994, p. 100).

A criação do GEPEM no período em que as críticas ao movimento se acentuaram nos permite interpretar que a credibilidade das propostas de reforma se mantinha em alguns estados brasileiros, tendo em vista que havia ainda professores que articulavam os ideais da reforma por meio da criação de grupos de estudos com tal propósito.

Por último, não menos importante, apresentamos a Seção Científica de Matemática do Centro de Ensino de Ciências da Bahia (CECIBA), que teve destaque devido às múltiplas atividades que desenvolvia e influências no ensino de matemática no estado de origem. Este foi um dos seis centros de ensino de ciências criados pelo Ministério da Educação de 1963 a 1965[22].

---

[22] "Os centros criados pelo MEC foram: Centro de Ensino de Ciências do Nordeste (CECINE) - Recife/PE, Centro de Ciências do Estado da Guanabara (CECIGUA) - RJ/GR, Centro de Treinamento para Professores de Ciências do Rio Grande do Sul (CECIRS) – Porto Alegre/RS, Centro de Treinamento de Professores de Ciências de Minas Gerais (CECIMIG) – Belo Horizonte/MG, Centro de Treinamento para Professores de Ciências de São Paulo (CECISP) – São Paulo/SP e Centro de Ensino de Ciências da Bahia (CECIBA) - Salvador/BA". (FREIRE, 2009, p. 21).

Na Bahia, segundo Freire e Dias (2010), Martha Maria de Souza Dantas e Omar Catunda desenvolveram, juntamente com um grupo de professoras, propostas de reforma curricular “inovadoras”.

> Pode-se notar que, ao lado dos cursos, palestras, livros, entre outros, o CECIBA representou mais um meio de divulgação das ideias do MMM, tornando-se um de seus principais vetores de difusão no Brasil. Não só isso, mas também, cristalizando uma produção, desenvolvimento e avaliação de um programa curricular para o ensino ginasial de matemática que representaram iniciativas inovadoras, produzidas localmente. (FREIRE; DIAS, 2010, p. 382).

Objetivando a modernização do ensino de matemática de uma maneira geral, e da geometria em particular, a Seção Científica de Matemática do CECIBA possibilitou que professores tivessem o primeiro contato com o ideário do MMM, contemplando o que era proposto no movimento, por exemplo, a geometria das Transformações, por meio de Cursos de Aperfeiçoamento, Cursos de Verão, dentre outros. (FREIRE, 2009).

O CECIBA, criado pelo Ministério da Educação em 1965, em conjunto com a secretaria estadual de educação, a Universidade Federal da Bahia (UFBA) e agências de fomento (FREIRE, 2009), possibilitou a expansão do que se pretendia desenvolver em relação às atividades de cunho formador. Um dos projetos desenvolvido pela Seção Científica de Matemática do CECIBA de maior destaque refere-se ao ensino da Geometria abordando as transformações geométricas. Este projeto contou com produção de manuais e de recursos produzidos pelo grupo na Bahia com aplicação experimental; esta iniciativa marca efetivamente uma abordagem geométrica no estado, distinta da anterior, visto sua tentativa de pesquisa empírica (FREIRE, 2009).

A proposta desenvolvida na Bahia, segundo Freire (2009), foi considerada como inovadora devido a toda estrutura pensada e elaborada para o ensino de Geometria através do que propunha o MMM, com a produção de apostila, material didático e curso preparatório para os professores. Catunda e Dantas (1979, p. 5) ao se referirem a experiência com o ensino de geometria realizada por eles, afirmaram: “o trabalho que nós fizemos para o ensino de geometria foi baseado nas concepções de Felix Klein que classificava as geometrias segundo os grupos de transformações admitidas". A esse respeito, Oliveira et al. indicam que Martha Dantas e Omar Catunda, juntamente com suas colaboradoras, tinham suas atividades condizentes com as propostas de Felix Klein se diferenciando do que acorria em outros estados no Brasil (OLIVEIRA *et al.*, 2011).

Acerca da proposta da Seção Científica de Matemática do CECIBA para a geometria, Freire (2009, p. 86) afirma:

> [...] o ensino de geometria, proposto pelo grupo da SCM, se inicia sob a égide do estudo do conjunto das transformações na reta e no plano, isto é, a estrutura de espaço vetorial. Nesse programa curricular a geometria elementar clássica é precedida pela geometria afim – geometria das transformações que conservam o paralelismo.

Os autores da proposta destacaram ainda os espaços geométricos, e apontaram que:

> Segundo Klein, se se admitem as transformações afins - translação, simetria central, homotetia, etc. tem-se a, *geometria afim*, em um espaço chamado, também espaço afim.
> Admitindo as transformações projetivas, que formam um grupo e um espaço projetivo, obtém-se a *geometria projetiva*. (CATUNDA; DANTAS, 1979, p. 6 grifo dos autores).

Catunda e Dantas (1979, p. 6) afirmaram ainda que iniciavam os estudos das transformações pela Translação, e na sequência a Simetria, para eles era uma forma simples de compreensão.

## 1.2 Movimento da Matemática Moderna: o que defendia enquanto Geometria?

Nesta seção vamos discorrer sobre o que estava sendo proposto para o ensino de geometria, as proposições apresentadas e aceitas, como também elementos que permeavam essas recomendações, além de elementos comuns e incomuns em cada uma delas. A respeito dessas propostas Leme da Silva

(2008b, p. 2) afirma:

> No Seminário de Royaumont, duas perspectivas diferentes são evidenciadas. A primeira perspectiva para o ensino de geometria, defendida por Dieudonné, trata-se de um programa de geometria totalmente baseado nos vetores e espaços vetoriais. […]. A segunda perspectiva, proposta pelo professor Botsch, defende uma concepção dinâmica para o ensino da geometria e propõe o estudo das transformações geométricas, baseada na teoria dos grupos.

A respeito da proposta de Dieudonné, Leme da Silva complementa que era ”[…] um ensino inteiramente baseado nos vetores e espaço vetorial com duas dimensões, com sugestões para uma extensão a três dimensões. É nesse sentido que a abordagem de Euclides perde sua importância”. (LEME DA SILVA, 2008a, p. 697).

Essa proposta direcionava para uma algebrização do ensino de geometria. Embora recomendassem uma valorização das ideias intuitivas antecedendo o ensino da Geometria dedutiva, é importante ressalvar que a ideia preponderante foi “[...] ‘realizar o mais depressa possível [na escolaridade] a síntese entre a Álgebra e a Geometria’ (OECE, 1961a, p. 85), para promover a transição das noções geométricas intuitivas do início da escolaridade, para as noções mais avançadas da Geometria abstracta.” (GUIMARÃES, 2007, p. 33). O autor afirma ainda que,

> [...] a proposta de Botsch para o seu ensino, começando com o estudo das transformações geométricas e progredindo “passo a passo para a utilização mais geral dos grupos de transformações” (OECE, 1961a, p. 81) bem como as recomendações para o ensino da Geometria vectorial tão cedo quanto possível na escolaridade, com o objectivo de realizar, também cedo, a síntese entre a Álgebra e a Geometria. (GUIMARÃES, 2007, p. 34).

Tanto a proposta de Dieudonné quanto a de Botsch enfatizavam o tratamento axiomático, com indicação do uso de objetos concretos e materiais manipuláveis; este foi um dos pontos de discordância entre membros do movimento, tendo em vista o uso excessivo de alguns desses recursos.

(GUIMARÃES, 2007). Guimarães, com base no relatório do Seminário de Royaumont, afirma:

> Podemos pois dizer, em jeito de síntese, sobre as orientações e propostas incidindo sobre o conteúdo e organização curriculares emanadas de Royaumont que a valorização da Álgebra penetra também a Geometria. A Geometria das transformações – substituindo a Geometria dos triângulos – e a Geometria vectorial em todo o seu desenvolvimento, correspondem a uma algebrização da Geometria. Isto responde, como é sublinhado nas últimas conclusões do seminário, à necessidade de que "esses assuntos sejam ensinados no seu encadeamento lógico, mais profundo e com mais rigor (...) [e] exige igualmente um ensino tão precoce quanto possível das relações que unem a Geometria à Álgebra - particularmente a Álgebra linear e vectorial" (OECE, 1961a, p. 128-129). (GUIMARÃES, 2007, p. 36-37)

Quanto à geometria é enfatizado ainda que "o estudo da geometria, via transformações geométricas, é uma abordagem que possibilita o tratamento da geometria pelas estruturas algébricas, consideradas pelo MMM como elemento unificador da Matemática". (DUARTE; LEME DA SILVA, 2006, p. 90). O ensino da geometria pelo grupo das transformações[23], segundo Fehr[24] (1961, p. 7-8), foi baseado em Felix Klein.

Vale salientar, como fizemos anteriormente, que Klein esteve presente apenas no movimento de reforma ocorrido no início do século XX. No entanto, no segundo movimento, em meados do mesmo século, a proposta para a geometria por ele elaborada, é retomada nas discussões.

Além da nova proposta para a geometria em termos de conteúdos e abordagem desses conteúdos, se fez presente no ideário do MMM também

[23] Discutiremos mais detalhadamente acerca do ensino da geometria por meio das transformações geométricas na próxima seção.

[24] "Dr. Howard F. Fehr, professor emérito de educação matemática no Teachers College da Columbia University e um dos fundadores da nova matemática na década de 1960 [...]. Como o autor principal em 1961 de um relatório de 246 páginas intitulado 'New Thinking in School Mathematics' [Novo Pensamento em Matemática Escolar], o Dr. Fehr ajudou a introduzir nas salas de aula americanas um conceito de estudo e ensino que se afastou radicalmente dos métodos tradicionais. [...]. O Dr. Fehr tornou-se consultor da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura e da Organização para o Desenvolvimento Econômico Europeu, que originou o relatório 'New Thinking in School Mathematics'". (THE NEW YORK TIMES, 1982, p. 19, tradução nossa).

recomendações metodológicas, como por exemplo, o trabalho experimental, que segundo Botsch "[...] este se deve iniciar com o estudo de objectos concretos e trabalhos manipulativos como a dobragem, o corte e a colagem (OECE, 1961a)" (apud GUIMARÃES, 2007, p. 39). Essa orientação está condizente com uma das recomendações apresentadas "[...] nas conclusões gerais do seminário: 'o ensino da Geometria dedutiva nas escolas secundárias deve ser baseado numa experiência prévia satisfatória da Geometria intuitiva ou física' (p. 129)" (apud GUIMARÃES, 2007, p. 41). Interpretamos que essa proposta pode ter sido fundamentada nas ideias de Piaget, pois era considerado que precisava ser explorado no aluno as potencialidades cognitivas, essa interpretação pode ser constatada na utilização de materiais industrializados e diversificados nas salas de aulas, tais como as dobraduras, corte e colagem, bem como respeitando o desenvolvimento cognitivo dos alunos ao iniciar com o concreto e posteriormente chegar ao abstrato. Nesse sentido, de acordo com Pires (2000, p. 24), "A Matemática Moderna aparecia, desse modo, como filha de Bourbaki e de Piaget. [...] de Piaget, os reformadores retinham as diretrizes de uma pedagogia ativa e as discussões sobre estruturas de pensamento".

O ensino clássico da geometria não foi totalmente modificado com o advento do MMM, visto que alguns grupos como o SMSG, que tinha como influência o grupo Bourbaki, manteve em seus materiais a geometria de Euclides apresentada com nova roupagem. (OLIVEIRA *et al.*, 2011).

Fehr (1961), em uma palestra na primeira Conferência Interamericana de Educação Matemática, relacionou a abordagem da geometria pelo SMSG com os estudos de Birkhoff, que defendia a permanência da Geometria de Euclides[25], efetuando ajustes nos axiomas. Ainda segundo Fehr (1961, p. 42), o

[25] Nesta dissertação estamos respeitando a seguinte diferenciação: "A expressão Geometria de Euclides é usada com o significado de Geometria baseada nos axiomas de Euclides, para seguir a distinção que os autores do programa de Dubrovnik fazem entre essa expressão e a expressão Geometria euclidiana que reservam para designar o estudo do espaço euclidiano que não é abandonado no programa, seguindo, no entanto outra abordagem." (OECE, 1961b apud GUIMARÃES, 2007, p. 32).

professor estadunidense Edwin Moise[26] não só foi influenciado por Birkhoff como também modificou seus axiomas e utilizou "[…] na preparação de textos experimentais que se estão usando em muitos colégios dos Estados Unidos"; os textos experimentais aos quais se refere são os livros *School Mathematics Study Group "Geometry", vol. I e II, da Yale University Press, em 1961.*

## 1.2.1 Geometria das Transformações

Nos seminários internacionais em meados do século XX, de acordo com Catunda e Dantas (1979), as discussões e defesas referentes às Transformações geométricas no ensino se acentuaram, mostra disso são as colocações feitas por Paul C. Rosenbloom (apud CATUNDA; DANTAS, 1979, p. 6), no 1º *International Congress on Mathematical Education* (ICME), em Lyon (1969), ao afirmar que:

> O mais simples sistema de postulados para o espaço euclidiano -a partir do qual define-se a geometria euclidiana- é sem dúvida, a sua caracterização como um espaço vetorial munido de uma métrica; além da simplicidade mencionada, esta definição conduz a uma integração natural com a álgebra.

[26] De acordo com a biografia de Edwin Evariste Moise (1918-1998), publicada no site do ICMI, em relação a sua participação no SMSG consta que "[...] era um membro da equipe de redação de geometria quando o School Mathematics Study Group, com uma bolsa da U.S. National Science Foundation, começou seu trabalho no verão de 1958, na Universidade de Yale. A equipe produziu um esboço do curso e algumas páginas de amostra para um livro de geometria do 10º ano. Moise tirou uma licença da Universidade de Michigan durante o semestre da primavera de 1959 para escrever o primeiro rascunho do livro (WOOTEN, 1965, p. 55). No verão de 1959, as equipes de redação do SMSG se reuniram na Universidade do Colorado para completar um conjunto de livros didáticos para teste nas escolas secundárias e se reuniram durante o verão de 1960 na Universidade de Stanford para revisar os livros à luz do teste." Na sequência é sintetizada a geometria abordada nos livros: "Sob a influência de Moise, o livro SMSG Geometry havia substituído os postulados de Euclides por postulados métricos para aproveitar o conhecimento dos alunos sobre o sistema de números reais e o tratamento algébrico da proporcionalidade, uma ação muito apoiada por matemáticos como Saunders Mac Lane (1959), mas criticada por outros como Alexander Wittenberg (1963) e Morris Kline (1973)". Disponível em: https://www.icmihistory.unito.it/portrait/moise.php. Acesso em: 21 mar. 2022.

Bruce E. Merseve (apud CATUNDA; DANTAS, 1979, p. 6-7), no 2º ICME (1972) em Exeter, Inglaterra, ao falar sobre:

> A amplamente publicada declaração "abaixo Euclides" deve ser aceita não como um sinônimo de "abaixo a geometria" mas, sobretudo, como uma forte indicação de que a geometria deve ser ensinada como uma matéria viva e em crescimento, em vez de uma coleção de regras velhas.

Michael F. Atiyah no 3º Congresso realizado na Alemanha em 1976, ao defender que "o melhor aspecto da Matemática moderna é a ênfase dada a ideias básicas, tais como simetria, continuidade e linearidade, que têm aplicações muito variadas. Isto deveria se refletir no ensino, sempre que possível". (ATIYAH apud CATUNDA; DANTAS, 1979, p. 7).

Qual era essa geometria discutida e defendida nos congressos? A esse respeito tratamos nesta seção.

A Isometria, que faz parte das Transformações Geométricas, é um dos tópicos almejados, juntamente com sua composição: Translação, Reflexão e Rotação, que constitui uma interação entre os conceitos algébricos e geométricos. (RODRIGUES, 2012).

De acordo com Silva e Pietropaolo (2014), há dois grupos de isometrias, denominados de discretos e contínuos, sendo o primeiro formado por isometria de cristais[27] e o segundo, por isometrias que se modificam[28]. Klein define grupos de transformações do seguinte modo,

> A composição de certos números de transformações do espaço é sempre equivalente a uma de suas transformações. Agora, se um determinado conjunto de transformações tem a

[27] Relacionado à "[...] teoria matemática dos cristais. Associado aos cristais, com uma estrutura atómica espacialmente ordenada e regular, está o conceito de reticulado (ou malha; lattice em inglês) [...] No plano, um reticulado aparece como o conjunto dos vértices de uma malha de paralelogramos, daí o nome." (RÊGO, 2003, p. 68).

[28] A respeito dessas modificações, os autores complementam: "[...] passando de um conjunto de Transformações Geométricas aplicado a pontos ou figuras no plano para outro conjunto de transformações quando se modificavam os coeficientes das equações que caracterizavam a isometria. Dessa maneira, uma rotação aplicada a um ponto do plano poderia facilmente ser transformada em reflexão ou translação aplicada no mesmo ponto, modificando os coeficientes da equação de rotação." (SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 305).

> propriedade de, a partir da composição de alguns de seus elementos, produzir outras transformações nele contidas, então esse conjunto será denominado grupo de transformações. (KLEIN, 1872, p. 5 apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 306).

Klein acrescenta ainda que:

> As Transformações Geométricas não são nada mais do que uma generalização da simples noção de função, da qual em nossas concepções reformadoras nos empenhamos em fazer dela o ponto central da instrução Matemática (KLEIN, 1909, p. 139-140 apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 308).

Nesse sentido o autor propõe o estudo da geometria por meio analítico utilizando sistema de coordenadas e vetores, ou seja, "as funções aplicadas aos pontos desse sistema são concebidas como transformações que geram os movimentos dos pontos no plano segundo uma direção vetorial." (KLEIN, 1909 apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 308).

Essa estrutura segue para a translação, no transporte de uma figura congruente a inicial, isto é, figuras em que se preservam "as distâncias entre os elementos" que as compõem e "as medidas dos seus ângulos". A determinação de "uma translação a um ponto (x, y) do plano é utilizada a função $P(x, y) = (x + a, y + b)$ representando o movimento dos pontos na direção do vetor (a, b)". (KLEIN, 1909 apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 308).

Na simetria axial em relação ao eixo horizontal também ocorre o transporte de uma figura congruente a inicial nas quais ficam invariantes as distâncias "entre os seus pontos, seus segmentos e as medidas dos seus ângulos" e é "definida pela função $P(x,y) = (x,-y)$." (KLEIN, 1909 apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 308). E a simetria de rotação, definida "pela função $P(x,y) = (x\cos(a) - y\mathrm{sen}(a), x\mathrm{sen}(a) + y\cos(a))$", é também usada "no estudo da congruência de duas representações geométricas apresentando a mesma invariância dos elementos que as transformações anteriores". (KLEIN, 1909 apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 308).

Para Klein a translação, a simetria axial e a simetria de rotação, e suas variações, compõe um conjunto de isometrias. No que diz respeito à homotetia,

> O autor utiliza a função P(x,y) = (kx, ky) para definir a homotetia como um subgrupo da semelhança e aplica essa transformação a uma figura para transportá-la para figuras semelhantes de diferentes dimensões, invariando as razões entre os segmentos correspondentes e os ângulos das figuras homotéticas em relação a figura original. A homotetia também se caracteriza por manter o paralelismo dos segmentos correspondentes e nela a correspondência dos pontos da figura homotética com os da figura original é estabelecida em função do centro da homotetia. (KLEIN, 1909 apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 308-309).

Quanto à geometria projetiva e geometria fim, também seguem as definições de funções quando abordadas pelas Transformações Geométricas, ou seja, as "transformações afins aplicadas a uma figura conservam o paralelismo dos segmentos, a razão entre os pares de segmentos dispostos na mesma reta, o ponto médio desses segmentos, o baricentro dos triângulos e a razão obtida pelas áreas da figura transformada e da figura original." E no que se refere às transformações projetivas, essas "conservam a posição dos pontos contidos em uma curva, a colinearidade dos pontos das figuras e as suas intersecções". (KLEIN, 1909 apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 309).

Para Klein a Geometria Euclidiana[29], assim como a Geometria afim e a Geometria projetiva, deve ser abordada sobre o viés do conjunto das transformações, e por meio destas "[...] Klein (1909) demonstra que as estruturas que constituem as Geometrias projetiva e afim emergem da Geometria Euclidiana, e que todos os teoremas verificados nessas duas Geometrias o são também na Geometria Euclidiana". (apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 309). Klein objetivava a substituição da abordagem

[29]"Klein define a Geometria Euclidiana como o estudo das propriedades das representações geométricas que são preservadas sob a aplicação das transformações do conjunto semelhança. A Geometria afim e a Geometria projetiva também são definidas relativamente aos invariantes que resultam da aplicação de seus respectivos conjuntos de transformações." (KLEIN, 1909 apud SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 309).

dos axiomas da Geometria de Euclides por outros axiomas que permitissem estudar a Geometria por intermédio do movimento, nesse caso, por meio dos grupos de transformações de cada Geometria.

Em uma palestra intitulada *Reforma de la enseñanza de la geometría* proferida na Primeira Conferência Inter-Americana sobre a Educação das Matemáticas[30] (Bogotá, 1961), Howard Fehr indica que havia diferentes formas de conceber a geometria pelas transformações geométricas. Ao comentar sobre o Programa Erlangen de Félix Klein[31] e a teoria dos grupos de transformações, afirma:

> Ainda que o chamado programa Erlangen de Klein teve o efeito de mostrar a unidade essencial de todos os ramos da geometria desenvolvidos até então, sabemos que hoje ele tem limitações severas, principalmente quando considerado em relação aos espaços métricos, vetoriais e topológicos. (FEHR, 1961, p. 41, tradução nossa).[32]

Nesta mesma palestra mostra como naquele momento se defendia o ensino de geometria:

[30] No site do Comitê Interamericano de Educação Matemática, na parte referente às Conferências, consta que a comissão organizadora internacional da primeira CIAEM (1961) foi presidida por Marshall H. Stone e seu secretário foi Howard F. Fehr. Disponível em: https://ciaem-iacme.org/ciaem-1961-2003/

[31] O Programa de Erlangen é a maneira como a comunidade acadêmica passou a denominar o Programa apresentado por Klein como discurso inaugural ao ser nomeado professor titular da Faculdade de Filosofia da Universidade de Erlangen, em 1872. (TRÓPIA; FURTADO; BACCAR, 2020). A respeito desse Programa, Eves (2011, p. 605) afirma: “A palestra, dirigida a um extenso auditório universitário, expressou a visão pedagógica de Klein da unidade de todo o conhecimento, ideal que uma educação completa não poderia negligenciar em função de estudos particulares. O trabalho escrito, que foi distribuído durante a palestra, destinava-se a seus pares de departamento. Assim, as duas partes da apresentação inicial de Klein revelavam de um lado seu interesse profundo por questões pedagógicas e de outro seu envolvimento sério com a pesquisa matemática. Seu trabalho escrito, baseado em pesquisa desenvolvida por ele próprio e Sophus Lie (1842-1899) em teoria dos grupos, apresentava a notável definição de “geometria” que serviu para codificar essencialmente todas as geometrias existentes à época e apontou o caminho para novas e frutíferas avenidas da pesquisa geométrica”.

[32] “Aun cuando el llamado ‘programa Erlangen’ de Klein tuvo el efecto de mostrar la unidad esencial de todas las ramas de la geometría desarrolladas hasta esa época, sabemos que hoy tiene severas limitaciones, especialmente cuando se le considera en relación con los espacios métricos, vectoriales y topológicos.” (FEHR, 1961, p. 41)

> Hoje começamos com um conjunto básico cujos elementos ou não estão definidos ou são construídos a partir de conjuntos mais fundamentais. Em geometria, nos referimos ao espaço como um "conjunto" e seus elementos como "pontos". Em seguida, introduzimos uma estrutura no conjunto e desenvolvemos as propriedades possíveis sob essa estrutura (ou seja, um espaço vetorial afim). Nesta estrutura e de maneiras muito diferentes podemos introduzir uma estrutura adicional, obtendo assim um novo espaço (por exemplo, ao introduzir uma norma no espaço vetorial afim, obtém-se um espaço vetorial normatizado). Podemos então desenvolver ainda mais a estrutura introduzindo uma métrica (uma função de distância) em nosso espaço normatizado, e, de acordo com a função que define a distância, obteremos diferentes espaços; se a função euclidiana for usada, o espaço vetorial euclidiano será obtido. E, dependendo da descrição de nossos pontos, poderemos obter 1, 2, 3,… n… ou infinitas dimensões em nosso espaço. (FEHR, 1961, p. 45, tradução nossa)[33].

Assim, como mencionamos anteriormente com base em Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 47), a geometria das transformações no MMM foi abordada de duas maneiras, uma delas cuja ênfase estava "nos conceitos de função e de grupo", a outra fundamentada "nos conceitos de espaço vetorial e transformação linear".

As transformações geométricas apresentam características como a preservação da noção de paralelismo, ponto, retas, medidas e proporções. Nas transformações geométricas as "funções que associam a cada ponto do plano outro ponto, também do plano através de certas regras,... Se F é uma figura (portanto um conjunto de pontos) definiremos F´= T(F) como o conjunto dos pontos imagem dos pontos de F (pela transformação T)" (WAGNER, 1993, p. 70 ) e nos conceitos de espaço vetorial, dos quais as figuras respeitam as

[33] "Hoy se parte de un conjunto básico cuyos elementos, o no están definidos o se construyen a partir de conjuntos más fundamentales. En geometría nos referimos al espacio como a un 'conjunto' y a sus elementos como 'puntos'. Introducimos luego una estructura en el conjunto y desarrollamos aquellas propiedades posibles bajo esa estructura (esto es, un espacio vectorial afín). Sobre esta estructura y en formas muy diversas podemos introducir una estructura adicional, obteniendo así un nuevo espacio (por ejemplo, al introducir una norma en el espacio vectorial afín se obtiene un espacio vectorial normado). Podemos entonces desarrollar aún más la estructura introduciendo una métrica (una función de distancia) en nuestro espacio normado, y, de acuerdo con la función que defina la distancia, obtendremos diferentes espacios; si se utiliza la función euclidiana, se obtendrá el espacio vectorial euclidiano. Y, según cuál se ala descripción de nuestros puntos, podremos obtener 1, 2, 3,… n… o infinitas dimensiones en nuestro espacio." (FEHR, 1961, p. 45)

características da construção inicial, mantendo-a inalterada nos aspectos das propriedades.

As Transformações Geométricas apresentadas por Fehr, na Conferência Interamericana, era elemento fundamental para o ensino de geometria, tendo em vista que era difundida mais de uma proposta para esse ensino, no entanto é chegado ao consenso de que a geometria das transformações estava mais forte. (SILVA; PIETROPAOLO, 2014). Para ilustrar a abordagem das transformações vejamos a seguir o espaço euclidiano, fundamentado na proposta de Klein, com as representações de coordenadas x e y.

**Quadro 1 -** Regras e representações das Transformações Geométricas

| Transformação | Regra das transformações de coordenadas | Representação Matricial |
|---|---|---|
| 1. Idêntica | (x, y) → (x, y) | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 2. Simetria em relação ao eixo y | (x, y) → (-x, y) | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 3. Simetria em relação ao eixo x | (x, y) → (x, -y) | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 4. Simetria em relação à reta y = x | (x, y) → (y, x) | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 5. Rotação de 90º no sentido anti-horário, centralizado na origem. | (x, y) → (-y, x) | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 6. Uma translação de 3 unidades sobre o eixo x e 2 unidades sobre o eixo y. | (x, y) → (x+3, y+2) | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 7. Uma simetria em relação ao eixo x = 3 seguida por uma rotação de 270º no sentido anti-horário, centralizado na origem. | (x, y) → (y, x-6) | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ |
| 8. Uma rotação de θ graus seguida de uma translação de $a$ unidades sobre o eixo x e de $b$ unidades sobre o eixo y. | (x, y) → (x cosθ- y senθ +$a$, x senθ + y cosθ +$b$) | $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\ a \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\ b \end{pmatrix}$ |

Fonte: Fehr, 1971[34], p. 55-56. (tradução nossa).[35]

Note que a geometria analítica, as matrizes e os vetores são usados em uma abordagem geométrica, que possibilita uma movimentação nas elaborações geométricas.

### 1.3 Movimento da Matemática Moderna: a Geometria em termos de ensino

Nesta seção abordamos o ensino de geometria por meio da concepção de autores que estiveram presentes nos Seminários – Royaumont e I CIAEM[36]

---

[34] Este livro foi publicado pelo Programa Regional de Desarrollo Cientifico y Tecnologico do Departamento de Assuntos Cientificos da Oganizacion de los Estados Americanos, com a intenção de chamar a atenção dos educadores para as importantes inovações feitas entre 1960 e 1970.

[35]

| Transformación | Regla de transformación de Coordenadas | Representación Matricial |
|---|---|---|
| 1. Idéntica | $(x, y) \rightarrow (x, y)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 2. Simetría respecto del eje $y$ | $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 3. Simetría respecto del eje $x$ | $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 4. Simetría respecto de la recta $y = x$ | $(x, y) \rightarrow (y, x)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 5. Rotación de 90º de sentido contrario, al de las agujas del reloj, con centro en el origen. | $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 6. Una translación de 3 unidades sobre el eje $x$ y 2 unidades sobre el eje $y$. | $(x, y) \rightarrow (x+3, y+2)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 7. Una simetría respecto al eje $x = 3$ seguida de una rotación de 270º en sentido contrario al de las agujas del reloj, con centro en el origen. | $(x, y) \rightarrow (y, x - 6)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ |
| 8. Una rotación de θ grados seguida de una translación de $a$ unidades sobre el eje $x$ y de $b$ unidades sobre el eje $y$. | $(x, y) \rightarrow (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta + a, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta + b)$ | $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & a \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & b \end{pmatrix}$ |

(FEHR, 1971, p. 55-56).

[36] "Se Royaumont é um marco nas discussões do MMM na Europa, podemos considerar a Primeira Conferência Inter-Americana sobre Educação Matemática (CIAEM), realizada na Colômbia, em 1961, como o marco correspondente na América." (LEME DA SILVA, 2008b, p. 2).

- em que se discutiram a reforma curricular e metodológica para o ensino de matemática, bem como pesquisas históricas que contemplam essa temática.

Em sua explanação Fehr (1961) aponta que por meio das discussões em Dubrovnik almejaram propor o ensino de geometria para crianças a partir dos 11 anos de idade. A princípio, de modo bastante intuitivo, com uso de dobraduras, recortes, colagens, desenhos e medições, por exemplo; a partir dos 12 até os 15 anos era proposta a abordagem da geometria plana e do espaço, com os elementos de Euclides, sendo que entre os 14 e 15 anos há a inserção das estruturas algébricas e nos 15 e 16 anos o aluno deveria ser capaz de explorar geometria e álgebra concomitante. (FEHR, 1961).

Essa concepção, sobre a abordagem da geometria, também é percebida por Guimarães (2007) em sua pesquisa histórica sobre o MMM com base nos relatórios do Seminário de Royaumont e de Dubrovnik, em que é proposta a iniciação dos estudos com as transformações geométricas migrando gradativamente para o grupo das transformações, destacando a necessidade dessa iniciação o mais breve possível. Exemplo dessa abordagem pode ser visto como as apontadas pelo próprio Fehr (1961).

> 1. Introdução das classes de equivalência de vetores livres; a soma de dois vetores (como uma operação diferente da dos números); o grupo de vetores sob a adição; teoremas e exercícios.
> 2. O produto de um vetor por um número real ou multiplicação escalar e suas propriedades. Estas propriedades permitirão a prova de todos os teoremas da geometria plana afim. As mais importantes são:
> (a) Dado um ponto P e um vetor $\vec{V}$, uma reta é um conjunto dos pontos M para o qual $\overrightarrow{PM} = r\,\vec{V}$.
> (b) $\vec{V} = k\vec{V}'$ implica que $\vec{V}$ e $\vec{V}'$ se encontram sobre retas paralelas e inversamente.
> (c) Se $k\vec{V} = h\vec{V}$ y $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ se encontram sobre retas paralelas, então $k = h = 0$.
> (d) Se $a\vec{V} + b\vec{W} = c\vec{V} + d\vec{W}$, então $a = c$ e $b = d$.
> 3. Introdução das coordenadas e dos vetores centrados. Base do sistema de coordenadas: a projeção paralela e os componentes de um vetor. Podemos então estabelecer a equação de uma reta no plano afim e estudar suas propriedades.

> 4. Introdução da noção de perpendicularidade e de produto interno. Defina $\vec{a} \perp \vec{b}$ se $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$. Podemos então desenvolver o teorema de Pitágoras, a lei dos cossenos e toda a geometria euclidiana plana. Além disso, podemos ligar a álgebra com a geometria, fornecendo uma solução vetorial para um par de equações lineares em duas incógnitas. (FEHR, 1961, p. 46-47, tradução nossa).[37]

Entretanto, as orientações não se limitam apenas a este exemplo, tampouco às faixas etárias anteriormente citadas, se estendendo para as idades de 17 e 18 anos em que o ensino de geometria deveria transcorrer em torno do espaço euclidiano com uma ou mais dimensões, e no nível superior, abordagem da álgebra linear e dos espaços vetoriais. (FEHR, 1961).

De acordo com Guimarães (2007), baseado nos relatórios do Seminário de Royaumont e de Dubrovnik, a divisão em faixa etária estava atrelada a dois ciclos, o primeiro composto por alunos entre 11 e 15 anos de idade, como uma forma de adaptação à proposta, e o segundo, para alunos de 15 a 18 anos visando à continuidade aos estudos. Quanto à geometria nos dois ciclos de ensino, Pires (2000, p. 28) em sua pesquisa sobre o MMM afirma que "a geometria do primeiro ciclo diferia radicalmente dos programas tradicionais. Propunha-se a introdução sistêmica das transformações geométricas", e em relação à geometria do segundo ciclo, "[...] aprofundava os grupos de transformações, desenvolvia a geometria afim e a axiomática, antes

---

[37] "1. Introdución de las clases de equivalencia de vectores libres; la suma de dos vectores (como una operación diferente de la de los números); el grupo de los vectores bajo la adición; teoremas y ejercicios. 2. El producto de un vector por un número real o multiplicación escalar y sus propiedades. Estas propiedades permitirán la prueba de todos los teoremas de la geometría plana afín. Las más importantes son: (a) Dado un punto P y un vector $\vec{V}$, una recta es el conjunto de los puntos M para el cual $\overrightarrow{PM} = r\,\vec{V}$. (b) $\vec{V} = k\vec{V}'$ implica que $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ se hallan sobre rectas paralelas e inversamente. (c) Si $k\vec{V} = h\vec{V}$ y $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ se hallan sobre rectas paralelas, entonces k = h = 0. (d) Si $a\vec{V} + b\vec{W} = c\vec{V} + d\vec{W}$, entonces a = c y b = d. 3. Introdución de las coordenadas y los vectores centrados. Base del sistema de coordenadas: la proyección paralela y los componentes de un vector. Podremos entonces establecer la ecuación de una recta en el plano afín y estudiar sus propiedades. 4. Introdución de la noción de perpendicularidad y de producto interior. Definir $\vec{a} \perp \vec{b}$ si $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$. Podremos desarrollar entonces el teorema de Pitagoras, la ley de los cosenos y toda la geometría euclidiana plana. Además podremos ligar el álgebra con la geometría dando una solución vectorial a un par de ecuaciones lineales en dos incógnitas". (FEHR, 1961, p. 46-47).

consagrada à geometria de Euclides, transformava-se no estudo axiomático dos espaços vetorial, afim e métrico euclidiano". (PIRES, 2000, p. 28).

O MMM se expandiu para vários países e anteriormente vimos em linhas gerais o ensino de geometria na esfera internacional, passamos agora ao contexto nacional em que verificamos como o ensino de geometria estava sendo abordado no Brasil, buscando compreender também o motivo da geometria, de uma forma geral, não ter se destacado perante o novo currículo no Brasil.

Nesse sentido, Duarte e Leme da Silva (2006) ponderam: o MMM tratava as transformações geométricas como estruturas que possibilitavam o ensino de Geometria, se junta a isso a existência de dificuldades durante as abordagens tradicionais, e, ainda, o fato de não ter sido muito discutida, em comparação as demais áreas, nos cursos ofertados pelo GEEM que tiveram grande influência na divulgação e direcionamento do movimento no Brasil, assim como em outros Grupos de Estudos vigentes no país que tinham em comum a proposta de discussão da reforma do ensino de matemática.

De acordo com a pesquisa de Lima (2006), podemos constatar que os cursos ofertados pelo GEEM tinham maior concentração na Álgebra e Aritmética e em menor número os destinados à Geometria. Prova disso são os cursos ofertados no mês de Janeiro dos anos de 1963 a 1968 ter três disciplinas de Geometria das vinte e uma disciplinas ofertadas. (LIMA, 2006).

Durante o período de reforma curricular – MMM –, algumas leis e normas foram aprovadas, dentre as quais podemos destacar a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) - Lei n.º 4024 de 20 de dezembro de 1961, em que houve a descentralização curricular permitindo a criação dos Sistemas Estaduais de Ensino, e com isso os Estados tiveram a oportunidade de regular e promover seus currículos.

Com a liderança de Osvaldo Sangiorgi o GEEM, segundo Rios (2010), apresenta uma proposta que tinha como intuito a integração do ensino de Aritmética, Álgebra e Geometria por meio da inserção da linguagem dos conjuntos e das estruturas algébricas, sob enfoque das transformações, do vetor e espaço vetorial. Nesse sentido, conjecturamos que Sangiorgi pode ter se apropriado do que foi proposto no Seminário de Royaumont:

> […] a valorização da Álgebra penetra também a Geometria. A Geometria das transformações – substituindo a Geometria dos triângulos – e a Geometria vectorial em todo o seu desenvolvimento, corresponderia a uma algebrização da Geometria. (GUIMARÃES, 2007, p. 36-37).

Esse tratamento algébrico ao ensino de geometria, de acordo com Pavanello (1989), comprometeu sua abordagem mediante ao preparo que tinham os professores de matemática.

> A orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela grande maioria dos professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra […] e as noções de conjunto. (PAVANELLO, 1989, p. 144).

Isso denota o quanto os professores também não se sentiam preparados para o ensino das novas propostas, e ainda, pode se considerar que alguns deles não concordavam com a proposta de reforma e outros tiveram formação sobre outro viés, com perspectiva distinta daquela proposta pelo MMM. O ensino de geometria adotou metodologias diferenciadas, possivelmente uma pouca presença durante as aulas, passando a ser compreendida por alguns autores como abandono.

Um dos primeiros trabalhos a pesquisar acerca da geometria, em que discute o período do MMM, foi da professora Regina Pavanello, que em sua dissertação aponta o possível esquecimento desse ensino, e que até hoje é tido como referência para tantos outros trabalhos.

Pavanello (1993) e Soares (2001) consideram a geometria relegada a segundo plano nos currículos escolares. Matos e Leme da Silva acrescentam que não foram atendidas as inovações para a geometria e que os estudos "por meio das transformações lineares e espaços vetoriais não tiveram lugar na prática". (MATOS; LEME DA SILVA, 2011, p. 91).

Ainda nesse sentido, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 48) afirmam que "[…] o novo enfoque proposto para o ensino da Geometria não conseguiu impor-se na prática escolar. O que acabou acontecendo foi a introdução da linguagem dos conjuntos na Geometria, de conceitos topológicos elementares […]", Assim, interpretamos que restringiu-se a uma base para o estudo dos espaços vetoriais.

Também a este respeito, Castrucci (1988) rememorou:

> […] se nós estamos fazendo um movimento em que tudo tinha que nascer da teoria dos conjuntos e da ideia de estrutura, que era um princípio geral [...] a única coisa que a gente podia dizer em geometria é que o plano é um conjunto de pontos, o espaço é um conjunto de pontos, a reta é um sub-conjunto do plano, mas depois como é que eu vou dizer, axiomas, teoremas, tudo o mais? [...] Então o processo foi sair uma geometria também por meio de uma estrutura algébrica. Daí fizeram o estudo de geometria já no ginásio por meio de espaços vetoriais, que é uma estrutura algébrica. [...] E outro caminho foi pelos grupos de transformações... .

A geometria, segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) apresentou-se nos currículos escolares de forma pouco significativa, visto que passou a ser considerada com pequenas potencialidades, sendo julgada irrelevante para o desempenho social e cognitivo do aluno e essas ideias foram reforçadas ainda mais pelo que propunha Piaget. Nas palavras desses autores:

> Portanto, com o movimento modernista, os conteúdos geométricos deixaram de ser vistos como potencialmente ricos quer pelo seu valor cultural, quer pela sua capacidade intrínseca de possibilitar a percepção, organização e sistematização da experiência espacial dos estudantes – o que significaria, em qualquer desses dois casos, atribuir à Geometria uma especificidade pedagógica inalienável – e passam a desempenhar papel de meios, úteis mas não indispensáveis para a construção e desenvolvimento das estruturas mentais básicas da inteligência, uma vez que se acreditava – e Piaget havia dado suporte para essa crença – serem essas estruturas isomorfas às estruturas básicas da nova Matemática. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 48-49)

Por fim, importa dizer que Pavanello recebeu também críticas por considerar em suas análises apenas o estado de São Paulo, tendo em vista que outros estados tiveram propostas distintas que destacaram a presença da geometria, produzindo resultados como os apresentados por Ferreira (2006), discutindo as produções do Grupo NEDEM; Freire (2009), que aponta várias produções nesse sentido do grupo de professores baianos, que compuseram a Seção Científica de Matemática do CECIBA; Leme da Silva (2008), Camargo (2009), Britto (2008), entre outros autores que apontam evidência deste ensino.

A seguir analisamos como as pesquisas em nível de pós-graduação *stricto sensu* no Brasil constataram o ensino de geometria influenciado pelo MMM nos livros didáticos analisados.

# CAPÍTULO 2
# REFORMULAÇÃO DO ENSINO DA MATEMÁTICA ESCOLAR NO BRASIL

Neste capítulo apresentamos um levantamento dos estudos já realizados envolvendo análise da geometria nos livros didáticos sob influência do MMM. Discorremos também sobre a perda do protagonismo desse movimento diante das acentuadas críticas.

## 2.1 O que dizem as pesquisas sobre o ensino de geometria nos livros didáticos durante o MMM?

Há vários estudos que apresentam como temática a análise da geometria nos livros didáticos durante o MMM, nesse sentido consideramos importante para a nossa investigação buscarmos conhecer o que as pesquisas históricas apresentam sobre essa temática. Ter este conhecimento é fundamental para interpretarmos as mudanças e permanências no que tange ao ensino de geometria nos livros didáticos no recorte temporal de nossa pesquisa.

Neste tópico foi elaborado um levantamento referente às produções de teses e dissertações construídas no Brasil com enfoque na abordagem do ensino de geometria influenciado pelo MMM, presente nos livros didáticos do curso ginasial/5ª a 8ª série[38]. Como mencionamos na introdução, somente foram analisadas dissertações, tendo em vista que não foi localizada nenhuma Tese que atendesse aos critérios estipulados.

## 2.2 Dinâmica da produção

---

[38] Com a aprovação da Lei n.º 5.692, de 11 de agosto de 1971, que estabeleceu o ensino de 1º e 2º graus, o segundo segmento do 1º grau (5ª a 8ª séries) era o equivalente ao ginasial da Lei n.º 4.024 de 20 de dezembro de 1961.

As produções são decorrentes das seguintes universidades: três da Pontifícia Universidade Católica (PUC) – sendo duas de São Paulo e uma do Paraná –, duas da Universidade Bandeirantes (UNIBAN) e uma da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

Os tipos de programa a que esses trabalhos estão vinculados, são: Mestrado Profissional em Educação Matemática, Mestrado em Educação Matemática, Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e Mestrado em Educação; presentes nos estados de São Paulo, Paraná e Santa Catarina. (Ver Quadro 2 a seguir).

Quadro 2 – Dissertações que têm como objeto de pesquisa análise do ensino de geometria nos livros didáticos

| **Ref.** | **Autor** | **IES** | **Título** | **Tipo de Programa** | **Ano** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Rios, Maria Silvia Braga | UNIBAN | A proposta de ensino da geometria nos livros do GRUEMA | Educação Matemática | 2010 |
| 2. | Brigo, Jussara | UFSC | As Figuras Geométricas no Ensino de Matemática: uma Análise Histórica nos Livros Didáticos | Educação Cientifica e Tecnológica | 2010 |
| 3. | Camargo, Kátia Cristina de | UNIBAN | O Ensino da Geometria nas Coleções Didáticas em Tempos do Movimento da Matemática Moderna na Capital da Bahia | Educação Matemática | 2009 |
| 4. | Brito, Luciana Patrocinio de | PUC-SP | Scipione Di Pierro Neto e sua proposta para o ensino da geometria na Coleção Curso Colegial Moderno | Educação Matemática | 2008 |
| 5. | Ferreira, Rogerio Carlos | PUC-SP | Orientações curriculares para o ensino de geometria: do período da Matemática Moderna ao momento atual | Educação Matemática | 2008 |
| 6. | Ferreira, Ana Celia da Costa | PUC-PR | Propostas Pedagógicas de Geometria no Movimento Paranaense de Matemática Moderna | Educação | 2006 |

Fonte: Elaborado pela autora

Assim, podemos perceber que os estudos se realizaram em apenas duas regiões do país, com uma concentração significativa na região sudeste, e nenhuma pesquisa nas regiões norte, nordeste e centro-oeste. Esta é uma constatação presente em outras pesquisas, como o estudo de Teixeira e Megid Neto (2012, p. 276), em que eles afirmam, "[…] a produção é distribuída de maneira muito desigual, concentrando-se fortemente no eixo Sul-Sudeste [...] principalmente desta última". Esses autores apontam, como possível causa dessa centralização, a maior existência de programas de pós-graduação nessa região.

### 2.2.1 Aspectos metodológicos das pesquisas analisadas

As dissertações, em sua maioria, utilizou referencial teórico-metodológico amparado, principalmente, em Michel de Certeau (1990; 2007) como apoio para a pesquisa histórica e as noções de estratégias e táticas; André Chervel (1990) nas orientações sobre história das disciplinas escolares; Dominique Julia (2001) no que diz respeito ao conceito de cultura escolar; Alain Choppin (2004) amparando as abordagens sobre os livros didáticos como fontes e objetos para a história das disciplinas escolares; Roger Chartier (1990; 1991) utilizado para fundamentar uma história cultural e os conceitos de representação e apropriação; e Wagner Rodrigues Valente para embasar uma história da educação matemática.

### 2.2.2 A geometria nos livros analisados

O MMM no Brasil foi alvo de discussão tanto no auge de seus acontecimentos quanto durante a perda do protagonismo, mostra disso são as discussões desenvolvidas nas dissertações que o têm como tema, dissecando sobre os seus diferentes vieses: ensino, método, currículo, grupos de estudos, bem como o livro didático e o ensino de geometria. A seguir serão apresentadas dissertações que trazem as características acima citadas, ou seja, analisam o ensino de geometria nos livros didáticos desenvolvido durante esse movimento.

Maria Silvia Braga Rios (2010) escolhe como fonte da pesquisa uma coleção do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA) em sua dissertação que tem como título *A proposta de ensino da Geometria nos livros do GRUEMA*. Ela analisa a coleção *Curso Moderno de Matemática para o ensino de primeiro grau* (coleção de 1977), apresentando como objetivo de pesquisa discutir e analisar a proposta de ensino de geometria na coleção do grupo já citado. Assim, é possível constatar que no final da década de 1970 havia autores que ao elaborarem suas produções continuavam inserindo apropriações do ideário modernizador, ou seja, mesmo com a intensificação das críticas alguns autores permaneceram desenvolvendo trabalhos nesta perspectiva.

Quanto à coleção analisada, Maria Rios (2010) destaca que o ensino apresentado tem como base a geometria de Euclides, juntamente com as medidas de segmentos e de ângulos, e que as transformações geométricas são utilizadas com a finalidade de oportunizar uma abordagem "[...] mais geral aos conceitos de congruência e de semelhança." (RIOS, 2010, p. 7). Em relação à metodologia, foi identificada que se valorizava a experimentação antes da dedução. A proposta da reforma é percebida na coleção, também, no que concerne à abordagem topológica do ensino de geometria. Rios (2010, p. 112) afirma que,

> O estudo da geometria intuitiva ou experimental faz uso da manipulação de objetos, elabora esquemas ou gráficos a fim de criar condições materiais circunstanciais para que o fato a ser estudado se realize e permita tirar conclusões. Nesse sentido, a geometria intuitiva é apresentada na coleção GRUEMA desde o livro da 2.ª série, com as noções topológicas e os conceitos elementares da Geometria.

Nesse sentido, a autora destaca que a coleção do Grupo em estudo mantém de forma inovadora a geometria experimental direcionada ao desenvolvimento do raciocínio lógico e a geometria dedutiva, isso em comparação a outros manuais da época. Ela afirma que as autoras dessa coleção "se apropriaram das propostas internacionais para o ensino da geometria de Lucienne Felix[39], George Papy[40] e Jean Piaget[41]". (RIOS, 2010, p. 7) Assim, podemos identificar a influência de outras propostas para o ensino de geometria, para além da proposta de Dieudonné; embora tanto Lucienne Felix (BÚRIGO, 2012) como George Papy (COSTA, 2014) tenham sido influenciados pelos estudos do grupo Bourbaki.

É destacada a presença da reforma curricular do MMM na coleção, tendo em vista que a dissertação analisa livros do grupo também anterior à reforma.

> Reputamos, ainda, ser indício do caráter inovador da proposta para o ensino da geometria dos livros do GRUEMA a inclusão do estudo das transformações geométricas no livro da 5.ª série de 1977 e dos conceitos da geometria plana e das noções de topologia no livro da 5.ª série de 1972. (RIOS, 2010, p. 101-102).

No entanto, Rios destaca que houve mudanças significativas ao considerar que "[…] a proposta metodológica tem as apropriações feitas pelas autoras dos estudos do psicólogo Jean Piaget, bem como das propostas de ensino elaboradas por Zoltan Dienes, Lucienne Felix e George Papy […]" (RIOS, 2010, p. 155) e destaca as mudanças relacionadas à inserção de figuras

---

[39] Rios (2010) fundamentada no artigo apresentado pela professora Eleonora Lobo Ribeiro no 4.º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática (Belém, 1962), indica que a proposta de Felix para o ensino de geometria era composta por três fases: inicia-se com uma fase experimental, na qual se oportuniza o ensino pré-lógico; em seguida, a segunda fase, a "iniciação lógica", proporcionaria uma transição entre a geometria experimental e a geometria lógica; por fim, a terceira fase, é a dedutiva, na qual ocorre a sistematização do conteúdo por parte do professor e a utilização do método lógico pelos alunos por meio das demonstrações.

[40] Proposta de ensino elaborada na Bélgica, em 1958, por meio do Programa de Lenger-Servais, abordava as noções de conjuntos, relações e topologia. Nos primeiros três anos do programa sua adoção era facultativa e posterior a esse período tornou-se obrigatória no país, sendo considerado como moderno. Papy destaca a importância do plano euclidiano, das demonstrações e do método axiomático para essa proposta. (RIOS, 2010). A autora indica que para Papy "[...] o método axiomático útil é o da ciência física, isto é, deve-se 'afirmar claramente aquilo que é aceito; não dizer tudo de uma só vez; expor determinadas coisas aceitas, pouco a pouco'" (PAPY, 1966 apud RIOS, 2010, p. 43).

[41] As recomendações de Piaget para o ensino da geometria consistem em "[…] começar o estudo da geometria pelas noções topológicas, depois as noções projetivas, as noções afins e as noções euclidianas." (RIOS, 2010, p. 74).

e de histórias em quadrinhos envolvendo a matemática, como forma de incentivo, animação ou possíveis esclarecimentos do assunto. Maria Rios (2010, p. 154) comenta que,

> Nossa análise dos livros constatou que a metodologia adotada para o ensino da geometria consiste na realização de atividades, sem texto introdutório ou explicativo, estruturada em atividades que partem de situações conhecidas ou concretas. Considerando essas atividades, espera-se que os alunos cheguem às conclusões e generalizações, que são apresentadas em quadros em destaque. Em seguida, há atividades que visam ao aprofundamento das conclusões ou à fixação de técnicas.

As ideias intuitivas e experimentais, como também dedutivas podem ser percebidas nos livros do GRUEMA de acordo com essa análise feita por Maria Rios, considerando que os educandos não tinham os textos prontamente acabados, em termos de noções dos conteúdos, para seu entendimento, exigindo assim que eles desenvolvessem seu raciocínio chegando a conclusões que posteriormente seriam confirmadas pelo professor.

Desse modo há a confirmação que a geometria nos manuais do GRUEMA era de uma geometria intuitiva e experimental, abordando também a geometria afim mesmo que com menor ênfase "[…] a proposta para o ensino de geometria nos livros do GRUEMA é a geometria euclidiana". (RIOS, 2010, p. 158), tendo em vista que esta geometria não foi alterada, mas sim, sua abordagem.

Outros autores também selecionaram obras produzidas por grupos de estudos em suas dissertações, como Kátia Cristina Camargo (2009) no trabalho intitulado *O Ensino da Geometria nas Coleções Didáticas em Tempos do Movimento da Matemática Moderna na Capital da Bahia,* em que analisa a coleção didática *Ensino Atualizado da Matemática,* de Catunda et al. do Centro de Ensino de Ciências da Bahia (CECIBA)[42], publicada em 1971 e outra com

[42] Alguns membros desse grupo foram: Martha Maria de Sousa Dantas, Eliana Costa Nogueira, Maria Augusta Araújo Moreno, Omar Catunda, Neide Clotilde de Pinho e

mesma titulação entre 1975 a 1988. A autora adota também a coleção *Processo entre a exposição e a descoberta* (PROED) 1973-1974, e por fim coleções produzidas fora da Bahia[43].

Camargo aponta que na coleção *Ensino Atualizado* (1971) "a Geometria Afim foi abordada por meio dos vetores e grupo das transformações, com um tratamento via estruturas algébricas que usava as propriedades e relações algébricas da teoria dos conjuntos". (CAMARGO, 2009, p. 137). Para os conteúdos clássicos da Geometria Euclidiana foi dado o tratamento utilizando espaços vetoriais e as transformações. Em suas análises, a autora destaca a presença das transformações geométricas defendidas tanto por Klein, no início do século XX, como por Botsch no Seminário de Royaumont, bem como consonância com os espaços vetoriais defendidos por Dieudonné.

> A proposta baiana apresenta os clássicos conceitos da Geometria Elementar, no entanto vai além, ao trabalhar com a Geometria Afim e a Geometria Euclidiana, construindo uma base com espaços vetoriais e transformações geométricas. (CAMARGO, 2009, p. 106).

Em análise das coleções do grupo de professores da Seção Científica de Matemática do CECIBA, Camargo menciona que houve mudanças significativas relacionadas à abordagem da geometria "[…] entre as coleções[44]: na metodologia empregada e no abandono dado à Geometria Afim via estruturas algébricas e Teoria dos Conjuntos, características marcantes do terceiro volume Ensino Atualizado", com isso "[…] todo o excesso de algebrismo foi retirado da sétima série […]", sem, contudo, alterar significativamente os conteúdos ensinados na Geometria Afim. (CAMARGO, 2009, p. 126).

---

Souza, Eunice Conceição Guimarães, Norma Coelho Araújo.

[43] As coleções que foram produzidas fora da Bahia têm a análise elaborada a partir de outras pesquisas históricas.

[44] "[…] analisa as quatro coleções didáticas, com foco na proposta do ensino da geometria. Cabe lembrar que essas obras foram produzidas pelo grupo de Martha Dantas entre os anos de 1971 e 1988". (CAMARGO, 2009, p. 81).

É percebido pela autora que as influências do movimento, para a geometria, são fortemente notadas nas coleções do grupo, ou seja, ensino pelas transformações geométricas e teorias dos conjuntos. Ela acrescenta que "as recomendações metodológicas propostas em Dubrovnik para o ensino da geometria no primeiro ciclo, ao que tudo indica, foram, em grande medida, incorporadas na proposta da coleção do PROED". (CAMARGO, 2009, p. 131).

Camargo denota que o tratamento dado à geometria nas coleções do CECIBA se diferencia das demais localidades, pois,

> As análises realizadas no ideário do MMM e na Geometria Moderna da coleção baiana apontaram que os autores elaboraram uma proposta audaciosa e que, em alguma medida, a obra sofreu influências das idealizadas por Felix Klein, Jean Dieudonné e de Dubrovnik. (CAMARGO, 2009, p. 138).

Ao que tudo indica o grupo não se restringiu ao atendimento parcial do que propunha o ideário do MMM referente ao ensino de geometria, com as transformações e o uso de vetores, "a proposta de geometria baiana foi inovadora e com características particulares; [...] continuou em outras produções didáticas do grupo, sem, no entanto, sedimentar uma nova vulgata no país". (CAMARGO, 20009, p. 108).

E a autora Ana Célia da Costa Ferreira (2006), no trabalho nomeado *Propostas Pedagógicas de Geometria no Movimento Paranaense de Matemática Moderna,* analisa a coleção *Ensino Moderno de Matemática* produzida pelo Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM), que teve como líder o professor Osny Antonio Dacol, publicada de 1962 a 1974.

Ferreira, em sua dissertação, busca a identificação da presença da reforma no Paraná observando os parâmetros presentes no relatório da OECE para o ensino de geometria, sendo eles:

> Introdução aos vetores a partir de segmentos orientados, adição, subtração, multiplicação por um escalar.

> Ângulos: propriedades dos ângulos estudadas em conexão com retas paralelas, polígonos e círculos; o estudo das propriedades dos ângulos em paralelogramos e triângulos.
> Simetria: o triângulo isósceles.
> [...]
> Transformações algébricas […].
> […]
> Uso de pequenas "demonstrações lógicas" para justificar algumas das propriedades das figuras geométricas previamente investigadas em base intuitiva. (FERREIRA, 2006, p. 55-56).

No entanto, o NEDEM não inseriu as mudanças no tratamento da geometria em todas as séries. Ferreira (2006, p. 75) destaca que esse grupo "[…] passou a ensinar geometria na 5ª, 7ª e 8ª série do 1º grau. […] ainda demonstrou uma preocupação com o ensino das transformações e dos vetores nas escolas pertencentes ao complexo escolar". Durante a análise a autora destaca que a coleção apresentou a geometria por meio da teoria dos conjuntos, transformações, conceito vetorial e lógica. A metodologia para o ensino na coleção buscava atender às demandas nacionais e internacionais no que se refere aos avanços científicos e tecnológicos. (FERREIRA, 2006).

É confirmado ainda por Ferreira que, "a principal inovação foi a introdução dos vetores nos programas de geometria moderna", (FERREIRA, 2006, p. 124), e "acrescentar uma noção mais avançada de homologia, a linguagem da teoria dos conjuntos, demonstrações de teoremas utilizando proposições lógicas e cálculo vetorial" como aponta Oliveira et al. (2011, p. 149), em uma análise a essa dissertação. Ferreira (2006) indica, ainda, que o coordenador do NEDEM avaliou que o fracasso do MMM no Paraná se deu pela pouca aceitação dos professores aos materiais do grupo, nesse sentido a autora da dissertação destaca a complexidade na abstração do material desse grupo.

Luciana Patrocínio de Britto (2008) em seu trabalho denominado *Scipione Di Pierro Neto e sua proposta para o ensino da geometria na Coleção Curso Colegial Moderno* analisa a coleção *Curso colegial Moderno* (1967-1968) de autoria de Scipione[45] de Pierro Neto, Ruy Madsen Barbosa e Luiz Mauro Rocha. A autora identifica que o primeiro volume abordou a linguagem dos conjuntos, no segundo volume apresentou a geometria espacial por meio das transformações geométricas, havendo também destaque para a Geometria dedutiva.

Mesmo com a inserção de elementos do MMM, como a teoria dos conjuntos, nas obras analisadas, foi constatada que a geometria de Euclides manteve-se presente, tendo em vista que a apresentação de postulados e teoremas se mostrava necessária, no entanto "foram propostas aos alunos demonstrações de teoremas acompanhadas por sugestões, com o objetivo de eliminar uma demonstração que fosse decorada ou que não fizesse nenhum significado para eles". (BRITTO, 2008, p. 92).

Britto (2008) destaca, ainda, que os enunciados das questões do livro avaliado deixavam explícitas as ideias de demonstração, visto que os verbos utilizados eram sinônimos do verbo demonstrar, entretanto não exigiam o rigor da demonstração tendo em vista as notas apresentadas traçando caminhos para os alunos seguirem.

Diante da análise dos livros e da entrevista com Scipione, Britto (2008) afirma que ele foi bastante cauteloso na abordagem do que propôs o MMM, inserindo alguns elementos, mas não abandonando a geometria clássica.

Na dissertação *As figuras geométricas no ensino de Matemática: uma análise histórica nos livros didáticos* de autoria de Jussara Brigo (2010), os livros analisados compreendem *Ensino Objetivo de Matemática* (Álvaro Andrini, 1976), *Ensino Atualizado da Matemática* (Omar Catunda et al., 1975), *Matemática: Ensino Moderno* (Miguel A. Name, 1974), *Matemática* (Di Pierro et al., 1979), *Matemática: Curso Moderno* (Osvaldo Sangiorgi, 1969) e *Matemática: com estudo dirigido* (Orlando A. Zambuzzi, 1975).

Brigo constatou que houve presença significativa da geometria em todas as obras analisadas; o uso das figuras assumiu função explicativa,

[45] Mesmo a coleção contendo mais de um autor, Britto faz a análise com enfoque em Scipione para entender as ideias propostas por esse professor para a geometria.

ilustrativa, demonstrativa e formativa, haja vista que o propósito do trabalho era verificar como as figuras geométricas foram usadas nos livros didáticos durante o MMM.

A autora busca informar com que propósito o uso de imagens e figuras são utilizadas nos livros didáticos das coleções analisadas, enfatizando que elas tiveram presenças marcantes, bem como o tratamento de geometria. As figuras foram tomadas como meio de experimentação e abstração do conteúdo. É destacada ainda a presença da geometria dedutiva e intuitiva nas coleções.

> A preocupação com uma nova abordagem para o ensino da geometria dedutiva se fez presente no MMM segundo alguns discursos, mas na prática pedagógica, focando os livros didáticos de matemática que foram analisados – e são significativos pelos documentos normativos –, a geometria dos triângulos, fortemente criticada por Dieudonné, não foi abolida junto ao ensino da 7ª série. (BRIGO, 2010, p. 152).

O ensino de matemática pelo viés das demonstrações, pelo uso de teoremas e postulados era marcante em período anterior ao MMM, permanecendo também durante esse período, e com isso as figuras geométricas presentes nas coleções, que é o objeto de análise da autora, em parte, tinham função demonstrativa. No entanto, Brigo (2010) mostra que durante o MMM o uso de figuras nem sempre obteve essa função, nesse sentido ela afirma:

> Podemos considerar que a figura geométrica foi valorizada nos conteúdos relacionados ao ensino de geometria, no entanto o uso nas demonstrações, tomando como exemplo a figura empregada para a demonstração da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, não desempenhou um papel demonstrativo. (BRIGO, 2010, p. 93).

É observado por Brigo que as figuras nas coleções apresentam-se em sua maioria como ilustrativa ou demonstrativa, porém houve a presença de figuras de caráter explicativo e formativo. Quanto à abordagem da geometria durante o MMM, Brigo (2010) comenta que mesmo alguns estudos apontando para o abandono da geometria, as coleções analisadas por ela não denotam tal situação, visto que a abordagem dos triângulos, por exemplo, aparece em todas elas. Diante disso, a autora sinaliza acerca da possibilidade de futuras pesquisas sobre a prática docente de professores de matemática no período do MMM analisarem se "a geometria foi de fato abandonada" (BRIGO, 2010, p. 153).

E, por fim, Rogério Carlos Ferreira (2008) na dissertação: *Orientações curriculares para o ensino de geometria: do período da Matemática Moderna ao momento atual,* verificando a coleção *Matemática: curso moderno* (Osvaldo Sangiorgi, 1968 e 1971)[46].

Rogério Ferreira afirma que as coleções por ele averiguadas não trazem as transformações geométricas no corpo do texto e sim nos apêndices e isso pode ser justificado pelo pouco conhecimento que os professores atuantes na educação básica tinham sobre o assunto, nesse sentido "[…] Sangiorgi trata das transformações geométricas por meio das translações, das rotações e das simetrias". (FERREIRA, 2008, p. 90).

No que tange ao MMM, afirma que o tratamento dado em relação à geometria foi transformações geométricas, consideradas por Ferreira (2008) como mudanças tímidas, visto a influência que Sangiorgi tinha durante o MMM.

Nas dissertações examinadas foi adotada mais profundamente a análise da composição (interna) dos livros didáticos, verificando os enunciados, os exercícios e figuras/imagens, buscando dessa forma elementos que representassem ideias do MMM. Os apêndices eram de entrevistas com lideranças do MMM, documentos produzidos no período, bem como planos de curso, provas, entre outros.

Das coleções analisadas é perceptível, em grande parte, a abordagem da geometria incorporando elementos defendidos pelo MMM,

[46] A pesquisa realizada por Ferreira contemplou a análise de outras coleções, contudo como trata-se de publicações posteriores ao recorte temporal de nossa pesquisa, não examinamos as análises referentes a elas. São obras com autoria de José Ruy Giovani, José Ruy Giovani Júnior e Benedito Castrucci *A conquista da Matemática* (1992).

principalmente, por meio das transformações geométricas. Todavia, também foram identificadas permanências da geometria clássica em algumas obras. Outra percepção foi a influência dos grupos na produção de coleções didáticas, destacados aqui o GRUEMA, o NEDEM e a equipe de professores da Seção Científica de Matemática do CECIBA.

## 2.3 Perda do protagonismo do Movimento da Matemática Moderna

Sinais de que o MMM na prática docente se encontrava divergente do projeto traçado, começaram a surgir no início da década de 1970. Soares (2001) afirma que desde as primeiras discussões sobre a implantação da reforma já havia críticas relacionadas a esta mudança curricular, no entanto é após, aproximadamente, mais de uma década de sua existência que são intensificadas tais críticas.

J. Kuntzmann (1973 apud PIRES, 2000) apontou alguns vestígios insatisfatórios presentes na proposta elaborada pelo grupo bourbakista, que de acordo com Kuntzmann propunha a inserção muito cedo de algumas definições, destacando também a linguagem que para ele estava centrada em um vocabulário excessivamente rebuscado.

Ainda, de acordo com Pires (2000), é destacado outro ponto que direcionava para essa perda do protagonismo, apontado nas entrevistas realizadas na Revista Francesa de Pedagogia (1976), no espaço denominado "Uma hora com Piaget", em que apresentava desencontro da prática da matemática moderna fazendo o uso do conceito de conjunto, como podemos ver a seguir.

> RFP: A Matemática Moderna parece pretender colocar na cabeça da criança que não há relação entre ela e o mundo exterior, a experiência, mas que está ligada a certos raciocínios lógicos. O que o senhor acha disso?
> *Piaget: Ah, sim, isso me parece absurdo. É preciso que as crianças compreendam bem que em Matemática, fazendo-se abstração de situações mais concretas pode se chegar aos teoremas mais gerais. Mas que elas não tenham relação com o mundo exterior é pura loucura.* (REVISTA FRANCESA DE PEDAGOGIA, 1976

apud PIRES, 2000, p. 26, grifo da autora).

Os excessos e/ou distorções provocados durante o MMM foram reconhecidos pelos matemáticos que estiveram à frente do movimento, como podemos perceber com a fala de Choquet:

> Estou estarrecido com o que constato no ensino da escola primária e da secundária. Fui um dos promotores da reforma de ensino da matemática, mas o que eu preconizava era simplesmente uma poda de galhos mortos, atravancadores, e a introdução de um pouco de álgebra. Pois bem, em suma, os novos programas e as instruções correspondentes são mais satisfatórios que os antigos, em que pesem erros razoáveis; mas há toda uma atmosfera nociva, que tem acompanhado seu desenvolvimento. Em particular, um ataque contra a geometria e contra os recursos da intuição: foi dito aos professores que seria lastimável que eles estudassem triângulos e que a álgebra linear substituiria toda a velha geometria… o resultado é tal que, sem uma forte reação de base, eu penso que a geração atual de nossa escola receberá uma formação matemática que não a prepara nem para a pesquisa, nem para a utilização da Matemática em técnicas ou ciências experimentais. (CHOQUET, 1973 apud SOARES, 2001, p. 112).

Esse reconhecimento também é feito por parte de Sangiorgi, segundo a análise da pesquisadora Elizabete Zardo Búrigo com base em entrevista cedida por esse professor, em que afirma "[…] o professor Sangiorgi atribuía os 'erros' ou aspectos negativos apontados pelos críticos […] não a matemática moderna como proposta, mas aos 'abusos' feitos em nome dela" (BURIGO, 1989, p. 223). Ainda de acordo com essa autora, Sangiorgi considerou que o desenvolvimento da matemática moderna no Brasil não se diferenciou de outros países, mesmo tendo ocorrido flexibilizações, deformações, e textos mal elaborados. Em um artigo publicado no jornal *O povo* (1984) de Fortaleza, Sangiorgi destaca a necessidade de revisão para conter os exageros e a correção de erros[47].

---

[47] Para maiores aprofundamentos referentes às autocriticas de Sangiorgi aos "excessos" do MMM, ver dissertação de Viviane da Silva intitulada *Osvaldo Sangiorgi e O "fracasso do Movimento da Matemática Moderna" no Brasil* (2007).

Entretanto o que mais enfatizou esse esgotamento foi a obra de Morris Kline, de 1973, denominada *Why Jonnhy can't add: The failure of the New Math*, que teve como tradução o título *O fracasso da Matemática Moderna*, publicada no Brasil em 1976. Vale salientar que este professor sempre se manteve contrário a este movimento. Kline faz críticas às terminologias, aos excessos de simbolismo, como também a inadequação do conteúdo no quesito idade e série, que a proposta de reforma apresentava[48].

O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) também fez suas críticas ao movimento na fala do professor Elon Lages de Lima. Ele "afirmou que os excessos no uso da teoria dos conjuntos levaram a uma 'conjuntivite' e está sendo prejudicial pelo exagerado desligamento da realidade e por ser excessivamente moderno", (SOARES, 2001, p. 117-118). Outro matemático, também do IMPA, que se manifestou foi Manfredo Perdigão do Carmo comentando sobre incoerências tanto nas construções de Piaget quanto nas de Bourbaki. (SOARES, 2001).

Diante disso, surge então mais fortemente a necessidade de examinar essa transição, buscando a compreensão de como a geometria é apresentada no espaço temporal de 1976 a 1985, fortalecendo ainda mais a importância da pesquisa sobre o ensino de geometria no Brasil e sua abordagem nos livros didáticos no período de perda do protagonismo do MMM. Tendo em vista que a maioria dos autores aqui mencionados aponta para a perda do protagonismo do MMM, no entanto vestígios dessa proposta de reforma curricular permaneceram no ensino de matemática no período analisado, conforme discutiremos nos próximos capítulos.

[48] Para maiores informações sobre a obra de Kline e seus desdobramentos, ver a dissertação de Flávia Soares (2001).

# CAPÍTULO 3
# A ABORDAGEM DO ENSINO DE GEOMETRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE BENEDITO CASTRUCCI E DEMAIS AUTORES

Neste capítulo analisamos duas coleções, das quais, uma tem como autoria Benedito Castrucci[49], Ronaldo Garibaldi Peretti e José Ruy Giovanni, e outra coleção de autoria de José Ruy Giovanni e Benedito Castrucci.

Com essa análise buscamos responder a nossa questão de pesquisa: Que geometria foi abordada nos livros didáticos de 5ª a 8ª séries no período de perda do protagonismo do Movimento da Matemática Moderna, no período de 1976 a 1985?

## 3.1 Os autores das coleções

No sentido de compreender a obra, suas influências e seu contexto, por exemplo, faz-se pertinente entender um pouco mais sobre os autores. Dos poucos registros[50] encontrados a respeito do autor José Ruy Giovanni (1937-2020) sabemos apenas que era bacharel e licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) e foi professor do ensino de 1º e 2º graus de escolas públicas e particulares, iniciando sua carreira em 1960. No ano de 2015 foi homenageado pela Editora FTD pelos 40 anos junto à editora. (FTD Educação, 2015).

A respeito do autor Ronaldo Garibaldi Peretti pouco se sabe, conhecemos apenas que ele foi Assessor de conteúdos na elaboração dos

---

[49] Na dissertação aparecerão maiores discussões acerca de Castrucci devido à influência e participação no MMM, tendo a incumbência de acompanhar os estudos referentes ao ensino de geometria, e à produção de várias coleções de livros didáticos, tanto no período da matemática moderna como também posteriormente, além de que seu envolvimento com a geometria se deu por toda trajetória acadêmica e profissional.

[50] Matéria da Editora FTD, referente à homenagem ao autor, nota na contracapa da coleção do próprio autor e nota de falecimento na Associação Brasileira dos Autores de Livros Educativos http://www.abrale.com.br/nota-de-falecimento/ .

.

*Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática (1º grau)*[51], da Coordenadoria de Ensino e Normas Pedagógicas (CENP)[52], na qual Peretti participava como professor da rede estadual e não membro da CENP. Tendo participação breve nesse projeto devido ao seu falecimento ocasionado por leucemia em 1977. (BASTOS[53], 2004 apud SOUZA, 2005).

Benedito Castrucci nasceu em 08 de julho de 1909, na cidade de São Paulo, e faleceu em 02 de janeiro de 1995. Sua vida escolar iniciou-se por meio do próprio pai, o qual era professor primário; estudou na Escola Moderna n. 1, sendo matriculado posteriormente em um curso profissionalizante de pintor de letras, tabuletas e casas, no Instituto Profissional Masculino do Braz. Ciente de que não almejava aquela profissão, preferiu prosseguir com os estudos, realizando o curso de admissão[54] (RAMASSOTTI, 2018; DUARTE, 2007).

Ramassotti (2018), ao mencionar as disciplinas cursadas por Castrucci no curso ginasial, indica que a presença de disciplinas estrangeiras no Ginásio era marcante, podendo destacar dentre elas: o Alemão, Italiano e Francês.

Posteriormente, em entrevista a Sônia Maria de Freitas[55] (1990), Castrucci destacou a relevância que essas disciplinas tiveram, visto que permitiram entender as aulas ministradas por italianos e a leitura em livros originais, não recorrendo a traduções, o que acontecia com outros colegas de sua turma no Curso de Matemática na Faculdade de Filosofia, especificamente o alemão. Segundo ele,

---

[51] A primeira versão desse documento foi publicada em 1977. (ALMEIDA, 2019).

[52] Órgão estatal pertencente à Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, instituída em 30 de janeiro de 1976 por meio do Decreto n.º 7510. (SOUZA, 2005). Para maiores conhecimentos a respeito da CENP, ver a tese de Souza (2005).

[53] Entrevista concedida pelo professor Almerindo Marques Bastos para a pesquisadora Gilda Lúcia Delgado de Souza, no período de 24/04/2004 a 20/05/2004.

[54] O exame de admissão era uma exigência para que os alunos ingressassem no curso ginasial no período de 1931 a 1971. Os alunos se preparavam em cursos primários ou preparatórios para a realização do exame. O número de vagas era mínimo o que ocasionava muitas vezes a aprovação excedente ao número de vagas, ou seja, o aluno era aprovado, mas estava fora do número de vagas. (MINHOTO, 2008).

[55] Entrevista concedida a Sônia Maria de Freitas, no Museu da Imagem e do Som de São Paulo em 1990. Disponível em: https://acervo.mis-sp.org.br/audio/benedito-castrucci-0

> […] os italianos citavam muitos autores alemães e aí quem sabia alemão, já possuía conhecimento secundário aproveitavam, né? e eu fui e aproveitei, porque eu tive um ginásio com Alemão no período de 4 anos, e havia outros colegas também que tinham estudado muito alemão e aproveitaram, agora os outros se limitaram a estudar livros traduções e de livros italianos, franceses e também ingleses, mas não podiam ir direto na língua alemã. (CASTRUCCI, 1990).

Ao concluir o sexto ano do Ginásio, em 1930, Castrucci colou grau de Bacharel em Ciência e Letras; nesse mesmo ano cursou a Escola Normal do Brás, tornando-se professor normalista. Após essa formação, Castrucci ingressou no curso de Direito (RAMASSOTTI, 2018). Cursou Direito pela Faculdade de Direito do Largo São Francisco, colando grau em 1935. Migrou posteriormente para a área da Matemática, com a justificativa de que era:

> […] a que estava mais fácil para entrar, para o meu caso, era matemática, então eu fiz vestibular e entrei para matemática apenas com objetivo de ser um bom professor secundário, com bom preparo, eventualmente fazer um concurso para um colégio no estado, que eram bem remunerados naquele tempo e aí ingressei na faculdade. (CASTRUCCI, 1990).

Em 1937, Castrucci ingressou no curso de Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras e referindo-se a esse período ele mencionou a conciliação entre estudo e trabalho, bem como a oportunidade que teve, apontando um fato importante, a falta de formação de professor para as áreas específicas no ensino secundário, alocando dessa forma de acordo com a necessidade e afinidade. Ele afirma que:

> A minha situação é especial, eu acho que eu sou um caso especialíssimo na entrada da Faculdade de Filosofia, porque... Devido eu já ter mais idade e quando fundaram a Faculdade de Filosofia, eu já era aluno do 4º ano de Direito da Faculdade de Direito do Largo São Francisco, e estava com um ano para me formar, mas como todo estudante pobre, eu dava aula à noite…, dia…, de manhã…, e dava aula de todas as matérias, naquele tempo não havia faculdade para formar professores, então eu dava aula… Cheguei a dar aulas de Latim, Português, História e nos últimos tempos, dava aula de

> Matemática, pela falta de professor de Matemática, o colégio me pedia sempre: dar aula de Matemática. Fui bom aluno no colégio e por isso eu também era familiarizado com matemática, […] Como eu sou descendente de italiano e falo italiano, então tive facilidade com os professores italianos[56] que vieram na ocasião, e fui bom aluno porque também havia facilidade para entender as aulas e depois de um semestre eu sabia que estava meio destinado a ser assistente na Faculdade. (CASTRUCCI, 1990).

Durante o curso de Matemática, Castrucci assegurou que teve influência de professores e livros estrangeiros, principalmente italianos, devido ao Brasil ter contratado os italianos, como Luigi Fantapiè e Giacomo Albanese, para ocuparem as cadeiras de professores catedráticos. Em reconhecimento o governo italiano fez doação de livros, enriquecendo a biblioteca da Faculdade de Filosofia, se tornado uma das melhores na época. (CASTRUCCI, 1990).

Castrucci iniciou suas atividades docentes como assistente de Geometria, devido às suas habilidades e desempenho, sob convite do professor Giacomo Albanese. A relação de Benedito com a geometria se estreitava cada vez mais, vindo a ocupar em 1942 o cargo de professor de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva na Faculdade de Filosofia, Ciência e Letras (CASTRUCCI, 1990) e "entre 1945 e 1958, Castrucci foi professor de Geometria Projetiva e Geometria Superior da Faculdade de Filosofia Sedes Sapientiae" (DUARTE, 2007, p. 239).

Ao desempenhar as atividades como assistente na disciplina Geometria, Castrucci aprimorou sua formação chegando ao doutoramento com a orientação de Giacomo Albanese pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da USP (FFCLUSP). A tese de doutorado foi defendida em 04 de agosto de 1943 e intitulada *Sobre uma nova definição de Cúbica plana*. Defendeu ele

[56] A presença de professores italianos de Matemática no Brasil teve a influência de Theodoro Ramos, pois ele tinha respaldo com os governos de ambos os países e era de interesse do governo italiano a presença de seus cientistas no Brasil, permanecendo de 1930 a 1960, já que em "São Paulo, como grande centro de imigração italiana, era o local onde se exercia a principal atividade cultural expancionista, por isso essa cidade tornava-se o alvo do governo italiano. Segundo Schwartzman, a vinda deles era um esforço de promoção cultural que, naquela época, não se distinguia da propagação fascista". (SILVA, 2000, p. 2).

ainda a tese de cátedra, denominada *Fundamentos da geometria projetiva finita n-dimensional,* ambas na área de Geometria. Ocupou como interino a cadeira para tal disciplina, em 1942 (DUARTE, 2007).

Ainda segundo essa autora (2007), o interesse de Castrucci pela Geometria era bastante evidente, podendo ser constatado também em carta endereçada à República Federal Alemã, almejando a participação em curso no programa de visitação. Ele assim escreveu ao Prof. G. Pickert:

> Eu estou interessado em Geometria Projetiva, Fundamentos da Geometria e o Ensino da Matemática Moderna nos cursos secundários. Eu vou conhecer os trabalhos e o progresso desses setores junto à Universidade de Giessen (CASTRUCCI, 1967 apud DUARTE, 2007, p. 240).

A constatação de que Castrucci tinha grande interesse pela geometria pode ser percebido dado sua disposição de conhecimento *in loco* pelo que vinha sendo desenvolvido em outros países, não se restringindo apenas ao contato com publicações. De acordo com o Boletim do GEEM (1970) Castrucci conseguiu conhecer as instituições alemãs e o ensino secundário de lá, trabalhando junto com Gunter Pickert[57], ao retornar trouxe exemplares de livros didáticos utilizados naquele país. Por meio desse contato, ficou acertada a visita de Pickert ao Brasil de agosto a outubro de 1970.

Benedito Castrucci visitou "[...] diversos institutos matemáticos europeus durante sua vida acadêmica: 1952, 1959, 1968 e 1990" (DUARTE, 2007, p. 239) com o intuito de aprimorar o ensino no Brasil. Participou de eventos no exterior, como o Congresso de Geometria, em Oberwohlfach, na Alemanha, entre outros seminários e cursos. Ainda na Alemanha, foi professor visitante do 'Mathematisches Institut da Universidade Justus Liebig' de Giessen, em 1968 (DUARTE, 2007, p. 239).

[57] Matemático de origem alemã, veio ao Brasil a convite de Castrucci para ministrar curso de "[...] pós-graduação no Instituto de Pesquisas Matemáticas da USP" (LIMA, 2006, p. 98), e publicou vários livros referentes à geometria como consta no acervo de Castrucci no IME-USP.

No Brasil, participou do II Congresso Nacional de Ensino de Matemática (CNEM) em 1957 em Porto Alegre, apresentando o trabalho intitulado *O ensino de geometria no ensino secundário*, destacando a demonstração viável a ser considerada pela geometria, sendo elas: "a experimental e a lógica, e que não há necessidade de demonstrar muitas propriedades com rigor, mas somente as que forem compatíveis com a compreensão para a idade dos alunos" (RIOS, 2008, p. 56).

As aulas ministradas por Castrucci, conforme mencionado anteriormente, estiveram voltadas para a Geometria, ele esteve envolvido em vários eventos, escreveu diversos artigos e livros, participou de Congressos,

> […] foi eleito membro titular da academia de Ciências de São Paulo e da Academia Paulista de Educação. Foi fundador da Sociedade de Matemática de São Paulo, do Grupo de Estudo do Ensino da Matemática (GEEM) e da Sociedade Brasileira de Matemática. Pertenceu à Sociedade Brasileira de Educação Matemática, American Mathematical Society, Circolo Matemático de Palermo, entre outras sociedades. (DUARTE, 2007, p. 241).

Por meio do Departamento de Educação da USP, criou-se o *Programa Moderno de Matemática Curso Ginasial*, estabelecido pelo GEEM, tendo Benedito Castrucci como presidente do Conselho Consultivo, apresentando 24 (vinte e quatro) assuntos mínimos, dos quais uma parte significativa tratava de Geometria (OLIVEIRA, 2015).

Em entrevista a pesquisadora Elizabeth Búrigo (1988), Castrucci mencionou que após a vinda de George Springer ao Brasil por meio de Osvaldo Sangiorgi, ele conjuntamente com outros professores, organizaram e ministraram diversos cursos universitários, e por ele foram ministrados cursos de Teoria dos Conjuntos e Lógica, afirmando que esses cursos foram dados dentro e fora de São Paulo.

Ainda em entrevista a essa pesquisadora, Benedito Castrucci afirmou que no Grupo GEEM, ele ficou responsável pela Geometria e ministrou cursos de álgebra vetorial e de Geometria das Transformações. Destacou, ainda, que o grupo foi bastante significativo e, devido à sua representatividade, recebeu verba estadual e federal, o que possibilitou convidar professores para virem ao Brasil e efetuar viagens de membros a outros países (CASTRUCCI, 1988). No entanto, no que diz respeito ao ensino de geometria considerava que a proposta do MMM não era satisfatória, pois ele afirmou que:

> […] o "fracasso", para mim, foi na Geometria, […] por que se nós tínhamos que fazer um movimento que tudo tinha que nascer da teoria dos conjuntos e da ideia de estrutura, que era o princípio geral, então, como a geometria era axiomática, não estava encaixada nisso. (CASTRUCCI, 1988).

Ele destacou as suas dificuldades e os desafios que os cursistas tinham em compreender a geometria dentro da nova proposta, exemplificando com uma experiência vivida naquele período: "[…] eu dei um curso de planos vetoriais, e nos meus cursos todos eu tinha êxito com os alunos/professores, e dessa vez eu fracassei. Quer dizer… os alunos não reagiram bem, acabaram não fazendo boas provas" (CASTRUCCI, 1988).[58] No curso de *Geometria das transformações,* também ministrado por ele, Castrucci comentou que o êxito foi menor ainda, e essa constatação nessa área da matemática também foi feita por responsáveis pelo ensino de geometria em outros países, de acordo com Castrucci (1988).

Em relação aos cursos ofertados pelo GEEM Castrucci declarou: "Eu acho que esse foi um grande valor, um despertar dos professores, isso eu acho que foi a coisa mais positiva do movimento na ocasião" (CASTRUCCI, 1988). Ele inclusive ressaltou a alta adesão dos professores aos cursos oferecidos por esse grupo, destacando que "[…] eles [os professores] passaram a estudar. E começaram a gostar. Alguns deles gostaram tanto que acabaram indo para o ensino superior". (CASTRUCCI, 1988).

No entanto, as críticas ao movimento foram marcantes, no III Congresso Internacional de Educação Matemática (1976), com manifestações desfavoráveis à matemática moderna.

---

[58] Em entrevista concedida a Búrigo, Castrucci se refere às atividades que executou deixando explícito que são atividades desenvolvidas no âmbito do GEEM.

> Eu acho que o movimento acabou assim no mundo inteiro quando começou a haver crítica, não é? E críticas de grandes matemáticos. Essas críticas pesaram muito […] aí o Dieudonné escreveu um livro Geometria e Álgebra Linear […] é um calhamaço, um livro dificílimo que era destinado ao ginásio, mas um livro de alto padrão, que serve para a pós-graduação e olha lá. E aí saiu uma crítica desse livro na Mathematical Reviews, feita por Freudenthal. […] Então ele diz assim: que o Dieudonné estava empolgado com uma ideia e estava muito iludido, porque ele não pense que com o livro que ele escreveu, ele ache que só os outros estão errados, porque no livro que ele escreveu tinha tais e tais coisas que também têm falta de rigor. Mas eu acho que essas causas gerais foram apontadas pelos matemáticos todos, falta de apelo ao concreto, falta de apelo ao mundo físico. [...] Mas, em 71 […] saiu o livro do Thom que diz assim: Matemática moderna: um erro pedagógico ou erro educacional? A crítica de um grande matemático, prêmio da medalha Fields, um prêmio tradicional. Em 73 saiu o livro de Morris Kline. Em 76, esse Congresso [o III CIEM, em Karlsruhe]. Então, por volta de 70 começou [o esgotamento do movimento]. (CASTRUCCI, 1988).

Castrucci mostra que as críticas foram constantes, ele considera também que houve exageros por parte de alguns autores, e esses críticos eram importantes na matemática e isso, de certa forma, contribuiu para a perda do protagonismo do MMM. Diante disso, analisaremos na próxima seção como a geometria foi abordada nas coleções *Matemática* e *A conquista da matemática* publicadas no período em que se acentuaram essas críticas.

## 3.2 Breve olhar sobre a estrutura das coleções *Matemática* (1976) e *A conquista da Matemática: contexto e aplicação* (1985)

Nesta seção abordamos as características das coleções, como a composição da capa, quantitativo e organização dos conteúdos, dialogando com a literatura e possíveis influências exercidas na composição da obra.

A coleção *Matemática*, de Benedito Castrucci, Ronaldo Garibaldi Peretti e José Ruy Giovanni, foi publicada no ano de 1976 pela editora FTD. Nas capas dos livros dessa coleção consta uma composição com figuras geométricas, e essas figuras aparecem não apenas em coleções desses autores como também em livros de autores estrangeiros e brasileiros da mesma época. De acordo com Cechinel (2010), na década de 1960 os elementos geométricos, como as formas circulares, retangulares e triangulares, preenchidas ou somente contornos, os elementos gráficos e topográficos tinham utilização constantes. O autor afirma ainda que havia nessa época a influência cultural, como a arte pop, com cores vibrantes, formas simples e contornos acentuados, por exemplo, também refletida nas capas dos livros quer seja pela ilustração ou esquema de cores.

A influência do design modernista nas capas dos livros do professor de matemática está presente na tipografia e no esquema de cores, um ponto comum observado por Moraes (2016) e Cechinel (2010) é a quebra de linha nos nomes dos autores e do título do livro, assumindo direções horizontais e verticais, compondo bloco de frase ou palavras. Esse estilo era seguido pelas diversas editoras.

Figura 1- Capas da coleção *Matemática* (1976)


Fonte: Castrucci, Peretti e Giovanni, 1976.

O mesmo pode ser observado na coleção de 1985 no que diz respeito à exibição de aspectos geométricos na capa, visto que as figuras se assemelham a dois toros compostos por várias linhas, formando um elo entre eles. Contudo, pode ser percebida uma diferença no que tange ao uso de "cores vibrantes, formas simples e contornos acentuados".

Figura 2 - Capas da coleção *A conquista da Matemática: teoria e aplicação* (1985)


Fonte: Giovanni e Castrucci (1985)

Na apresentação dessa coleção os autores mencionam duas afirmações que retratam a importância da matemática aplicada e experimental, e que segundo eles serviram como base para a elaboração da obra, ou seja, "a questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos; Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real" (GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 4). Exprimem, ainda, o desejo pela aplicação da Matemática no mundo real, e o desenvolvimento de habilidades que permitam ao aluno enfrentar situações tanto da matemática como de outras ciências. Entretanto, na coleção *Matemática* (1976) os autores informam a permanência, o máximo possível, do rigor[59].

Nas coleções são abordados os seguintes conteúdos:

Quadro 3 - Conteúdos das Coleções *Matemática* (1976) e *A conquista da matemática* (1985)

| **Séries** | **Conteúdos** | |
|---|---|---|
| | **Matemática (1976)** | **A conquista da matemática** |
| 5ª série | **Unidade 1-** Conjuntos<br>**Unidade 2-** Número natural<br>**Unidade 3**- Sistema de Numeração<br>**Unidade 4-** Operações fundamentais com números decimais<br>**Unidade 5-** Divisibilidade<br>**Unidade 6-** Máximo divisor comum | **Unidade 1-** Conjuntos dos números naturais (N)<br>**Unidade 2-** Sistema de numeração<br>**Unidade 3**- Operações fundamentais com números naturais<br>**Unidade 4-** Resolução de problemas com números naturais<br>**Unidade 5-** Divisibilidade<br>**Unidade 6-** Máximo divisor comum |

[59] Estes aspectos – matemática aplicada e experimental em uma coleção, e o rigor na outra – serão discutidos com mais profundidade na próxima seção.

| | | |
|---|---|---|
| | **Unidade 7-** Mínimo múltiplo comum<br>**Unidade 8-** Conjuntos dos números racionais<br>**Unidade 9-** Números decimais<br>**Unidade 10-** Introdução à geometria<br>**Unidade 11-** Sistema métrico decimal – Medidas de comprimento<br>**Unidade 12-** Sistema métrico decimal – Medidas de superfície<br>**Unidade 13-** Sistema métrico decimal – Medidas de volume<br>**Unidade 14-** Sistema métrico decimal – Medidas de capacidade<br>**Unidade 15-** Sistema métrico decimal – Medidas de massa<br>**Unidade 16-** Medidas não decimais | **Unidade 7-** Mínimo múltiplo comum<br>**Unidade 8-** Conjuntos dos números racionais- Representação na forma fracionária<br>**Unidade 9-** Resolução de problemas com dados fracionários<br>**Unidade 10-** Conjuntos dos números racionais- Representação decimal (números decimais)<br>**Unidade 11-** Introdução à geometria<br>**Unidade 12-** Sistema métrico decimal – Medidas de comprimento<br>**Unidade 13-** Sistema métrico decimal – Medidas de superfície<br>**Unidade 14-** Sistema métrico decimal – Medidas de volume<br>**Unidade 15-** Sistema métrico decimal – Medidas de capacidade<br>**Unidade 16-** Sistema métrico decimal – Medidas de massa<br>**Unidade 17-** Volume dos sólidos geométricos |
| 6ª série | **Unidade 1-** Potenciação<br>**Unidade 2-** Radiciação<br>**Unidade 3**- Conjunto dos números racionais relativos<br>**Unidade 4-** O conjunto dos números inteiros relativos<br>**Unidade 5-** Equação do 1º grau com uma variável<br>**Unidade 6-** Problemas do 1º grau com uma variável<br>**Unidade 7-** Inequação do 1º grau com uma variável<br>**Unidade 8-** Sistema de equação do 1º grau com duas variáveis<br>**Unidade 9-** Razão e proporção<br>**Unidade 10-** Números proporcionais<br>**Unidade 11-** Regra de três<br>**Unidade 12-** Porcentagem<br>**Unidade 13-** Juros simples<br>**Unidade 14**- Médias[60] | **Unidade 1-** Estudo elementar de Potenciação<br>**Unidade 2-** Estudo elementar de Radiciação<br>**Unidade 3**- Conjunto dos números inteiros<br>**Unidade 4-** O conjunto dos números racionais relativos<br>**Unidade 5-** Igualdade e desigualdade<br>**Unidade 6-** Equações do 1º grau com uma variável<br>**Unidade 7-** Resolução de problemas do 1º grau com uma variável<br>**Unidade 8-** Inequação do 1º grau com uma variável<br>**Unidade 9-** Coordenadas cartesianas<br>**Unidade 10-** Sistema de equações do primeiro grau com duas variáveis<br>**Unidade 11-** Razão<br>**Unidade 12-** Proporção<br>**Unidade 13-** Números proporcionais<br>**Unidade 14**- Regra de três<br>**Unidade 15**- Porcentagem e Juros simples |

[60] Essa unidade não consta no índice, entretanto é abordada no miolo do livro e no apêndice com orientações ao professor assim como as demais unidades.

| | | |
|---|---|---|
| | | **Unidade 16**- Medidas<br>**Unidade 17**- Ângulos<br>**Unidade 18**- Triângulos<br>**Unidade 19**- Quadriláteros |
| 7ª série | **Unidade 1-** Conjunto dos números reais<br>**Unidade 2-** Expressões literais ou algébricas<br>**Unidade 3**- Polinômios<br>**Unidade 4-** Produtos notáveis<br>**Unidade 5-** Fatoração<br>**Unidade 6-** Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum<br>**Unidade 7-** Frações algébricas<br>**Unidade 8-** Igualdade de expressões algébricas<br>**Unidade 9-** Equações Fracionárias<br>**Unidade 10-** Equações literais de 1º grau<br>**Unidade 11-** Sistema de equações simultâneas de 1º grau<br>**Unidade 12-** Determinação gráfica da solução de um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis<br>**Unidade 13-** Sistemas de equações fracionárias<br>**Unidade 14-** Sistemas de equações literais<br>**Unidade 15-** Problemas do 1º grau com duas variáveis<br>**Unidade 16-** Introdução à geometria<br>**Unidade 17-** Ângulos<br>**Unidade 18 -** Retas paralelas<br>**Unidade 19-** Poligonais – Polígonos<br>**Unidade 20-** Triângulo<br>**Unidade 21-** Ângulo de um polígono convexo<br>**Unidade 22-** Quadriláteros<br>**Unidade 23-** Circunferência e círculo<br>**Apêndice-** Construções geométricas | **Unidade 1-** Raiz quadrada<br>**Unidade 2-** Conjunto dos números reais<br>**Unidade 3**- Expressões literais ou algébricas<br>**Unidade 4-** Polinômios<br>**Unidade 5-** Produtos notáveis<br>**Unidade 6-** Fatoração<br>**Unidade 7-** Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum<br>**Unidade 8-** Estudo de frações algébricas<br>**Unidade 9-** Equações Fracionárias<br>**Unidade 10-** Equações literais de 1º grau<br>**Unidade 11-** Sistema de equações do 1º grau com duas variáveis<br>**Unidade 12-** Determinação gráfica da solução de um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis<br>**Unidade 13-** Problemas do 1º grau com duas variáveis<br>**Unidade 14-** Introdução à geometria<br>**Unidade 15-** Ângulos<br>**Unidade 16-** Postulados e teoremas<br>**Unidade 17-** Retas paralelas<br>**Unidade 18 -** Polígonos<br>**Unidade 19-** Triângulos<br>**Unidade 20-** Ângulo de um polígono convexo<br>**Unidade 21-** Quadriláteros<br>**Unidade 22-** Circunferência e círculo |
| 8ª série | **Unidade 1-** Números reais e Equações do 2º grau.<br>**Unidade 2-** Radicais.<br>**Unidade 3-** Sistemas de Coordenadas Cartesianas. | **Unidade 1-** Potenciação<br>**Unidade 2-** Cálculo com radicais<br>**Unidade 3**- Equações do 2º grau<br>**Unidade 4-** Relações entre os coeficientes e as raízes da equação |

| | | |
|---|---|---|
| | **Unidade 4-** Relações e Funções.<br>**Unidade 5-** Função do 1º grau.<br>**Unidade 6-** Função do 2º grau.<br>**Unidade 7-** Feixe de retas paralelas.<br>**Unidade 8-** Geometria e medidas.<br>**Unidade 9-** Trabalhando com Comprimentos.<br>**Unidade 10-** Áreas.<br>**Unidade 11-** Volumes.<br>**Unidade 12-** Capacidades.<br>**Unidade 13-** Massas.<br>**Unidade 14-** Tempo.<br>**Unidade 15-** Dinheiro.<br>**Unidade 16-** Semelhança de triângulos.<br>**Unidade 17-** Problemas e exercícios. | do 2º grau<br>**Unidade 5-** Equações sujeitas a condições dadas<br>**Unidade 6-** Equações redutíveis ao 2º grau- equações biquadradas<br>**Unidade 7-** Equações irracionais<br>**Unidade 8-** Sistemas simples de equações do 2º grau<br>**Unidade 9-** Problema do 2º grau<br>**Unidade 10-** Sistema de coordenadas cartesianas<br>**Unidade 11-** Estudo elementar de função<br>**Unidade 12-** Função polinomial do 1º grau<br>**Unidade 13-** Função polinomial do 2º grau – função quadrática<br>**Unidade 14-** Segmentos proporcionais<br>**Unidade 15-** Semelhança<br>**Unidade 16-** Razões trigonométricas no triângulo retângulo<br>**Unidade 17-** Relações métricas no triângulo retângulo<br>**Unidade 18 –** Relações métricas e trigonométricas num triângulo qualquer<br>**Unidade 19-** Relações métricas na circunferência<br>**Unidade 20-** Polígonos regulares<br>**Unidade 21-** Medidas da circunferência<br>**Unidade 22-** Áreas das figuras planas |

Fonte: Castrucci, Peretti e Giovanni, 1976; Giovanni e Castrucci, 1985.

O conteúdo de geometria na coleção *A conquista da matemática* (1985) está presente em todas as séries, diferentemente da coleção *Matemática* (1976), o qual não consta no livro da 6ª série. A estrutura da coleção de 1976 traz um cronograma que subdivide a quantidade de páginas do livro que será trabalhada em cada bimestre, a exemplo: "1º Bimestre: Unidade 1 a 3 (Livro-texto: pág. 1 a 51)" (1976b, p. 7), totalizando quatro bimestres.

Ainda em relação à coleção de 1976, os conteúdos eram abordados, iniciando com as definições, seguidas de exemplos resolvidos e, posteriormente, exercícios para os alunos solucionarem, que se encontram ao final de cada unidade, além dos Exercícios de Fixação – que de acordo com os autores devem ser feitos no caderno, buscando fixar os conteúdos abordados – e Exercícios de Aprendizagem, com a finalidade de verificar a compreensão do aluno, devendo ser feitos no próprio livro e em sala. São, ainda, propostos testes, sintetizando o que foi estudado e, as questões e exercícios de modo geral eram abstratos, havendo, contudo, alguns envolvendo práticas do dia a dia, ilustrando uma situação problema cotidiana ou não, organizado de forma graduada, partindo do mais fácil para o mais difícil.

Já na coleção *A conquista da matemática* (1985), os conteúdos são iniciados com situações-problema, e a partir daí trabalham as definições, os exemplos e as atividades para os alunos praticarem. Outro fato que destacamos é o tratamento da História da Matemática, como podemos ver o texto que introduz a unidade de geometria no livro da 7ª série (Figura 03). No entanto, na coleção de 1976 não havia a abordagem da História da Matemática.

Esse é um aspecto interessante a ser refletido, uma vez que ao menos desde o ano de 1973, Castrucci já considerava importante o uso da História da Matemática para o estudo dos conteúdos matemáticos. "Se você um dia quiser levar a sério o estudo da Matemática, não poderá deixar de estudar a sua história, para compreender como evoluíram as ideias" (CASTRUCCI, 1973, p. 1 apud RAMASSOTTI, 2018, p. 221). Uma possível explicação para a não inclusão da História da Matemática nos livros didáticos da coleção de 1976, mesmo sendo um dos seus autores defensor dessa inserção, pode estar relacionada à influência das editoras na definição da estruturação das obras didáticas. A esse respeito, Bittencourt (2001, p. 71) afirma:

> O livro didático é, antes de tudo, uma mercadoria, um produto do mundo da edição [...] Como mercadoria ele sofre interferências variadas em seu processo de fabricação e comercialização. Em sua construção interferem vários personagens, iniciando pela figura do editor, passando pelo autor [...] É importante destacar que o livro didático como objeto da indústria cultural impõe uma forma de leitura organizada por profissionais e não exatamente pelo autor.

A respeito da interferência da editora em relação à elaboração dos livros, destacamos um trecho da entrevista concedida por Castrucci (1988), na qual comenta acerca de uma coleção publicada pela FTD que sofreu vários cortes após o falecimento do professor com o qual havia dividido a autoria e a substituição por um professor indicado pela editora.

> Esse colega faleceu e a editora me disse: olha, você precisa refazer esse livro, mas de um modo bem mais simples. E também para a editora interessa vender. Então aí arranjaram um professor secundário que nunca esteve no movimento moderno, mas era moço e ele lecionava com muita tarimba, muito bom professor de matemática [...] se ele podia escrever junto comigo, refazer o livro? Olha, não tem problema [...] praticamente ele escreveu o livro. Daí ele foi escrever o livro dentro da linha dele de didática, cortou quase tudo. E o livro teve uma saída enorme, e quanto mais ele cortava, mais o livro vendia [...] (CASTRUCCI, 1988).

Figura 3 - Texto histórico introduzindo o conteúdo de Geometria (1985)

**A GEOMETRIA**

Desde séculos antes de Cristo, os homens procuram entender melhor o mundo em que vivemos, suas formas e as relações entre elas. Por isso, estudam Geometria. (*Geo* = = terra, *metria* = medida.)

As primeiras noções geométricas surgiram quando o homem sentiu necessidade de efetuar medidas, ou seja, de comparar as distâncias entre pontos, ao mesmo tempo que procurou descobrir as formas e as dimensões dos corpos que o rodeavam. O homem procurou, então, ao observar uma figura, estudar a sua posição, a sua forma e o seu tamanho.

A maioria das civilizações antigas (egípcios, babilônios, assírios, hindus, chineses) já conheciam as principais figuras geométricas, bem como tinham a noção de ângulo, que usavam na Astronomia e nas medidas de áreas. Porém, esses conhecimentos eram usados apenas numa forma prática, sem que houvesse uma organização desses conhecimentos.

Foram os gregos que organizaram os conhecimentos geométricos da época, transformando a Geometria numa ciência sistematizada. Um famoso matemático grego, chamado Euclides (século III antes de Cristo), escreveu várias obras sobre a Geometria. Por esse motivo, até hoje denominamos essa parte da Matemática de "Geometria Euclidiana".

A Geometria que estudaremos é a mesma estudada pelos gregos há mais de 2 000 anos. Apenas a linguagem e a maneira pela qual apresentaremos os assuntos serão diferentes.

Atualmente, estudam-se em Geometria as figuras, suas propriedades e seus relacionamentos. Quando o homem coloca satélites em órbita e manda foguetes para o espaço, o conhecimento da Geometria e das relações e propriedades dos entes geométricos é importante como nunca.

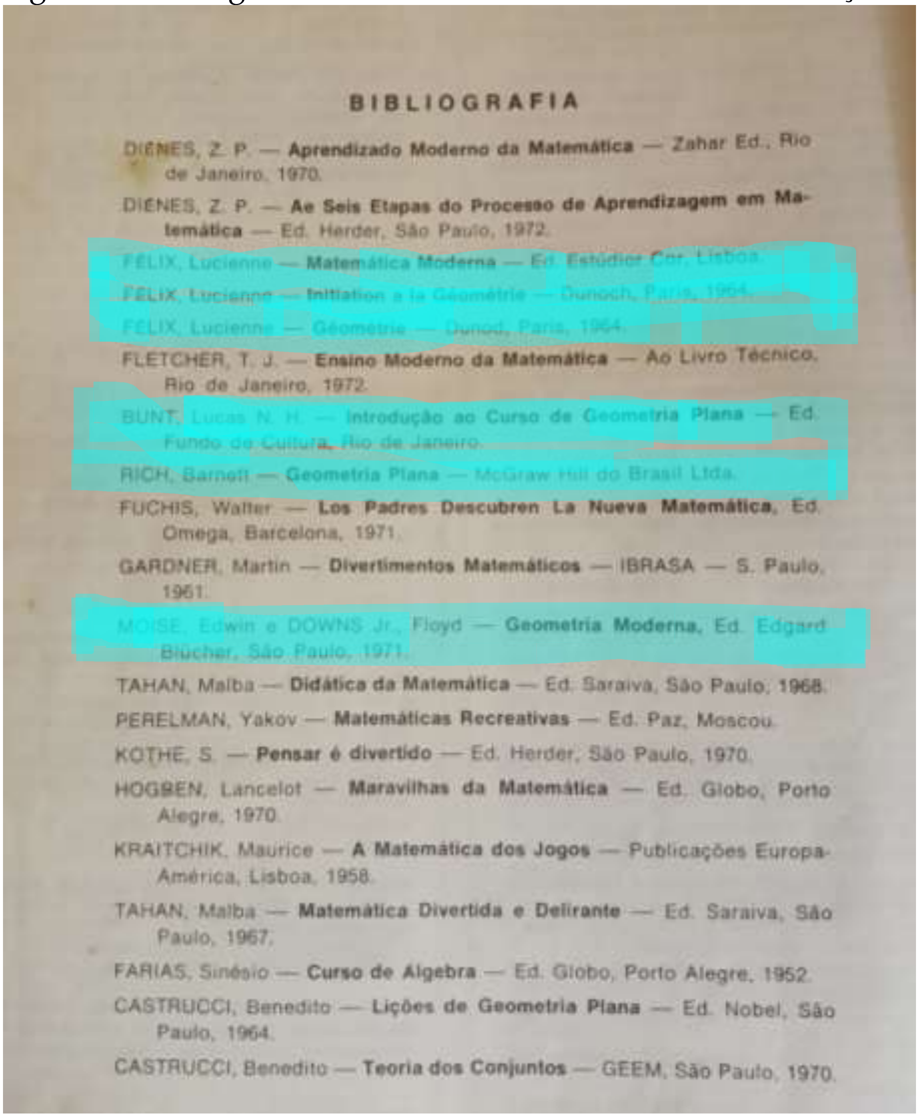
Fonte: Giovanni e Castrucci, 1985c, p. 111, grifo nosso.

Nesse trecho os autores destacam a importância da geometria de Euclides e que esta será estudada também pelos alunos, complementam informando que “apenas a linguagem e a maneira pela qual apresentaremos os assuntos serão diferentes” (GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 111).

Mais um aspecto que pode ser realçado na coleção *Matemática* (1976) é a presença de uma bibliografia no livro da 6ª série, livro do Mestre, e que não aparece na coleção *A conquista da Matemática* (1985). Apesar de os autores trazerem na bibliografia (1976b) várias referências sobre Geometria, no miolo do livro da 6ª série, dessa coleção de 1976, não há tópicos específicos sobre este conteúdo. Presume-se que, pelo fato de as referências constarem apenas no livro do Mestre[61], essas referências poderiam ser para a coleção como um todo e não especificamente para a obra daquela série, assim como os objetivos gerais de toda a coleção contidos na mesma obra.

[61] Apenas podemos conjecturar a este respeito, pois somente localizamos o livro do Mestre da 6ª e 8ª séries, e no livro da 8ª não constam as Referências e Orientações, não conseguimos identificar se foi publicado desta forma ou se no exemplar que possuímos as páginas referentes a essas seções foram arrancadas.

Figura 4 - Bibliografia do livro do Mestre da 6ª série da coleção *Matemática*



BIBLIOGRAFIA

DIENES, Z. P. — **Aprendizado Moderno da Matemática** — Zahar Ed., Rio de Janeiro, 1970.

DIENES, Z. P. — **Ae Seis Etapas do Processo de Aprendizagem em Matemática** — Ed. Herder, São Paulo, 1972.

FÉLIX, Lucienne — **Matemática Moderna** — Ed. Estúdios Cor, Lisboa.

FÉLIX, Lucienne — **Initiation a la Géométrie** — Dunoch, Paris, 1964.

FÉLIX, Lucienne — **Géometrie** — Dunod, Paris, 1964.

FLETCHER, T. J. — **Ensino Moderno da Matemática** — Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1972.

BUNT, Lucas N. H. — **Introdução ao Curso de Geometria Plana** — Ed. Fundo de Cultura, Rio de Janeiro.

RICH, Barnett — **Geometria Plana** — McGraw Hill do Brasil Ltda.

FUCHIS, Walter — **Los Padres Descubren La Nueva Matemática**, Ed. Omega, Barcelona, 1971.

GARDNER, Martin — **Divertimentos Matemáticos** — IBRASA — S. Paulo, 1961.

MOISE, Edwin e DOWNS Jr., Floyd — **Geometria Moderna**, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1971.

TAHAN, Malba — **Didática da Matemática** — Ed. Saraiva, São Paulo, 1968.

PERELMAN, Yakov — **Matemáticas Recreativas** — Ed. Paz, Moscou.

KOTHE, S. — **Pensar é divertido** — Ed. Herder, São Paulo, 1970.

HOGBEN, Lancelot — **Maravilhas da Matemática** — Ed. Globo, Porto Alegre, 1970.

KRAITCHIK, Maurice — **A Matemática dos Jogos** — Publicações Europa-América, Lisboa, 1958.

TAHAN, Malba — **Matemática Divertida e Delirante** — Ed. Saraiva, São Paulo, 1967.

FARIAS, Sinésio — **Curso de Algebra** — Ed. Globo, Porto Alegre, 1952.

CASTRUCCI, Benedito — **Lições de Geometria Plana** — Ed. Nobel, São Paulo, 1964.

CASTRUCCI, Benedito — **Teoria dos Conjuntos** — GEEM, São Paulo, 1970.

Fonte: Castrucci, Peretti e Giovanni, 1976b, p. 22, grifos nossos.

Ainda de acordo com a bibliografia apresentada, no livro do Mestre da 6ª série, é possível constatar que referenciais modernos se fazem presentes, a exemplo de Zoltan Paul Dienes, que influenciou nos *Guias Curriculares para o Ensino Primário do Estado de São Paulo*, bem como suas experiências com turmas experimentais no Rio Grande do Sul por meio de sua metodologia e da proposta dos Blocos Lógicos, ideias vistas como possibilidades de equilíbrio do formalismo lógico no MMM, sendo apropriadas e difundidas por representantes do movimento no Brasil (SOARES; PINTO, 2011); e de Lucienne Félix, que, durante o MMM, veio ao Brasil três vezes – em 1962, 1965 e 1968 – e exerceu influência no GEEM contribuindo,

> […] para a legitimação da matemática moderna como expressão da convergência de autores e grupos de diferentes países em torno da modernização do ensino secundário, refutando a interpretação de um "modismo" ou proposta muito localizada, imposta ou importada dos Estados Unidos. (BÚRIGO, 2012, s. p., grifo da autora)

Quanto aos demais livros de geometria de origem estrangeira que aparecem na bibliografia, interpretamos que a escolha por esses livros pode ter sido feita por Castrucci na busca por uma abordagem rigorosa dos conceitos matemáticos, influência[62] que teve desde cedo em seus estudos e que possivelmente refletiu em suas obras.

Ramassotti (2018) chama a atenção, especialmente, para a influência de Fantappié, no curso de Matemática, que considerava os livros de autores brasileiros sem o rigor necessário para aprender matemática. Além dos dois últimos autores já citados – Zoltan Paul Dienes e Lucienne Félix –, incluem obras de Lucas Bunt, que consta na coleção de Castrucci localizada no acervo do Instituto de Matemática e Estatística da USP; Barnett Rich, que em seu livro denominado *Geometria*[63], apresentava elementos advindos da proposta do movimento, como a simetria e homotetia, abordando a geometria plana, analítica, das transformações e dos sólidos, tendo como estrutura a geometria de Euclides, com a apresentação de teoremas e postulados ao longo de todo o livro, tratando também das construções geométricas (RICH, 1988).

Interpretamos que Castrucci pode também ter sido influenciado pelos autores Edwin Moise[64] e Floyd Downs Júnior, com o livro *Geometria Moderna*, traduzido para o português por Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello, membros do GEEM, assim como pela *Apresentação* da obra, assinada por esse Grupo. No início do livro é mencionada a utilização de trechos do livro do

---

[62] De acordo com Ramassotti (2018) e Duarte (2007), bem como a entrevista do próprio Castrucci (1989), os livros estrangeiros e o rigor contido neles, influenciaram em sua formação desde cedo, ainda enquanto estudante. Conjecturamos que essa influência tenha permanecido no período em que escreveu as obras em análise.

[63] Trata-se da segunda edição, em que a primeira tem como título *Geometria plana*, publicada originalmente em língua inglesa em 1968.

[64] A influência de Moise e Downs Júnior pode ser percebida nos livros de Castrucci e, também, de Sangiorgi (como poderá ser constatado no próximo capítulo).

SMSG, bem como a forte influência desse grupo na produção da obra. Moise e Downs Júnior trazem no livro a geometria de Euclides fazendo uso de métodos algébricos em sua abordagem. A esse respeito os autores informam:

> [...] apresentamos uma pequena discussão sobre a ideia de conjunto e uma pequena revisão da parte algébrica dos números reais. Conjuntos e álgebra serão usados em todo o livro. Nós os interpretaremos, entretanto, muito mais como *meio* do que como *fim*; não farão parte do nosso sistema de postulados e teoremas. Êles estarão ao nosso dispor desde o início; alguns dos postulados envolverão números reais e, também, usaremos álgebra nas demonstrações. De fato, a álgebra e a geometria são estritamente relacionadas e são muito mais simples de ser apreendidas se fixarmos esta relação de início. (MOISE; DOWNS JÙNIOR, 1971, p. 10, grifos dos autores).

Destacamos, ainda, que, no início de cada capítulo do livro de Moise e Downs Júnior (1971) é reservado um espaço para a História da Matemática.

Há a presença também das obras de Castrucci, que de acordo com Ramassotti (2018) e Duarte (2007), foram estruturadas de acordo com o MMM no que propunha a teoria axiomática de Hilbert adotada no livro *Teoria dos conjuntos* bem como na trilogia: *Geometria curso moderno*, *Elementos de Teoria dos Conjuntos* e *Introdução à Lógica Matemática.* No livro *Lições de geometria plana* Castrucci informa não seguir programa oficial, considerando como uma obra para aqueles que desejam prosseguir os estudos.

Ainda a respeito do livro do Mestre da 6ª série (1976b), ele traz ao final um apêndice intitulado *Anotações para o professor,* constando orientações para auxiliá-los na exploração em sala de aula, no qual, os autores, expõem os objetivos gerais - possivelmente para toda a coleção - e dos conteúdos. São enumerados os seguintes objetivos gerais:

> 1) Desenvolver a capacidade de: analisar, relacionar, comparar, classificar, ordenar, sintetizar, avaliar, abstrair, generalizar, criar.
> 2) Desenvolver hábitos de estudo, de rigor e precisão, de ordem e clareza, de uso correto da linguagem, de

> perseverança na obtenção de soluções para os problemas abordados e de críticas e discussões dos resultados obtidos.
> 3) Adquirir habilidades específicas para: medir e comparar medidas, calcular, construir e consultar tabelas, traçar e interpretar gráficos utilizar e interpretar corretamente a simbologia e terminologia matemáticas.
> 4) Adquirir formações e conhecimentos sobre os diversos tipos de conceitos e métodos utilizados na matemática.
> 5) Desenvolver a capacidade de obter a partir de condições dadas, resultados válidos para situações novas, utilizando o método dedutivo.
> 6) Reconhecer a inter-relação entre os vários campos da matemática. (CASTRUCCI; PERETTI; GIOVANNI, 1976b, p. 7).

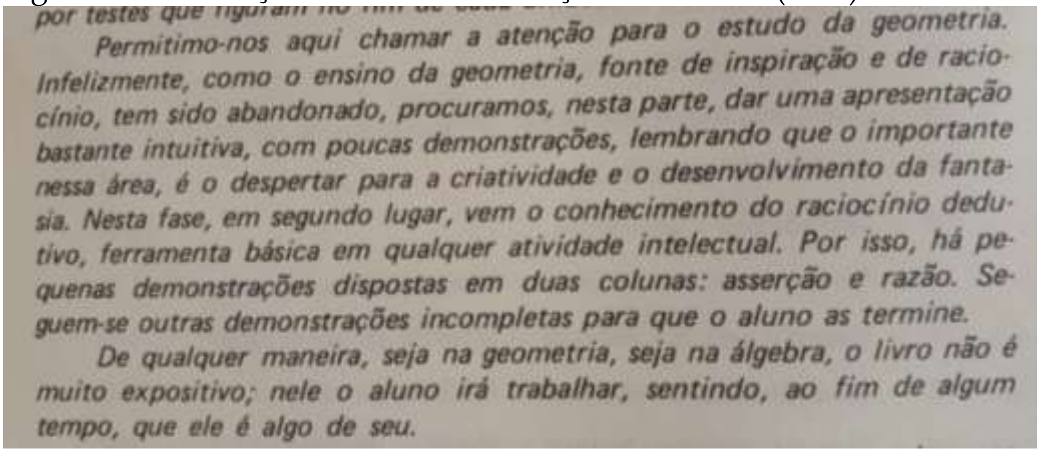
Conjecturamos que as influências dos autores anteriormente mencionados continuaram na coleção *A conquista da matemática* (1985), essa suposição pode ser feita ao observarmos a estruturação das demonstrações, bem como a permanência de vários dos conteúdos com a mesma perspectiva, características que abordaremos na seção seguinte.

## 3.3 A abordagem intuitiva e dedutiva no ensino de geometria

Nesta seção apresentamos uma discussão a respeito da abordagem intuitiva e dedutiva nas coleções que adotamos para análise, mostrando como os autores se apropriaram dessas abordagens, na qual destacamos possíveis mudanças e permanências por meio do estudo comparativo entre as coleções.

No livro *Matemática* (1976), os autores chamam a atenção para o ensino de Geometria, reconhecendo certo abandono e como eles abordarão o conteúdo na coleção. Para tanto, destacam eles:

Figura 5 - Introdução dos livros da coleção *Matemática* (1976)



Permitimo-nos aqui chamar a atenção para o estudo da geometria. Infelizmente, como o ensino da geometria, fonte de inspiração e de raciocínio, tem sido abandonado, procuramos, nesta parte, dar uma apresentação bastante intuitiva, com poucas demonstrações, lembrando que o importante nessa área, é o despertar para a criatividade e o desenvolvimento da fantasia. Nesta fase, em segundo lugar, vem o conhecimento do raciocínio dedutivo, ferramenta básica em qualquer atividade intelectual. Por isso, há pequenas demonstrações dispostas em duas colunas: asserção e razão. Seguem-se outras demonstrações incompletas para que o alunos as termine.

De qualquer maneira, seja na geometria, seja na álgebra, o livro não é muito expositivo; nele o aluno irá trabalhar, sentindo, ao fim de algum tempo, que ele é algo de seu.

Fonte: Castrucci, Peretti e Giovanni, 1976a, s.p.

A coleção *Matemática* (1976) informa, logo na apresentação, referente à geometria, que terá maior ênfase a abordagem intuitiva e menor destaque para as demonstrações. Ressalta a importância da criatividade, e acrescenta ainda, que manterá o rigor dos conceitos básicos, e que isso acontecerá "dentro de um esquema de ensino prático e objetivo, com desenvolvimento simples de todos os tópicos que reputamos essenciais ao curso [...]" (CASTRUCCI; PERETTI; GIOVANNI, 1976a, [s. p.]).

Os autores enfatizam ainda, na introdução, a possibilidade do estudo dirigido diante dos numerosos exercícios graduados que a coleção aborda, entretanto no miolo dos livros este método não está explícito. Na sequência, vamos apresentar brevemente a técnica do estudo dirigido, pois ela tem como proposta, dentre outros objetivos, o ensino heurístico ou processo da redescoberta, que estão relacionados às abordagens intuitiva e dedutiva.

O estudo dirigido teve seu início nos Estados Unidos em 1905, com vista a orientar os alunos em seus estudos. Um dos objetivos dessa técnica de ensino, de acordo com Mattos (1957) era:

> Desenvolver nos alunos uma atitude sadia, interessada e construtiva em relação aos estudos em geral e em relação à matéria específica em causa. Isto se obtém, não tanto por preleções e belas palavras, mas por tarefas bem planejadas, estimulantes e valiosas que prendam pelo seu realismo a atenção dos alunos e lhes proporcionem legítima satisfação

> na sua execução; (MATTOS, 1957, p. 226 apud LANDO, 2011, p. 08).

Essa técnica, de acordo com Lando (2011), ganhou força no Brasil por meio dos Colégios de Aplicação das Faculdades de Filosofia, como também pela Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES). O estudo dirigido era utilizado tanto para a fixação como para a aprendizagem de um conceito novo e, quanto à posição do professor e aluno, a autora afirma que Mattos (1957) e Mello e Souza (1959) "[...] deixam explícito que no estudo dirigido o aluno é o centro dos processos de aquisição do conhecimento escolar" (LANDO, 2011, p. 8).

No V Congresso Nacional de Ensino da Matemática, realizado em 1966 na cidade de São José dos Campos, Scipione de Pierro Netto apresentou um planejamento de ensino, por meio de Trabalhos Dirigidos destinados a alunos principiantes no estudo da Geometria, vinculado ao MMM. Apesar de o autor denominar de Trabalhos Dirigidos, ao analisarmos o que foi apresentado no texto, interpretamos que se trata de um trabalho equivalente ao que é considerado como Estudo Dirigido pelos autores anteriormente mencionados. (PIERRO NETTO, 1968)

Na introdução de seu texto, Pierro Netto define como seriam desenvolvidas aquelas aulas:

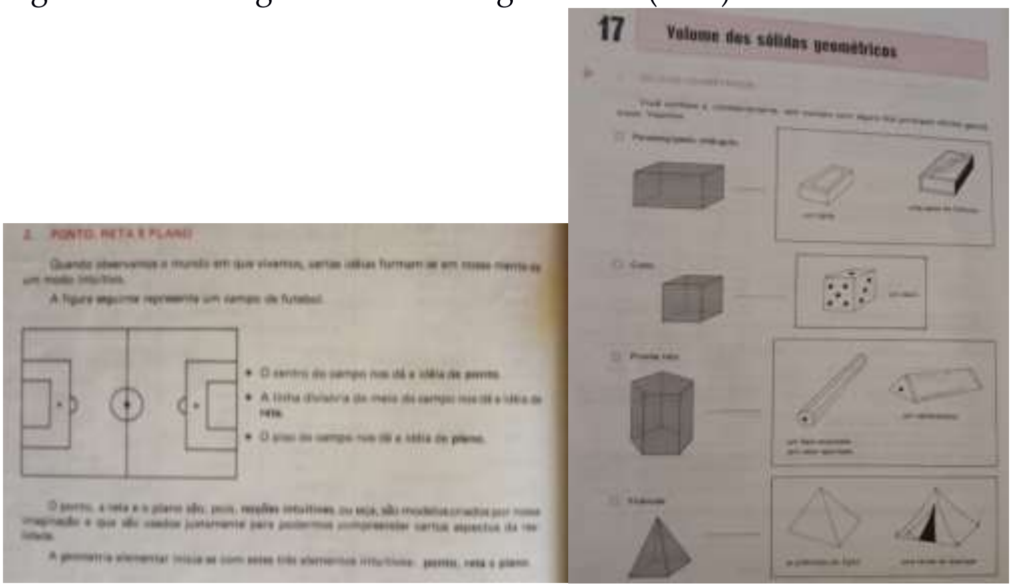
> Sem a preocupação de apresentar aqui uma justificação psico-pedagógica, devemos dizer que se procura aplicar o método heurístico e o processo da redescoberta, levando o aluno a concluir as propriedades fundamentais da Geometria, que serão, ou poderão ser, demonstradas num futuro próximo. (PIERRO NETTO, 1968, p. 64).

Para Searles (1979, p. 133), num contexto pedagógico, heurísticos são "os métodos que consistem em procurar que o aluno descubra o que se lhe pretende ensinar". Por meio do método heurístico, o professor proporciona situações de aprendizagem que oportunizem aos alunos, dentro de suas possibilidades, descubrir sozinhos os conceitos matemáticos, com isso favorecendo que se tornem agentes ativos no processo de ensino e de aprendizagem. Entretanto para que os alunos desenvolvam esta habilidade eles precisam, inicialmente, do contato com os exemplos concretos, com as noções intuitivas, para, mais adiante, conseguir formalizar os conceitos com a dedução. (ALVAREZ; PIRES, 2003).

O estudo dirigido não é mencionado na introdução da coleção *A conquista da Matemática* (1985).

Nessa coleção, nos livros da 5ª e 6ª séries, o conteúdo de Geometria é destacado pelos autores como uma área da matemática que permite compreender a realidade, e com isso a introdução da Geometria é apresentada intuitivamente como os conceitos de ponto, reta e plano, relacionados com elementos de um campo de futebol, e no tratamento do Volume dos sólidos geométricos, que também apresentam apenas a característica da geometria de Euclides, abordando sete sólidos geométricos correlacionados com objetos do cotidiano. E, na sequência, são abordadas as respectivas definições e modo de cálculo. (Figura 6)

Figura 6 - Abordagem intuitiva de geometria (1985)




Fonte: Giovanni e Castrucci (1985a, p. 152 e p. 202).

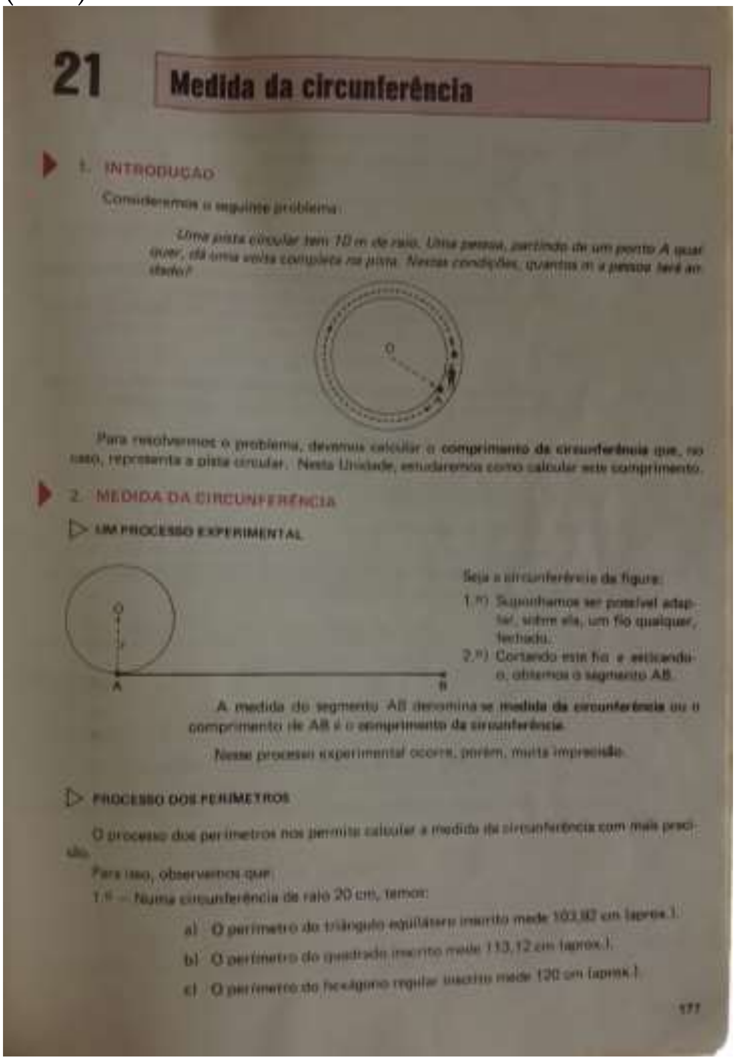
Essa forma de apresentar alguns conceitos geométricos, em nossa interpretação, está de acordo com o que afirmam os autores na *Apresentação* sobre a importância da "[...] aplicação da matemática no mundo real, ao mesmo tempo que deve proporcionar-lhe habilidades suficientes para que possa enfrentar as questões que a Matemática e as ciências correlatas lhe apresentarão"(GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985a, p. 4).

Também condizente com essa concepção de uma matemática aplicada está a escolha de uma abordagem dos conceitos por meio da Resolução de Problemas na coleção de 1985. Uma vez que não consta na coleção *Matemática* (1976) e passa a ocupar um capítulo específico na coleção *A conquista da matemática* (1985), podemos conjecturar que essa tendência da Educação Matemática[65] é utilizada como recurso ou metodologia para o ensino nessa coleção, como pode ser verificado no Quadro 03, no qual algumas unidades possuem títulos iniciados com a expressão "Resolução de problemas".

Para ilustrar como os autores se apropriaram da resolução de problemas na coleção *A conquista da matemática* (1985), apresentamos a Figura 7. Giovanni e Castrucci estruturam os conteúdos com a seguinte sequência: situação-problema, conceitos fundamentais, exemplos e exercícios, para todos os conteúdos. Como podemos ver a resolução de problemas ganha destaque na coleção de 1985, e os autores ainda elaboram uma verificação experimental, neste caso para a medida da circunferência.

[65] A constituição da Educação Matemática no Brasil, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), é composta de quatro fases, a primeira fase é o período de gestação, anterior à década de 70; a segunda fase é nascimento, década de 1970 e início da década de 1980; a terceira fase é a emergência de uma comunidade de educadores matemáticos, década de 1980; e a quarta fase é a emergência de uma comunidade científica em Educação Matemática, 1990. Na fase do nascimento é que surgem "os primeiros sinais de um novo campo profissional", criação de programas de pós-graduação em Educação Matemática e Psicologia, nos quais seriam realizadas algumas pesquisas acerca da aprendizagem da matemática ou sobre o currículo e o ensino. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 21).

Figura 7 – A Resolução de Problemas na coleção *A conquista da matemática* (1985)



21 **Medida da circunferência**

1. INTRODUÇÃO

Consideremos o seguinte problema:

*Uma pista circular tem 10 m de raio. Uma pessoa, partindo de um ponto A qualquer, dá uma volta completa na pista. Nestas condições, quantos m a pessoa terá andado?*

Para resolvermos o problema, devemos calcular o **comprimento da circunferência** que, no caso, representa a pista circular. Nesta Unidade, estudaremos como calcular este comprimento.

2. MEDIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

UM PROCESSO EXPERIMENTAL

Seja a circunferência da figura:

1.º) Suponhamos ser possível adaptar, sobre ela, um fio qualquer, fechado.

2.º) Cortando este fio e esticando-o, obtemos o segmento AB.

A medida do segmento AB denomina-se **medida da circunferência** ou o comprimento de AB é o **comprimento da circunferência**.

Nesse processo experimental ocorre, porém, muita imprecisão.

PROCESSO DOS PERÍMETROS

O processo dos perímetros nos permite calcular a medida da circunferência com mais precisão.

Para isso, observemos que:

1.º — Numa circunferência de raio 20 cm, temos:

a) O perímetro do triângulo equilátero inscrito mede 103,92 cm (aprox.).

b) O perímetro do quadrado inscrito mede 113,12 cm (aprox.).

c) O perímetro do hexágono regular inscrito mede 120 cm (aprox.).

177

Fonte: Giovanni e Castrucci, 1985d, p. 177.

De acordo com Onuchic (1999), desde a antiguidade usavam-se problemas para ensinar a matemática escolar. Todavia, a resolução de problemas começa a ser considerada "como um tema de interesse para professores e alunos" na década de 1940, por George Polya, com a publicação do livro *How to solve it* no ano de 1945 (ONUCHIC, 1999, p. 201). Esse livro traduzido para o português chegou ao Brasil em 1977. (CLARAS; FRANÇA, 2015)

É também, segundo Lester (1978 apud FIORENTINI, 1994), sob influência de George Polya que, na década de 1960, iniciaram-se pesquisas mais sistemáticas em relação à resolução de problemas como campo da educação matemática. No final da década de 1970, a resolução de problemas ocupou um maior espaço em todo o mundo. No entanto, foi a década de 1980 que se mostrou como um período promissor para resolução de problemas, tempos em que se intensificaram as discussões referentes a essa temática. Uma mostra disso é que, na metade dessa década, esse tema foi recorrente em quase todos os congressos internacionais. De acordo com Onuchic (1999), os esforços envolvidos em termos de currículos e materiais para inserção da resolução de problemas nas aulas de matemática mostraram-se úteis. Ela acrescenta que:

> Durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleções de problemas, lista de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. (ONUCHIC, 1999, p. 206).

Fiorentini (1994, p. 189) indica que, no Brasil, "[...] os estudos relativos ao ensino de resolução de problemas só seriam iniciados de modo mais efetivo a partir da segunda metade da década de 80", em especial, por meio de pesquisas de mestrado e doutorado. É, também, na década de 1980, como foi mencionado anteriormente, que, no Brasil, as discussões referentes à Educação Matemática se intensificaram, e a resolução de problemas, como uma tendência inserida nesse campo do conhecimento, também, tomou maior dimensão.

Assim, podemos interpretar que a intensificação dessas discussões passou a influenciar a elaboração de livros didáticos, como é o caso da coleção de livros de Giovanni e Castrucci (1985) analisada neste trabalho.

Até este ponto de nossa análise, apresentamos nossas interpretações referentes às abordagens intuitiva e dedutiva numa perspectiva metodológica do ensino da geometria. Todavia, interpretamos que os autores também propõem essas abordagens numa perspectiva do desenvolvimento dos próprios conceitos geométricos. Nesse sentido, os autores, no livro da sétima série, pontuam que:

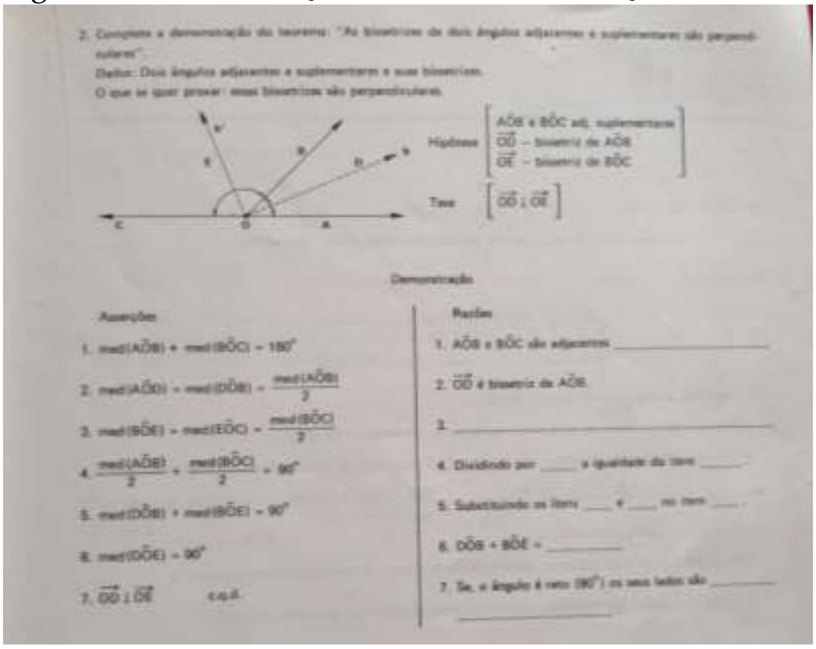
> Até aqui foram introduzidos diversos conceitos geométricos, tais como: ponto, reta, plano, ângulo, bissetriz de um ângulo,… Alguns desses conceitos, como por exemplo, ponto, reta e plano foram apresentados intuitivamente, isto é, pelas ideias formadas em nossa mente através da observação e da experiência. Outros conceitos, como ângulo, bissetriz,… foram apresentados por meio de uma definição através de conceitos já conhecidos. Por exemplo, a ideia de bissetriz de um ângulo se forma em nossa mente através dos conceitos já conhecidos: ângulo, semi-reta interna, ângulos congruentes,… os conceitos apresentados intuitivamente, **sem definições**, são chamados **conceitos primitivos**. (CASTRUCCI; PERETTI; GIOVANNI, 1976c, p. 161, grifo dos autores).

Algo semelhante é apresentado na coleção de 1985, também no livro da 7ª série, contando na introdução do capítulo denominado *Postulados e teoremas*, distinta da coleção anterior que trazia esta informação em apêndice localizado no meio do livro. Em contrapartida para o ensino dedutivo, os autores dizem:

> Enunciamos diversas propriedades geométricas, muitas foram verificadas intuitivamente pela observação e pela experimentação de figuras, como por exemplo: "por dois pontos distintos passa uma e uma só reta". Propriedades desse tipo chamam-se **postulados** (ou axiomas). Existem propriedades, que são verificadas através de conceitos ou propriedades já conhecidas. Essas Propriedades recebem o nome de **teoremas**. Num teorema, há duas partes distintas: a que se supõe conhecida, chamada **hipótese** e a que se deve justificar, provar, demonstrar chamada **tese**. (CASTRUCCI; PERETTI; GIOVANNI, 1976c, p. 161, grifo dos autores).

Uma mostra do entendimento da abordagem dedutiva pelos autores pode ser verificada na imagem comparativa nas Figuras 8 e 9:

Figura 8 - Demonstração de teorema na coleção de 1976



Hipótese $\left[\begin{array}{l} A\hat{O}B \text{ e } B\hat{O}C \text{ adj. suplementares} \\ \vec{OD} - \text{bissetriz de } A\hat{O}B \\ \vec{OE} - \text{bissetriz de } B\hat{O}C \end{array}\right]$

Tese $[\vec{OD} \perp \vec{OE}]$

Demonstração

Asserções

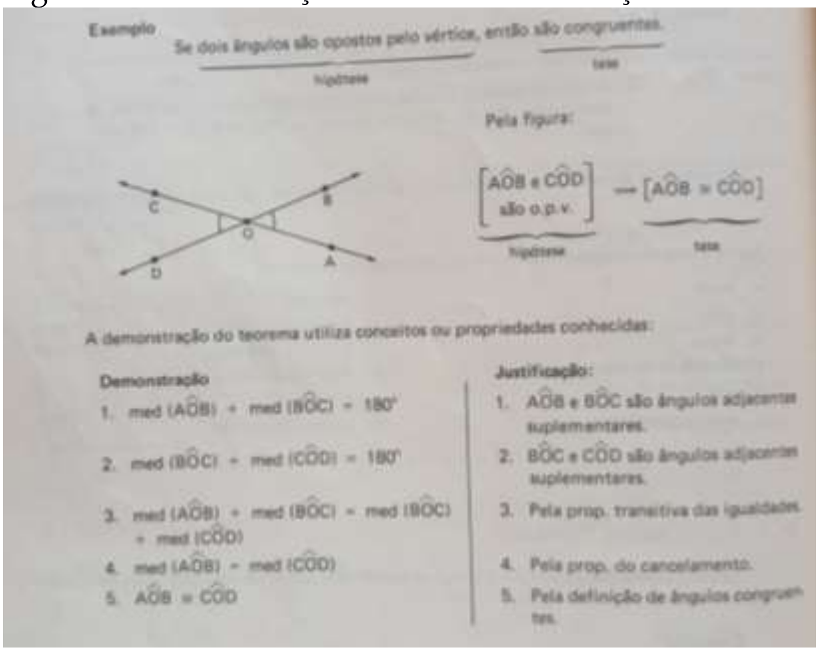
1. $med(A\hat{O}B) + med(B\hat{O}C) = 180°$
2. $med(A\hat{O}D) = med(D\hat{O}B) = \frac{med(A\hat{O}B)}{2}$
3. $med(B\hat{O}E) = med(E\hat{O}C) = \frac{med(B\hat{O}C)}{2}$
4. $\frac{med(A\hat{O}B)}{2} + \frac{med(B\hat{O}C)}{2} = 90°$
5. $med(D\hat{O}B) + med(B\hat{O}E) = 90°$
6. $med(D\hat{O}E) = 90°$
7. $\vec{OD} \perp \vec{OE}$ c.q.d.

Razões

1. $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes ____
2. $\vec{OD}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$.
3. ____
4. Dividindo por ____ a igualdade do item ____.
5. Substituindo os itens ____ e ____ no item ____.
6. $D\hat{O}B + B\hat{O}E =$ ____
7. Se, o ângulo é reto (90°) os seus lados são ____ ____

Fonte: Castrucci, Peretti e Giovanni, 1976c, p. 163.

Figura 9 - Demonstração de teorema na coleção de 1985



Exemplo

$\underbrace{\text{Se dois ângulos são opostos pelo vértice,}}_{\text{hipótese}}$ $\underbrace{\text{então são congruentes.}}_{\text{tese}}$

Pela figura:

$\underbrace{\left[\begin{array}{c} A\hat{O}B \text{ e } C\hat{O}D \\ \text{são o.p.v.} \end{array}\right]}_{\text{hipótese}} \longrightarrow \underbrace{[A\hat{O}B \cong C\hat{O}D]}_{\text{tese}}$

A demonstração do teorema utiliza conceitos ou propriedades conhecidas:

| Demonstração | Justificação: |
| --- | --- |
| 1. $med(A\hat{O}B) + med(B\hat{O}C) = 180°$ | 1. $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos adjacentes suplementares. |
| 2. $med(B\hat{O}C) + med(C\hat{O}D) = 180°$ | 2. $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$ são ângulos adjacentes suplementares. |
| 3. $med(A\hat{O}B) + med(B\hat{O}C) = med(B\hat{O}C) + med(C\hat{O}D)$ | 3. Pela prop. transitiva das igualdades. |
| 4. $med(A\hat{O}B) = med(C\hat{O}D)$ | 4. Pela prop. do cancelamento. |
| 5. $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$ | 5. Pela definição de ângulos congruentes. |

Fonte: Giovanni e Castrucci, 1985c, p. 132.

Note que, na primeira coleção, boa parte das demonstrações não estão totalmente prontas, sugerindo a complementação pelo aluno, o que pode ser um forte indício do estudo dirigido que os autores mencionam na introdução. Essa característica não faz parte na segunda coleção.

Possivelmente esse entendimento sobre a abordagem dedutiva pelos autores não tenha se modificado muito no decorrer do tempo. Na obra de Castrucci intitulada *O ensino de geometria no ensino secundário* (1957), o autor afirmava que cabe à geometria as seguintes demonstrações:

> […] a **experimental**, com apelo ao mundo exterior e com o uso de nossos sentidos; a **lógica**, que independe do universo exterior, apoiada exclusivamente nas definições, postulados e teoremas anteriores (CASTRUCCI, 1957, p. 369-370, grifo do autor).

O mesmo foi observado por Leme da Silva (2008) no que diz respeito aos axiomas e aos teoremas no ensino de geometria, confirmando que Castrucci não se desprende da abordagem de Euclides utilizando mesmo teorema e postulados em obras anteriores, a exemplo, o livro *Lições de geometria elementar* (1957) e *Geometria curso moderno* (1963) em que,

> Os teoremas, antes enunciados e demonstrados em linguagem natural, na versão moderna da Geometria, incorpora a simbologia utilizada na teoria dos Conjuntos. Em outras palavras, pode-se dizer que a nova obra é a anterior revestida de uma nova linguagem, sem, entretanto, uma mudança da abordagem da proposta pedagógica. (LEME DA SILVA, 2008, p. 692).

Ainda acerca das demonstrações, é interessante observar que a mesma estrutura utilizada para demonstração dos teoremas no livro de Castrucci, Peretti e Giovanni (1976) se encontra também no livro de Moise e Downs Junior[66], na qual o termo Asserções substituía a palavra Afirmações, e Razões em vez de Justificações, ou seja, sinônimas, como podemos perceber na Figura 10.

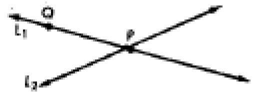
---

[66] Obra que consta na bibliografia do livro da 6ª série da coleção analisada.

Figura 10 – Demonstração no livro de Moise e Downs Junior

**Teorema 3-4**

Dadas duas retas que se interceptam, existe exatamente um plano que as contém.




São dadas as retas $L_1$ e $L_2$ interceptando-se em $P$. Precisamos mostrar duas coisas:

(1) *Existência.* Existe um plano $E$ contendo $L_1$ e $L_2$.
(2) *Unicidade.* Existe sòmente um plano $E$ contendo $L_1$ e $L_2$.
Daremos a demonstração na forma de coluna dupla.

*Demonstração de* (1)

| *Afirmações* | *Justificações* |
|---|---|
| 1. $L_1$ contém um ponto $Q$ distinto de $P$. | Pelo Postulado da Régua, tôda reta contém infinitos pontos. |
| 2. $Q$ não está em $L_2$. | Pelo Teorema 3-1, $L_1$ intercepta $L_2$ sòmente em $P$. |
| 3. Existe um plano contendo $Q$ e $L_2$. | Teorema 3-3. |
| 4. $E$ contém $L_1$. | Pelo Postulado 6, pois $E$ contém $P$ e $Q$. |

Fonte: Moise e Downs Júnior (1971, p. 147)

Ainda acerca da utilização de entes geométricos abordados intuitivamente para a demonstração de novos conceitos geométricos, notamos um apêndice[67], presente no meio do livro da sétima série da coleção de 1976 (após a Unidade 17). Ali é apresentada uma síntese do conteúdo geométrico visto, em que os autores comentam sobre a utilização de entes geométricos trabalhados anteriormente em uma abordagem intuitiva, os quais são usados nos postulados e nos teoremas bem como nas propriedades geométricas. Essas informações não constam na coleção de 1985 por nós analisada.

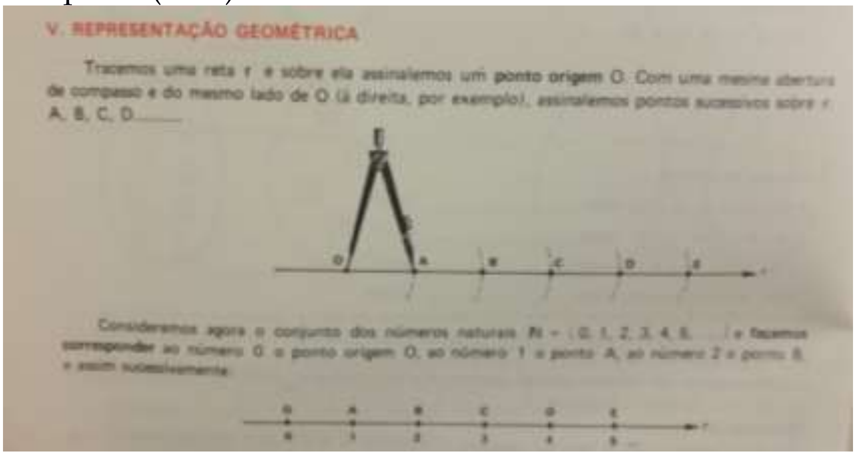
## 3.4 Teoria dos conjuntos e os conceitos geométricos

Os conceitos geométricos, em nossa interpretação, são retomados mostrando os teoremas e os postulados, de acordo com a geometria de Euclides. Agora de forma ainda expressiva, no entanto, a Teoria dos conjuntos como uma linguagem moderna também permeia na coleção.

[67] Distinto daquele mencionado no índice da primeira coleção (1976), e apresentado ao final do livro.

A geometria é utilizada no livro, ainda, para ilustrar a representação na reta numérica de números naturais, correlacionando também com a noção de conjuntos, dada a relação que aparece no livro. (Figura 11).

Figura 11 - Representação geométrica dos números naturais utilizando o compasso (1976)



V. REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA

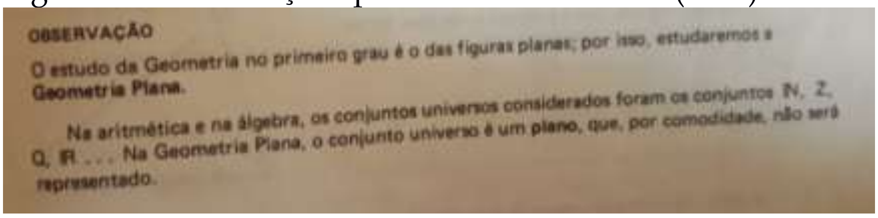
Tracemos uma reta r e sobre ela assinalemos um **ponto origem** O. Com uma mesma abertura de compasso e do mesmo lado de O (à direita, por exemplo), assinalemos pontos sucessivos sobre r: A, B, C, D......

Consideremos agora o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ e façamos **corresponder** ao número 0 o ponto origem O, ao número 1 o ponto A, ao número 2 o ponto B, e assim sucessivamente.

Fonte: Castrucci, Peretti e Giovanni (1976a, p. 16)

Nos demais capítulos dessa coleção, e também na coleção de 1985, é abordada a geometria integrada a outras áreas como a aritmética, e à noção de conjuntos, possivelmente resquício do período do MMM em que a Teoria dos Conjuntos era o elemento unificador da matemática. Os rastros da Teoria dos Conjuntos vislumbram-se, ainda, no tópico denominado *Observação,* em que se compara, por meio dessa Teoria, a Aritmética e a Álgebra com a Geometria. (Figura 12).

Figura 12 - Observação apresentada como nota (1985)



OBSERVAÇÃO

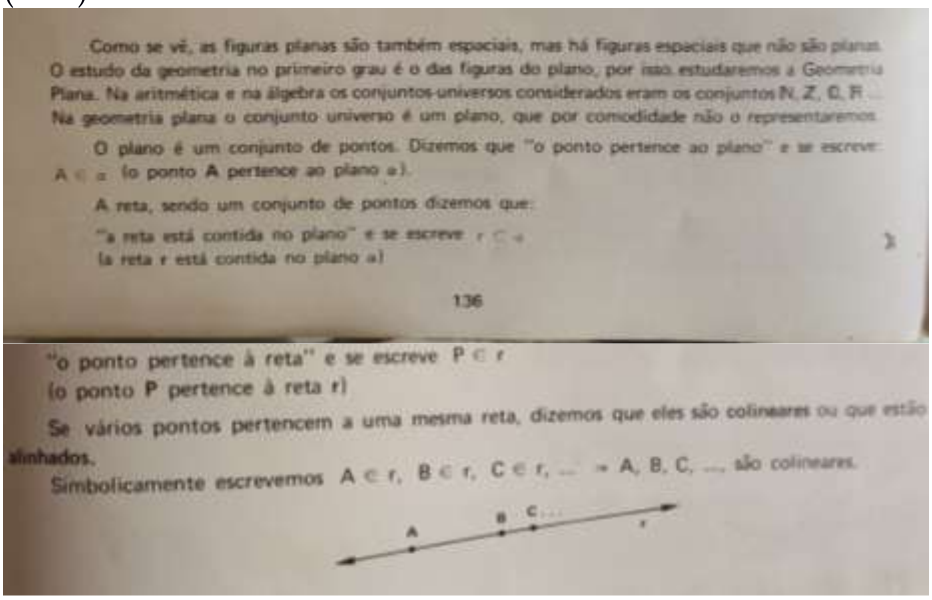
O estudo da Geometria no primeiro grau é o das figuras planas; por isso, estudaremos a **Geometria Plana.**

**Na** aritmética e na álgebra, os conjuntos universos considerados foram os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ . . . Na Geometria Plana, o conjunto universo é um **plano**, que, por comodidade, não será representado.

Fonte: Giovanni e Castrucci (1985c, p. 113)

As simbologias características da Teoria dos Conjuntos, presença marcante no MMM, aparecem imbricadas no tratamento geométrico, correlacionando os elementos: ponto, reta e plano, com a utilização do "pertence e não pertence", "contido e não contido". Além disso, os autores fazem esta abordagem por meio da Teoria dos Conjuntos, ao considerar o plano como o conjunto universo da geometria plana. E, de acordo com a análise elaborada por Leme da Silva (2008), essas características também estavam presentes no livro *Geometria curso moderno* (1968), de autoria de Benedito Castrucci. Na sequência, Figura 13, são apresentados exemplos dessas características no livro *Matemática* 7ª série:

Figura 13 - Simbologia dos conjuntos no tratamento dos entes geométricos (1976)



Como se vê, as figuras planas são também espaciais, mas há figuras espaciais que não são planas. O estudo da geometria no primeiro grau é o das figuras do plano, por isso estudaremos a Geometria Plana. Na aritmética e na álgebra os conjuntos-universos considerados eram os conjuntos N, Z, Q, R ... Na geometria plana o conjunto universo é um plano, que por comodidade não o representaremos.

O plano é um conjunto de pontos. Dizemos que "o ponto pertence ao plano" e se escreve: $A \in \alpha$ (o ponto A pertence ao plano $\alpha$).

A reta, sendo um conjunto de pontos dizemos que:

"a reta está contida no plano" e se escreve $r \subset \alpha$
(a reta r está contida no plano $\alpha$)

136

"o ponto pertence à reta" e se escreve $P \in r$
(o ponto P pertence à reta r)

Se vários pontos pertencem a uma mesma reta, dizemos que eles são colineares ou que estão alinhados.

Simbolicamente escrevemos $A \in r$, $B \in r$, $C \in r$, ... $\Rightarrow$ A, B, C, ..., são colineares.

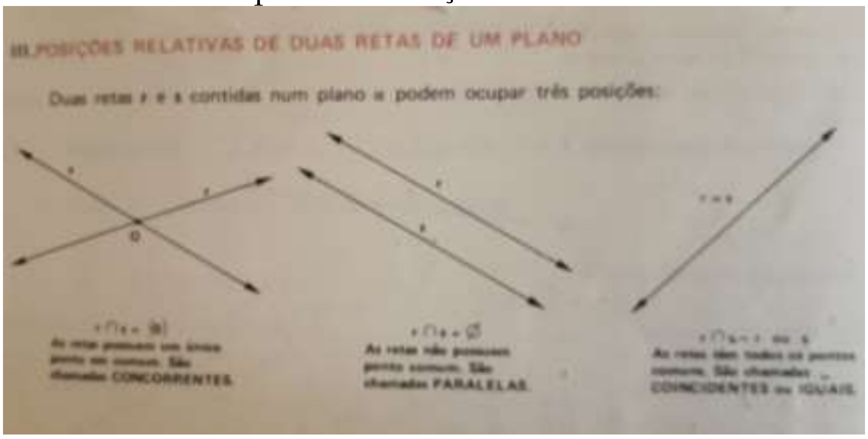


Fonte: Castrucci, Peretti e Giovanni, 1976c, p. 136-137.

A esta abordagem da geometria relacionada à teoria dos conjuntos, Castrucci (1988)[68], como já mencionado, expõe sua inquietação quanto a essa proposta "[...] em que tudo tinha que nascer da teoria dos conjuntos [...]". Assim, podemos interpretar que a apropriação desse aspecto da proposta do MMM, foi incorporada por Castrucci, Peretti e Giovanni nas coleções analisadas. A noção de conjunto se estende também aos segmentos de retas e semirretas, utilizando a união e a interseção de conjuntos, dos quais são tomados os segmentos e as semirretas como conjuntos de pontos.

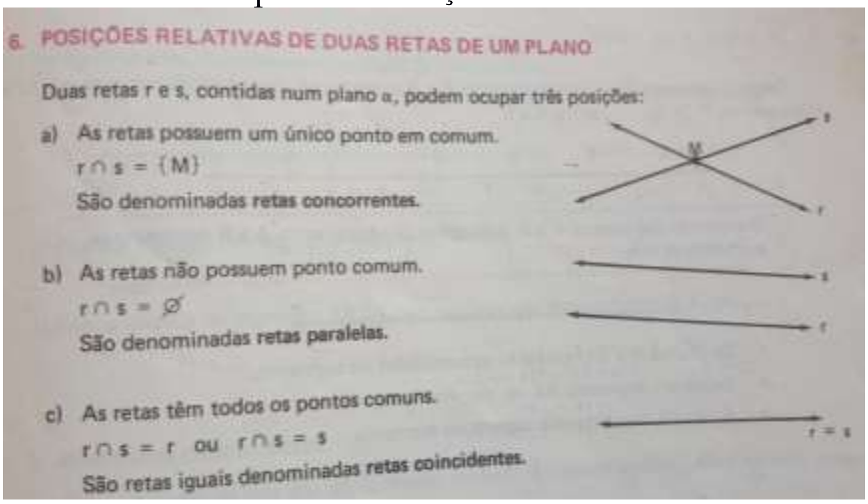
[68] Entrevista cedida a Elizabete Zardo Búrigo, jul. 1988.

Figura 14 - Representação dos entes geométricos nas posições relativas de duas retas de um plano na coleção de 1976




Fonte: Castrucci, Peretti e Giovanni, 1976c, p. 138.

Figura 15 - Representação dos entes geométricos nas posições relativas de duas retas de um plano na coleção de 1985


6. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS DE UM PLANO

Duas retas r e s, contidas num plano α, podem ocupar três posições:

a) As retas possuem um único ponto em comum.
$r \cap s = \{M\}$
São denominadas **retas concorrentes**.

b) As retas não possuem ponto comum.
$r \cap s = \varnothing$
São denominadas **retas paralelas**.

c) As retas têm todos os pontos comuns.
$r \cap s = r$ ou $r \cap s = s$
São retas iguais denominadas **retas coincidentes**.



Fonte: Giovanni e Castrucci, 1985c, p. 115.

Observe que não há mudanças substanciais entre as coleções neste aspecto, o que se vê são apenas modificações relacionadas à exposição do conteúdo, do sentido horizontal para vertical.

### 3.5 Construções com régua e compasso

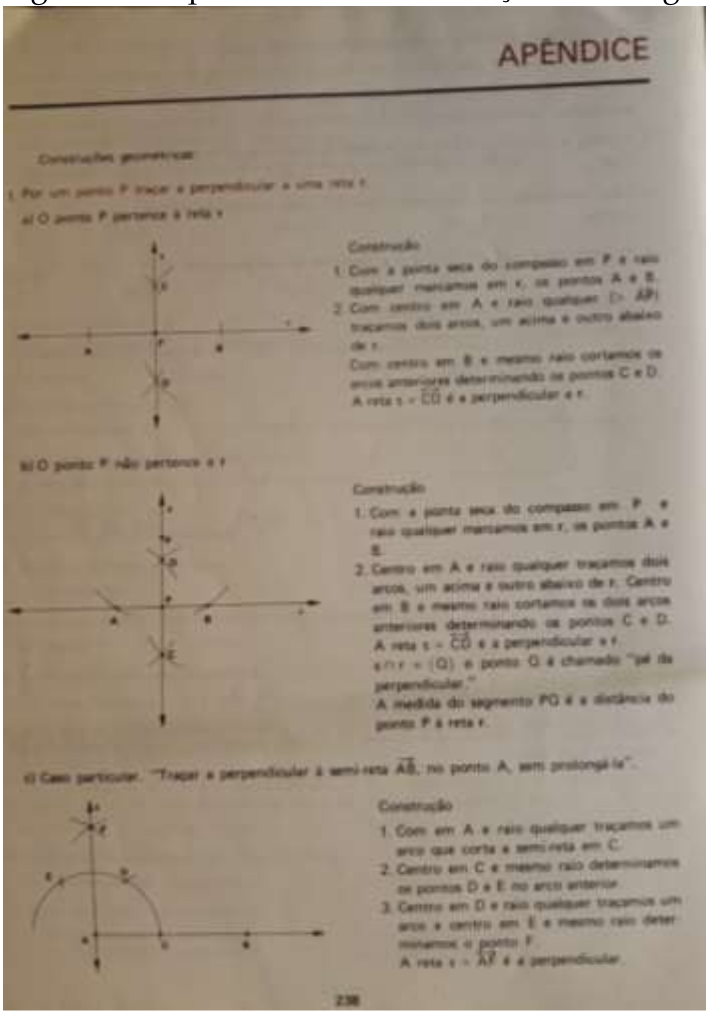
Permeando o conteúdo da coleção de 1985, estão as construções geométricas com régua e compasso, resquícios do ensino que antecedeu o

MMM[69], diferenciando-se da primeira coleção (1976) analisada, que as trouxe como apêndice.

No apêndice, são abordadas as construções geométricas com régua e compasso, posicionamento que segue, em alguma medida, o vigorado nos anos anteriores ao movimento no Brasil, no qual as construções geométricas com o uso de régua e compasso são determinadas por meio da disciplina de Desenho, "[...] presente em todas as séries dos cursos ginasial e científico [...]", proposta pelas portarias n.º 555, de 14/01/1945 e n.º 10, de 4/01/1946, do Ministério da Educação e da Saúde (ZUIN, 2001, p. 78). Neste contexto, o Desenho serviu também como subsídio para a geometria e, consequentemente, para a Matemática. (ZUIN, 2001).

[69] Para maiores conhecimentos sobre o uso de régua e compasso para as construções geométricas, veja tese de Zuin (2001).

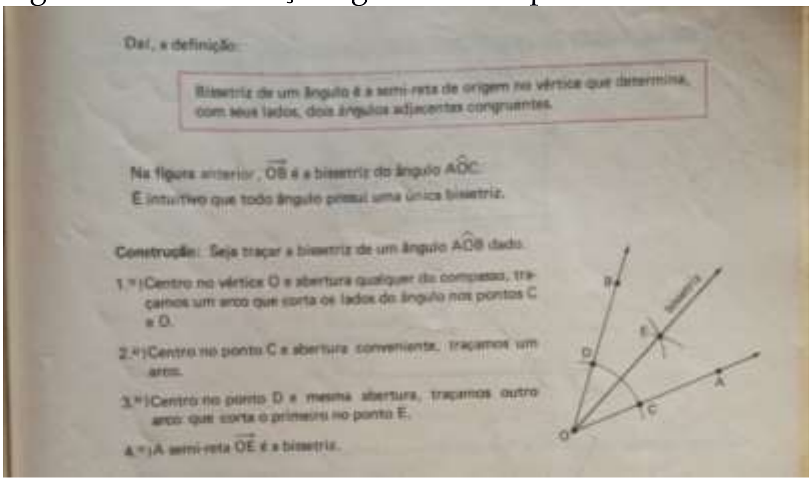
Figura 16 - Apêndice sobre construções com régua e compasso (1976)




Fonte: Castrucci, Peretti e Giovanni (1976c, p. 238).

O livro da 7ª série, da mesma coleção, aborda a geometria em boa parte do livro, das 23 unidades que o compõe, 8 estão dedicadas à geometria, somando a estes, um apêndice denominado *Construções geométricas.* As construções geométricas na segunda coleção, não se encontram em apêndice, e sim, permeiam o conteúdo de geometria.

Figura 17 – Construções geométricas permeando o conteúdo (1985)



Daí, a definição:

Bissetriz de um ângulo é a semi-reta de origem no vértice que determina, com seus lados, dois ângulos adjacentes congruentes.

Na figura anterior, $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$.
É intuitivo que todo ângulo possui uma única bissetriz.

Construção: Seja traçar a bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ dado.

1.º) Centro no vértice O e abertura qualquer do compasso, traçamos um arco que corta os lados do ângulo nos pontos C e D.

2.º) Centro no ponto C e abertura conveniente, traçamos um arco.

3.º) Centro no ponto D e mesma abertura, traçamos outro arco que corta o primeiro no ponto E.

4.º) A semi-reta $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz.



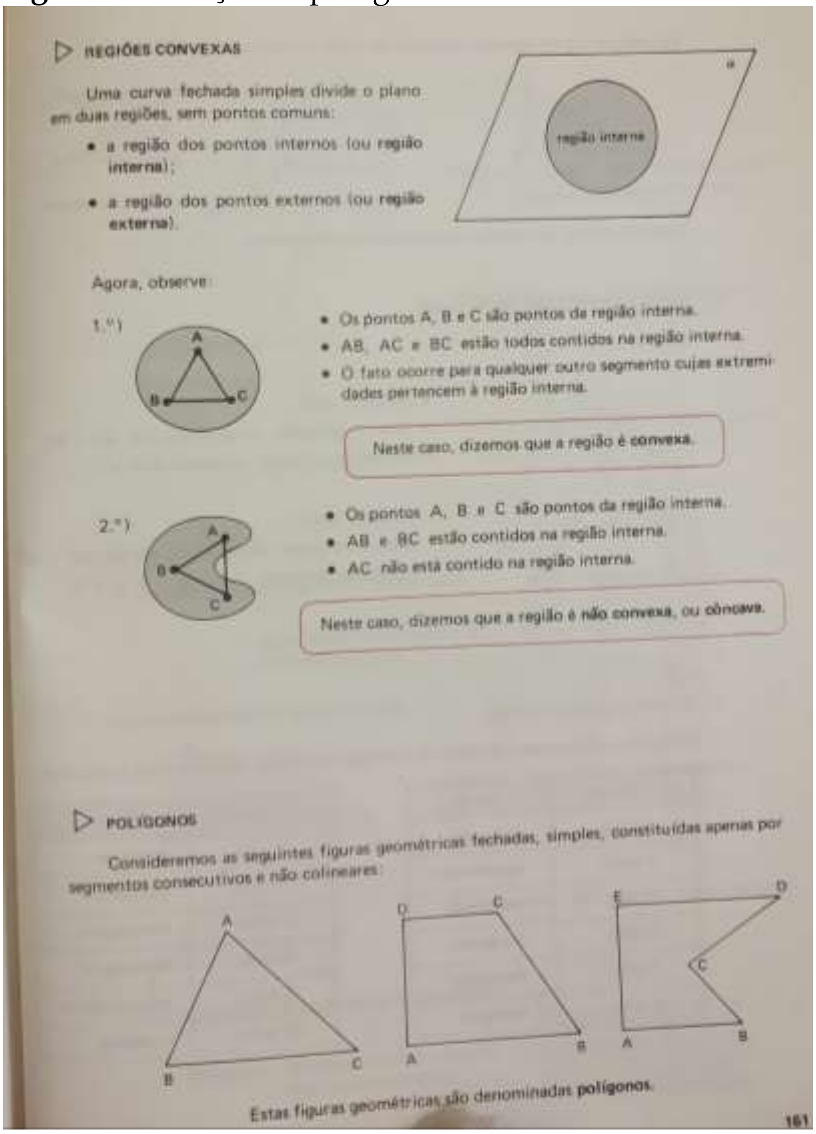
Fonte: Giovanni e Castrucci, 1985c, p. 123.

Observe que as construções geométricas não trazem o passo a passo da elaboração, no entanto as marcações do compasso seguem as mesmas da coleção anterior, subentendendo que isso seria compreensível pelo aluno.

### 3.6 Topologia

As noções topológicas emergem durante o MMM e nas coleções *Matemática* (1976) e *A Conquista da Matemática: contexto e aplicações* (1985) são abordados tais conceitos para introduzir o conteúdo *Polígonos*. São exploradas noções de curvas abertas e fechadas, e de regiões internas e externas. Como pode ser observado na parte final dos conceitos topológicos e a introdução dos polígonos no livro da 5ª série da coleção de 1985 (Figura 18).

**Figura 18 –** Noções topológicas no livro da 5ª série



▷ REGIÕES CONVEXAS

Uma curva fechada simples divide o plano em duas regiões, sem pontos comuns:

- a região dos pontos internos (ou **região interna**);
- a região dos pontos externos (ou **região externa**).

região interna

Agora, observe:

1.º)

- Os pontos A, B e C são pontos da região interna.
- AB, AC e BC estão todos contidos na região interna.
- O fato ocorre para qualquer outro segmento cujas extremidades pertencem à região interna.

Neste caso, dizemos que a região é **convexa**.

2.º)

- Os pontos A, B e C são pontos da região interna.
- AB e BC estão contidos na região interna.
- AC não está contido na região interna.

Neste caso, dizemos que a região é **não convexa**, ou **côncava**.

▷ POLÍGONOS

Consideremos as seguintes figuras geométricas fechadas, simples, constituídas apenas por segmentos consecutivos e não colineares:

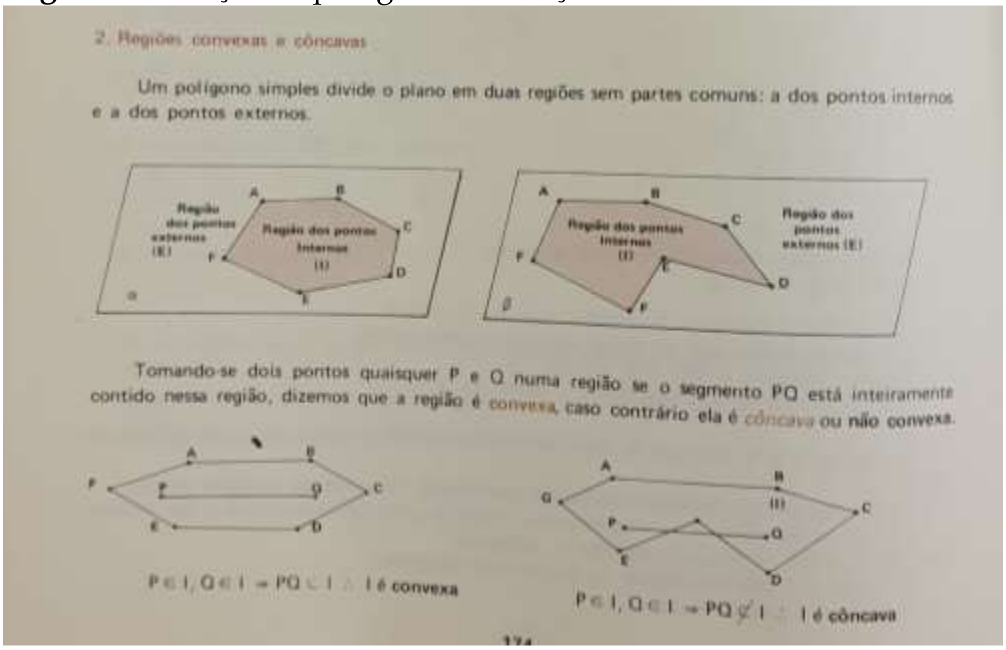
Estas figuras geométricas são denominadas **polígonos**.

161

Fonte: Giovanni e Castrucci, 1985c, p. 161.

Na coleção de 1976, não foram abordadas noções topológicas no livro da 5ª série, somente constam algumas noções no livro da 7ª série (Figura 19). O mesmo ocorreu no livro da 7ª série da coleção de 1985 (Figura 20).

**Figura 19** - Noções topológicas na coleção *Matemática*


2. Regiões convexas e côncavas

Um polígono simples divide o plano em duas regiões sem partes comuns: a dos pontos internos e a dos pontos externos.



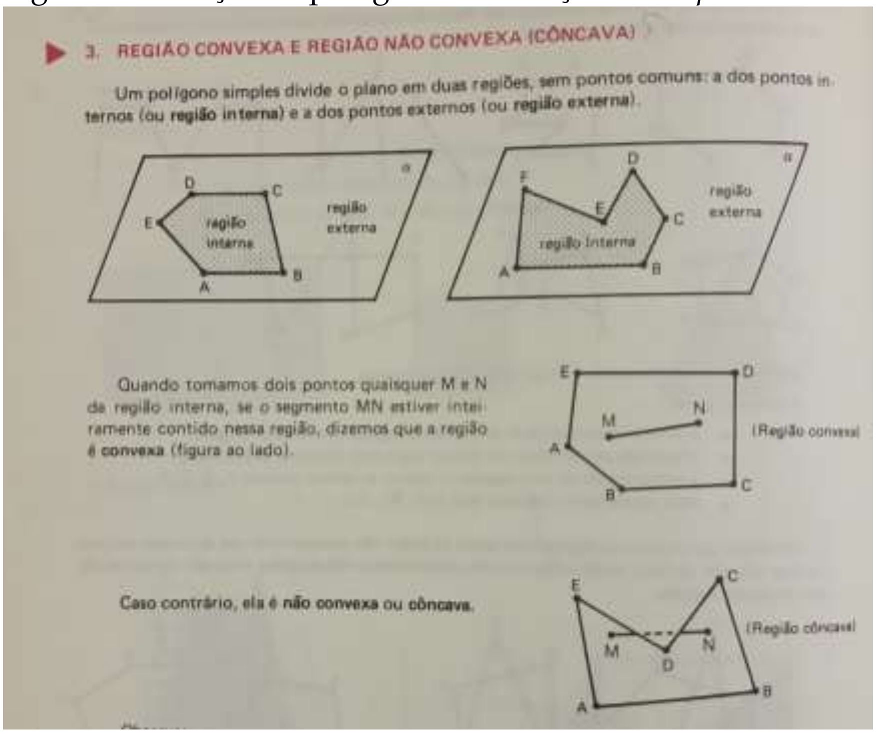
Tomando-se dois pontos quaisquer P e Q numa região se o segmento PQ está inteiramente contido nessa região, dizemos que a região é convexa, caso contrário ela é côncava ou não convexa.

$P \in I, Q \in I \Rightarrow PQ \subset I \therefore I$ é convexa

$P \in I, Q \in I \Rightarrow PQ \not\subset I \therefore I$ é côncava

Fonte: Castrucci, Pereti e Giovanni, 1976c, p. 174.

Figura 20 – Noções topológicas na coleção *A conquista da Matemática*


3. REGIÃO CONVEXA E REGIÃO NÃO CONVEXA (CÔNCAVA)

Um polígono simples divide o plano em duas regiões, sem pontos comuns: a dos pontos internos (ou **região interna**) e a dos pontos externos (ou **região externa**).



Quando tomamos dois pontos quaisquer M e N da região interna, se o segmento MN estiver inteiramente contido nessa região, dizemos que a região é **convexa** (figura ao lado).

(Região convexa)

Caso contrário, ela é **não convexa** ou **côncava**.

(Região côncava)

Fonte: Giovanni e Castrucci, 1985c, p. 144.

Esse uso das noções topológicas para introduzir o conteúdo de Polígonos não é uma característica do ensino da geometria somente no período da perda do protagonismo do MMM. Cavalheiro, Dalcin e Búrigo (2020) ao analisarem como foram abordados os conceitos geométricos nos quatro primeiros volumes da Coleção GRUEMA (Grupo de Ensino de

Matemática Atualizada): Coleção *Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau*, que foi publicada entre as décadas de 1960 e 1970, identificam que "[...] os conceitos topológicos nesses livros didáticos, partem de noções como curvas abertas/fechadas, interior/exterior e regiões, de modo a chegar ao estudo elementar da Geometria Euclidiana. [...] Em especial, são meios utilizados para se chegar aos polígonos." (CAVALHEIRO; DALCIN; BURIGO, 2020, p. 1).

### 3.7 Geometria das transformações

As transformações geométricas não são mencionadas em nenhum momento, e inclusive não chegaram a ser anunciadas no índice, tampouco pontuadas no miolo ou no apêndice dos livros, tanto na coleção *Matemática* (1976), quanto na coleção *A conquista da matemática* (1985). Um fato que nos chama a atenção é que, na obra *Lições de geometria elementar*[70] (1964), Castrucci abordava as transformações geométricas, expostas no sexto capítulo, no qual explorava a "Transformação de figuras. Deslocamentos. Translação. Rotação. Simetria. Homotetia e semelhança no espaço de duas e três dimensões. Inversão pelos raios vetores e recíprocos" (RAMASSOTTI, 2018, p. 226).

Entretanto, em outra obra desse autor, intitulada *Geometria curso moderno,* publicada 1968, segundo Leme da Silva (2008),

> […] não segue nenhuma das duas tendências apontadas por Fehr. Os postulados permanecem os mesmos, ou seja, a medida não é acrescentada ao grupo de axiomas, como propõe Birkhoff. Também não são desenvolvidas as transformações geométricas, baseada em Klein. (LEME DA SILVA, 2008, p. 693).

A autora conclui sua análise da obra *Geometria curso moderno* (1968), com a seguinte afirmação: "Castrucci, muito cauteloso, mantém-se com poucas alterações e julga ousado demais realizar as propostas preconizadas

---

[70] Segundo Ramassotti (2018, p. 226) este era um livro "Para Concurso de Habilitação às Escolas Superiores".

pelo MMM prematuramente." (LEME DA SILVA, 2008, p. 693). Assim, em um livro destinado aos alunos do ensino secundário – *Geometria curso moderno* (1968) – o autor não incorpora as transformações geométricas, ao passo que na obra destinada à preparação para "Concurso de Habilitação às Escolas Superiores" - *Lições de geometria elementar* (1963) – essa tendência é contemplada. Nesse sentido, interpretamos que o fato de as transformações geométricas não constarem nas coleções de livros didáticos analisadas não pode ser considerado somente como uma consequência do aumento das críticas e da perda do protagonismo do MMM.

# CAPÍTULO 4
# O ENSINO DE GEOMETRIA NA PRODUÇÃO DIDÁTICA DE OSVALDO SANGIORGI

Neste capítulo analisamos duas coleções, *Matemática* (1979) e *Matemática* (1985), ambas com autoria de Osvaldo Sangiorgi. Como já mencionamos na Introdução, a escolha por esse autor é devido à participação ativa no MMM, bem como no GEEM, além das produções de livros em período anterior, concomitante e posterior ao movimento. Nesse sentindo, consideramos pertinente verificar essas duas coleções de Sangiorgi com intuito de responder nossa questão norteadora: Que geometria foi abordada nos livros didáticos de 5ª a 8ª séries no período de perda do protagonismo do Movimento da Matemática Moderna, no período de 1976 a 1985?

## 4.1 O autor

Muitos são os estudos que discutem sobre Sangiorgi, sua participação no MMM e suas produções, de autores como Búrigo (1989), Valente (2008), Ferreira (2008), Leme da Silva (2007), entre outros. Nesse sentido, discorremos brevemente sobre suas atividades e influências.

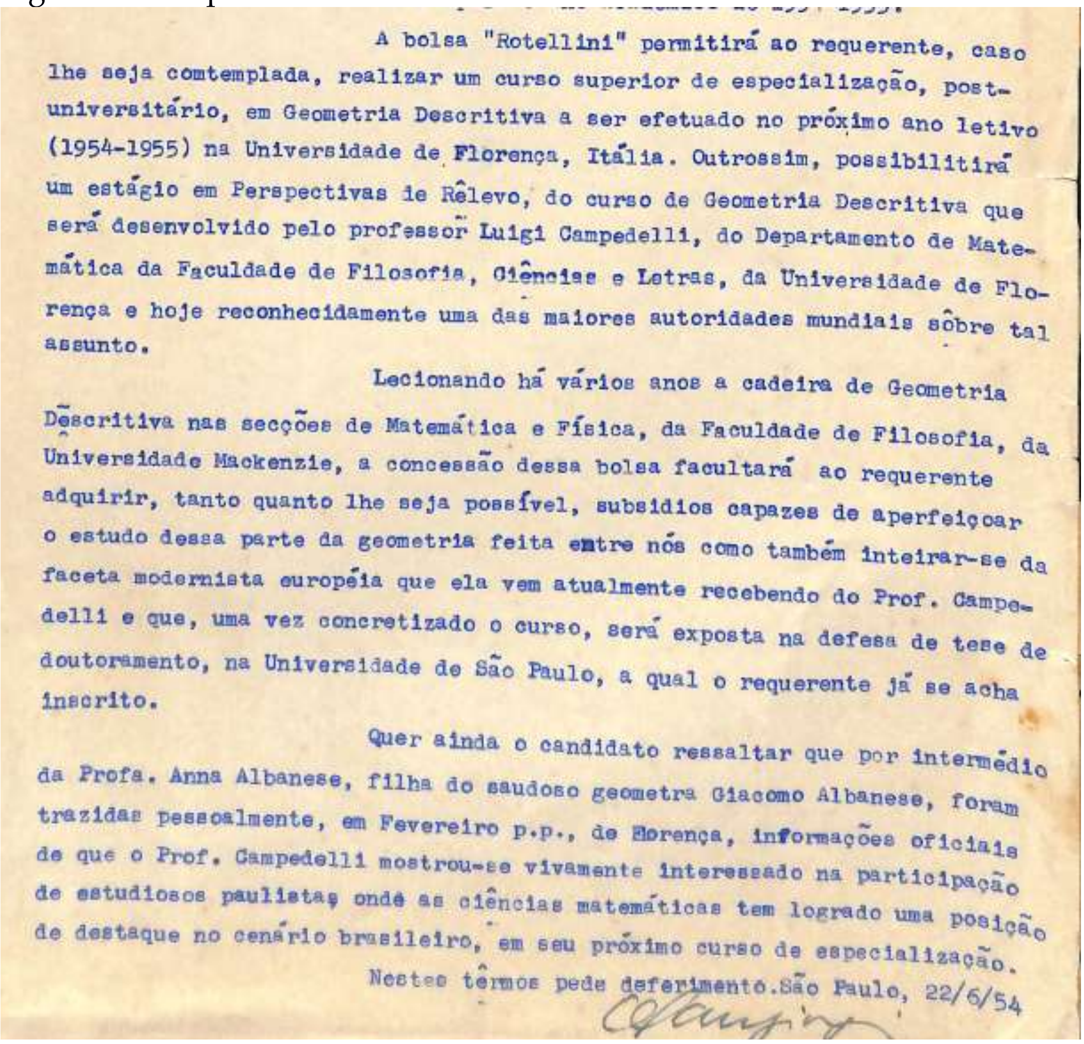
De acordo com os documentos do Arquivo Pessoal de Osvaldo Sangiorgi (APOS)[71], podemos afirmar que ele nasceu em 09 de maio de 1921, formou-se Bacharel em Ciências e Letras pelo Liceu Coração de Jesus; Bacharel em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (FFCLUSP); Licenciado em Didática também pela FFCLUSP. Ele tinha conhecimento das línguas francesa, inglesa e italiana, e durante o exercício da profissão ministrou por longos anos a disciplina Geometria Analítica e Geometria Descritiva na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Mackenzie.

---

[71] Este arquivo encontra-se disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/173403

Buscou, por meio de *Requerimento ao Consulado da Itália* (1954), viajar para aprimorar seus conhecimentos e mediante esse documento Sangiorgi requer uma bolsa de estudos na Fundação Amerigo Rotellini destinada ao período letivo de 1954 a 1955.

Figura 21 - Requerimento ao Consulado da Itália



A bolsa "Rotellini" permitirá ao requerente, caso lhe seja comtemplada, realizar um curso superior de especialização, post-universitário, em Geometria Descritiva a ser efetuado no próximo ano letivo (1954-1955) na Universidade de Florença, Itália. Outrossim, possibilitirá um estágio em Perspectivas ie Rêlevo, do curso de Geometria Descritiva que será desenvolvido pelo professor Luigi Campedelli, do Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade de Florença e hoje reconhecidamente uma das maiores autoridades mundiais sôbre tal assunto.

Lecionando há vários anos a cadeira de Geometria Descritiva nas secções de Matemática e Física, da Faculdade de Filosofia, da Universidade Mackenzie, a concessão dessa bolsa facultará ao requerente adquirir, tanto quanto lhe seja possível, subsidios capazes de aperfeiçoar o estudo dessa parte da geometria feita entre nós como também inteirar-se da faceta modernista européia que ela vem atualmente recebendo do Prof. Campedelli e que, uma vez concretizado o curso, será exposta na defesa de tese de doutoramento, na Universidade de São Paulo, a qual o requerente já se acha inscrito.

Quer ainda o candidato ressaltar que por intermédio da Profa. Anna Albanese, filha do saudoso geometra Giacomo Albanese, foram trazidas pessoalmente, em Fevereiro p.p., de Florença, informações oficiais de que o Prof. Campedelli mostrou-se vivamente interessado na participação de estudiosos paulistas onde as ciências matemáticas tem logrado uma posição de destaque no cenário brasileiro, em seu próximo curso de especialização.

Nestes têrmos pede deferimento. São Paulo, 22/6/54

Fonte: Arquivo Pessoal de Osvaldo Sangiorgi.

O documento deixa explícito o interesse de Sangiorgi em cursar a especialização em Geometria Descritiva na Itália. Ele reitera o quanto esse curso pode agregar a sua prática dado o vínculo que tem com a disciplina nos cursos de Matemática e Física. O autor destaca também a proximidade com a família de Giacomo Albanese, que veio ao Brasil em décadas anteriores para ministrar aulas na FFCLUSP, e teve representação significativa no cenário educacional brasileiro.

Sangiorgi foi um professor que se destacou em sua trajetória sendo um entusiasta na elaboração de livros, na participação em eventos, em ministrar cursos, bem como ao liderar junto a outros professores a reforma curricular e metodológica para o ensino de matemática na década de 1960, que segundo ele foi o melhor período em sua vida, ao afirmar que:

> Elejo a década de 1960 o período dos anos mais dourados de minha vida, como um apaixonado professor que passaria a transmitir suas aulas por escrito, pois apliquei todos os saberes adquiridos na USP como escritor de livros didáticos de Matemática, convidado que fui pela Companhia Editora Nacional, de São Paulo, à qual presto a minha homenagem, neste momento, pelos longos anos de convívio intelectivo em prol do aperfeiçoamento do livro didático brasileiro, que já se apresentava com destaque na literatura mundial. (SANGIORGI, 2000, p. 106)[72]

Ou seja, período em que esteve com produtividade alta, diálogos constantes nas diferentes esferas educacionais, tanto nacional quanto internacional. Envolvido com a produção de livros didáticos, o autor destaca a importância também dos professores conhecerem estes materiais, para ele, isso possibilitaria confiabilidade para inferir qualquer juízo de valor, abandonando a indecisão ao colocar seu entendimento e percepções, elaborando críticas com fundamentos a respeito do material. (SANGIORGI, 1988).

O GEEM, como mencionado anteriormente, foi o primeiro grupo de estudo criado durante o MMM. Por meio dele foram viabilizados vários cursos de formação de professores, a presença e colaboração de professores internacionais no Brasil, a elaboração de Programa Mínimo, bem como tantas outras atividades desenvolvidas por eles. Em entrevista ao jornal *O Estado* (1976) Sangiorgi diz:

> […] a partir de 1962, o Grupo de Estudo do Ensino de Matemática- GEEM, precursor no Brasil desse novo espírito,

---

[72] Artigo encontra-se como republicação na *Revista Educação e Comunicação* (2009) como homenagem ao autor.

> revelou-se de maneira categórica aos educadores em geral, e aos professores secundários e primários, em particular, alguns dos extraordinários aspectos da nova Matemática que surgia. (SANGIORGI, 1976).

A crença de que teria à frente um movimento importante para o ensino de matemática pode ser percebida pela articulação de Sangiorgi com os setores acadêmicos, políticos e midiáticos, possibilitando com isso alcançar professores das diversas localidades e níveis de ensino, tendo o GEEM como um grande centro de discussão; interpretação que podemos fazer considerando as distintas fontes.

O GEEM, segundo Lima (2006), foi influenciado pelo *School Mathematics Study Group* (SMSG) dos Estados Unidos, este último por sua vez teve influência indireta do grupo Bourbarki. O GEEM era liderado por um grupo de professores como: Osvaldo Sangiorgi, Benedito Castrucci, Renate Watanabe, Manhúcia Perelberg, Irineu Bicudo, entre outros (LIMA, 2006). Em entrevista à pesquisadora Búrigo, Sangiorgi reconhece a importância que o grupo SMSG tinha para ele, "[…] dado os 100 estudiosos que faziam parte do grupo e escreveram a coleção com elementos tão significativo a reforma curricular e metodológica" (SANGIORGI, 1988).

Nesse sentido, conjecturamos que os livros do SMSG podem ter influenciado nas produções de Sangiorgi. Para além da coleção desse grupo podemos destacar também o livro *Geometria* de Moise e Downs Júnior, o qual se encontra no arquivo pessoal de Osvaldo Sangiorgi, e teve sua tradução elaborada por membros do GEEM, além da apresentação do livro escrita pelo respectivo grupo, assim como influenciou na coleção de Castrucci, Peretti e Giovanni (1976), conforme mencionado no terceiro capítulo.

O GEEM organizou eventos como o V Congresso Nacional de Ensino de Matemática, com a temática: Matemática Moderna na escola secundária, articulações com o ensino primário e com o ensino universitário (1966) que teve a participação de professores brasileiros e estrangeiros como Marshall Stone (EUA) ministrando o curso *Tratamento moderno de Geometria*; George Papy (Bélgica) com as sessões de *Estudos sobre diversos tópicos da Matemática*

*Moderna no ensino secundário*; Hector Marklen (Uruguai) com o *Ensino moderno de Geometria*; Helmuth Völker (Argentina) ministrando a palestra *Conceitos sobre o desenvolvimento da Matemática Moderna na escola secundária da Argentina*. A abordagem da geometria, nesse congresso, não se limitou aos professores vindos do exterior, aqui tiveram as apresentações de Scipione Di Pierro Netto na Aula-demonstração com *Geometria,* e Sangiorgi com *Aplicações da Geometria no curso secundário*. (GEEM, 1966).

Ainda de acordo com os Anais desse evento e pela entrevista concedida por Sangiorgi ao jornal *O Estado* (1966), podemos constatar que a discussão sobre o ensino de geometria mantinha–se ativa em que debatiam a inserção dos conteúdos de acordo com os novos métodos e o equívoco em relação à interpretação ao emblema de Dieudonné com o "Abaixo Euclides", o qual para muitos a proposta de reforma foi "asfixiada"[73] com os exageros cometidos em nome dela.

Como uma crítica a apropriação do movimento por alguns autores e a repercussão da formação dos alunos que estudaram no período do MMM, Sangiorgi, em entrevista a pesquisadora Elisabete Búrigo, afirma que:

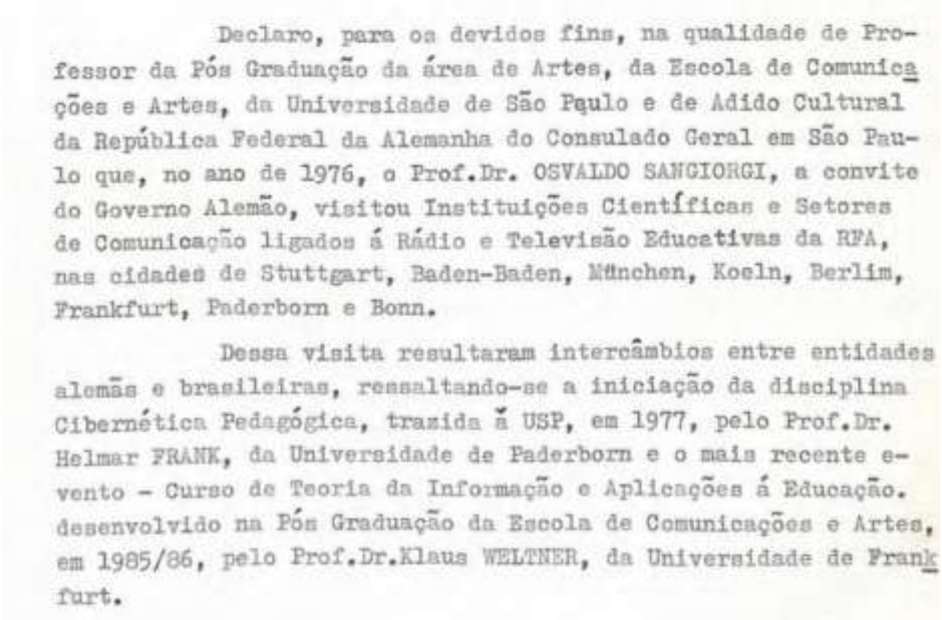
> A parte de cálculo, deficientíssima, a parte de geometria, ultradeficiente, agora com a retomada do bom censo, aproveitou-se a grande vantagem que a Matemática moderna trouxe… aproveitou-se a ideia gostosa de fazer matemática. (SANGIORGI, 1988).

Sangiorgi se mostra indignado com as distorções que ocorreram nas apropriações do MMM, entretanto reconhece também que houve muita produção significativa nesse período. O professor Osvaldo Sangiorgi, em entrevista ao *Jornal Realidade*, em relação à matemática moderna, afirma que "o método clássico não satisfaz mais às condições e necessidades criadas pelo mundo moderno. É necessário modernizar a linguagem para que se possa transmitir aos alunos os verdadeiros aspectos de nossa época" (SANGIORGI, 1967).

[73] Menção feita por Sangiorgi em entrevista a Elizabete Zardo Búrigo (1988)

De acordo com anotações elaboradas por Sangiorgi, a respeito de atividades realizadas de 1970 a 1980, dispostas no APOS, em 1969 ele ingressa na Escola de Comunicação e Arte (ECA) da USP, onde ministrou as disciplinas de Teoria da Informação e Cibernética Pedagógica. Nesse período Sangiorgi se envolve cada vez mais com a tecnologia na educação, participando de vários congressos e eventos com essa temática.

Figura 22 - Declaração de participação de Sangiorgi em intercâmbio Brasil e Alemanha (1976)



Declaro, para os devidos fins, na qualidade de Professor da Pós Graduação da área de Artes, da Escola de Comunicações e Artes, da Universidade de São Paulo e de Adido Cultural da República Federal da Alemanha do Consulado Geral em São Paulo que, no ano de 1976, o Prof.Dr. OSVALDO SANGIORGI, a convite do Governo Alemão, visitou Instituições Científicas e Setores de Comunicação ligados á Rádio e Televisão Educativas da RFA, nas cidades de Stuttgart, Baden-Baden, München, Koeln, Berlim, Frankfurt, Paderborn e Bonn.

Dessa visita resultaram intercâmbios entre entidades alemãs e brasileiras, ressaltando-se a iniciação da disciplina Cibernética Pedagógica, trazida á USP, em 1977, pelo Prof.Dr. Helmar FRANK, da Universidade de Paderborn e o mais recente evento - Curso de Teoria da Informação e Aplicações á Educação. desenvolvido na Pós Graduação da Escola de Comunicações e Artes, em 1985/86, pelo Prof.Dr.Klaus WELTNER, da Universidade de Frankfurt.

Fonte: Acervo Pessoal de Osvaldo Sangiorgi.

Esse documento traz indícios do envolvimento de Sangiorgi com as mudanças relacionadas à tecnologia, e a relação por ele desenvolvida com contatos nacionais e internacionais. A participação de Sangiorgi nas instituições alemãs, ministrando aulas acerca do campo cibernético, bem como a participação em outros países como o Japão para participar da Sociedade da Educação Matemática Japonesa discutindo sobre o MMM e relatando o que estava sendo feito no país de origem, (*O Estado de São Paulo,* 1968), pode ter influenciado na abordagem da informática nas coleções do autor. Diante das mudanças que ocorreram no campo educacional com o MMM e a cibernética, Sangiorgi destaca que, "[...] nunca estivemos desatentos às coisas que precisam acompanhar a evolução da ciência, do ensino da ciência das crianças sem exagerar nada, sem ficar no escândalo que apareceu depois de 15 anos… 10 anos, né?” (SANGIORGI, 1988).

A era digital não distanciou Sangiorgi da matemática, pelo contrário, ele buscou inserir a cibernética nos seus livros didáticos, em apêndice especial. Sobre essa temática, criou grupo de pesquisa denominado Grupo de Pesquisa Cibernética Pedagógica na USP, existindo até os dias atuais com nova nomenclatura, Cibernética Pedagógica: Laboratório de Linguagens Digitais. (CIBERNÉTICA PEDAGÓGICA, 2022).

## 4.2 As coleções analisadas: aspectos gerais

A coleção *Matemática* de Osvaldo Sangiorgi teve sua 2ª edição publicada pela Companhia Editora Nacional, no ano de 1979, a qual tomamos para análise. Entretanto, de acordo com tabela elaborada pela professora Lúcia Vilella[74], a 1ª edição foi publicada em janeiro de 1978 pela editora Bloch Editores.

A capa dos livros dessa coleção são diferentes uma das outras, nas quais aparecem elementos de Álgebra, Geometria e Aritmética.

[74] Lista de livros intitulada “01 Listagem Companhia Editora Nacional”, elaborada e cedida gentilmente pela pesquisadora Lúcia Aversa Vilella.

Figura 23 - Capas da coleção *Matemática* de Osvaldo Sangiorgi, Companhia Editora Nacional (1979)


Fonte: Sangiorgi, 1979.

A capa do livro da 5ª série expõe uma noção de conjuntos, tendo em vista que o autor estipula um conjunto inicial de números naturais e um segundo com os múltiplos de 5, mostrando relação biunívoca entre os conjuntos, da qual a imagem da numeração se assemelha a moedas em tons dourado e acobreado. E de acordo com Soares (2001, p. 63), “a proposta [do MMM] era que a teoria dos conjuntos servisse para possibilitar um ensino mais integrado de toda a Matemática, […] seria ainda a linguagem usada para garantir a precisão e o rigor necessário à Matemática”, nesse sentido é perceptível a intenção de que essa característica ficasse explícita desde a capa da obra de Sangiorgi. Essa autora (2001) afirma, ainda, que dentre os conteúdos propostos por esse movimento, a teoria dos conjuntos foi o mais aplicado na prática pedagógica dos professores brasileiros.

A ilustração no livro da 6ª série deixa evidentes elementos da álgebra, pois o autor apresenta uma equação, na qual a incógnita aparece ao centro. A referida equação é representada por meio de recursos didáticos.

O livro da 7ª série tem como ilustração de capa Polígonos e Poliedros, e em nota, interna, ao aluno o autor deixa evidente a importância da Geometria e o espaço que ela ocupará na obra, afirmando que a geometria é “[...] uma das partes da matemática de maior valor e beleza que, certamente, o exercitará na sublime tarefa de raciocinar”. No livro da 8ª série é perceptível o número PI ($\pi$) e sua representação decimal como ilustração de capa.

Na coleção *Matemática* (1985[75]) Sangiorgi continua com a mesma editora, Editora Companhia Nacional, e também com autoria individual. Nessa coleção ele traz como ilustração de capa sua própria imagem diante de um quadro negro, no qual ele está apresentando conceitos por meio de imagens, construção de figuras ou gráficos; imagem cercada por uma espécie de moldura.

Figura 24 - Capas da coleção *Matemática* (apêndice especial- Introdução à Informática) (1985)


Fonte: Sangiorgi, 1985.

Na capa é apresentada também a informação referente à Introdução à informática constando em apêndices, essa é uma mudança em relação à coleção da década de 1970 na qual não constava na capa a existência de apêndices. A respeito dessa coleção Sangiorgi diz: "estou colocando também a informática dentro do ensino e são os primeiros livros que estão aparecendo assim, [...] aparece como um apêndice utilizando as estruturas matemáticas que estão sendo utilizadas pelo aluno" (SANGIORGI, 1988), ou seja, o educando utilizaria para o estudo do apêndice as mesmas estruturas matemáticas que aprendeu no corpo do livro, possivelmente o autor colocou o apêndice para ser trabalhado ao final de todo o conteúdo, no entanto deixa

[75] De acordo com o noticiário *Folha de São Paulo* (06 de março de 1985) essa coleção é de 1985. A informação do ano não consta na obra. Destacaremos também que não analisaremos o livro da 5ª série dessa coleção, pois, de acordo com o sumário, não consta conteúdo da área de geometria nessa série.

claro, na página inicial da coleção, que o professor escolherá o tempo oportuno para trabalhar, lhe reservando o direito também de não abordá-lo.

No apêndice é ensinado aos alunos iniciação à linguagem de programação em que o autor direciona para a 5ª e 6ª série a abordagem do alfabeto binário, e para a 7ª e 8ª série, a utilização da linguagem de programação BASIC, e como proposta para a geometria o autor solicita a construção de um programa que calcule a área de um triângulo e o volume do cilindro.

Como nesse período o Grupo GEEM, de acordo com Búrigo (1989), havia encerrado suas atividades e Sangiorgi estava inserido em novo grupo que tinha como temática a informática, pelos registros do APOS podemos constatar a participação dele em vários eventos ligados à informática.

Nas coleções analisadas são adotados os seguintes conteúdos:

Quadro 4 - Conteúdos da coleção *Matemática* (1979) e *Matemática* (1985), ambas da Editora Companhia Nacional

| Séries | Conteúdos | |
|---|---|---|
| | Coleção Matemática (1979) | Coleção Matemática (1985) |
| 5ª série | **1- Conjuntos, Operações e Aplicações**<br>1. Conjuntos, elementos, pertinência, diagramas<br>2. Igualdade, inclusão, subconjuntos<br>3. Operações com conjuntos, Diagrama de Venn<br>4. Par ordenado, nova operação entre conjuntos: produto cartesiano<br>5. Diagrama de Carrol<br>**2- Números naturais, Problemas**<br>1. Conjuntos equipotentes, número natural<br>2. Igualdade e desigualdade, sucessão dos números naturais, Conjuntos N<br>3. Representação geométrica dos números naturais<br>4. Sistema de numeração - base<br>5. Sistema de numeração decimal-valor- posição<br>**3- Operações fundamentais com Números Naturais**<br>1. Adição. Propriedades naturais<br>2. Subtração<br>3. Multiplicação - Propriedades | 1- Conjuntos, Operações e Aplicações<br>2- Números naturais, Problemas<br>3- Operações fundamentais com Números Naturais<br>4- Problemas de aplicação<br>5- Potenciação e radiciação<br>6-Divisibilidade no Conjunto N<br>7- Números racionais<br><br>Apêndice- Introdução à Informática |

| | | |
|---|---|---|
| | estruturais<br>4. Múltiplos de um número natural<br>5. Divisão<br>**4- Problemas de aplicação**<br>1. Estruturas diversas<br>2. Estrutura de repetição<br>**5- Potenciação e radiciação**<br>1. Potenciação<br>2. Radiciação<br>**6-Divisibilidade no Conjunto N**<br>1. Múltiplos e divisores: relações<br>2. Critérios usuais de divisibilidade: técnicas<br>3. Números primos, números compostos<br>4. Tábua de números primos<br>5. Reconhecimento de um número primo<br>6. Números primos entre si<br>7. Fatores de um número primo<br>8. Fatoração completa de um número composto<br>9. Máximo divisor comum (m.d.c.)<br>10. Mínimo múltiplo comum (m.m.c.)<br>**7- Números racionais**<br>1. Ideia de fração ou número fracionário<br>2. Frações equivalentes. Classe de equivalência de uma fração<br>3. Aplicações práticas<br>4. Número racional, conjunto Q+<br>5. Operações com números racionais<br>6. Problemas de aplicação<br>7. Notação decimal: “números decimais”<br>8. Notação decimal periódica (dízimas periódicas)<br>**Apêndice 1** Geometria intuitiva: Medida de figuras geométricas<br>**Apêndice 2** Números inteiros relativos: conjuntos Z – operações em Z | |
| 6ª série | **1- Números inteiros relativos: Conjunto Z**<br>Números negativos, zero, números positivos<br>1. Conceito<br>2. Representação geométrica<br>3. Alguns subconjuntos de Z<br>4. Números relativos opostos (ou simétricos)<br>5. Valor absoluto (ou módulo) de um | 1. Divisibilidade no conjunto N<br>2. Números primos- fatoração completa<br>3. Maximação e minimação do conjunto N<br>4. Conjuntos dos números racionais: $Q_+$<br>5. Operações no conjunto $Q_+$<br>6. Problemas de aplicação<br>7. Notação decimal dos números |

| | | |
|---|---|---|
| | número inteiro relativo<br>6. Relações: "é maior que" (>), "é menor que" (<)<br>**2- Operações no conjunto Z**<br>Adição<br>1. Conceito<br>2. Propriedades<br>3. Identificação dos números positivos e o zero com os números naturais<br>Subtração<br>1. Conceitos<br>2. Técnicas para calcular<br>Multiplicação<br>1. Conceito<br>2. Propriedades<br>Divisão<br>1. Conceito<br>2. Divisões impossíveis no conjunto Z. Necessidades de novas ampliações<br>Potenciação<br>1. Conceito<br>2. Potências e resultados especiais<br>**3- Números racionais relativos – Conjunto Q**<br>1. Conceito<br>2. Valor absoluto (ou módulo) de um número racional relativo<br>3. Igualdade e desigualdade em Q<br>**4- Operações em Q – Propriedades**<br>1. Adição e subtração<br>2. Multiplicação e divisão<br>3. Potenciação<br>**5- Equações e inequações do 1º grau com uma variável em Q – Problemas do 1º grau**<br>Equações de 1º grau<br>1. Iniciação algébrica: sentenças e expressões<br>2. Sentenças abertas. Variáveis<br>3. Conjunto universo (U) conjunto verdade (V)<br>4. Equações do 1º grau com uma variável<br>5. Resoluções de equações do 1º grau com uma variável<br>Problema do 1º grau<br>1. Introdução<br>2. Resolução<br>Inequações do 1º grau – Problemas<br>1. Que é uma inequação?<br>2. Problemas de aplicação | racionais<br>8. Números inteiros relativos – Conjunto Z<br>9. Operações no conjunto Z<br>10. Iniciação algébrica<br>11. Equações do 1º grau com uma variável<br>12. Problemas do 1º grau com uma variável<br>13. Inequações do 1º grau com uma variável<br>14. Sistema de equação do 1º grau com duas variáveis<br>15. Razões<br>16. Proporções<br>17. Números proporcionais<br>18. Grandezas proporcionais<br>19. Regras de três<br>20. Porcentagem<br>21. Juros simples<br>22. Médias usuais<br>23. Sistemas de medidas não decimais<br>24. Geometria intuitiva e construções geométricas<br><br>Apêndice – Introdução à informática<br>Respostas dos exercícios propostos |

| | | |
|---|---|---|
| | **6- Sistema de equação do 1º grau com duas variáveis em Q X Q – Problemas de aplicação**<br>Relações binárias<br>1. Sentenças abertas com duas variáveis<br>2. Relações de equivalência<br>Sistema de equações de 1º grau<br>1. Conceito. Resolução<br>2. Técnicas operatórias para resolução de sistema de equações<br>3. Problemas de aplicação<br>**7- Razões e proporções - Aplicações usuais**<br>1. Razão entre dois números<br>2. Proporção<br>3. Transformações de uma operação por meio de operações<br>4. Proporção contínua - médias usuais<br>5. Raiz quadrada aproximada. Regra prática<br>6. Por cento<br>7. Porcentagem<br>**8- Números proporcionais – Problemas de aplicação**<br>1. Números diretamente proporcionais<br>2. Números inversamente proporcionais<br>3. Problemas de aplicação<br>**9- Grandezas proporcionais**<br>1. Grandezas diretamente proporcionais<br>2. Grandezas inversamente proporcionais<br>3. Regras de três: técnicas para resolver problemas<br>**10- Juros simples - Aplicações**<br>1. Considerações sobre empréstimo de dinheiro | |
| 7ª série | **1- Conjunto dos números reais R**<br>1. Números racionais; representação decimal exata ou periódica.<br>2. Números irracionais; representação decimal não exata ou não periódica.<br>3. Números reais; reta real; ordem em R<br>4. Operações no conjunto R; estrutura de corpo<br>5. Potenciação e radiciação no conjunto<br>**2- Cálculo algébrico em R**<br>1. Expressões algébricas; valor | **Álgebra**<br>1. Conjunto dos números reais R<br>2. Cálculo algébrico em R: monômios; polinômios; operações<br>3. Simplificação no cálculo algébrico<br>4. Estudo das frações algébricas<br>5. Equações algébricas redutíveis ao 1º grau – sistema de equações algébricas<br>6. Inequações algébricas redutíveis ao 1º grau – sistema de |

| | | |
|---|---|---|
| | numérico<br>2. Monômios<br>3. Operações com expressões algébricas<br>4. Produtos notáveis<br>5. Fatoração<br>6. m.d.c. e m.m.c. de expressões algébricas em R<br>7. Cálculo com expressões algébricas escritas sob forma de fração<br>8. Equações algébricas<br>9. Sistemas de equações algébricas<br>Exercícios de recapitulação de Álgebra<br>**3- Geometria**<br>1. Entes fundamentais, figuras geométricas<br>2. Relações e operações com conjuntos de pontos no plano<br>3. Ângulos<br>4. Polígonos I<br>5. Construção lógica da geometria<br>6. Polígonos II<br>7. Circunferência<br>**Apêndice-** Transformações Geométricas Planas; Grupo de Translação; Grupo das Rotações; Simetrias | inequações algébricas<br>**Geometria**<br>**Construções lógicas de geometrias**<br>1. Entes e proposições geométricas fundamentais<br>2. Novos entes geométricos: semi-reta, segmento e semiplano<br>3. Ângulos; Polígonos<br>4. Estudo dos triângulos; teoremas fundamentais; relações de desigualdade entre lados e ângulos<br>5. Teoria das paralelas; aplicações<br>6. Soma dos ângulos de um triângulo e de um polígono<br>7. Quadriláteros: paralelogramos e trapézios<br>8. Circunferência e círculos: correspondência entre arcos e ângulos; medidas<br><br>Apêndice- Introdução à Informática (Iniciação à Linguagem BASIC) |
| 8ª série | **1- Números reais: cálculo com números irracionais**<br>1. Cálculo (com radical)<br>2. Transformação de radicais. Aplicação<br>3. Adição e subtração de radicais<br>4. Multiplicação e divisão de radicais<br>5. Potenciação e radiciação de radicais<br>6. Casos simples de racionalização<br>Exercícios - Grupo 1<br>Exercícios - Grupo 2<br>Exercícios - Grupo 3<br>Exercícios - Grupo 4<br>**2- Equações do 2º grau**<br>1. Definição<br>2. Como resolver uma equação do 2º grau<br>3. Resolução de uma equação completa do 2º grau - fórmula<br>4. Aplicações práticas<br>5. Discussão das raízes de uma equação do 2º grau em R<br>6. Propriedades das relações entre coeficientes e raízes | 1. Técnicas operatórias com números irracionais<br>2. Equações do 2º grau<br>3. Equações biquadradas<br>4. Equações irracionais<br>5. Sistema simples do 2º grau. Problemas<br>6. Funções<br>7. Coordenadas cartesianas no plano. Gráfico das funções<br>8. Funções do 1º grau. Geometria analítica<br>9. Função trinômio do 2º grau<br>10. Inequações do 2º grau<br>11. Razão e proporção de segmentos. Teorema de Tales<br>12. Semelhanças de figuras geométricas<br>13. Razões trigonométricas de ângulos agudos<br>14. Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras |

| | | |
|---|---|---|
| | 7. Forma (S, P) de uma equação do 2º grau<br>8. Composição de uma equação do 2º grau, conhecida as raízes<br>9. Determinação de dois números dos quais se conhecem a soma e o produto<br>10. Problemas do 2º grau<br>Exercícios - Grupo 5<br>Exercícios - Grupo 6<br>Exercícios - Grupo 7<br>Exercícios - Grupo 8<br>**3- Funções**<br>1. Conceito<br>2. Aplicações práticas<br>3. Notação usual: domínio e imagem<br>4. Funções definidas por sentenças matemáticas (equações)<br>5. Aplicações práticas<br>Exercícios - Grupo 9<br>Exercícios - Grupo 10<br>**4- Gráfico das funções**<br>1. Coordenadas cartesianas no plano<br>2. Gráfico das funções (domínio R) definidas por equações<br>Exercícios - Grupo 11<br>**5- Funções do 1º grau**<br>1. Definição<br>2. Raiz ou zero de uma função do 1º grau<br>3. Iniciação à geometria analítica<br>4. Gráfico de equações do 1º grau com duas variáveis - Gráficos de sistemas<br>5. Aplicações práticas<br>Exercícios - Grupo 12<br>Exercícios - Grupo 13<br>Exercícios - Grupo 14<br>Exercícios - Grupo 15<br>**6- Razão e proporção de segmentos. Teorema de Tales**<br>1. Razão de segmentos<br>2. Aplicações práticas<br>3. Proporções de segmentos<br>4. Aplicações prática<br>5. Feixes de paralelas<br>6. Aplicações práticas<br>7. Tales no triângulo<br>Exercícios - Grupo 16<br>Exercícios - Grupo 17<br>**7- Semelhanças de figuras geométricas**<br>1. Semelhança como correspondência<br>2. Semelhança de triângulo quaisquer | 15. Relações métricas num triângulo qualquer<br>16. Relações métricas no círculo<br>17. Polígonos regulares<br>18. Medida da circunferência<br><br>Apêndice- Introdução à informática (Iniciação a Linguagem BASIC) |

| | | |
|---|---|---|
| | 3. Semelhança entre polígonos<br>4. Principais teoremas sobre triângulos semelhantes<br>5. Aplicações práticas<br>Exercícios - Grupo 18<br>Exercícios - Grupo 19<br>**8- Similitude central ou homotetia**<br>Exercícios - Grupo 20<br>**9- Razões trigonométricas de ângulos agudo**<br>1. Seno cosseno e tangente de um ângulo<br>2. Aplicações práticas<br>Exercícios - Grupo 21<br>**10- Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras**<br>1. Com vistas ao Teorema de Pitágoras<br>2. Consequências do T.9<br>3. Aplicações práticas<br>4. Práticas usuais<br>5. Projeção ortogonal de um ponto e de um segmento sobre uma reta<br>Exercícios - Grupo 22<br>Exercícios - Grupo 23<br>**11- Relações métricas num triângulo qualquer**<br>1. Relação com o ângulo agudo<br>2. Relação com o ângulo obtuso<br>3. Acerca da natureza de um triângulo<br>4. Acerca das razões trigonométricas seno e cosseno<br>Exercícios - Grupo 24<br>**12- Relações métricas no círculo**<br>1. Primeira relação: corda com corda<br>2. Segunda relação: secante com secante<br>3. Terceira relação: secante com tangente<br>4. Potência de um ponto em relação a uma circunferência<br>5. Aplicações práticas<br>Exercícios - Grupo 25<br>**13- Polígonos regulares**<br>1. Definição<br>2. Polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência<br>3. Elementos principais de um polígono regular<br>4. Construção do quadrado: cálculo da medida do lado (l4) e do apótema (a4) do quadrado inscrito | |

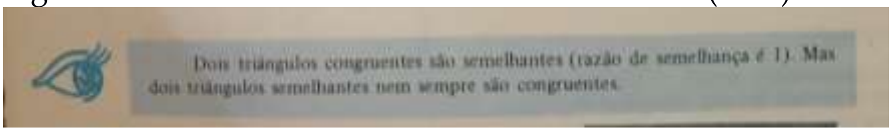
| | | |
|---|---|---|
| | 5. Construção do hexágono regular: cálculo das medidas do lado (l6) e do apótema (a6) do hexágono regular inscrito<br>6. Construção do triângulo equilátero: cálculo das medidas do lado (l3) e do apótema (a3) do triângulo equilátero inscrito<br>7. Construção do decágono regular: cálculo da medida do lado (l3) do decágono regular inscrito<br>8. Cálculo da medida do lado do polígono regular de 2n lados (l2n)<br>Exercícios - Grupo 26<br>Exercícios - Grupo 27<br>**14- Medida da circunferência**<br>1. Medida-comprimento da circunferência<br>2. Razão da medida comprimento (C) da circunferência para medida (2r) de seu diâmetro<br>3. Medida-comprimento de um arco da circunferência<br>4. Cálculo do $\pi$ por métodos elementares<br>Exercícios - Grupo 28<br>**15- Áreas de regiões planas**<br>1. Regiões poligonais<br>2. Área de uma região poligonal<br>3. Dois novos postulados acerca de áreas<br>4. Alguns resultados de importância sobre área de triângulos<br>5. Área do círculo; aplicações<br>6. Área de um setor circular<br>Exercícios - Grupo 29<br>Exercício de recapitulação de Geometria | |

Fonte: Sangiorgi (1979; 1985).

Podemos constatar que o livro da 5ª série (1979a) consta a geometria, diferentemente da coleção de 1985 que não aborda esse conteúdo. No entanto, o livro da 6ª série que não trouxe esse conteúdo na coleção de 1979 adotou na coleção de 1985. Na coleção *Matemática* (1979) os livros da 7ª e 8ª série são os mais extensos na quantidade de assuntos quando comparados com os livros da 5ª e 6ª séries dessa coleção; no que diz respeito à geometria essa constatação também é válida, tanto para a geometria de Euclides quanto pelas Transformações. O livro da 7ª série aborda também um capítulo intitulado “Relações e operações com conjuntos de pontos no plano” sobre conceitos geométricos, correlacionando noções de conjuntos com conceitos de interseção, retas paralelas, concorrentes, entre outros.

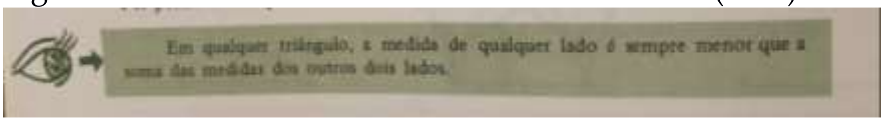
Os livros apresentam trechos em destaques (quadros coloridos) para chamar a atenção do aluno referente a conceitos e outras observações sobre o conteúdo estudado.

Figura 25 - Lembrete ao aluno no livro da 7ª série (1979)[76]




Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 105.

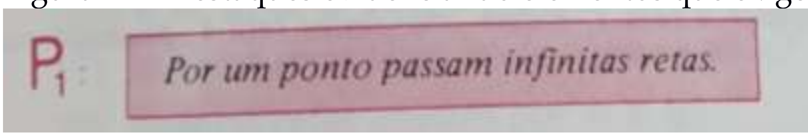
Figura 26 – Lembrete ao aluno no livro da 8ª série (1979)




Fonte: Sangiorgi, 1979d, p. 162.

Ao passo que na coleção *Matemática* (1985) essas figuras deixam de existir, constando apenas os quadros coloridos, mantendo apenas uma cor para toda coleção.

Figura 27 – Destaques evidenciando elementos que exigem mais atenção



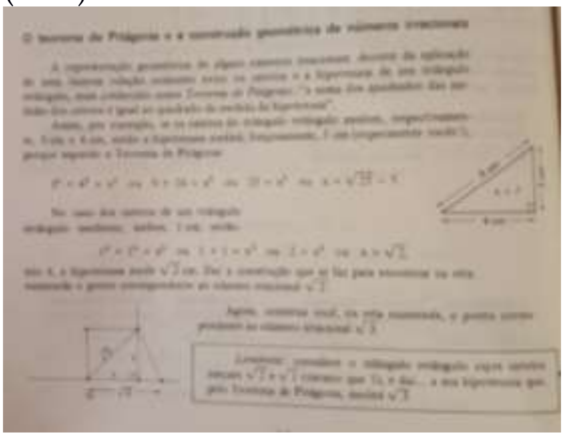

Fonte: Sangiorgi, 1985c, p. 81.

A geometria aparece também conjuntamente a outros conteúdos, a exemplo, na construção dos números irracionais na reta numérica.

---

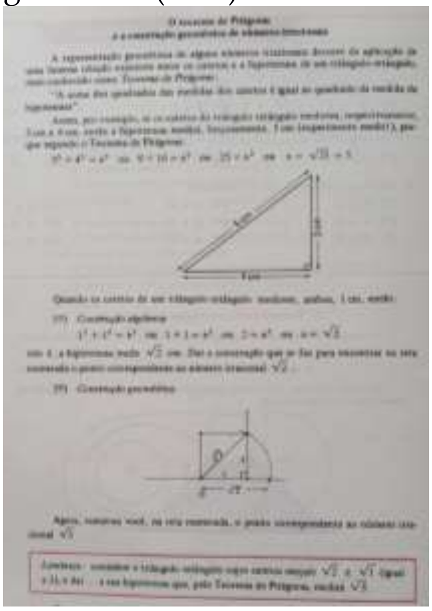
[76] Segundo Sangiorgi, no encarte de divulgação da Coleção Matemática para Cursos de 1º Grau (1972) a imagem do dedo apontando é denotada como “lembrete amigo”, o olho chama a atenção para “ficar atento”, bem como a presença de outras imagens que tinham determinadas finalidades ao longo do miolo do livro. Disponível no Repositório Institucional da UFSC (APOS 1 3 1351).

Figura 28 - Irracionais e geometria (1979)



Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 14.

Figura 29 - Irracionais e geometria (1985)

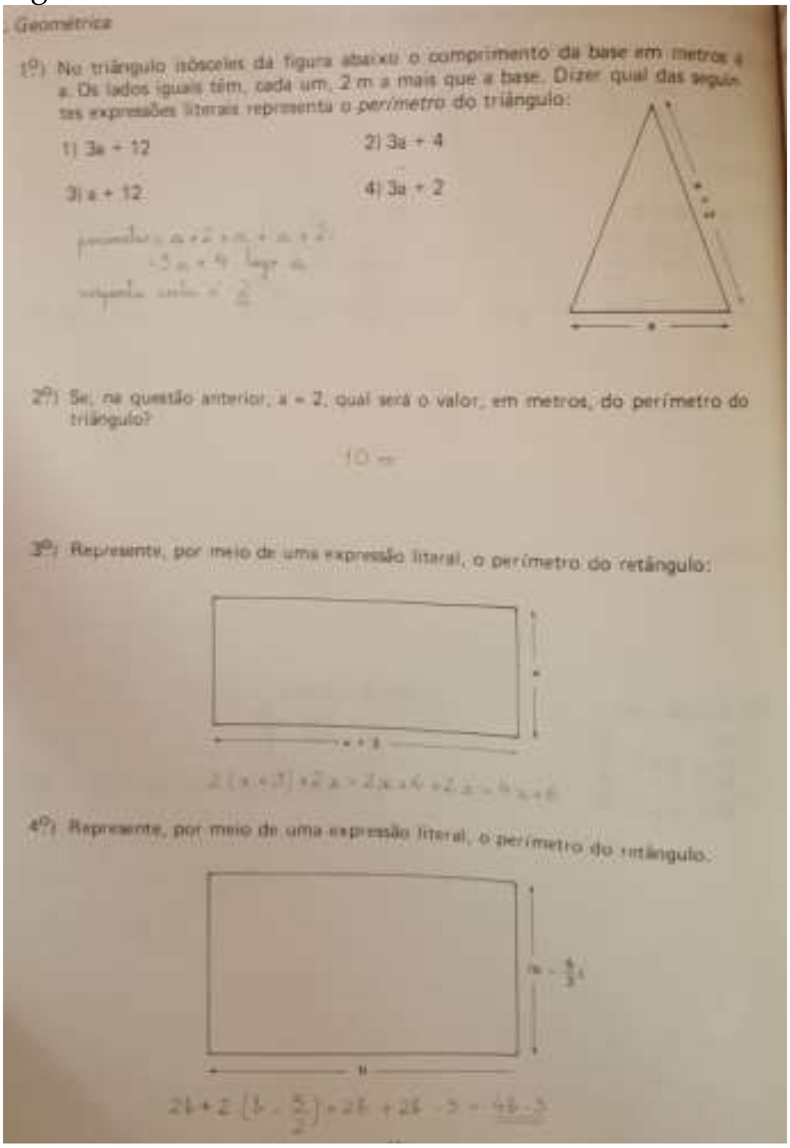


Fonte: Sangiorgi, 1985c, p. 8.

Note que a geometria é utilizada na verificação de um determinado número pertencer ao conjunto em estudo, os irracionais. A geometria é explorada demarcando a localização dos irracionais $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ se fazendo necessário o conhecimento do Teorema de Pitágoras. As duas coleções mantém o mesmo enunciado, exemplo e ilustrações.

No capítulo *Cálculo algébrico em R* (livro da 7ª série, 1979c), há uma seção denominada *Tarefa Especial* em que a geometria e a álgebra estão intercaladas na resolução de questões de perímetro do triângulo e do retângulo.

Figura 30 - Perímetro



Geométrica

1º) No triângulo isósceles da figura abaixo o comprimento da base em metros é a. Os lados iguais têm, cada um, 2 m a mais que a base. Dizer qual das seguintes expressões literais representa o *perímetro* do triângulo:

1) $3a + 12$ 2) $3a + 4$

3) $a + 12$ 4) $3a + 2$

2º) Se, na questão anterior, $a = 2$, qual será o valor, em metros, do perímetro do triângulo?

10 m

3º) Represente, por meio de uma expressão literal, o perímetro do retângulo:

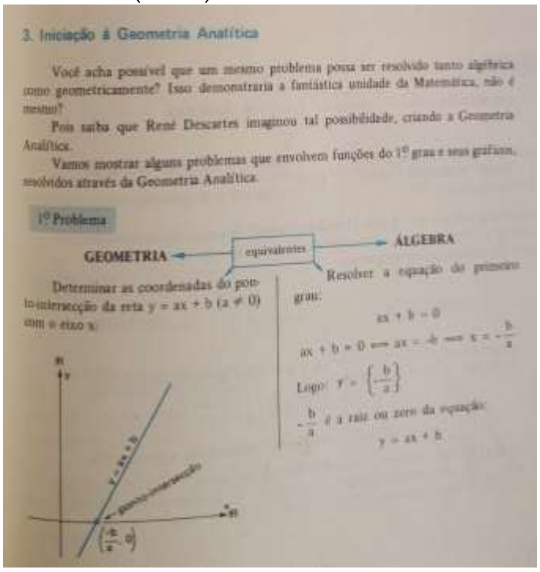
4º) Represente, por meio de uma expressão literal, o perímetro do retângulo.

Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 40.

Exige, nesse caso, que o aluno conheça característica de triângulos isósceles e retângulo, no sentido de perceber o valor suprimido para então montar a expressão algébrica e solucioná-la.

Ainda em relação à integração da geometria com outras áreas da matemática, podemos destacar a geometria analítica. A primeira menção à geometria no livro da 8ª série *Matemática* (1979) está no capítulo *Gráfico das Funções*, na qual é destinado um subtópico denominado *Iniciação à Geometria Analítica*, em que o autor comenta sobre a possibilidade de trabalhar questões utilizando tanto a álgebra quanto a geometria, ele destaca ainda que essa possibilidade está atrelada a unidade da Matemática e ela está associada aos conjuntos e a lógica discutida no MMM.

Figura 31 - Iniciação à Geometria analítica (1979)


3. Iniciação à Geometria Analítica

Você acha possível que um mesmo problema possa ser resolvido tanto algébrica como geometricamente? Isso demonstraria a fantástica unidade da Matemática, não é mesmo?

Pois saiba que René Descartes imaginou tal possibilidade, criando a Geometria Analítica.

Vamos mostrar alguns problemas que envolvem funções do 1º grau e seus gráficos, resolvidos através da Geometria Analítica.

1º Problema

GEOMETRIA ← equivalentes → ÁLGEBRA

Determinar as coordenadas do ponto-intersecção da reta $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ com o eixo x.

Resolver a equação do primeiro grau:

$$ax + b = 0$$

$$ax + b = 0 \Longrightarrow ax = -b \Longrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Logo: $V = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

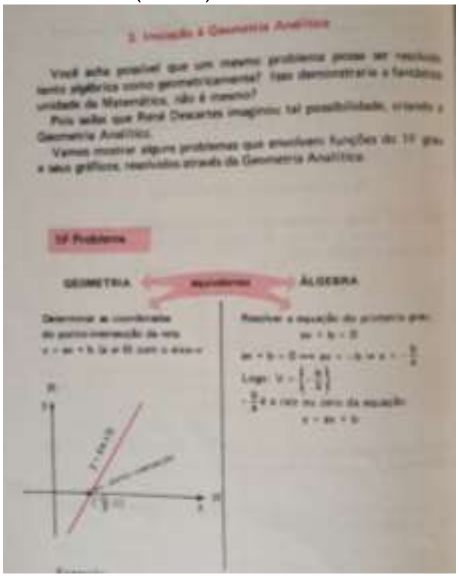
$-\frac{b}{a}$ é a raiz ou zero da equação:

$$y = ax + b$$



Fonte: Sangiorgi, 1979d, p. 69.

Figura 32 - Iniciação à Geometria analítica (1985)



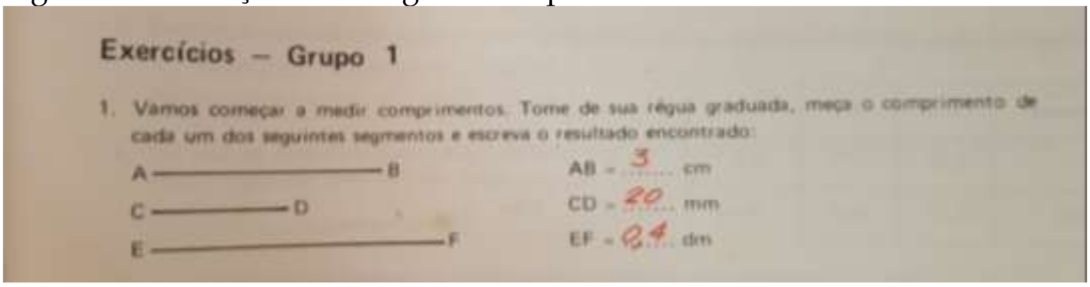

Fonte: Sangiorgi, 1985d, p. 70.

Podemos constatar que a geometria analítica permanece inalterada na coleção Matemática (1985), tanto em termos de introdução do conteúdo quanto nas ilustrações e exercícios que acompanham.

Uma mudança perceptível pode ser constatada no livro da 5ª série na coleção *Matemática* (1979) em que a geometria consta em apêndice e está integrada com as unidades de medidas, sendo elas: de comprimento, de superfície e de volume. As medidas de comprimento são articuladas com as linhas poligonais, não fazendo referência aos conceitos topológicos de interior e fronteira, as quais o autor direciona para exploração do conhecimento utilizando o grupo um (Figura 33) de atividades que solicita do aluno o uso de régua graduada.

Quanto aos polígonos abordados, são os triângulos e quadriláteros. Em relação aos primeiros, são mencionados os triângulos equiláteros e isósceles, apenas; no que concerne aos quadriláteros, são apresentados paralelogramos, retângulos, losangos, quadrados e trapézios, os quais são utilizados para discutir perímetros, bem como as medidas de comprimentos e suas transformações.

Figura 33 - Medições com régua e compasso




Fonte: Sangiorgi, 1979a, p. 187.

Entretanto, na coleção *Matemática* (1985), de acordo com o sumário, não foram abordados os conteúdos de geometria nesta mesma série.

A coleção *Matemática* (1985) apresenta Plano de curso, em que constam os objetivos gerais e específicos, assim como um quadro em que informa os objetivos instrucionais e cronograma, em bimestres, dos conteúdos contemplados em cada obra. Este é um diferencial nessa obra tendo em vista que a coleção *Matemática* (1979) não tem essa característica.

Outro fato que podemos destacar é a presença de páginas ao final do livro com as respostas das questões, que passa a existir na coleção de 1985, diferenciando-se da coleção de 1979.

### 4.3 A abordagem intuitiva e dedutiva nas coleções de Sangiorgi

Nesta seção apresentamos uma discussão a respeito da abordagem intuitiva e dedutiva nas coleções analisadas, mostrando como Sangiorgi se apropriou desses conceitos, na qual destacamos possíveis mudanças e permanências por meio do estudo comparativo entre as coleções.

Como Sangiorgi destaca em entrevista e aborda em suas obras, a Geometria de Euclides por meio da intuição (o autor se refere à geometria métrica), da dedução (método hipotético-dedutivo) e do tratamento moderno (como as estruturas algébricas, por exemplo), consideramos pertinente destacar seu posicionamento sobre esses elementos que constam em suas coleções.

Em relação à escolha pela Geometria de Euclides, ele a justificou em uma entrevista concedida ao jornal o Estado de São Paulo (1962), devido a sua importância e reconhecimento, ao dizer que "a glória de Euclides é imorredoura. Estudiosos de matemática sabem desse fato e, às vezes, por exprimirem-se com certa ênfase nas atuais reconstruções da geometria euclidiana, são mal interpretadas", Sangiorgi acrescenta ainda que:

> Todas as excelentes reformulações da geometria feita através dos tempos, onde se destacaram em épocas não tão distantes [...] a obra de Euclides sempre foi a "leit-motiv". É evidente que o tratamento moderno dado a geometria, vale-se das estruturas que atualmente a matemática dispõe. A estrutura algébrica - de espaço vetorial – normalmente invocada na atual abordagem da geometria e que vem enriquecendo os trabalhos experimentais dos Grupos de Estudos europeus e americanos, fixam-se em processos que aprimoram a maneira de apresentar os assuntos pertinentes à geometria. (SANGIORGI, 1962).

O tratamento moderno, por meio das estruturas algébricas mencionadas por Sangiorgi, permanece nas coleções que analisamos, as páginas destinadas às transformações geométricas destacam essas características, como as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e inverso, constituindo o grupo das transformações geométricas planas.

Na coleção *Matemática* (1985), Sangiorgi apresenta uma nota ao mestre destacando as críticas sofridas na década de 1970, referente à metodologia e filosofia abordada no ensino de matemática. O autor destaca também o ensino de Geometria, que segundo ele, o "[...] tratamento dedutivo de há muito não vem participando da formação de nossos alunos" (SANGIORGI, 1985a, p. 1). O autor tem como objetivos específicos da obra

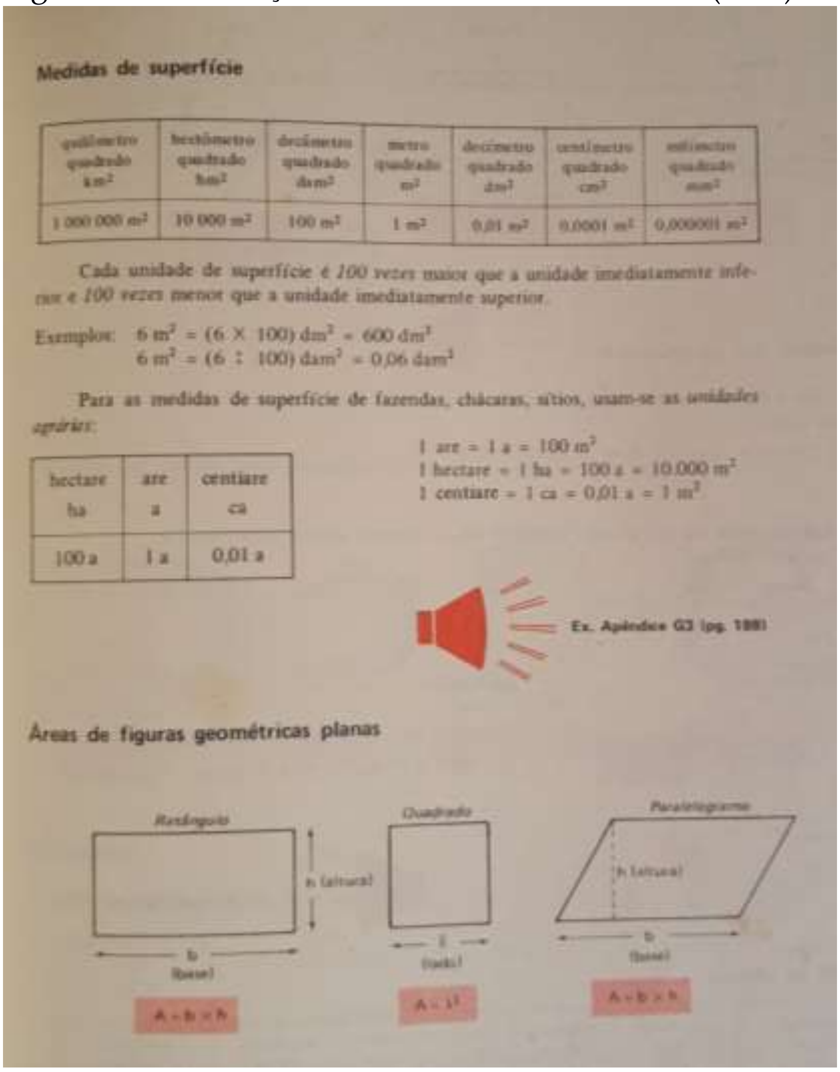
> Adquirir e dominar a linguagem e o raciocínio lógico-matemático; exercitar-se nos campos **numérico** (cálculo e

> resolução de problemas), **algébrico** (cálculo e principais estruturas) e **geométrico** (geometria métrica e geometria dedutiva). (SANGIORGI, 1985c, s.p., grifos do autor).

E como um dos objetivos instrucionais para a geometria Sangiorgi tem como finalidade "construir **logicamente** a Geometria (euclidiana), através do desenvolvimento sistemático de raciocínios hipotético-dedutivos, a partir de **postulados básicos** e da demonstração de **teoremas fundamentais**" (SANGIORGI, 1985c, [s. p.], grifos do autor), essas características estão muito bem demarcadas ao longo da obra.

No livro da 5ª série (1979a) Sangiorgi correlaciona as propriedades das figuras geométricas, o cálculo de área e volume, com o sistema métrico decimal, exposto em tabela.

Figura 34 – A intuição métrica no livro da 5ª série (1979)



**Medidas de superfície**

| quilômetro quadrado $km^2$ | hectômetro quadrado $hm^2$ | decâmetro quadrado $dam^2$ | metro quadrado $m^2$ | decímetro quadrado $dm^2$ | centímetro quadrado $cm^2$ | milímetro quadrado $mm^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 000 000 $m^2$ | 10 000 $m^2$ | 100 $m^2$ | 1 $m^2$ | 0,01 $m^2$ | 0,0001 $m^2$ | 0,000001 $m^2$ |

Cada unidade de superfície é *100 vezes* maior que a unidade imediatamente inferior e *100 vezes* menor que a unidade imediatamente superior.

Exemplos: $6\ m^2 = (6 \times 100)\ dm^2 = 600\ dm^2$
$6\ m^2 = (6 : 100)\ dam^2 = 0{,}06\ dam^2$

Para as medidas de superfície de fazendas, chácaras, sítios, usam-se as *unidades agrárias*:

| hectare ha | are a | centiare ca |
|---|---|---|
| 100 a | 1 a | 0,01 a |

1 are = 1 a = 100 $m^2$
1 hectare = 1 ha = 100 a = 10.000 $m^2$
1 centiare = 1 ca = 0,01 a = 1 $m^2$

Ex. Apêndice G3 (pg. 198)

**Áreas de figuras geométricas planas**

Fonte: Sangiorgi, 1979a, p. 183.

O apêndice no livro da 5ª série (1979a) denominado *Geometria intuitiva: medidas de figuras geométricas* está dividido em duas partes, a primeira com características da Geometria de Euclides e a segunda com exercícios.

Quanto à coleção de 1985, no livro da 5ª série, conjecturamos que a geometria não foi abordada tendo em vista a permanência dos conteúdos nos capítulos e alteração apenas no apêndice, antes constando da geometria intuitiva e na coleção posterior com conteúdos de informática.

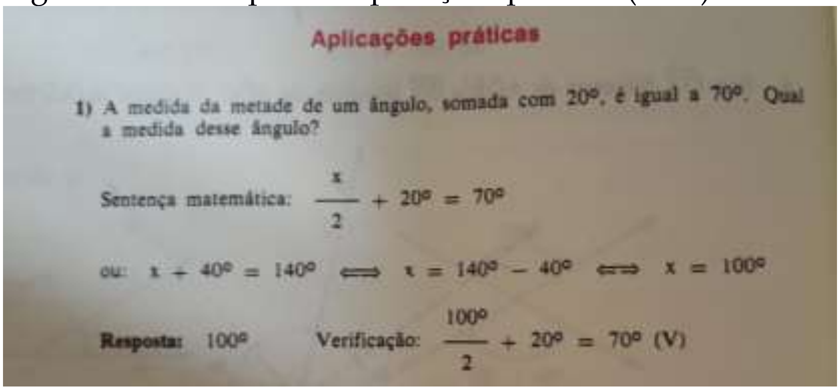
Por não constar a geometria no livro da 6ª série (1979b) consequentemente não há abordagem intuitiva neste livro, e em relação à obra da 6ª série de (1985b) o intuitivo é por meio da métrica, com a utilização da régua e compasso. Na sessão 4.6 ampliamos a discussão sobre o uso da régua e compasso, por essa razão não será feita aqui.

Para o ensino de ângulos, os recursos anteriormente mencionados, são utilizados tanto na introdução do conteúdo quanto na resolução das questões propostas, podendo ser configurada como indispensável.

Outro fato que cabe destaque nessa obra é a abordagem algébrica. Essas características continuam para os tópicos Problemas[77], em que é apresentado um ângulo e explorada a ideia de metade, dobro, triplo, suplemento, complemento e replemento com a linguagem algébrica; Aplicações práticas (Figura 35), já solucionadas, e Tarefas, que são atividades para o aluno praticar, também com a presença forte da álgebra, que era característica marcante do MMM e de acordo com Leme da Silva (2008b, p. 70), em análise do livro de Sangiorgi *Matemática curso moderno – 3º volume,* (SANGIORGI, 1969), "[…] pensar sobre a Geometria, assim como sobre o ensino de geometria, significa trata-la por meio de estruturas algébricas".

[77] Segue um exemplo de questões expostas nesse tópico.
Representado por x a medida em graus de um ângulo qualquer temos, em linguagem simbólica:
Dobro de x: 2x
Dobro do complemento de x: 2(90 − 2x). (SANGIORGI, 1985b, p. 170).

Figura 35 – Exemplo de Aplicações práticas (1985)


**Aplicações práticas**

1) A medida da metade de um ângulo, somada com 20°, é igual a 70°. Qual a medida desse ângulo?

Sentença matemática: $\frac{x}{2} + 20° = 70°$

ou: $x + 40° = 140° \iff x = 140° - 40° \iff x = 100°$

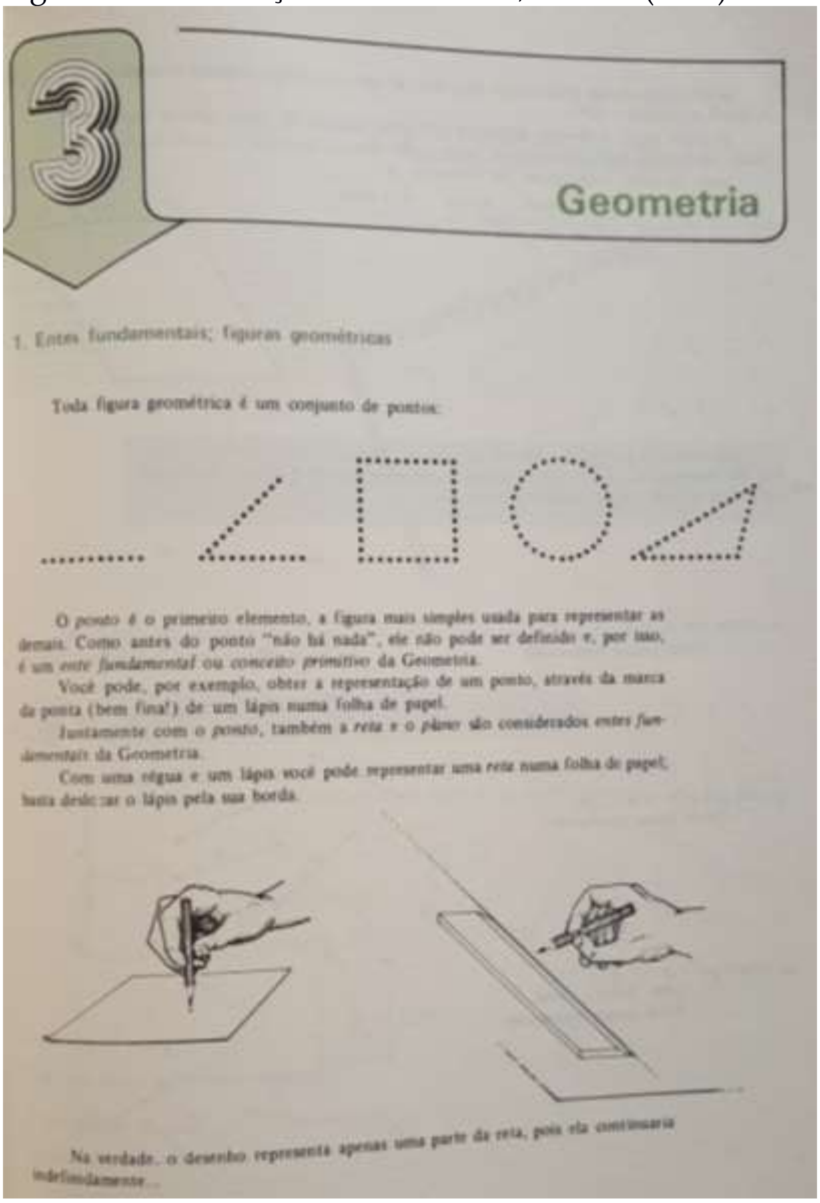
**Resposta:** 100° Verificação: $\frac{100°}{2} + 20° = 70°$ (V)

Fonte: Sangiorgi, 1985b, p. 170.

Sangiorgi no livro da 7ª série, *Matemática* (1979c) relembra ao aluno sobre o que já foi estudado em geometria e discute a importância da dedução ao afirmar que "a demonstração – que é um processo dedutivo – generaliza e permite a construção lógica da geometria" (SANGIORGI, 1979c, p. 180), ele acrescenta que só a demonstração é que garantirá a validade da propriedade de um elemento, generalizando e fazendo valer para o mesmo objeto com tamanho e posicionamento distinto, a exemplo: os triângulos.

No capítulo específico para a geometria, Sangiorgi inicia com noções intuitivas dos entes fundamentais – pontos, retas e planos –, sendo o ponto representado por uma marca deixada pela ponta de um lápis no papel, e as retas pela marca no papel de um lápis passando pela borda de uma régua. Logo de início ressalta que "toda figura geométrica é um conjunto de pontos" (SANGIORGI, 1979c, p. 113).

Figura 36 - Introdução da Geometria, 7ª série (1979)



3

Geometria

1. Entes fundamentais; figuras geométricas

Toda figura geométrica é um conjunto de pontos:

O *ponto* é o primeiro elemento, a figura mais simples usada para representar as demais. Como antes do ponto "não há nada", ele não pode ser definido e, por isso, é um *ente fundamental* ou *conceito primitivo* da Geometria.

Você pode, por exemplo, obter a representação de um ponto, através da marca da ponta (bem fina!) de um lápis numa folha de papel.

Juntamente com o *ponto*, também a *reta* e o *plano* são considerados *entes fundamentais* da Geometria.

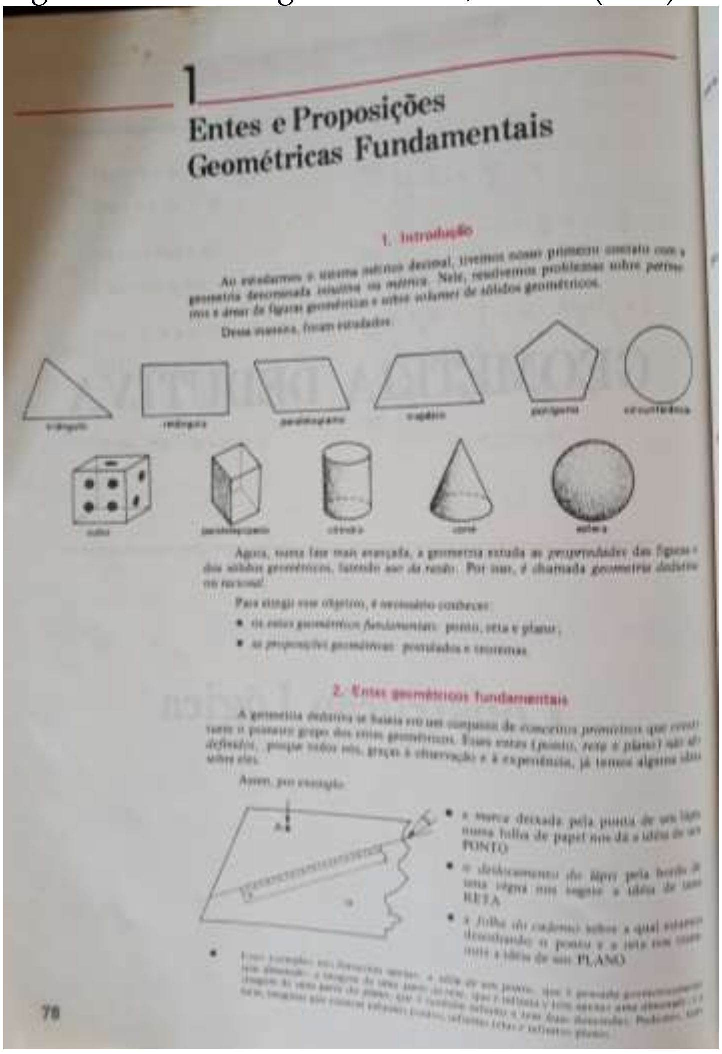
Com uma régua e um lápis você pode representar uma *reta* numa folha de papel; basta deslizar o lápis pela sua borda.

Na verdade, o desenho representa apenas uma parte da reta, pois ela continuaria indefinidamente...

Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 113.

Nos livros das 7ªs séries, a coleção (1979c) faz relação explícita dos entes geométricos com o conjunto de pontos, enquanto que na coleção de 1985, ele faz menção implícita dessa abordagem, e no livro da 5ª série (1985), ao abordar o tópico *Geometria intuitiva: medidas de figuras geométricas,* o autor não faz essa relação com o conjunto de pontos.

Figura 37 – Abordagem intuitiva, 7ª série (1985)



1

Entes e Proposições Geométricas Fundamentais

1. Introdução

2. Entes geométricos fundamentais

78

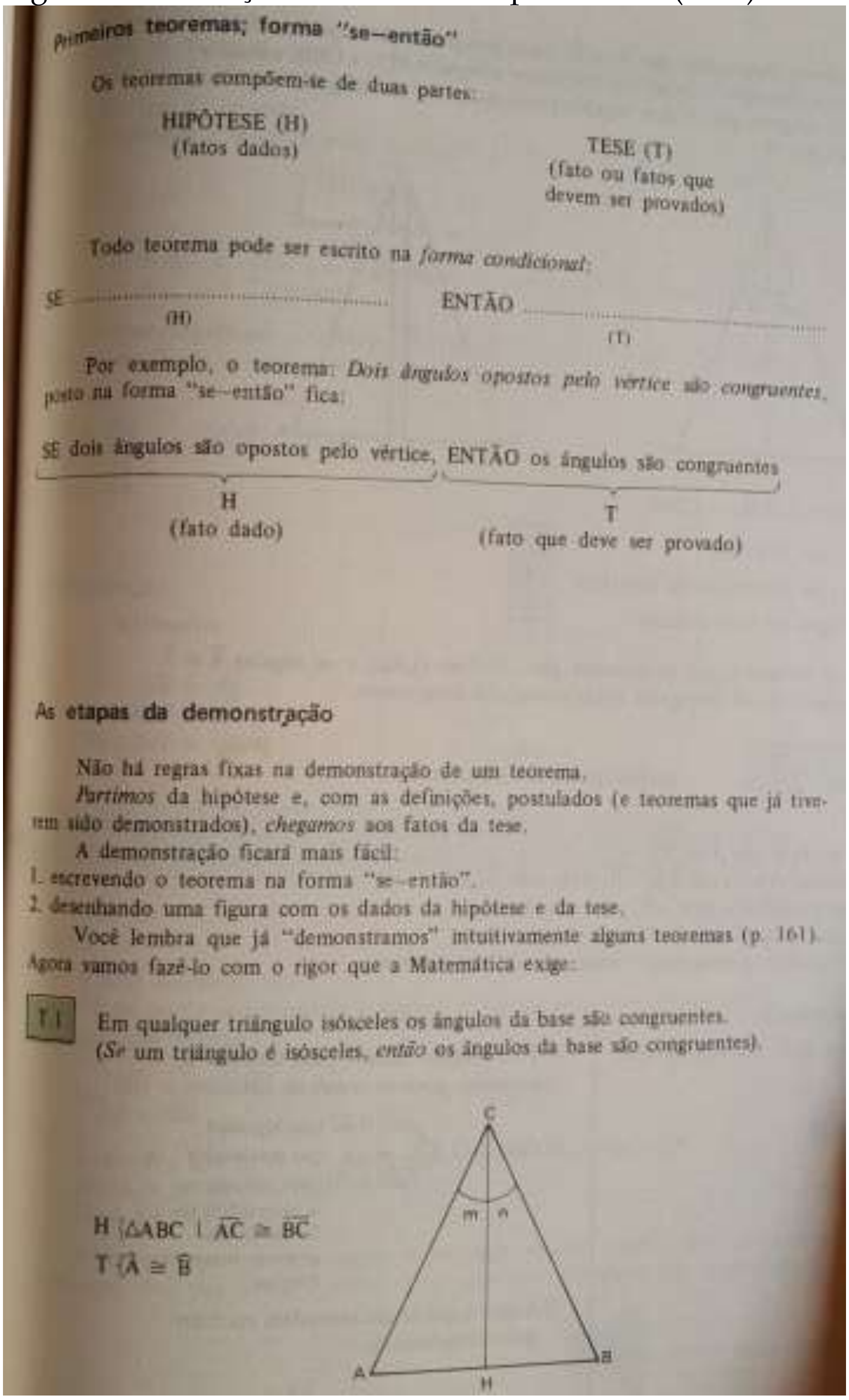
Fonte: Sangiorgi, 1985c, p. 78.

Note que na 7ª série (1985c) os entes geométricos são apresentados em traços contínuos e os textos que acompanham o conteúdo não remetem a ideia de conjunto. Para os livros da 7ª série, em ambas as coleções, a dedução tem maior ênfase comparada à intuição, em que esta última é utilizada para breve introdução.

Após a introdução dos entes e proposições fundamentais, são utilizados os instrumentos mencionados para a construção de segmentos, ponto médio, ângulos e bissetriz.

Nessa série o uso de recursos da intuição se limita à introdução, como mencionado anteriormente, na sequência predomina a abordagem dedutiva, em que os teoremas são abordados de forma expressiva, seguidos da demonstração e representação geométrica. Nesse capítulo ao discutir sobre teoremas e postulados há menção sobre existência de outra geometria, a não euclidiana, no entanto não consta maior detalhamento neste sentido.

Figura 38 - Iniciação aos teoremas e postulados (1979)



**Primeiros teoremas; forma "se—então"**

Os teoremas compõem-se de duas partes:

HIPÓTESE (H) (fatos dados) — TESE (T) (fato ou fatos que devem ser provados)

Todo teorema pode ser escrito na *forma condicional*:

SE ............ (H) ENTÃO ............ (T)

Por exemplo, o teorema: *Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes*, posto na forma "se—então" fica:

$\underbrace{\text{SE dois ângulos são opostos pelo vértice,}}_{\substack{H \\ \text{(fato dado)}}}$ $\underbrace{\text{ENTÃO os ângulos são congruentes}}_{\substack{T \\ \text{(fato que deve ser provado)}}}$

**As etapas da demonstração**

Não há regras fixas na demonstração de um teorema.

*Partimos* da hipótese e, com as definições, postulados (e teoremas que já tenham sido demonstrados), *chegamos* aos fatos da tese.

A demonstração ficará mais fácil:

1. escrevendo o teorema na forma "se—então".
2. desenhando uma figura com os dados da hipótese e da tese.

Você lembra que já "demonstramos" intuitivamente alguns teoremas (p. 161).
Agora vamos fazê-lo com o rigor que a Matemática exige:

T.1 Em qualquer triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.
(*Se* um triângulo é isósceles, *então* os ângulos da base são congruentes).

H $\{\triangle ABC \mid \overline{AC} \cong \overline{BC}$

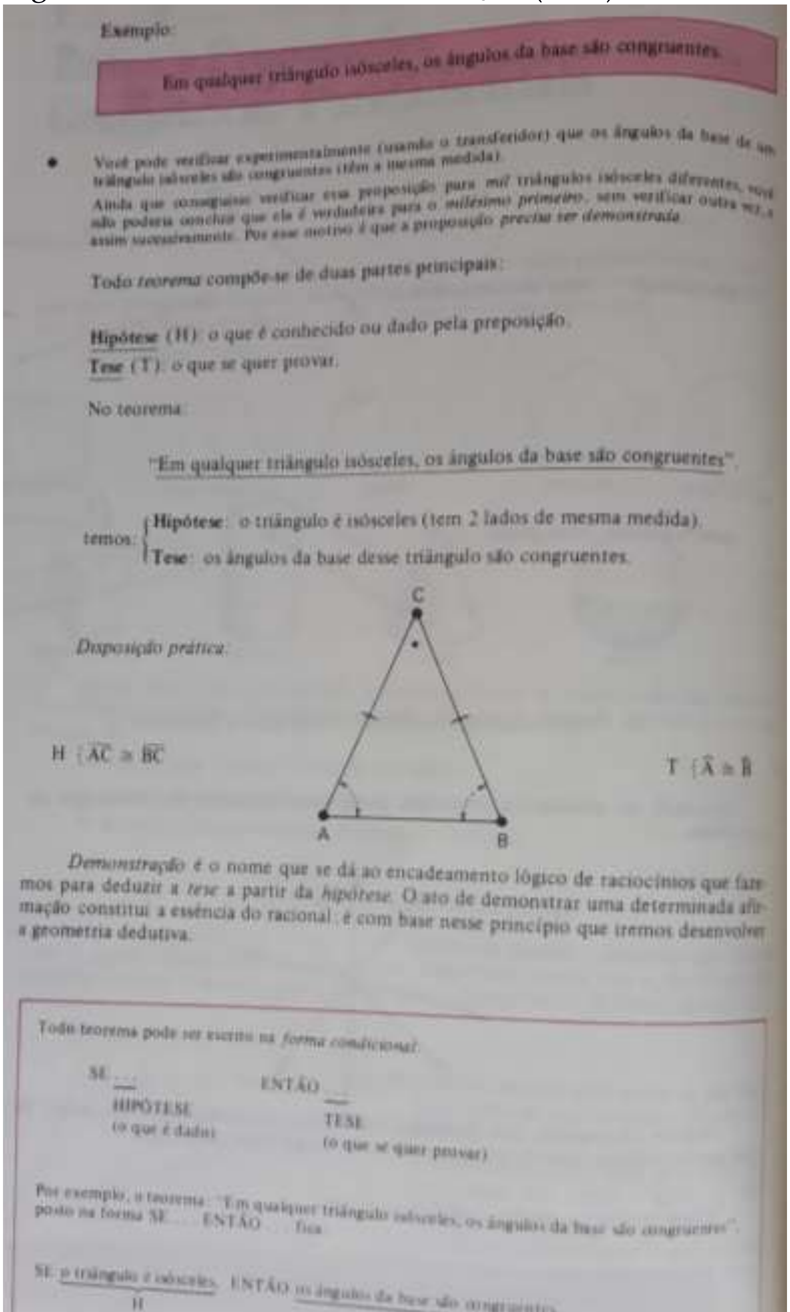
T $\{\hat{A} \cong \hat{B}$



Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 183.

O autor apresenta uma preocupação com o processo de aprendizado do aluno e com isso a proposta no livro ao ensinar o educando a demonstrar inicia na diferenciação entre postulados e teoremas, apresentando as etapas que configuram a demonstração, e após o conteúdo apresentado na Figura 38 Sangiorgi segue com outros exemplos de demonstrações almejando que o aluno aprenda a demonstrar, cuidado significativo que permeia as obras desse autor. A mesma orientação segue no livro da 7ª série (1985c)

Figura 39 - Método de demonstração (1985)


Exemplo:

Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

- Você pode verificar experimentalmente (usando o transferidor) que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes (têm a mesma medida).
Ainda que conseguisse verificar essa proposição para *mil* triângulos isósceles diferentes, você não poderia concluir que ela é verdadeira para o *milésimo primeiro*, sem verificar outra vez, e assim sucessivamente. Por esse motivo é que a proposição *precisa ser demonstrada*.

Todo *teorema* compõe-se de duas partes principais:

Hipótese (H): o que é conhecido ou dado pela preposição.
Tese (T): o que se quer provar.

No teorema:

"Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes"

temos: Hipótese: o triângulo é isósceles (tem 2 lados de mesma medida). Tese: os ângulos da base desse triângulo são congruentes.

*Disposição prática:*

$H\ \{\overline{AC} \cong \overline{BC}$

$T\ \{\hat{A} \cong \hat{B}$

*Demonstração* é o nome que se dá ao encadeamento lógico de raciocínios que fazemos para deduzir a *tese* a partir da *hipótese*. O ato de demonstrar uma determinada afirmação constitui a essência do racional; é com base nesse princípio que iremos desenvolver a geometria dedutiva.

Todo teorema pode ser escrito na *forma condicional*:

SE ___ (HIPÓTESE (o que é dado)) ENTÃO ___ (TESE (o que se quer provar))

Por exemplo, o teorema: "Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes", posto na forma SE ... ENTÃO ... fica:

SE $\underbrace{\text{o triângulo é isósceles}}_{\text{H (dado)}}$, ENTÃO $\underbrace{\text{os ângulos da base são congruentes}}_{\text{T (o que se quer provar)}}$.

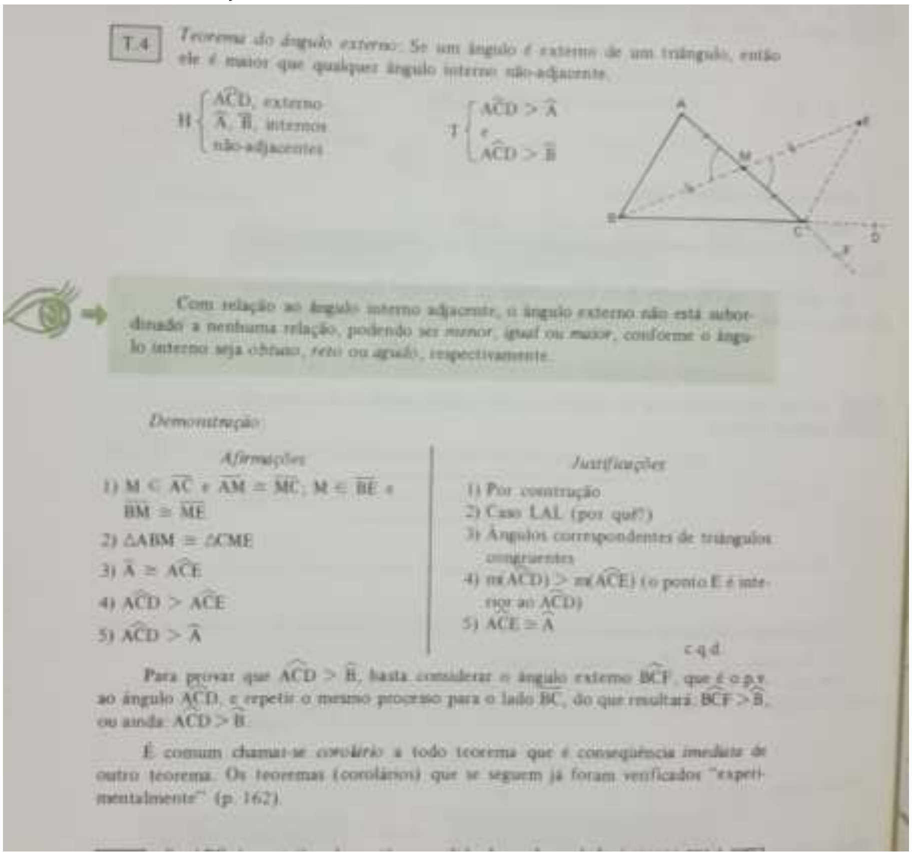
Fonte: Sangiorgi, 1985c, p. 80.

A preposição lógica empregada é considerada como fundamental para o desenvolvimento da demonstração, partindo da condicional hipotética e por meio da racionalidade chega-se a tese. Percebe-se, assim, uma permanência da preocupação do autor em oportunizar, nessa coleção (1985), uma explicação acerca do desenvolvimento de uma demonstração. Nesse sentido constatamos que o autor considera pertinente a permanência das demonstrações no processo de ensino e aprendizagem por meio de suas coleções.

As circunferências também são apresentadas por meio de teoremas e postulados em ambos os livros da 7ª série. É possível perceber que a geometria adotada no capítulo está embasada na Geometria de Euclides, que de acordo com Matos e Leme da Silva (2011) essa geometria é a que se encontra no período que antecede ao MMM e Oliveira (2015) complementa que ela continua durante a matemática moderna e ao que tudo indica posteriormente ao movimento também.

Constatamos também que, assim como Castrucci, Sangiorgi pode ter sido influenciado pelo livro de Moise e Downs Junior na elaboração da coleção *Matemática* (1979).

Figura 40 – Comparativo de demonstração entre a coleção de Sangiorgi e Moise e Downs Júnior



T.4 *Teorema do ângulo externo*: Se um ângulo é externo de um triângulo, então ele é maior que qualquer ângulo interno não-adjacente.

H $\begin{cases} A\hat{C}D, \text{ externo} \\ \hat{A}, \hat{B}, \text{ internos} \\ \text{não-adjacentes} \end{cases}$ T $\begin{cases} A\hat{C}D > \hat{A} \\ \text{e} \\ A\hat{C}D > \hat{B} \end{cases}$



Com relação ao ângulo interno adjacente, o ângulo externo não está subordinado a nenhuma relação, podendo ser *menor*, *igual* ou *maior*, conforme o ângulo interno seja *obtuso*, *reto* ou *agudo*, respectivamente.

*Demonstração*

| *Afirmações* | *Justificações* |
|---|---|
| 1) $M \in \overline{AC}$ e $\overline{AM} \cong \overline{MC}$; $M \in \overline{BE}$ e $\overline{BM} \cong \overline{ME}$ | 1) Por construção |
| 2) $\triangle ABM \cong \triangle CME$ | 2) Caso LAL (por quê?) |
| 3) $\hat{A} \cong A\hat{C}E$ | 3) Ângulos correspondentes de triângulos congruentes |
| 4) $A\hat{C}D > A\hat{C}E$ | 4) $m(A\hat{C}D) > m(A\hat{C}E)$ (o ponto E é interior ao $A\hat{C}D$) |
| 5) $A\hat{C}D > \hat{A}$ | 5) $A\hat{C}E \cong \hat{A}$ |

c.q.d.

Para provar que $A\hat{C}D > \hat{B}$, basta considerar o ângulo externo $B\hat{C}F$, que é o.p.v. ao ângulo $A\hat{C}D$, e repetir o mesmo processo para o lado $\overline{BC}$, do que resultará $B\hat{C}F > \hat{B}$, ou ainda $A\hat{C}D > \hat{B}$.

É comum chamar-se *corolário* a todo teorema que é consequência *imediata* de outro teorema. Os teoremas (corolários) que se seguem já foram verificados "experimentalmente" (p. 162).

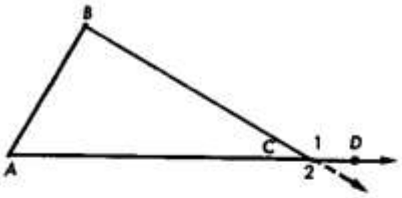
Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 188.

**Teorema 7-2.** O Teorema do Ângulo Externo

Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes.

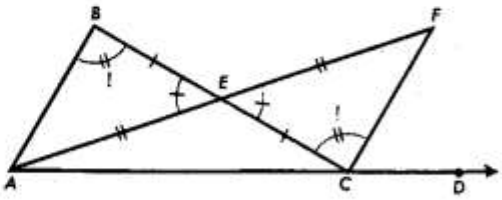
*Re-enunciado:* Dado $\Delta ABC$, com $C$ entre $A$ e $D$, então

$$\angle BCD > \angle B.$$




Primeiramente, observamos que o re-enunciado traduz, de fato, todo o conteúdo do teorema. O re-enunciado nos diz que $\angle 1 > \angle B$. Por uma mudança de notação (trocando $A$ e $B$), concluímos que $\angle 2 > \angle A$. Desde que $\angle 1 \cong \angle 2$, segue-se que $\angle 1 > \angle A$. Portanto, $\angle 1$ é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Procedemos, agora, à demonstração.




*Demonstração*

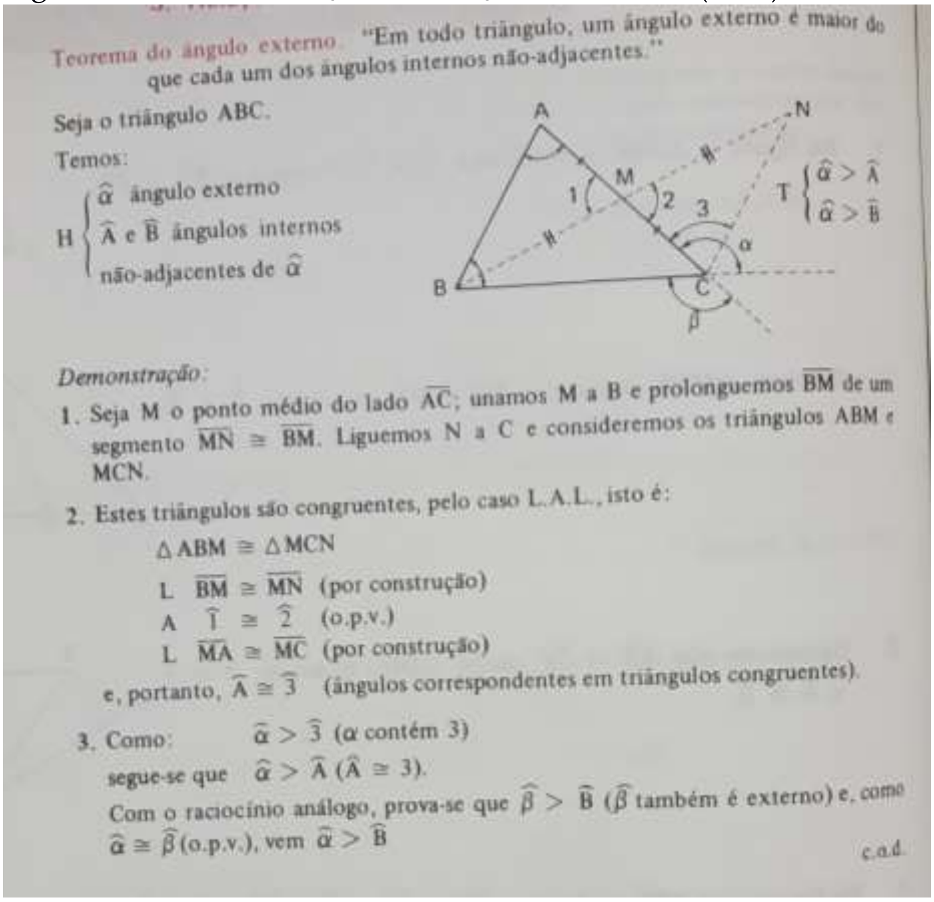
| *Afirmações* | *Justificações* |
|---|---|
| 1. Seja $E$ o ponto médio de $\overline{BC}$. | ? |
| 2. Seja $F$ um ponto da semi-reta oposta a $\overrightarrow{EA}$, tal que $EF = EA$. | ? |
| 3. $\angle BEA \cong \angle CEF$. | ? |
| 4. $\Delta BEA \cong \Delta CEF$. | ? |
| 5. $m\angle B = m\angle ECF$. | ? |
| 6. $m\angle BCD = m\angle ECF + m\angle FCD$. | Postulado da Adição de Ângulos |
| 7. $m\angle BCD = m\angle B + m\angle FCD$. | Afirmações 5 e 6. |
| 8. $m\angle BCD > m\angle B$. | Teorema 7-1. |
| 9. $\angle BCD > \angle B$. | Definição de > para ângulos. |

O Teorema do Ângulo Externo tem um corolário simples.

Fonte: Moise e Downs Júnior, 1971, p. 174-175.

Entretanto, na coleção *Matemática* (1985) ele não mantém a mesma estrutura para as demonstrações como na coleção anterior, e consequentemente como os autores estrangeiros aqui citados (Figura 40).

Figura 41 – Demonstração na coleção *Matemática* (1985)



Teorema do ângulo externo. "Em todo triângulo, um ângulo externo é maior do que cada um dos ângulos internos não-adjacentes."

Seja o triângulo ABC.

Temos:

H $\begin{cases} \hat{\alpha} \text{ ângulo externo} \\ \hat{A} \text{ e } \hat{B} \text{ ângulos internos} \\ \text{não-adjacentes de } \hat{\alpha} \end{cases}$

T $\begin{cases} \hat{\alpha} > \hat{A} \\ \hat{\alpha} > \hat{B} \end{cases}$



*Demonstração:*

1. Seja M o ponto médio do lado $\overline{AC}$; unamos M a B e prolonguemos $\overline{BM}$ de um segmento $\overline{MN} \cong \overline{BM}$. Liguemos N a C e consideremos os triângulos ABM e MCN.

2. Estes triângulos são congruentes, pelo caso L.A.L., isto é:

   $\triangle ABM \cong \triangle MCN$

   L $\overline{BM} \cong \overline{MN}$ (por construção)

   A $\hat{1} \cong \hat{2}$ (o.p.v.)

   L $\overline{MA} \cong \overline{MC}$ (por construção)

   e, portanto, $\hat{A} \cong \hat{3}$ (ângulos correspondentes em triângulos congruentes).

3. Como: $\hat{\alpha} > \hat{3}$ ($\alpha$ contém 3)

   segue-se que $\hat{\alpha} > \hat{A}$ ($\hat{A} \cong 3$).

   Com o raciocínio análogo, prova-se que $\hat{\beta} > \hat{B}$ ($\hat{\beta}$ também é externo) e, como $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ (o.p.v.), vem $\hat{\alpha} > \hat{B}$

c.q.d.

Fonte: Sangiorgi, 1985c, p. 118.

Diante da nossa análise, identificamos que Sangiorgi apresenta a geometria nos livros da 5ª e 6ª séries com abordagem intuitiva e nos livros da 7ª e 8ª séries o enfoque na geometria é no viés da abordagem dedutiva. Ele também utilizou a Teoria dos Conjuntos como linguagem para as abordagens intuitiva e/ou dedutiva.

## 4.4. Teoria dos Conjuntos e o ensino de geometria

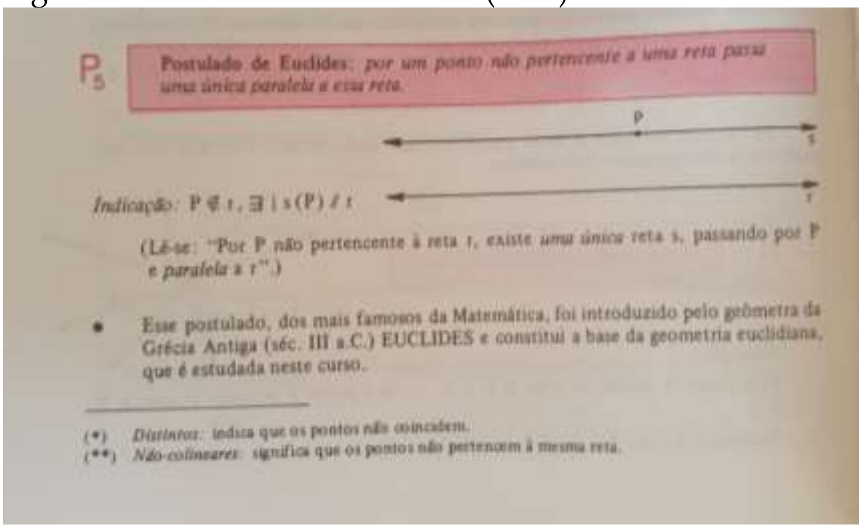
A Teoria dos conjuntos foi elemento representativo nas propostas curriculares e metodológicas de matemática no MMM. No período de perda do protagonismo desse movimento, constatamos que as coleções de Sangiorgi continuam com essa abordagem.

As simbologias dos conjuntos como ∈, ∉, ∪, ∩, ⊂ e ⊃ são elementos presentes em um tópico da geometria, no qual o ponto é apresentado como P

$\in$ r, onde P é o ponto e r a reta, $a \cap b$ é igual {P}, para representar um ponto P pertencente às retas *a* e *b.* Dessa forma a abordagem das retas, quanto a posição relativa a outra reta ou ao plano, tem a representação pelas simbologias. A linguagem dos símbolos fica mais evidente com a inclusão de outros símbolos, como: →, ↔, <, >, entre outros, exigindo do aluno também estes saberes.

Em seguida são apresentados os cinco postulados fundamentais seguidos das definições, representação geométrica e algébrica com as simbologias dos conjuntos.

Figura 42 - Postulado de Euclides (1985)



P5 **Postulado de Euclides:** *por um ponto não pertencente a uma reta passa uma única paralela a essa reta.*

*Indicação:* $P \notin r,\ \exists \mid s(P) \,/\!/\, r$

(Lê-se: "Por P não pertencente à reta r, existe *uma única* reta s, passando por P *e paralela a* r".)

- Esse postulado, dos mais famosos da Matemática, foi introduzido pelo geômetra da Grécia Antiga (séc. III a.C.) EUCLIDES e constitui a base da geometria euclidiana, que é estudada neste curso.

(*) *Distintos:* indica que os pontos não coincidem.
(**) *Não-colineares:* significa que os pontos não pertencem à mesma reta.



Fonte: Sangiorgi, 1985c, p. 82.

Possivelmente o autor entenda que o aluno precisa de orientações quanto à compreensão da linguagem simbólica, tendo em vista que ele apresenta notas orientando como efetuar a leitura. A esse respeito, no relatório do Seminário de *Royaumont*, constava que,

> Estes símbolos e a sua utilização darão um novo rosto à Matemática escolar. Não está aí, no entanto, o fim visado. Os símbolos são necessários, por que eles representam conceitos que dão ao pensamento mais clareza e mais precisão, e porque ligam e unificam os conceitos matemáticos para o aluno que os vê reaparecer em cada um dos ramos estudados. Além do mais, eles são indispensáveis mais tarde nos estudos matemáticos universitários. (OECE, 1961a, p. 117 apud GUIMARÃES, 2007, p. 37).

Essas constatações estão presentes em ambas as coleções. Como exemplo, podemos destacar a explicação de paralelismo elaborada pelo autor.

> O paralelismo entre retas de um plano pode ser considerado uma relação de equivalência, desde que seja definido da seguinte maneira: $r /\!/ s \leftrightarrow r = s$ ou $r \cap s = \emptyset$
> De fato, com essa definição de retas paralelas valem as propriedades: Reflexiva: r//s; Simétrica: se r//s, então s//r; Transitiva: se r//s e s//t, então r//t. (SANGIORGI, 1979c, p.139).

Nesse sentido podemos interpretar que a Teoria dos conjuntos foi uma das características do MMM que se manteve em ambas as coleções de Sangiorgi analisadas.

**4.5 Transformações Geométricas**

A geometria das transformações é apresentada na coleção *Matemática* (1979) em apêndice. Na perda do protagonismo do movimento, a geometria das transformações inicialmente permanece aparecendo em apêndice e com o passar do tempo, de forma ainda mais suprimida[78], junto a outro conteúdo.

Oliveira (2015) informa que na obra *Matemática curso Moderno* (1965), a geometria clássica se encontra no final do livro e a geometria das transformações como apêndice, este autor acrescenta que os conteúdos seguem as orientações dos Assuntos Mínimos (1962) elaborados pelo GEEM. Na coleção de 1979 não há apresentação ou introdução que conste informação ao aluno e professor acerca do apêndice, sobre quando e como abordá-lo.

Todavia, em obra publicada na década de 1960, Sangiorgi indica: "é possível que, se a exploração da matéria da 3ª Série Ginasial consumir todo o tempo disponível, o importante estudo das Transformações Geométricas seja deixado para a 4ª série. Daí o fato de constar no Apêndice" (SANGIORGI, 1967, p. 76 apud LEME DA SILVA, 2008b, p. 82), justificando dessa forma a organização desse conteúdo no apêndice.

---

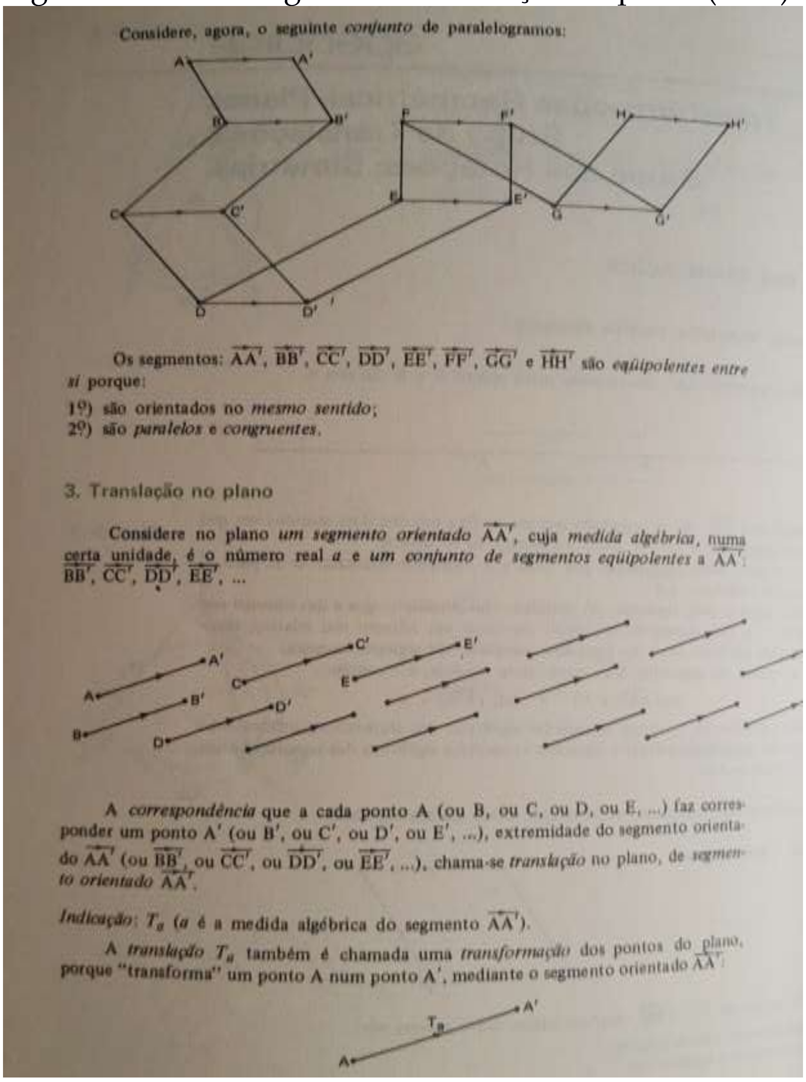
[78] Adiante no texto abordaremos uma análise dessa forma suprimida de apresentação.

A abordagem da geometria das transformações em apêndice no livro de Sangiorgi, da 7ª série, foi apontada por outros pesquisadores como Leme da Silva (2011, p. 6), afirmando que "a proposta da Geometria das transformações é apresentada no apêndice do livro, de maneira breve e sintética", essa constatação pode ser observada também em Ferreira (2008), Freire (2009) e Oliveira (2015), por exemplo.

Notamos que esta característica se mantém, visto que a geometria da 7ª série, na coleção *Matemática* (1979c), é estudada a Geometria de Euclides em capítulos específicos, e em apêndice, são abordados os seguintes conteúdos: as transformações geométricas, Rotação, Translação e Simetrias. Leme da Silva (2008) constatou que na coleção *Matemática curso moderno* (1968) Sangiorgi apresenta a geometria das transformações como um apêndice e sem ligação como o corpo do livro, nesse sentido há a confirmação de que o autor na publicação da década de 1970 permaneceu com as mesmas ideias sobre as Transformações Geométricas da obra dos anos 1960.

No apêndice da coleção *Matemática* (1979c) são discutidas as *Transformações Geométricas Planas; Grupo das Transformações; Grupo das Rotações; Simetrias*. No grupo das transformações geométricas é apresentada a translação de pontos, retas e planos, fazendo o uso de um conjunto de paralelogramos para explorar os vértices semelhantes na verificação de translação.

Figura 43 – Paralelogramos e translação no plano (1979)



Considere, agora, o seguinte *conjunto* de paralelogramos:

Os segmentos: $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$, $\overrightarrow{FF'}$, $\overrightarrow{GG'}$ e $\overrightarrow{HH'}$ são *eqüipolentes entre si* porque:

1º) são orientados no *mesmo sentido*;
2º) são *paralelos* e *congruentes*.

3. Translação no plano

Considere no plano *um segmento orientado* $\overrightarrow{AA'}$, cuja *medida algébrica*, numa certa unidade, é o número real *a* e *um conjunto de segmentos eqüipolentes* a $\overrightarrow{AA'}$: $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$, ...

A *correspondência* que a cada ponto A (ou B, ou C, ou D, ou E, ...) faz corresponder um ponto A' (ou B', ou C', ou D', ou E', ...), extremidade do segmento orientado $\overrightarrow{AA'}$ (ou $\overrightarrow{BB'}$, ou $\overrightarrow{CC'}$, ou $\overrightarrow{DD'}$, ou $\overrightarrow{EE'}$, ...), chama-se *translação* no plano, de *segmento orientado* $\overrightarrow{AA'}$.

*Indicação*: $T_a$ (*a* é a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{AA'}$).

A *translação* $T_a$ também é chamada uma *transformação* dos pontos do plano, porque "transforma" um ponto A num ponto A', mediante o segmento orientado $\overrightarrow{AA'}$:

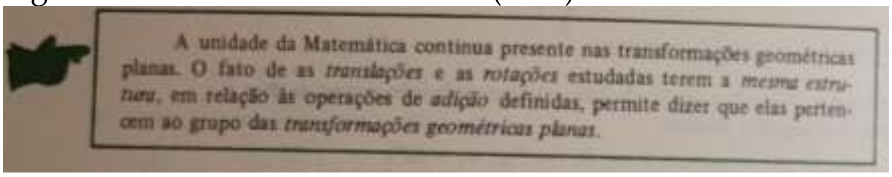
Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 242.

Note que as arestas de mesma direção, dos paralelogramos, tende a sentido semelhante e mesmo comprimento, dos quais o autor aponta segmentos equipolentes. Na sequência, fazendo uso do conceito de segmentos equipolentes, define a translação no plano de um segmento orientado e conclui indicando que a translação de um segmento orientado também é denominada de "uma transformação dos pontos do plano" (SANGIORGI, 1979c, p. 242).

Para introduzir o conteúdo rotação, o autor utiliza arcos para ilustrar as movimentações destacando o sentido anti-horário para o caso positivo. Tanto na translação quanto na rotação é indicada a aplicação das propriedades comutativa, associativa, elemento neutro e elemento inverso.

Sangiorgi (1979c, p. 248) afirma que “o conjunto das rotações no plano em torno de um ponto, com relação à operação de adição de rotações, tem estrutura de grupo comutativo”. Afirmação que mantém também para as translações.

Figura 44 - Lembrete do conteúdo (1979)



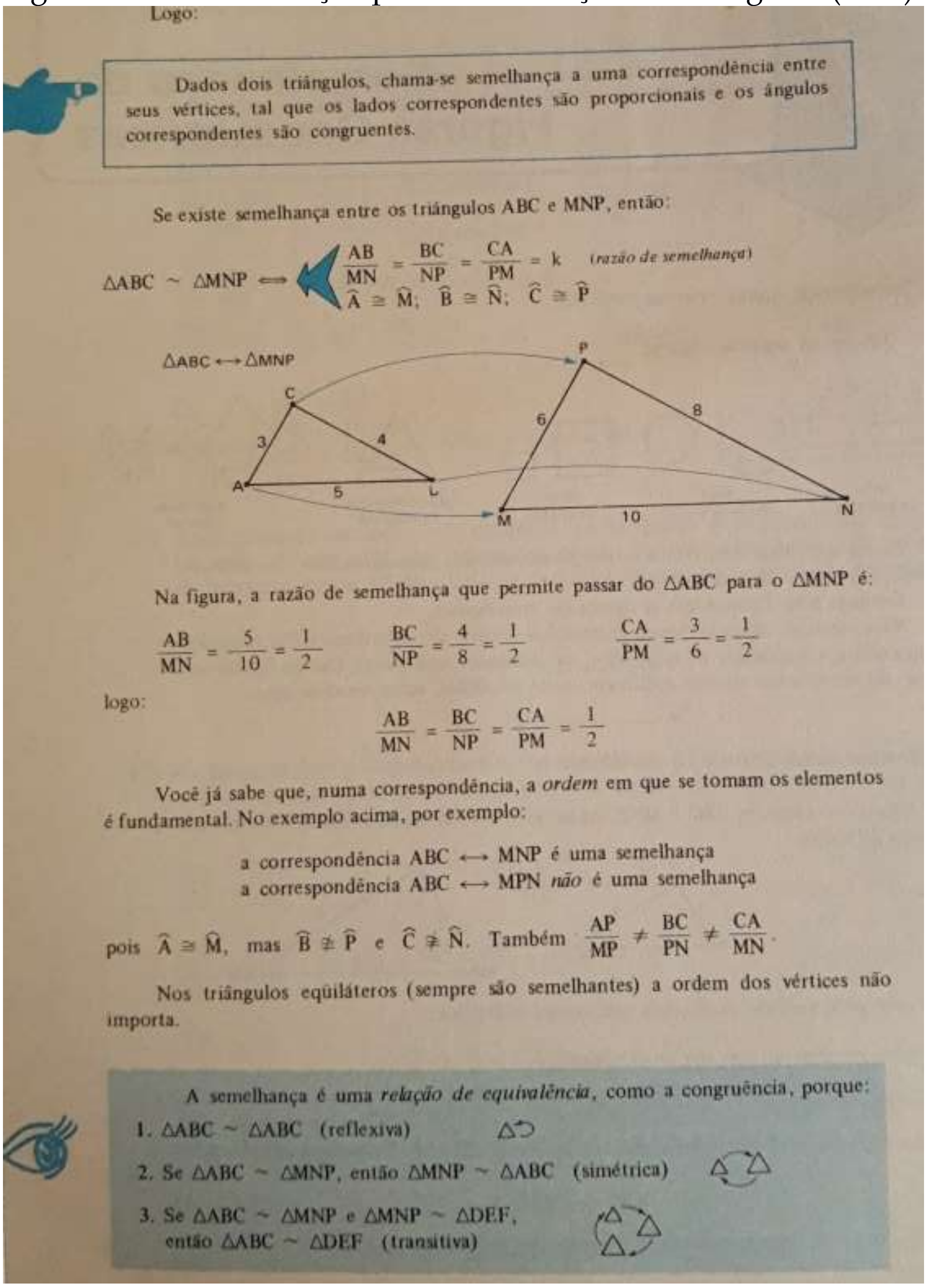
A unidade da Matemática continua presente nas transformações geométricas planas. O fato de as *translações* e as *rotações* estudadas terem a *mesma estrutura*, em relação às operações de *adição* definidas, permite dizer que elas pertencem ao grupo das *transformações geométricas planas*.

Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 248.

Para as transformações geométricas não há uma grade de exercícios para os alunos praticarem, diferentemente dos demais conteúdos que são abordados nos livros. Note que a presença da unidade matemática ainda é abordada pelo autor nos livros de 1979, tendo em vista que esta era uma ideia do grupo Bourbarki, ocupando um lugar chave em seus ideais para a matemática – bem como do ideário do MMM –, o mesmo ocorre para as estruturas matemáticas que Sangiorgi aborda, neste caso, o grupo das transformações geométricas planas.

Ainda nessa coleção, (1979), na sétima série, no capítulo sobre *Semelhanças de figuras geométricas*, o autor aborda noções homotéticas com definições carregadas de simbologias.

Figura 45 - Demonstração para semelhanças de Triângulos (1979)



Logo:

Dados dois triângulos, chama-se semelhança a uma correspondência entre seus vértices, tal que os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Se existe semelhança entre os triângulos ABC e MNP, então:

$\triangle ABC \sim \triangle MNP \iff \begin{cases} \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM} = k \quad \textit{(razão de semelhança)} \\ \hat{A} \cong \hat{M};\ \hat{B} \cong \hat{N};\ \hat{C} \cong \hat{P} \end{cases}$



Na figura, a razão de semelhança que permite passar do △ABC para o △MNP é:

$\frac{AB}{MN} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \frac{BC}{NP} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \frac{CA}{PM} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

logo:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM} = \frac{1}{2}$$

Você já sabe que, numa correspondência, a *ordem* em que se tomam os elementos é fundamental. No exemplo acima, por exemplo:

a correspondência ABC ⟷ MNP é uma semelhança
a correspondência ABC ⟷ MPN *não* é uma semelhança

pois $\hat{A} \cong \hat{M}$, mas $\hat{B} \ncong \hat{P}$ e $\hat{C} \ncong \hat{N}$. Também $\frac{AP}{MP} \neq \frac{BC}{PN} \neq \frac{CA}{MN}$.

Nos triângulos eqüiláteros (sempre são semelhantes) a ordem dos vértices não importa.

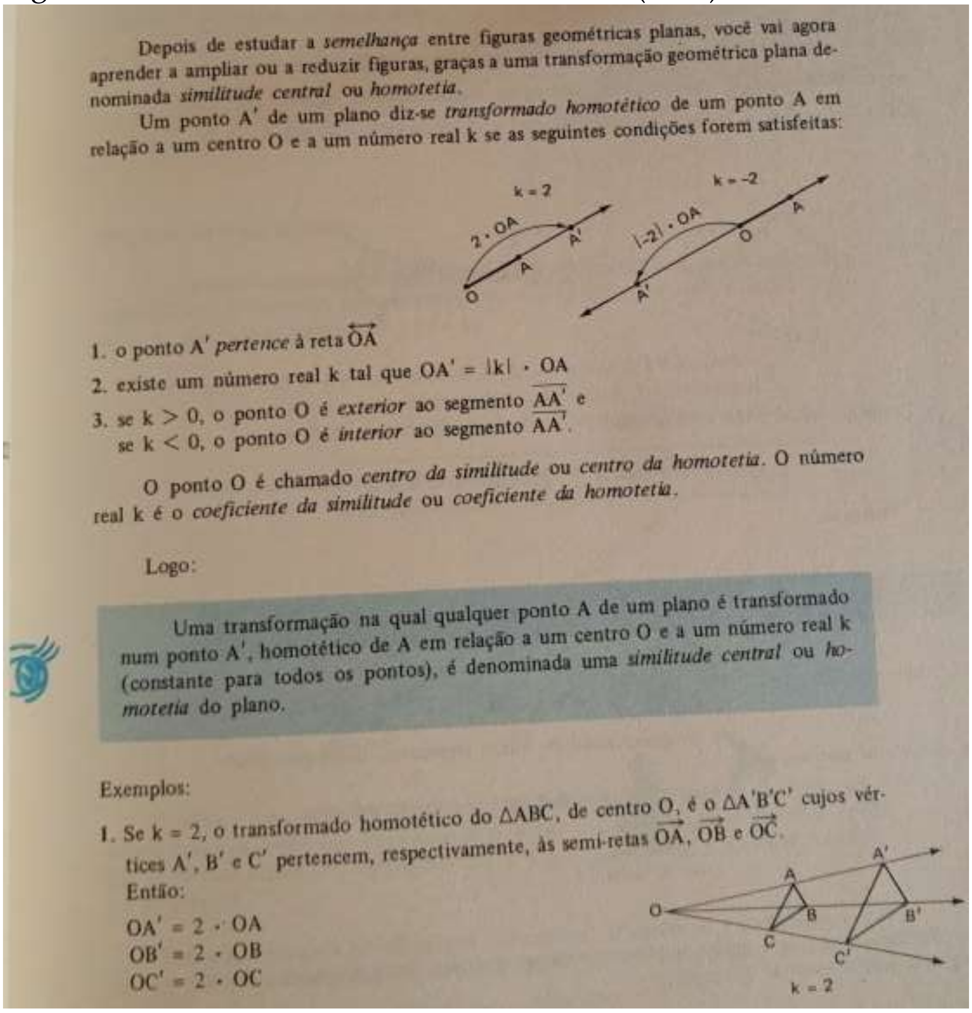
A semelhança é uma *relação de equivalência*, como a congruência, porque:

1. $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ (reflexiva)
2. Se $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, então $\triangle MNP \sim \triangle ABC$ (simétrica)
3. Se $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ e $\triangle MNP \sim \triangle DEF$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (transitiva)

Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 104.

Ainda nesse tópico são abordados o Teorema Fundamental sobre os triângulos, em que Sangiorgi apresenta demonstrações para semelhança de triângulos, e posteriormente inicia a similitude central ou homotetia.

Figura 46 - Similitude Central ou Homotetia (1979)



Depois de estudar a *semelhança* entre figuras geométricas planas, você vai agora aprender a ampliar ou a reduzir figuras, graças a uma transformação geométrica plana denominada *similitude central* ou *homotetia*.

Um ponto A' de um plano diz-se *transformado homotético* de um ponto A em relação a um centro O e a um número real k se as seguintes condições forem satisfeitas:



1. o ponto A' *pertence* à reta $\overleftrightarrow{OA}$
2. existe um número real k tal que $OA' = |k| \cdot OA$
3. se $k > 0$, o ponto O é *exterior* ao segmento $\overline{AA'}$ e se $k < 0$, o ponto O é *interior* ao segmento $\overline{AA'}$.

O ponto O é chamado *centro da similitude* ou *centro da homotetia*. O número real k é o *coeficiente da similitude* ou *coeficiente da homotetia*.

Logo:

Uma transformação na qual qualquer ponto A de um plano é transformado num ponto A', homotético de A em relação a um centro O e a um número real k (constante para todos os pontos), é denominada uma *similitude central* ou *homotetia* do plano.

Exemplos:

1. Se $k = 2$, o transformado homotético do $\triangle ABC$, de centro O, é o $\triangle A'B'C'$ cujos vértices A', B' e C' pertencem, respectivamente, às semi-retas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.
Então:
$OA' = 2 \cdot OA$
$OB' = 2 \cdot OB$
$OC' = 2 \cdot OC$



Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 117.

Diferentemente da obra *Matemática curso moderno – 3º volume* - (1964), analisada por Matos e Leme da Silva (2011), a geometria das transformações, no livro da 8ª série na coleção *Matemática* (1979), não consta em apêndice e sim no corpo do livro, porém continua com baixo desenvolvimento, percepção tida também por Leme da Silva (2008), para a autora essa característica "[…] indica que o ensino de geometria, realizado pelas transformações geométricas, não ganha o destaque que a proposta vinculada ao Klein defendia". (LEME DA SILVA, 2008b, p. 88). Na sequência são abordados os triângulos que tomam boa parte da obra seguido dos quadriláteros e circunferência, nas quais seguem a estrutura de definições, propriedades com as respectivas demonstrações.

No livro *Matemática* (1985d), 8ª série, diferentemente da coleção anterior, não apresenta um capítulo específico para Similitude central ou Homotetia, que trata das transformações geométricas. Nessa obra esse conteúdo está junto a *Função do 1º grau e Geometria analítica*. O autor continua com os mesmos elementos da coleção anterior, tanto na introdução do conteúdo quanto nos exemplos e enunciados, acrescentando apenas os exercícios denominados de *Exercícios de aplicações*. A geometria está imbricada também no conteúdo *Função trinômio do 2º grau*.

Antes de iniciar o conteúdo das transformações Sangiorgi apresenta a semelhança de figuras planas e acrescenta que o aluno "[...] vai aprender a ampliar ou reduzir figuras, graças a uma transformação geométrica plana denominada **similitude central** ou **homotetia**" (SANGIORGI, 1985d, p. 123 grifo do autor), ou seja, permitirá a movimentação das figuras no plano respeitando suas características.

Sangiorgi utiliza destaque constante para a palavra *semelhança* e variações, como uma maneira de atentar ao aluno para a importância do conceito dessa palavra principalmente no que antecede a abordagem da similitude central.

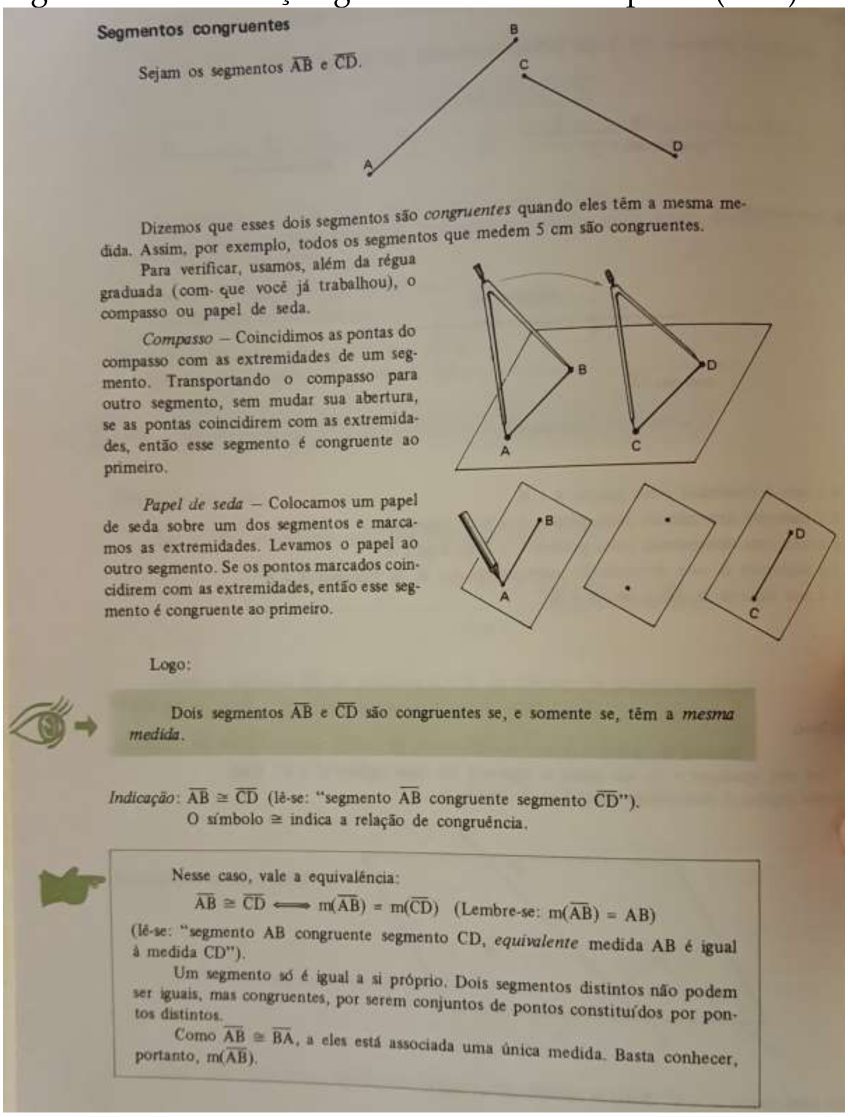
## 4.6 Uso da régua e compasso

A utilização da régua e compasso nas coleções que analisamos está disposta tanto em capítulos específicos quanto em meio a outros conteúdos, seja na ilustração de uma situação ou na solicitação ao aluno para utilização desses instrumentos na solução de exercícios.

Na coleção *Matemática* (1985), o autor aborda a geometria no livro da 6ª série no capítulo denominado *Geometria intuitiva e Construções geométricas*, no qual Sangiorgi aponta como objetivos do conteúdo: "aprender o uso de régua graduada, compasso e transferidor na medição de segmentos e ângulos;" e "ressaltar as propriedades das retas paralelas, das retas perpendiculares, dos triângulos, dos quadriláteros, da circunferência e praticá-las em problemas". (SANGIORGI, 1985b, s.p.)[79].

Para a construção de segmentos congruentes, o autor recorre ao compasso e papel de seda, mostrando posteriormente de modo formal, incluindo como efetuar a leitura das representações.

Figura 47 - Construção geométrica com compasso (1979)



**Segmentos congruentes**

Sejam os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



Dizemos que esses dois segmentos são *congruentes* quando eles têm a mesma medida. Assim, por exemplo, todos os segmentos que medem 5 cm são congruentes.

Para verificar, usamos, além da régua graduada (com que você já trabalhou), o compasso ou papel de seda.

*Compasso* — Coincidimos as pontas do compasso com as extremidades de um segmento. Transportando o compasso para outro segmento, sem mudar sua abertura, se as pontas coincidirem com as extremidades, então esse segmento é congruente ao primeiro.

*Papel de seda* — Colocamos um papel de seda sobre um dos segmentos e marcamos as extremidades. Levamos o papel ao outro segmento. Se os pontos marcados coincidirem com as extremidades, então esse segmento é congruente ao primeiro.

Logo:

Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes se, e somente se, têm a *mesma medida*.

*Indicação*: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (lê-se: "segmento $\overline{AB}$ congruente segmento $\overline{CD}$").
O símbolo $\cong$ indica a relação de congruência.

Nesse caso, vale a equivalência:

$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Longleftrightarrow m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$ (Lembre-se: $m(\overline{AB}) = AB$)

(lê-se: "segmento AB congruente segmento CD, *equivalente* medida AB é igual à medida CD").

Um segmento só é igual a si próprio. Dois segmentos distintos não podem ser iguais, mas congruentes, por serem conjuntos de pontos constituídos por pontos distintos.

Como $\overline{AB} \cong \overline{BA}$, a eles está associada uma única medida. Basta conhecer, portanto, $m(\overline{AB})$.

Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 126.

Continua a utilização da régua e compasso para a construção[80] de outros elementos, como o ponto médio, a bissetriz e triângulos, por exemplo.

---

[79] Não há numeração da página tendo em vista que essas informações constam nas primeiras páginas do livro e não são numeradas e a página 1 (caso tivesse a numeração) seria a página de rosto, que é posterior ao *Plano de curso*, onde constam tais informações.

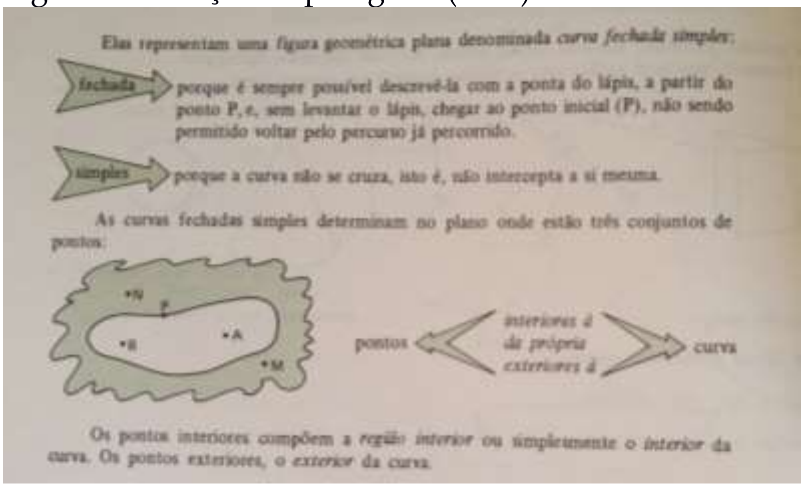
Elementos estes que permanecem na coleção de 1985, na qual o autor informa que durante o estudo serão utilizados os seguintes recursos: régua, compasso e transferidor, relembrando que estes são instrumentos considerados "primitivos e sagrados na Grécia Antiga" (SANGIORGI, 1985b, p. 155) no livro da 6ª série.

De acordo com Leme da Silva (2008) o livro de Sangiorgi 1969 apresenta as construções geométricas permeadas ao conteúdo, diferentemente do livro de 1964 que tinha espaço específico para as construções geométricas. Nas coleções *Matemática* (1979) e *Matemática* (1985) percebemos que Sangiorgi manteve as construções em meio aos conteúdos como no livro de 1969.

## 4.7 Topologia

Na coleção *Matemática* (1979) a noção de curvas fechadas e abertas tomam algumas páginas explorando pontos interiores e exteriores, abordando noções topológicas, curvas côncavas e convexas, bem como as regiões. Essa permanência é observada na coleção Matemática (1985).

Figura 48 - Noções topológicas (1979)



Elas representam uma *figura* geométrica plana denominada *curva fechada simples*:

fechada — porque é sempre possível descrevê-la com a ponta do lápis, a partir do ponto P, e, sem levantar o lápis, chegar ao ponto inicial (P), não sendo permitido voltar pelo percurso já percorrido.

simples — porque a curva não se cruza, isto é, não intercepta a si mesma.

As curvas fechadas simples determinam no plano onde estão três conjuntos de pontos:

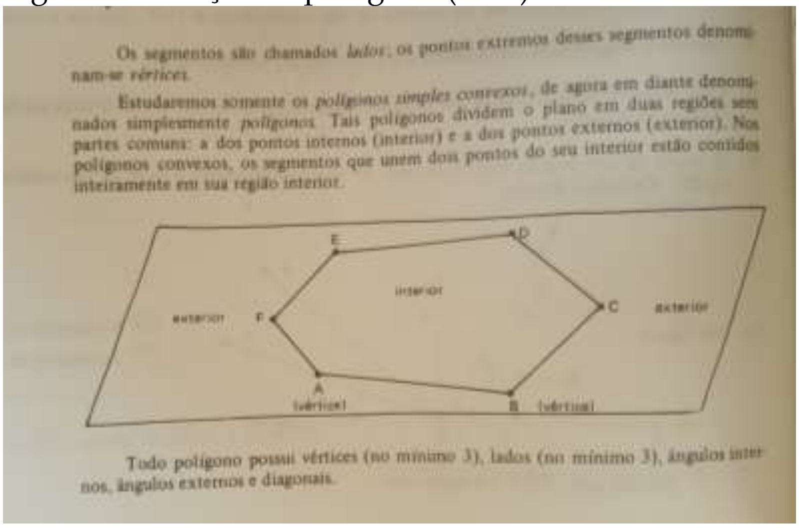


Os pontos interiores compõem a *região interior* ou simplesmente o *interior* da curva. Os pontos exteriores, o *exterior* da curva.

Fonte: Sangiorgi, 1979c, p. 116.

80 Para maiores conhecimentos sobre o uso da régua e compasso no ensino de Geometria, consultar tese de Zuin (2001).

Figura 49 - Noções topológicas (1985)



Os segmentos são chamados *lados*; os pontos extremos desses segmentos denominam-se *vértices*.

Estudaremos somente os *polígonos simples convexos*, de agora em diante denominados simplesmente *polígonos*. Tais polígonos dividem o plano em duas regiões sem partes comuns: a dos pontos internos (interior) e a dos pontos externos (exterior). Nos polígonos convexos, os segmentos que unem dois pontos do seu interior estão contidos inteiramente em sua região interior.



Todo polígono possui vértices (no mínimo 3), lados (no mínimo 3), ângulos internos, ângulos externos e diagonais.

Fonte: Sangiorgi, 1985c, p. 100.

Essas noções iniciais a respeito de curvas e interior "[...] são conceitos novos, introduzidos a partir das propostas discutidas no MMM. Trata-se de inserção das estruturas topológicas no ensino de geometria" (LEME DA SILVA, 2011, p. 3), e são apresentados tanto no primeiro volume da coleção analisada, de 1979, quanto na coleção, de mesma autoria, de 1985.

A topologia[81], segundo França (2012), se insere na educação básica diante da proposta de reforma curricular e metodológica – o MMM –, esta constatação pode ser feita dada as indicações de Piaget no que concerne a psicologia, com as estruturas elementares em aspecto genético, correlacionadas com as estruturas matemáticas, dentre elas as estruturas topológicas. Nesse sentido, França (2012) ressalta como esse teórico concebia o papel das noções topológicas na construção do conhecimento: "[…] a topologia que, como parte da matemática, aparece historicamente a pouco tempo e é para Piaget anterior na ordem genética da construção do pensamento" (FRANÇA, 2012, p. 91).

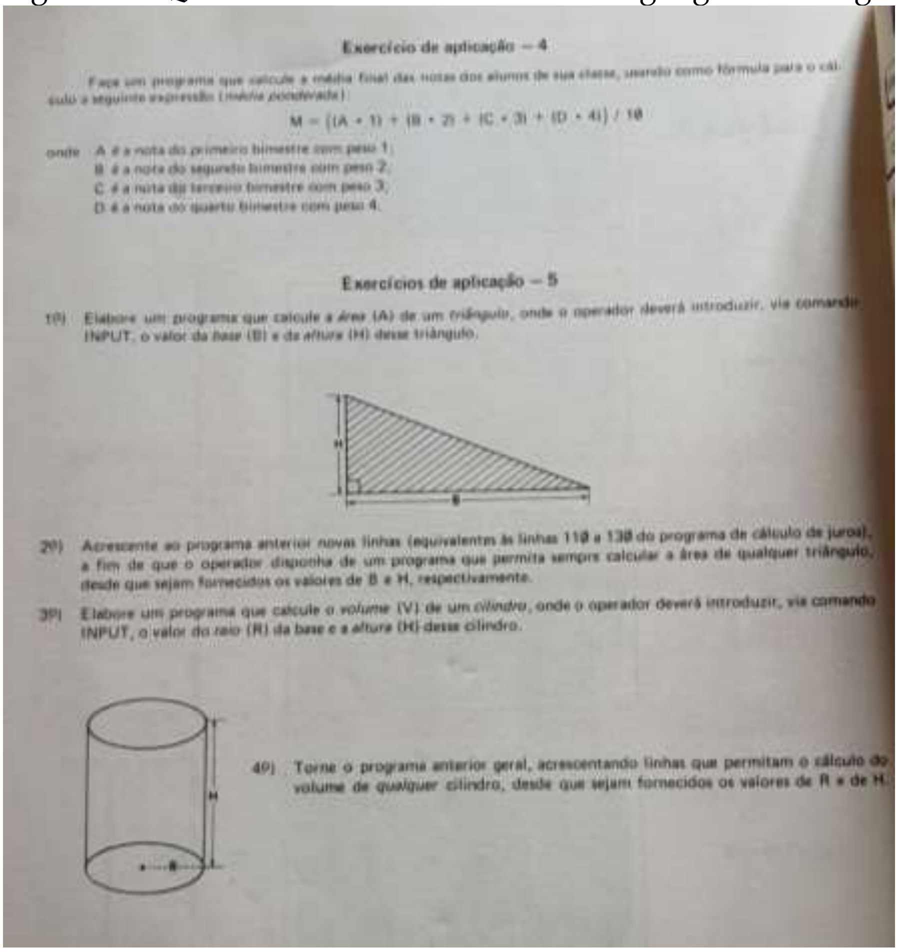
### 4.8 A informática e o ensino da geometria

---

[81] "[…] as estruturas topológicas se constituem sobre a noção de fronteira, vizinhança, fechamento." (FRANÇA, 2012, p. 90).

No apêndice da coleção *Matemática* (1985), a geometria é trabalhada por meio da informática, o autor solicita ao aluno a elaboração de programas, por meio da linguagem de programação BASIC, que calcule a área e o volume de algumas figuras.

Figura 50 - Questões solicitando o uso da Linguagem de Programação (1985)



**Exercício de aplicação — 4**

Faça um programa que calcule a média final das notas dos alunos de sua classe, usando como fórmula para o cálculo a seguinte expressão (*média ponderada*):

M = ((A * 1) + (B * 2) + (C * 3) + (D * 4)) / 10

onde A é a nota do primeiro bimestre com peso 1;
B é a nota do segundo bimestre com peso 2;
C é a nota do terceiro bimestre com peso 3;
D é a nota do quarto bimestre com peso 4.

**Exercícios de aplicação — 5**

1º) Elabore um programa que calcule a *área* (A) de um *triângulo*, onde o operador deverá introduzir, via comando INPUT, o valor da *base* (B) e da *altura* (H) desse triângulo.

2º) Acrescente ao programa anterior novas linhas (equivalentes às linhas 110 a 130 do programa de cálculo de juros), a fim de que o operador disponha de um programa que permita sempre calcular a área de qualquer triângulo, desde que sejam fornecidos os valores de B e H, respectivamente.

3º) Elabore um programa que calcule o *volume* (V) de um *cilindro*, onde o operador deverá introduzir, via comando INPUT, o valor do *raio* (R) da base e a *altura* (H) desse cilindro.

4º) Torne o programa anterior geral, acrescentando linhas que permitam o cálculo do volume de qualquer cilindro, desde que sejam fornecidos os valores de R e de H.

Fonte: Sangiorgi, 1985d, p. 188.

Sangiorgi não só contestava a ausência deste recurso nas aulas de matemática como também alertava sobre a contribuição para a formação do aluno, e acrescentou que os computadores jamais substituiriam o professor, entretanto o que o faria seria outro educador melhor qualificado. Nesse sentido, segundo Borba e Penteado (2002), em análise das discussões acerca da inserção da informática no ensino de matemática na década de 1980, concluem que:

> Nos anos 80, existia uma intensa discussão no seio da comunidade educacional acerca da possibilidade do uso da informática na sala de aula. Nessa época, havia uma divisão entre aqueles que eram contra e os que defendiam tal uso. A grande maioria repudiava tal ideia. Os argumentos em torno do alto custo dos equipamentos, de um provável fim da profissão docente e até da desumanização do aluno. Já a minoria, que era favorável, parecia "endeusar" as máquinas e apontar o seu uso como a saída para problemas relacionados à formação de professores e da aprendizagem. Ambos os lados pareciam ignorar uma análise da história das mídias, que sugere muito menos um aniquilamento de uma mídia por outro, e sim uma incorporação a um rol de tecnologias e a transformação das mídias existentes. (BORBA; PENTEADO, 2002, p. 240).

Todavia, ainda de acordo com Sangiorgi, a cibernética pedagógica é discutida há muito tempo, no entanto é na década de 1970 que se acentua por meio das discussões do alemão Helmar Fank. (SANGIORGI, 2000).

Sangiorgi esteve atento às mudanças que ocorriam na educação, com isso foi o primeiro a introduzir a informática nos livros de matemática, conforme menciona em entrevista a Búrigo. Ainda nessa entrevista, informa que buscou atualizações com o que vinha sendo discutido em outros países relacionados à cibernética, ministrando vários cursos com essa temática no Brasil e exterior, como podemos ver nos documentos do seu arquivo pessoal.

As tecnologias digitais na educação vinham sendo discutidas na década de 1970, entretanto é na década de 1980, com o movimento da Educação Matemática, que se intensifica no âmbito do ensino de matemática. De acordo com Almeida (2008) a inserção das tecnologias na educação ocorre por meio da iniciativa do governo federal, atitude similar a países como França e Portugal.

Iniciativas que impulsionaram a criação de Programas e cursos buscando viabilizar a familiarização da comunidade escolar com as Tecnologias de Informação e Comunicação. Desses programas criados na década de 1980 podemos destacar o Projeto Educom (1984), o Projeto FORMAR, o Programa Nacional de Informática Educativa (1989), entre outros. (ALMEIDA, 2008).

Borba, Silva e Gadanidis (2020) destacam a década de 1980 como a primeira fase da informática na Educação Matemática, que tem como característica o software LOGO. “A primeira fase é também o momento de surgimento da perspectiva de que as escolas poderiam ou deveriam ter laboratórios de informática”. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2020, p. 1). Os autores destacam ainda que essa é uma fase (primeira fase) que apresenta poucas discussões referentes à sua história e que caberia melhores detalhamentos.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso estudo teve o intuito de contribuir na continuidade dos estudos da história da educação matemática, mais pontualmente para a o ensino de geometria. Almejando responder nossa questão norteadora: Que geometria foi abordada nos livros didáticos de 5ª a 8ª séries no período de perda do protagonismo do MM M, no período de 1976 a 1986?, tomamos como fonte quatro coleções de livros didáticos de 5ª a 8ª série, das quais duas coleções são de Osvaldo Sangiorgi e outras duas de Benedito Castrucci, Ronaldo Peretti e José Ruy Giovanni, na qual uma delas não tem autoria de Peretti.

Por esta pesquisa estar inserida nos pressupostos de uma história cultural, nos apoiamos nos estudos de Chartier (1990; 1991) no que diz respeito à história cultural e apropriação e Chopin (2004) no sentido da compreensão do livro didático como fonte e documento.

Buscamos não nos limitar a análise do conteúdo de geometria, e sim transcender para a compreensão sobre o autor e as influências por ele sofridas, no sentido de formação, participação em grupos de estudos, entre outros fatores que complementam a vida acadêmica e podem ter influenciado para a estruturação do conteúdo de geometria nas coleções.

No desenvolver da pesquisa alguns elementos vão sobressaindo nos permitindo tecer considerações referentes ao objeto em estudo, não no sentido de esgotar as discussões e sim no sentido de aprofundamento no campo historiográfico da educação matemática.

Um aspecto importante a ser destacado é a influência, mesmo que indiretamente, do primeiro movimento internacional de reforma curricular que já denunciava a relevância da modernização do ensino de matemática e algumas das ideias foram reacendidas no MMM.

O MMM mobilizou matemáticos e professores de matemática de vários países, permitiu a interação, troca de conhecimento em conferências, intercâmbios, produções de livros, dentre tantas outras formas mobilizadoras; foi uma reforma que se preocupou tanto com o currículo quanto com a metodologia, além de pensar também na Psicologia associada à Matemática.

Os estudos realizados nas dissertações aqui analisadas, que tratam sobre a geometria nos livros didáticos no curso ginasial, nos permitem dizer que a geometria de Euclides era a que predominava no miolo dos livros, reservando a geometria das transformações aos apêndices em algumas coleções. Em raros casos essa abordagem estava presente de forma consistente nas coleções.

Outro aspecto, mais pontual, que destacamos em nossa pesquisa, é a geometria nas obras averiguadas. E diante disso percebemos que as coleções que tem Castrucci como um dos autores retrata a geometria com as características da geometria de Euclides, percebemos também que Castrucci se envolveu com a geometria para além da formação na graduação e da experiência profissional com disciplinas voltadas para essa área da matemática em nível superior, visto que se interessou em conhecer como estava ocorrendo o ensino geométrico no Brasil e em outros países, trazendo as influências para os seus livros, tendo em vista o seu arquivo pessoal pertencente ao IME-USP, onde constam obras de autores estrangeiros e as referências apresentadas nas suas coleções.

Castrucci se apropriou de muitos dos ideais do MMM no que tange ao ensino de geometria, além dos livros didáticos de matemática em que constavam os conteúdos de geometria e dos livros com fins específicos sobre esse conteúdo, como mencionado anteriormente, ele desenvolveu cursos para professores, se preocupou em conhecer o que estava sendo discutido em outros países, manteve-se ativo em discussões no grupo de estudo, dentre outras atividades que denunciava seu interesse e cuidado pelo assunto.

Castrucci, tanto por pesquisas já realizadas quanto pela nossa percepção, não se mostrou adepto das reformas curriculares e metodológicas para o ensino de geometria em sua totalidade, considerando que o autor mencionou que a mudança para uma geometria na qual tudo tinha que vir da teoria dos conjuntos, poderia exigir muito do aluno, dificultando a sua aprendizagem. A constatação dessa dificuldade pode ser confirmada em curso com professores, e de acordo com o próprio Castrucci o retorno das atividades não foi satisfatório.

As transformações geométricas não são mencionadas em nenhum momento, e inclusive não chegaram a ser anunciadas no índice nem pontuada no miolo ou apêndice dos livros, na coleção Matemática (1976), o mesmo ocorreu na coleção A conquista da matemática (1985). Um fato que nos chama a atenção é que na obra *Lições de geometria elementar* (1964) Castrucci abordava as transformações geométricas, exposto no sexto capítulo, no qual explorava a "Transformação de figuras. Deslocamentos. Translação. Rotação. Simetria. Homotetia e semelhança no espaço de duas e três dimensões. Inversão pelos raios vetores e recíprocos". (RAMASSOTTI, 2018, p. 226).

Entretanto, em outra obra desse autor intitulada *Geometria curso moderno*, publicada 1968, segundo Leme da Silva (2008), "[...] não segue nenhuma das duas tendências apontadas por Fehr. Os postulados permanecem os mesmos, ou seja, a medida não é acrescentada ao grupo de axiomas, como propõe Birkhoff. Também não são desenvolvidas as transformações geométricas, baseada em Klein." (LEME DA SILVA, 2008, p. 693).

Podemos destacar nas coleções de Castrucci e coautores, mudanças no sentido da abordagem de construções geométricas com régua e compasso, que deixa de estar em apêndices e é apresentada junto aos demais capítulos; o ensino intuitivo aparece mais fortemente na segunda coleção, fazendo relação com o cotidiano; além de mudanças metodológicas, passando do estudo dirigido em 1976 para a resolução de problemas em 1985. Como permanência, podemos destacar a Geometria de Euclides e o uso da Teoria dos Conjuntos, bem como a ausência da Geometria das transformações em ambas as coleções.

Sangiorgi foi um professor que liderou grupos de estudos, se manteve atento as propostas de reformas, acompanhando o que estava sendo realizado no Brasil e no exterior, participando de cursos, intermediando a vinda de vários professores estrangeiros para ministrar cursos, ou seja, Sangiorgi foi um influente disseminador das ideias de modernização da matemática escolar nas décadas de 1960 e 1970, dentre essas ideias aquelas voltadas para o ensino de geometria. Sangiorgi cuidou para que os movimentos de reformas fossem inseridos nos livros didáticos.

Sangiorgi aborda a geometria com enfoque dedutivo e intuitivo na coleção Matemática (1979) apresenta a geometria de Euclides no corpo do livro, e em apêndice, a geometria das transformações. Já na coleção Matemática (1985) as transformações geométricas aparecem entre outros conteúdos no corpo do texto, enquanto o apêndice é ocupado pela Introdução à informática, conteúdo que de acordo com os documentos, por nós acessados, disponíveis no APOS no Repositório da Universidade de Santa Catarina, era o novo interesse de estudos de Sangiorgi após a perda do protagonismo do MMM.

No que diz respeito à abordagem da geometria consiste no modo de Euclides, em que as demonstrações de Teoremas são constantes principalmente nos livros da 7ª série. Acerca da metodologia para o ensino de geometria em ambas as coleções de Sangiorgi, tinham uma introdução via o intuitivo, por meio da métrica, entretanto as coleções tinham maior enfoque no caráter dedutivo.

As permanências observadas nas coleções de Sangiorgi são: ênfase na Geometria de Euclides; o cuidado e preocupação na apresentação das demonstrações, ensinando para o aluno o que era e como fazer; e a linguagem da teoria dos conjuntos que permeia nas coleções do período que analisamos, bem como a presença da geometria das transformações e da topologia nas duas coleções, mesmo que tenham sido abordadas com diferentes aprofundamentos nessas coleções.

No que diz respeito às mudanças percebidas em nossa análise referente às coleções de Sangiorgi, podemos apontar que a Geometria das transformações deixa de ser abordada em apêndice, na coleção de 1985, no livro da 7ª série; As construções com régua e compasso tomam maior espaço. Percebemos também que Sangiorgi se apropria de tendências metodológicas acentuadas com a Educação Matemática ao trazer as tecnologias da informação para a coleção *Matemática* (1985).

Ambos os autores tiveram participação efetiva no GEEM, que também viabilizou a interação com professores brasileiros na disseminação do movimento e com autores estrangeiros, no diálogo a respeito da reforma. Interação valiosa que possibilitou a esses autores viajarem e conhecerem *in loco* o que estava sendo discutido e a experiências que estavam sendo realizadas, assim como incrementarem os trabalhos que vinham desenvolvendo. Todavia, diante da análise que fizemos das obras desses autores interpretamos que eles se apropriaram de forma diferenciada de algumas ideias defendidas pelo MMM. O que está condizente com o referencial teórico-metodológico que mobilizamos para o desenvolvimento desta pesquisa, ou seja, com o conceito de apropriação de Chartier (2002), o qual se relaciona com a diversidade de interpretações e de compreensões dos indivíduos em relação aos objetos e às formas como os utilizam, bem como "[...] a liberdade criadora – mesmo que seja regrada – dos agentes que nem os textos nem as normas impõem, [...]" (CHARTIER, 2002, p. 67).

Diante do exposto, na compreensão da geometria presente nos livros didáticos publicados no período em que o MMM perdia seu protagonismo no Brasil e analisados nesta pesquisa, foram evidenciados que os autores, de certa forma, voltaram sua atenção para priorizar com mais ênfase uma Geometria que estava vigente no ensino escolar antes do MMM, ainda que continuassem fazendo uso de algumas ideias desse Movimento, a exemplo da Teoria dos Conjuntos como linguagem das teorias da Matemática. No entanto eles também estavam acompanhando novas reformulações propostas pela Educação Matemática e as tendências metodológicas que se destacaram na década de 1980.

Assim, a geometria, nas coleções de Sangiorgi e Castrucci e demais autores, além de manter indícios dos ideais de reforma presentes na década de 1970 – como a Teoria dos Conjuntos –, apresenta também características específicas do ensino que antecedeu o MMM – como as Construções Geométricas –, bem como foi abordada na década de 1980 por meio de novas abordagens metodológicas, com a Resolução de Problemas e a Informática, seguindo o fluxo das reformulações do ensino de matemática objetivando torná-lo mais significativo.

É nessa década que a Educação Matemática ganha maior espaço de discussão, e consequentemente, as tendências metodológicas que se inserem nesse campo de conhecimento começam a influenciar a produção dos livros didáticos de matemática.

Essas mudanças e permanências nas obras analisadas nos permitem interpretar que seus autores se apropriaram das discussões e propostas de reformulações para o ensino da geometria, como também mantiveram características do ensino que vigorava há algum tempo.

# REFERÊNCIAS

## DOCUMENTOS DE ARQUIVOS


FEHR, H. F. Dr. Howard F. Fehr; autor ajudou a iniciar sistema da nova Matemática. **Jornal The New York Times,** New York, 7 de maio de 1982, seção D, p. 19. Disponível em: https://www.nytimes.com/1982/05/07/obituaries/dr-howard-f-fehr-author-helped-start-system-of-new-math.html. Acesso em: 24 out. 2021.

FTD. José Ruy Giovanni celebra 40 anos de FTD, **FTD Educação**, 18 ago. 2015. Disponível em: https://ftd.com.br/noticias/jose-ruy-giovanni-celebra-40-anos-de-ftd/. Acesso em: 06 jun. 2021.

SANGIORGI, O. Carta de OS ao Sr. Consul Geral da Itália, referente à bolsa da Fundação "Amerigo Rotellini". 1954. Arquivo Pessoal de Osvaldo Sangiorgi, (APOS, T 2, 148, 2). Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/202445. Acesso em: 03 jul. 2021.

SANGIORGI, O. Relatório científico, manuscrito, das atividades desenvolvidas por OS. 1980. Arquivo Pessoal de Osvaldo Sangiorgi, (APOS, T 2, 548, 2. Contém também um bilhete). Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/202445. Acesso em: 03 jul. 2021.

SANGIORGI, O. A criança vê o que há atrás das somas e subtrações: Matemática Moderna. **Jornal Realidade**, São Paulo, ed. 17, ano 1967, p. 54-63. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/213659/2439. Acesso em 03 maio 2021.

SANGIORGI, O. Jogo lógico de Z. Dienes. **O Estado de S. Paulo**, São Paulo, 28 jun. 1970, p. 64. Disponível em: https://acervo.estadao.com.br/pagina/#!/19700628-29209-nac-0064-999-64-not/busca/Osvaldo+Sangiorgi. Acesso em: 03 maio 2021.

SANGIORGI, O. Matemáticos e Euclides. **O Estado de São Paulo,** São Paulo, 22 jan. 1967, p. 23. Disponível em: https://acervo.estadao.com.br/pagina/#!/19670122-28151-nac-0023-999-23-not/busca/Matem%C3%A1ticos+Euclide. Acesso em: 09 mar. 2021.

SANGIORGI, O. O moderno Ensino de Matemática no Japão. **O Estado de S. Paulo**, São Paulo, 03 mar. 1968, p. 33. Disponível em: https://acervo.estadao.com.br/pagina/#!/19680303-28495-nac-0033-999-33-not/busca/Osvaldo+Sangiorgi. Acesso em: 03 maio 2021.

## ENTREVISTAS

CASTRUCCI, B. **Benedito Castrucci:** depoimento [jul. 1988]. Entrevistadora: Elizabete Zardo Búrigo. São Paulo. 1988. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/201102. Acesso em: 07 fev. 2021.

CASTRUCCI, B. **Benedito Castrucci:** depoimento [out. 1990]. Entrevistadores: Sonia Maria de Freitas e Agostinho dos Santos. São Paulo: Museu da Imagem e do Som, 1990. Entrevista concedida para a memória da Faculdade de Filosofia Letras e Ciências da USP. Disponível em: https://acervo.mis-sp.org.br/buscacompleta?field_busca_field_value_op=allwords&field_busca_field_value=benedito+castrucci. Acesso em: 07 fev. 2021.

SANGIORGI, O. **Osvaldo Sangiorgi:** depoimento [jul. 1988]. Entrevistadora: Elizabete Zardo Búrigo. São Paulo. 1988. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/201131. Acesso em: 26 maio 2021.

## FONTES

CASTRUCCI, B.; PERETTI, R. G.; GIOVANNI, J. R. **Matemática,** 5ª série. São Paulo: FTD, 1976a.

CASTRUCCI, B.; PERETTI, R. G.; GIOVANNI, J. R. **Matemática** , 6ª série: livro do professor. São Paulo: FTD, 1976b.

CASTRUCCI, B.; PERETTI, R. G.; GIOVANNI, J. R. **Matemática,** 7ª série . São Paulo: FTD, 1976c.

CASTRUCCI, B.; PERETTI, R. G.; GIOVANNI, J. R. **Matemática**, 8ª série: livro do professor. São Paulo: FTD, 1976d.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**: teoria e aplicação, 5ª série. São Paulo: FTD, 1985a.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**: teoria e aplicação, 6ª série. São Paulo: FTD, 1985b.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**: teoria e aplicação, 7ª série. São Paulo: FTD, 1985c.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**: teoria e aplicação, 8ª série. São Paulo: FTD, 1985d.

SANGIORGI, O. **Matemática**, 5ª série: livro do professor. 2. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979a.

SANGIORGI, O. **Matemática**, 6. série: livro do professor. 2. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979b.

SANGIORGI, O. **Matemática**, 7. série: livro do professor. 2. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979c.

SANGIORGI, O. **Matemática**, 8. série. 2. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979d.

SANGIORGI, O. **Matemática**, 6ª série, Introdução à informática (apêndice especial). São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1985b.

SANGIORGI, O. **Matemática**, 7ª série: livro do professor, Introdução à informática (apêndice especial). São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1985c.

SANGIORGI, O. **Matemática**, 8ª série, Introdução à informática (apêndice especial). São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1985d.

## ARTIGOS E PUBLICAÇÕES DA ÉPOCA

CASTRUCCI, B. Sobre o Ensino de Geometria no curso Secundário. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 2., 1957, Porto Alegre. **Anais** […] Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 1957. p. 72. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/190262. Acesso em: 25 ago. 2021.

CASTRUCCI, B. **Lições de Geometria elementar**. 6. ed. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 1961.

CATUNDA, O.; DANTAS, M. M. S. Ensino de Geometria baseado em transformações. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 1979, Bahia Blanca, Argentina. **Anais** […].Bahia Blanca, Argentina. p. 70. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/200252. Acesso em: 05 fev.

2022.

FEHR, H. F. Reforma de la enseñanza de la geometría. *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA SOBRE LA EDUCACION DE LAS MATEMATICAS. Educacion de las Matemática en las Americas, 1., 1961, Bogotá. **Informes** [...]. Bogotá, Colômbia: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1961. p. 39-53.

FEHR, H. F.; CAMP, J.; KELLOGG, H. **La revolucion em las matematicas escolares** (segunda fase). Washington: Programa Regional de Desarrollo Cientifico y Tecnológico do Departamento de Assuntos Cientificos da Organización de los Estados Americanos, 1971.

GEEM. CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 5., 1966, São José dos Campos. **Anais** […] Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/196521. Acesso em: 11 jul. 2021.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna**. 1. ed., em língua inglesa, 1964. Tradução: Renata G. Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1971.

PIERRO NETTO, S. O Trabalho Dirigido no Ensino de Matemática. *In:* CONGRESSO BRASILEIRO DO ENSINO DA MATEMÁTICA, 5., 1968, São José dos Campos. **Anais** […]. São Paulo, 1968. p. 64-72

RICH, B. **Geometria**. 2. ed. Tradução: Rafael Morones. México: McGraw-Hill Interamericana, 1988.

## LITERATURA DE APOIO

---

ALMEIDA, A. F. de. O conceito de número e a matemática para ensinar: o caso das propostas curriculares paulistas da década de 1970. *In:* ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 23., 2019, São Paulo. **Anais…** São Paulo: UNICSUL - Campus Anália Franco, 2019. p. 1-12. Disponível em: http://eventos.sbem.com.br/index.php/EBRAPEM/EBRAPEM2019/paper/viewFile/718/585. Acesso em: 07 jan. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Novo desenho garante melhorias à Plataforma Sucupira da Capes**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/35995. Acesso em: 17 mar. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD**: Histórico. Disponível em: https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/pnld/historico. Acesso em: 14 dez. 2021.

BITTENCOURT, C. Livros didáticos entre textos e imagens. *In:* BITTENCOURT, C. **O Saber Histórico na Sala de Aula.** São Paulo: Contexto, 2001. p. 69-90.

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Pesquisa em Informática e Educação Matemática. **Educação em Revista**, Dossiê: A pesquisa em Educação Matemática no Brasil, Belo Horizonte, n. 36, p. 239-253, dez. 2002.

BRIGO, J. **As Figuras geométricas no ensino de matemática**: uma análise histórica nos livros didáticos. 2010. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

BRITTO, L. P. de. **Scipione Di Pierro Neto e sua proposta para o ensino da geometria na Coleção Curso Colegial Moderno**. 2008. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

BURIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 293 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

BÚRIGO, E. Z. Lucienne Félix no Brasil: repercussões de um movimento em curso na França dos anos 1960. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2012. **Anais eletrônicos** [...] Campinas, Galoá, 2012. Sem paginação. Disponível em: https://proceedings.science/enaphem-2012/trabalhos/lucienne-felix-no-brasil-repercussoes-de-um-movimento-em-curso-na-franca-dos-anos-1960. Acesso em: 10 ago. 2021.

CAMARGO, K. C. **O ensino da geometria nas coleções didáticas em tempos do Movimento da Matemática Moderna na capital da Bahia**. 2009. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Bandeirante, São Paulo, 2009.

CAVALHEIRO, Y. B.; DALCIN, A.; BÚRIGO, E. Z. Os conceitos topológicos na Coleção “Curso Moderno de Matemática para o Ensino do 1º Grau". In: In:

ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2020, Natal. **Anais [...]**. Natal: UFRN, 2020. p. 1-5.

CECHINEL, I. O. **As cores nas capas da Editora Civilização Brasileira da década de 1960**. 2010. 152 f. Dissertação (Mestrado em Artes)- Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Artes, Campinas, 2010.

CHARTIER, R. O mundo como representação. Tradução: Andréa Daher e Zenir Campos Reis. **Estudos Avançados**, v. 11, n. 5, p. 173-191, 1991.

CHARTIER, R. **A historia cultural:** entre praticas e representações. Tradução: Maria Manuela Galhardo. 2. ed. Lisboa: DIFEL, 1988.

CHARTIER, R. **À beira da falésia**: a história entre incertezas e inquietude. Tradução: Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Ed. UFRGS, 2002.

CHOPPIN, A. O historiador e o livro escolar. Tradução: Maria Helena Camara Bastos. **Revista História da Educação**, ASPHE/FaE/UFPel, Pelotas, n. 11, p. 5-24, abr. 2002. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/asphe/article/view/30596 . Acesso em: 04 jan. 2022.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. Tradução: Maria Adriana C. Cappello. **Educação & pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ep/a/GNrkGpgQnmdcxwKQ4VDTgNQ/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 29 abr. 2020.

CIBERNÉTICA PEDAGÓGICA. **Histórico**. Disponível em: https://www3.eca.usp.br/grupos/cpedagogica/historico . Acesso em: 24 ago. 2022.

CLARAS, A. F; FRANÇA, I. S. A Resolução de Problemas no ensino da matemática e as contribuições das calculadoras. *In*: EDUCERE CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 12./ SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE REPRESENTAÇÕES SOCIAIS, SUBJETIVIDADE E EDUCAÇÃO, 3., 2015, Curitiba. **Anais** […] Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2015. p. 7569 – 7579. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/19922_10659.pdf. Acesso em: 26 mar. 2022.

COSTA, L. M F. da. **O movimento da matemática moderna no Brasil:** o caso do Colégio de São Bento do Rio de Janeiro. 2014. 166 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

COUTO, A. P. N. P.; LIMA, L. A. M.; CHAQUIM, M. O curso de matemática para o ensino colegial organizado pelo SMSG e publicado no Brasil. *In:* SEMINÁRIO TEMÁTICO SABERES ELEMENTARES MATEMÁTICOS DO ENSINO PRIMÁRIO (1890-1970): Sobre o que tratam os Manuais Escolares?, 14., 2016, Natal. **Anais [...]** Natal: Universidade Federal Rio Grande do Norte, 2016. p. 1- 15. Disponível em: https://xivseminariotematico.paginas.ufsc.br/files/2016/05/ANA_LUCAS_CHAQUIAM_T3_vf.pdf. Acesso em: 06 nov. 2021.

DIAS, A. L. M. Uma história da educação matemática na Bahia. *In:* SIMPÓSIO NACIONAL DE HISTÓRIA, 26., 2011, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: ANPUH, 2011. p. 1-21.

DUARTE, A. R. S. **Matemática e educação matemática:** a dinâmica de suas relações ao tempo do movimento da matemática moderna no Brasil. 2007. 438 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DUARTE, A. R. S.; LEME DA SILVA, M. C. Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Práxis Educativa,** Ponta Grossa, PR, v. 1, n. 1, p. 87-93, jan./jun. 2006. Disponível em: https://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/271/276. Acesso em: 13 jun. 2020.

EVES, H**. Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed., Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, A. C. da C. **Propostas pedagógicas de geometria no movimento paranaense de matemática moderna**. 2006. 190 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Pontifícia Universidade Católica, Curitiba, 2006.

FERREIRA, R. C. **Orientações curriculares para o ensino de geometria:** do período da Matemática Moderna ao momento atual. 2008. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas "estado da arte". **Educação & Sociedade**, São Paulo, ano 23, n. 79, p. 257-272, ago. 2002. Disponível em: https://www.scielo.br/j/es/a/vPsyhSBW4xJT48FfrdCtqfp/abstract/?lang=pt. Acesso em: 09 nov. 2020.

FILLOS, L. M. O Ensino de Geometria: Depoimentos de Professores que Fizeram História. *In:* ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2006, Belo Horizonte**. Anais [...].** Belo Horizonte: UFMG, 2006.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em Educação Matemática**: o caso da produção científica em cursos de Pós-Graduação. 1994. 425 f. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 1994.

FISCHER, M. C. B. Formação de professores em tempos da matemática moderna: uma proposta de investigação histórica. **Revista Diálogo Educacional,** Curitiba, v. 8, n. 25, p. 663-674, set./dez. 2008.

FRANÇA, D. M. **Do primário ao primeiro grau:** as transformações da Matemática nas orientações das Secretarias de Educação de São Paulo (1961-1979). 2012. 296 f. Tese (Doutorado em Educação)- Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

FREIRE, I. A. A. **Ensino de Matemática:** iniciativas inovadoras no Centro de Ensino de Ciências da Bahia (1965-1970). 2009. 102 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências)–Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2009.

FREIRE, I. A. A.; DIAS, A. L. M. Seção Científica de Matemática do CECIBA: propostas e atividades para renovação do ensino secundário de matemática (1965-1969). **Bolema,** Rio Claro, v. 23, n. 35B, p. 363-386, abr. 2010.

FTD Educação. José Ruy Giovanni celebra 40 anos de FTD, **FTD Educação**, 18 ago. 2015. Disponível em: https://portal.ftd.com.br/noticias/jose-ruy-giovanni-celebra-40-anos-de-ftd/. Acesso em: 06 jun. 2021.

GARNICA, V. M.; SOUZA, L. A. **Elementos de História da Educação Matemática**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.

GUIMARÃES, H. M. por uma matemática nova nas escolas secundárias: perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna. In: MATOS, J. M.; VALENTE, W. R. (Org.). **A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal**: primeiros estudos. São Paulo: Editora Da Vinci/Capes/Ghemat, 2007. p. 21-45.

KILPATRICK, J. (2008) The development of mathematics education as an academic field. In: MENGHINI, M.; FURINGHETTI, F.; GIACARDI, L.; ARZARELLO, F. (Ed.). **The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008): reflecting and shaping the world of mathematics education. Rome:** Istituto della Enciclopedia Italiana, 2008. p 25–39. Disponível em: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.586.7306&rep=rep1&type=pdf . Acesso em: 18 mar. 2022.

LANDO, J. C. O estudo dirigido no ensino de Matemática no Brasil (1955-1966). *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais** [...]. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. Disponível em: http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1746/698. Acesso em: 07 jul. 2021.

LEME DA SILVA, M. C. A geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. *In:* VALENTE, W. R. (Org.). **Osvaldo Sangiorgi**: um professor moderno. São Paulo: Annablume, 2007. p. 69-94.

LEME DA SILVA, M. C. Que Geometria Moderna para as escolas do Brasil e de Portugal**?. Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 8, n. 25, p. 689-699, jul. 2008a. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/3757. Acesso em: 13 set. 2021.

LEME DA SILVA, M. C. A geometria escolar em Portugal e no Brasil: possibilidades de um estudo comparativo. *In:* CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 5., 2008, Aracaju. **Anais [...]** Aracaju. 2008b. p. 1-13. Disponível em: https://sbhe.org.br/uploads/proceeding/545/853fe880355199b18a304ec50addf864.pdf . Acesso em: 13 nov. 2020.

LEME DA SILVA, M. C. O Movimento da Matemática Moderna e a geometria nas séries iniciais. *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais** [...]. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. p. 1-7. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2756/596. Acesso em: 16 nov. 2020.

LIMA, E. B. et al. A institucionalização da matemática moderna nos currículos escolares ou a hegemonia da cultura matemática científica nas escolas. *In:* JORNADAS LATINOAMERICANAS DE ESTUDIOS SOCIALES DE LA CIENCIA Y TECNOLOGIA, 8., 2010, Buenos Aires. **Anais** [...]. [ S.I.: s.n], 2010, 1CD ROM.

LIMA, F. R. **GEEM - Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e a Formação de Professores durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.** 2006. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LOPES, M. L. M. L. GEPEM — Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n. 62, p. 100-103, abr./jun. 1994.

LORENZATO, S. Porque não ensinar geometria?. **A Educação Matemática em Revista**, SBEM, ano 3, n. 4, p. 03-13, set. 1995. Disponível em: http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO

_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf. Acesso em: 27 ago. 2019.

MARQUES, A. S. **Tempos Pré-Modernos:** a Matemática escolar dos anos 1950. 2005. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MATOS, J. M.; LEME DA SILVA, M. C. O Movimento da Matemática Moderna e Diferentes Propostas Curriculares para o Ensino de Geometria no Brasil e em Portugal. **Bolema** - Boletim de Educação Matemática**,** v. 24, n. 38, p. 171-196, abr. 2011.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?. **Pro-Posições**, v. 1, n. 3, p. 39-54, 1992.

MINHOTO, M. A. P. Articulação entre primário e secundário na era Vargas: crítica do papel do estado. **Educação e Pesquisa**, v. 34, n. 3, p. 449-463, 2008. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/ep/article/view/28099. Acesso em: 13 set. 2021.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, p. 19-40, 1993.

MOON, B. **The 'New Maths' Curriculum Controversy:** an international story. Londres: The Falmer Press, 1986.

MORAES, D. D. C. D. de. **Uma trajetória do design do livro didático no Brasil**: a Companhia Editora Nacional, 1926-1980. 2016. 382 f. Tese (Doutorado em Design e Arquitetura) - Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

MENDONÇA, T. N. **Que geometria ensinar às crianças em tempos de matemática moderna?** Referências e práticas de uma professora da cidade de Juiz de Fora. 2016. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2016.

OLIVEIRA, A. S. *et al*. Matemática Moderna: Novos conteúdos? Novas metodologias? *In:* OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. (Org.). **O Movimento da Matemática Moderna:** a história de uma revolução curricular. Juiz de Fora: Ed. UFJF, 2011. p. 112-130.

OLIVEIRA, M. C.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. **O Movimento da Matemática Moderna**: História de uma Revolução Curricular. Juiz de Fora:

Editora UFJF, 2011.

OLIVEIRA, A. S. **Análise de livros didáticos:** uma abordagem histórico-cultural em tempos modernos (1960-1970). São Paulo: All Print Editora, 2015.

ONUCHIC, L. De La R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria:** uma visão histórica. 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação – Metodologia de Ensino) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PAVANELLO, R. M. O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências. **Zetetiké,** Cempem – FE – Unicamp, ano 1, n. 1, p. 7-18, 1993.

PERES, E; VAHL, M.M. Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental do Instituto Nacional Do Livro (PLIDEF/INL, 1971-1976): contribuições à história e às políticas do livro didático no Brasil. **Revista Educação e Políticas em Debate**, v. 3, n.1, p. 53-70, jan./jul. 2014. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/revistaeducaopoliticas/article/view/27682/15161. Acesso em: 04 jan. 2022.

PIRES, C. M. C. **Currículos de matemática:** da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

RAMASSOTTI, L. C. **Benedito Castrucci e as suas publicações destinadas ao ensino em geral com ênfase em geometria**. 2018. 360 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

RÊGO, E. F. Tópicos de Geometria. FCUP-Departamento de Matemática Pura. Notas de aula, 2004. p. 1-74. Disponível em: https://cmup.fc.up.pt/cmup/eerego/TG.pdf. Acesso em: 26 mar. 2022.

RIOS, M. S. B. **A proposta de ensino da geometria nos livros do GRUEMA**. 2010. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Bandeirante, São Paulo, 2010.

RODRIGUES, C. R. F. **Potencialidades e possibilidades do ensino das transformações geométricas no Ensino Fundamental**. 2012. 156 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SCHUBRING, Gert. The Road Not Taken—The Failure of Experimental Pedagogy at the Royaumont Seminar 1959. **Journal für Mathematik-Didakti**k, v. 35, n. 1, p. 159-171, 2014.

SCHUBRING, G. O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha. *In*: VALENTE, W. R. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. Brasília: Editora UnB, 2004.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática:** notas de aulas. Tradução: Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Autores associados, 2003.

SILVA, J. C. D. da; PIETROPAOLO, R. C. Um estudo sobre as contribuições de Felix Klein para a introdução das Transformações Geométricas, nos currículos prescritos de matemática do ensino fundamental. **Rev. Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 14, p. 299-316. 2014.

SILVA, M. A. A fetichização do livro didático no Brasil. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, v. 37, n. 3, p. 803-821, set./dez. 2012. Disponível em: https://www.seer.ufrgs.br/educacaoerealidade/article/view/20373. Acesso em: 04 jan. 2022.

SILVA, C. M. A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e a formação de professores de Matemática. *In:* REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, 23., 2000. **Anais [...]** Caxambu: ANPEd, 2000. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/340984234_A_FACULDADE_DE_FILOSOFIA_CIENCIAS_E_LETRAS_DA_USP_E_A_FORMACAO_DE_PROFESSORES_DE_MATEMATICA_1. Acesso em 06 out. 2021.

SOARES, F. S. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** avanço ou retrocesso?. 2001. 192 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SOARES, F. S. Os Congressos de Ensino da Matemática no Brasil nas décadas de 1950 e 1960 e as discussões sobre a Matemática Moderna. *In*: SEMINÁRIO PAULISTA DE HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2005, São Paulo. **Anais […]** São Paulo: IME - USP, 2005. p. 445-452. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~sphem/documentos/sphem-tematicos-5.pdf. Acesso em: 10 fev. 2022.

SOARES, F. S. **O professor de matemática no Brasil (1759-1879):** Aspectos Históricos. 2007. 172 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

SOARES, E. T. P.; PINTO, N. B. Investigando os blocos lógicos: um desafio inicial. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 10., Curitiba, 2011. **Anais** [...]. Curitiba, PUC, 2011. p. 6790-6803. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/4374_3255.pdf. Acesso em: 10 ago. 2021.

SOUZA, G. L. D. **Educação matemática na CENP:** um estudo histórico sobre condições institucionais de produção cultural por parte de uma comunidade de prática. 2005. 432 f. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

TEIXEIRA, P. M. M; MEGID NETO, J. O estado da arte da pesquisa em ensino de Biologia no Brasil: um panorama baseado na análise de dissertações e teses. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias,** v. 2, n. 11, p. 273-297, 2012.

TRÓPIA, F.; FURTADO, K. C. C.; BACCAR, M. H. M. M. Felix Klein e o Programa de Erlangen: histórico e implicações pedagógicas. *In:* SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO, 9., 2020, Rio de Janeiro. **Anais** […]. Rio de Janeiro, 2020. Sem paginação. Disponível em: http://eventos.sbem.com.br/index.php/spem-rj/ix-spem-rj/paper/viewFile/1478/1199. Acesso em: 05 abr. 2022.

VALENTE, W. R. Oito temas sobre História da Educação Matemática. **REMATEC,** Natal, ano 8, n.12, p. 22-50, jan./jun. 2013. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160384. Acesso em: 13 jan. 2022.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, Cempem – FE – Unicamp, v. 16, n. 30, p. 139-162, jul./dez. 2008.

VALENTE, W. R. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 28-49, jan. 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12990. Acesso em: 03 set. 2019.

WAGNER, E. **Construções Geométricas.** Rio de janeiro: SBM, 1993.

ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso:** as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001. 211 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

# DECLARAÇÃO DE AUTORIA

Eu, Eliane de Jesus Santos, declaro para os devidos fins que a presente Dissertação é de minha autoria e que estou ciente:

- do conteúdo da Lei no 9.610[17], de 19 de fevereiro de 1998, sobre os Direitos Autorais;
- e que plágio consiste na reprodução integral ou parcial de obra alheia, apresentando-a como se fosse de própria autoria, ou ainda na inclusão em trabalho próprio de textos, imagens de terceiros, sem a devida indicação de autoria.

Declaro, ainda, estar ciente de que, se a qualquer tempo, mesmo após a defesa, for detectado qualquer trecho do texto em questão que possa ser considerado plágio, isso poderá implicar em processo administrativo, resultando, inclusive, na não aceitação do trabalho para a defesa ou, caso esta já tenha ocorrido, na perda do título Mestrado do Programa de Educação Científica e Formação de Professores (PPG-ECF).

Eliane de Jesus Santos

Assinatura do(a) Autor(a)

Jequié / 2022

Local e data

[17] Disponível em: [illegible]