UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
Programa de Pós-Graduação
- Educação Científica e Formação de Professores -

PPG.ECFP

Programa de Pós-Graduação em
Educação Científica e Formação de Professores

APRENDIZAGEM DE NÚMEROS RACIONAIS: UM ESTUDO SOBRE OS SIGNIFICADOS PESSOAIS APÓS O ENSINO FUNDAMENTAL

LOURDES CLEIDES SANTANA SALES

2021

LOURDES CLEIDES SANTANA SALES

APRENDIZAGEM DE NÚMEROS RACIONAIS: UM ESTUDO SOBRE OS SIGNIFICADOS PESSOAIS APÓS O ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Formação de Professores da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia para obtenção do título Mestre em Educação Científica e Formação de Professores.

Orientador: Prof. Dr. Vicenc Font Moll
Coorientadora: Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

Jequié/BA - 2021

S163a Sales, Lourdes Cleides Santana

Aprendizagem de números racionais: um estudo sobre os significados pessoais após o ensino fundamental / Lourdes Cleides Santana Sales.- Jequié, 2021.

112f.

(Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Formação de Professores da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, sob orientação do Prof. Dr. Vicenc Font Moll e coorientação da Profa. Dra. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

1.Aprendizagem Matemática 2.Significado Pessoal 3.Significado Institucional 4.Números Racionais I.Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia II.Título

CDD – 372.7

Rafaella Câncio Portela de Sousa - CRB 5/1710. Bibliotecária – UESB - Jequié

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
Campus Universitário de Jequié/BA
Programa de Pós-Graduação
Educação Científica e Formação de Professores

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

APRENDIZAGEM DE NÚMEROS RACIONAIS: UM ESTUDO SOBRE OS SIGNIFICADOS PESSOAIS APÓS O ENSINO FUNDAMENTAL

Autora: Lourdes Cleides Santana Sales
Orientador: Vicenc Font Moll
Coorientadora: Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Lourdes Cleides Santana Sales e aprovada pela Comissão Julgadora.
Data:

Assinatura orientador: .....

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Vicenç Font Moll

Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

Prof.ª Dr.ª Janice Cássia Lando

Prof. Dr. Jonson Ney Dias

2021

Agradecimentos

Agradeço a Deus, como a força maior que mora em mim, que me ajuda a caminhar nos momentos difíceis na certeza de que tudo dará certo e agradecer pelas aprendizagens e conquistas.

Aos meus pais, José Domingos (*In memoriam*) e Lourdes Santana, minhas raízes, minha maior escola. A vocês, toda honra, a minha gratidão e o meu amor infinito.

Aos meus irmãos: Lu, Vera, Si, Zélia, Jó, Fau, Nenho, Nélia e Nelian, pedacinhos de mim. Com vocês eu sou mais forte e mais feliz, pois tenho a certeza do apoio, do afago na alma, do cuidado e do carinho. É amor demais para descrever! Muito obrigada!

A Sales, meu esposo, por acreditar e incentivar a busca desta conquista. Foi quem ficou com a parte mais difícil... Desculpas pelas ausências, pela impaciência nas pequenas coisas, pelos momentos de aborrecimentos e angústias. Foi um período bem complexo na minha trajetória pessoal e profissional. Obrigada, querido!

Aos meus alunos, a razão maior de vivenciar essa jornada dupla de trabalhar e estudar, numa condição, muitas vezes, desumana. O desejo maior é de ser melhorar na arte de educar.

Aos meus colegas e amigos... não tenho como citar nomes, pois são muitos e, cada um de um jeito único e especial, se faz presente de diferentes formas: na disponibilidade de ajudar, nos convites para distrair um pouco, nas mensagens de incentivo e carinho. Gratidão imensa!

A Leinad e Vanessa, as secretárias do meu anjo de guarda. Como devo a vocês a conclusão deste trabalho! Quando eu já não tinha respostas, vocês não só acreditaram em mim, como seguraram a minha mão, de uma maneira muito especial, assumiram comigo a tarefa de fazer acontecer. Vocês são pessoas raras! Com vocês, muitas vezes, saí do choro para o riso de forma leve e solta. Admiração, carinho e muita gratidão. Amigas, superpoderosas,

para sempre!!! Vanessa, a sua energia, a sua alegria, o seu apoio, a sua presença amiga (mesmo de longe) foram grandes lições na arte de ser gente. Você é a "Ana" mais especial que uma "Frozen" pode conhecer! Obrigada por tudo!!!!

Ao professor Vicenç Moll e à Tânia, pela orientação na produção do trabalho. Agradeço também a Janice e Jonson pelo acompanhamento e avaliação da pesquisa. Suas contribuições foram muito valiosas. Meu muito obrigada! Destaque especial para a professora Tânia, como um exemplo de compromisso com a educação, de acolhida com todos e amor pelo que faz. Muito respeito e admiração!!!!

Por fim, mas não menos importantes, gratidão à Martha Raíssa pelo apoio em um momento de fragilidade e à Márcia Ornelas, por representar a força da ação, pelo incentivo e parceria, por me ajudar a vislumbrar a linha de chegada e caminhar comigo. Obrigada! Muito obrigada!!!

Deixo registrada a minha gratidão à vida por todos os desafios e percalços que me fizeram mais forte, aos amigos-anjos que encontrei no percurso e hoje tornam a minha vida mais feliz.

Gratidão!!!!

RESUMO

Esta pesquisa se insere no campo da Educação Matemática, focando a aprendizagem dos números racionais. Seu desenvolvimento se deu a partir das vivências do lugar de professora de Matemática do Ensino Médio e norteada pela seguinte pergunta: quais as distâncias e aproximações entre os significados apresentados por alunos concluintes do Ensino Fundamental (significado pessoal) sobre os números racionais e o significado de referência da Matemática Escolar (significado institucional)? Para respondê-la, o estudo teve como base o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e Instrução Matemática (EOS) para conceituar significado, significado pessoal, significado institucional, bem como apresentar aspectos importantes na construção da aprendizagem matemática no ambiente escolar, segundo o aporte teórico citado. Descrevemos a caracterização do Conjunto dos Números Racionais como objeto matemático e como este está apresentado em documentos curriculares como os Parâmetros Curriculares Nacionais e Base Nacional Comum Curricular. Analisamos, ainda, o desempenho dos estudantes em situações que envolvam números racionais, por meio de uma abordagem qualitativa de produção e análise de dados. Aplicamos, para tanto, um questionário *online* contendo problemas matemáticos com quinze estudantes de escola pública e interpretamos suas respostas segundo o conceito e tipos de significado pessoal e de significado institucional, descritos pelo EOS. Os resultados apontam distâncias e aproximações entre o significado construído pelos alunos e o significado de referência da Matemática Escolar e sinalizam para a necessidade de novas reflexões sobre a temática no contexto educacional.

Palavras-chave: Aprendizagem Matemática. Significado Pessoal. Significado Institucional. Números Racionais.

ABSTRACT

This research is part of the field of Mathematics Education, focusing on the learning of rational numbers. Her development came from the experiences of the position of high school Mathematics teacher and guided by the following question: what are the distances and approximations between the meanings presented by students graduating from elementary school (personal meaning) about rational numbers and the reference meaning of School Mathematics (institutional meaning)? To answer it, the study was based on the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (EOS) to conceptualize meaning, personal meaning, institutional meaning, as well as to present important aspects in the construction of mathematical learning in the school environment, according to the theoretical contribution mentioned. We describe the characterization of the Set of Rational Numbers as a mathematical object and how it is presented in curriculum documents such as PCN and BNCC. We also analyzed the performance of students in situations involving rational numbers, through a qualitative approach to data production and analysis. For this purpose, we applied an online questionnaire containing mathematical problems to fifteen public school students and interpreted their answers according to the concept and types of personal meaning and institutional meaning described by the EOS. The results point out distances and approximations between the meaning constructed by the students and the meaning of reference of School Mathematics and indicate the need for new reflections on the subject in the educational context.

Keywords: Math Learning. Personal Meaning. Institutional Meaning. Rational Numbers.

Lista de Abreviaturas e Siglas

AAP	Avaliação da Aprendizagem em Processo
ADEPE-MT	Avaliação Diagnóstica do Ensino Público Estadual de Mato Grosso
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EOS	Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática
DSC	Discurso do Sujeito Coletivo
GDICEM	Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática das Ciências Experimentais e da Matemática
MEC	Ministério de Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPP	Projeto Político-Pedagógico
PE	Plano de Ensino
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SI	Sistema Internacional de Medidas
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TSME	Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11

CAPÍTULO 1 – REVISÃO DE LITERATURA 17

CAPÍTULO 2 – MARCO TEÓRICO 40

1.1 O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e Instrução Matemática (EOS) 40

1.2 Um breve olhar sobre a origem e evolução dos números racionais 48

1.3 Os números racionais: ideias e características 50

1.4 Os significados institucionais: uma análise dos documentos oficiais brasileiros 57

CAPÍTULO 3 – CAMINHOS METODOLÓGICOS 65

3.1 Abordagem da Pesquisa 65

3.2 Caracterização do lócus da pesquisa 66

3.3 Instrumento para a produção dos dados 69

3.4 Análise dos dados 72

CAPÍTULO 4 – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS 74

CONSIDERAÇÕES FINAIS 95

REFERÊNCIAS 100

APÊNDICE A – Cópia do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido dos alunos 106

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 108

DECLARAÇÃO DE AUTORIA 112

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina presente na educação básica e é muito fácil destacar a sua importância no nosso cotidiano. Para D'Ambrósio (2001, p. 22), a todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, generalizando, inferindo e, de alguma maneira, avaliando ou utilizando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura. Assim, a Matemática reflete as leis sociais e é uma ferramenta para o conhecimento do mundo e para o domínio da natureza.

Embora haja muitos estudos sobre a aprendizagem de Matemática, essa área do conhecimento continua marcada por grandes resistências por parte de muitos alunos em relação ao seu aprendizado e tem, como consequência, o fracasso escolar matemático (RODRIGUES, 2005; SEVERO, 2009).

Os sistemas de avaliação externa expressam resultados insatisfatórios em relação à aprendizagem de Matemática, como é o caso do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Os números do Ensino Médio apresentados na avaliação de 2019 significam que, em Matemática, a maioria dos estudantes não consegue resolver problemas com operações fundamentais com números naturais entre outras habilidades básicas que fazem parte das matrizes de referência do Ministério de Educação (MEC) (INEP, 2020). Logo, os dados apontam para a necessidade de repensar o ensino de Matemática, uma vez que a falta de domínio na área pode afetar a vida dos estudantes, trazendo-lhes prejuízos nos âmbitos escolar, pessoal e profissional.

A Matemática é uma disciplina central na escolarização. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) seu papel formativo:

> [...] contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras

capacidades pessoais (BRASIL, 1999, p. 82).

Diante da importância apresentada, o ensino-aprendizagem de Matemática apresenta um papel essencial na formação do estudante para que este possa atuar ativamente nos contextos em que está inserido.

Ademais, apresentar resultados mais efetivos é tarefa de todos os profissionais que compõem a conjuntura educacional do país. Entretanto, durante as atividades pedagógicas, nem sempre isso é possível para os professores do Ensino Básico das redes públicas. É comum vivenciar angústias e conflitos em relação à constituição dos saberes que envolvem o processo de ensinar e de aprender.

A partir desse contexto, entende-se que é necessário reencontrar o sentido do que se ensina na escola. É preciso reconstruir uma nova consciência no que se refere ao ensino da Matemática atual.

Na condição de professora de Matemática, há 10 anos, atuando no Ensino Médio, não posso me isentar de analisar, cuidadosamente, o meu fazer pedagógico e a realidade na qual estou inserida. Uma realidade em que a aprendizagem de Matemática apresenta resultados insignificantes e os trabalhos propostos pouco têm contribuído para uma mudança do cenário atual.

Além disso, incomoda-me a resistência dos alunos no estudo de tal disciplina. Nas turmas que atuo, por exemplo, pouquíssimos alunos demonstram algum tipo de motivação para aprender, por conseguinte, avalio o resultado do trabalho pedagógico como insatisfatório.

A maioria de meus alunos apresenta uma limitação acentuada em conceitos básicos da Matemática. Para ilustrar essa situação, frequentemente, os estudantes questionam sobre conceitos de fração, de números decimais e de noções simples de porcentagem, como: "*Professora, qual é maior: um quinto ou um?*"; "*Qual a diferença de um meio para um e meio?*"; "*Como fazer a conta com fração?*". Essas e outras tantas perguntas, além de muitos depoimentos de outros colegas, denunciam uma fragilidade na aprendizagem desse conjunto numérico.

Atuando na rede pública de ensino, recordo-me que, quando lecionava no Ensino Fundamental, até 2009, o trabalho com números racionais era realizado por meio de atividades concretas e diversificadas, como recortes de papel, jogos, situações-problema, entre outras. Nesse percurso, apesar de todo esforço, o rendimento dos alunos era insatisfatório. Em 2010, comecei a atuar no Ensino Médio, a situação agravou por uma acentuada limitação no domínio de conceitos básicos, desencadeando em mim uma frustração e uma vontade de entender melhor o conteúdo e atuar de forma mais segura e com recursos teóricos e práticos que possibilitassem oportunizar a apropriação do conhecimento pelos alunos.

Diante disso, passei a ampliar minha formação profissional e a concretização desta com a aprovação no processo seletivo no curso de Mestrado em Educação Científica e Formação de Professores, pelo Programa de Pós-graduação do Departamento de Ciências Biológicas, na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB).

Dentre tantas oportunidades de conhecer melhor como acontece a construção do conhecimento científico que estou vivenciando no decorrer do curso, a participação no Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática das Ciências Experimentais e da Matemática (GDICEM) foi importante para direcionar os meus interesses relacionados à aprendizagem de Matemática. No GDICEM, tive contato com o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), percebendo que esse constructo teórico me forneceria ferramentas teóricas para melhor compreender a aprendizagem dos objetos matemáticos.

Especificamente, no EOS, é abordada a noção de significado institucional e pessoal de um objeto matemático, ajudando-nos a compreender os registros que os alunos apresentam em relação aos números racionais como significado pessoal construído no decorrer do Ensino Fundamental.

Um conjunto de fatores contribuiu para direcionar os nossos estudos entorno das dificuldades de aprendizagem de alunos em conceitos básicos de matemática. A participação no GDICEM, o diálogo com os integrantes desse

grupo durante as reuniões de estudo, os resultados observados em minha experiência em sala de aula, as discussões com colegas da área e as leituras sobre o tema me auxiliaram a compreender que a grande dificuldade dos alunos no que diz respeito aos números racionais não era uma experiência apenas minha, mas, sim, coletiva. Assim, minha decisão tornava-se certa em debruçar um olhar de pesquisadora para essa área e, mais especificamente, para a investigação da aprendizagem dos números racionais, considerando o aluno, seus conhecimentos, seus conceitos e sua maneira de aprender.

Nesse sentido, a presente pesquisa centraliza discussões a respeito da aprendizagem de Matemática de números racionais, os significados atribuídos pelos alunos aos conceitos aprendidos sobre números racionais e, ainda, a aproximação ou o distanciamento desses significados aos significados de referência que a Matemática, enquanto conhecimento sistematizado e de referencial institucional, apresenta.

Diante do exposto, as motivações pessoais, os desafios da aprendizagem da Matemática, os momentos de orientação e os embasamentos teóricos, passando a assumir a escrita deste texto na terceira pessoa do plural, questionamo-nos sobre a existência de uma distância entre o conhecimento que o aluno do Ensino Médio construiu sobre os números racionais ao longo do Ensino Fundamental e o conhecimento matemático de referência.

Essa problematização nos levou a pergunta que norteia este estudo: quais as distâncias e aproximações entre os significados apresentados por alunos concluintes do Ensino Fundamental (significado pessoal) sobre os números racionais e o significado de referência da Matemática Escolar (significado institucional)? Tal questionamento resultou na seguinte premissa: existe uma distância entre os significados construídos pelos alunos e os significados de referência da Matemática.

Conforme Lins e Gimenez "produzir significados é, então, falar a respeito de um objeto" (LINS; GIMENEZ, 2000, p. 146). Ao aproximar-se, portanto, de uma perspectiva, de uma abordagem teórica que considere a produção de significados nas relações de ensino-aprendizagem, mediante de

um acompanhamento sistematizado, esperamos poder entender como os alunos interpretam o objeto matemático números racionais e tornar o fazer da instituição escolar "mais efetiva em seu papel de ajudar os alunos a aumentar seu repertório de modos de produzir significado" (LINS; GIMENEZ, 2006, p. 162).

Assim, este trabalho visa considerar os significados apresentados no ambiente escolar, as articulações estabelecidas entre os estudantes e o objeto matemático, bem como analisar se, nos primeiros contatos com os números racionais, os significados apresentados foram entendidos ou, ainda, verificar como eles foram significados.

Portanto, os objetivos deste trabalho são os seguintes:

• Identificar os significados pessoais que alunos da 1ª série do Ensino Médio atribuem aos números racionais;

• Comparar os significados de números racionais, apresentados por alunos da 1ª série do Ensino Médio, com os significados de referência em Matemática, verificando as distâncias e as aproximações entre eles;

• Descrever os conflitos semióticos de significados dos números racionais que os alunos apresentam.

Partimos do pressuposto de que, durante o Ensino Fundamental, foram realizadas ações no ensino dos números racionais, visto que é um conteúdo presente no currículo institucional desde as séries iniciais e que algum sentido foi construído pelos alunos durante essa etapa da escolarização básica. Portanto, consideramos que a análise de como os discentes resolvem questões envolvendo números racionais, os recursos e as estratégias utilizadas no processo de resolução e os argumentos utilizados para as respostas encontradas são formas de caracterizar o significado pessoal, as quais impactam, por sua vez, nas maneiras de ler, interpretar e expressar, fazendo uso do conhecimento construído. Analisar a condição dos alunos que chegam ao Ensino Médio é o ponto de partida para o estudo.

Seguiremos com uma breve sistematização da história e dos significados institucionais dos números racionais bem como uma abordagem de como esse

saber matemático está apresentado nas propostas legais expressas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A referência aos documentos institucionais se justifica também como uma possibilidade de perceber aspectos comuns e possíveis distâncias entre as respostas dos alunos no questionário aplicado (caracterizando o significado pessoal) e os significados que servem de base para o saber institucionalizado no ambiente escolar, o que é o nosso maior desafio.

A dissertação encontra-se estruturada e organizada da seguinte forma: esta **Introdução** que acabamos de apresentar, brevemente, um diálogo acerca do ensino-aprendizagem de matemática, os objetivos e o questionamento que norteou a pesquisa, bem como a experiência pessoal. No **Capítulo 1**, intitulado Revisão de Literatura, apresentamos um conjunto de pesquisas que foram realizadas, buscando as diferenças e as semelhanças entre a literatura e nossa pesquisa. No **Capítulo 2**, Marco teórico, expomos os pressupostos teóricos nos quais nos baseamos para realizar o estudo. No **Capítulo 3**, nomeado Caminhos Metodológicos, abordamos a metodologia utilizada neste trabalho, a fim de justificar os caminhos percorridos. No **Capítulo 4**, intitulado Análise e discussão dos dados, descrevemos e discutimos à luz dos referenciais e das teorias os dados coletados. Por fim, as **Considerações Finais** na qual apresentamos a construção do significado dos números racionais pelos alunos que ingressam no ensino médio, além de reflexões acerca do processo de ensino-aprendizagem da Matemática nesse contexto.

CAPÍTULO 1
REVISÃO DE LITERATURA

O estudo sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais tem envolvido olhares de um número cada vez maior de pesquisadores na área de Educação Matemática. Muitos são os registros de pesquisas sobre o processo de ensino-aprendizagem de frações (SILVA, 2017), números decimais ou porcentagem (ROGERI, 2015). Entretanto, grande parte dos trabalhos de pesquisa estão com o foco no Ensino Fundamental (TEIXEIRA, 2018). São estudos que propõem o uso de novos recursos ou metodologias diferenciadas na busca de assegurar a aprendizagem deste campo de conhecimento.

Em um levantamento que realizamos no banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao longo do mês de junho de 2020, gerou 112 trabalhos relacionados à temática dos números racionais e aprendizagem. Ao limitarmos o recorte temporal em onze anos, situados entre 2009 até 2019 e selecionarmos a área de conhecimento e concentração, o número de registros foi reduzido para 21 produções. No contexto do Ensino Médio, apenas dois trabalhos se aproximaram do trabalho que nos propomos a fazer e alguns não contemplam de maneira direta o tema em estudo e, por isso, foram desconsiderados.

Apresentamos brevemente vinte e um trabalhos encontrados sobre a aprendizagem dos números racionais na busca de enriquecer e aprofundar nosso olhar.

A investigação de Monteiro (2017) intitulada "*O estudo dos números racionais no Brasil e no México: um olhar na perspectiva da Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa*" teve como foco uma análise comparativa sobre o processo de estudos dos Números Racionais nestes dois países, tendo como suporte teórico a Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa (TSME). Partindo da questão "Como a TSME pode orientar indicações curriculares para o processo de estudo dos números racionais?", Monteiro (2017) apresentou uma proposta de ensino dos números racionais para o Ensino Fundamental

brasileiro, inspirado nas orientações da TSME. Entre os procedimentos de pesquisa, este autor realizou uma análise documental sobre as leis que regem a educação de ambos os países e as orientações sobre o estudo dos números racionais e entrevistou um grupo de professores brasileiros e mexicanos para compreender como se dá o processo de estudo do tema. Assim, destacou aspectos da realidade das propostas oficiais de ambos os países quanto ao fazer pedagógico no trabalho com números racionais, recorreu à problematização do saber matemático e da Matemática escolar para uma reflexão epistemológica e didática dos diferentes significados dos Racionais, nem sempre abordados de forma adequada nos programas de estudos e livros didáticos.

Para Monteiro (2017), a investigação permitiu compreender como a TSME pode contribuir para a prática escolar, ao se dedicar ao entendimento dos aspectos que agem e influenciam na ação dos sujeitos envolvidos no processo de estudo. Para esse autor, o estudo dos números racionais atrai a atenção para o currículo e para a prática escolar. A análise sobre a abordagem dos programas oficiais e o fazer escolar em dois contextos diferentes, permite uma melhor percepção da problemática.

Outro trabalho de vertente comparativa, desta vez entre Brasil e Portugal, de Vasconcelos (2015), abordou as relações numéricas na aprendizagem inicial de frações, intitulado: "*A compreensão das relações numéricas na aprendizagem de frações: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica*". A base teórica adotada nesta tese de doutoramento deriva dos estudos da Psicologia Cognitiva e da Educação Matemática. A autora propõe uma revisão da complexidade do conceito dos números racionais, pelo desafio que ele tem representado para crianças e adolescentes em termos de aprendizagem.

O método de pesquisa adotado por Vasconcelos foi o *survey* de caráter quali-quanti, aplicando uma avaliação individual com 22 problemas, a estudantes na sala de aula. A investigação buscou verificar diferenças e semelhanças no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses quanto à compreensão da relação inversa entre quantidades, em situações de divisão e

de fração, por meio de estudo comparativo. A amostra envolveu 90 estudantes brasileiros (M=9,88 anos) e 73 portugueses (M=9,69 anos), do 4º ano do Ensino Fundamental de escolas da rede pública de ensino das cidades de Porto Alegre – Brasil, e de Braga – Portugal. O estudo apontou uma "superioridade" nos resultados dos estudantes portugueses em relação aos brasileiros. Os estudantes portugueses apresentaram níveis superiores de compreensão da relação inversa entre quantidades, evidenciados no percentual maior das explicações para a solução dos problemas com justificativas válidas. A autora destaca que a mudança no programa curricular da Matemática realizada em Portugal possibilita a exploração do conhecimento conceitual dos números racionais desde os primeiros níveis dos anos iniciais, o que parece favorecer a aprendizagem.

Os dois trabalhos apresentam a problemática do ensino de números racionais em realidades diferentes, analisando a prática e a construção do currículo. As pesquisas foram no contexto do Ensino Fundamental e já descrevem desafios na construção do conhecimento deste campo numérico, sugerindo a necessidade de mudanças curriculares e do ensino a fim de potencializar as ações dos sujeitos envolvidos no processo de estudo.

Com uma perspectiva que julgamos diferenciada, o trabalho de Santos (2015) tem como título "*A compreensão do professor sobre os erros dos alunos, em itens envolvendo expectativas de aprendizagem dos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental*". O autor utilizou de aportes teóricos para discutir os estudos sobre erros na aprendizagem escolar; a compreensão da avaliação da aprendizagem e os trabalhos referentes aos números racionais.

Na pesquisa Santos utilizou dois tipos de questionários, um para alunos e outro para professores, contemplando as expectativas de aprendizagem dos números racionais para o 5º ano. O questionário foi respondido por 324 alunos da rede municipal de Jaboatão dos Guararapes, Pernambuco, e por 209 professores da mesma cidade. Os resultados apontam que cerca de um em cada dez professores não identificam respostas inadequadas ao analisarem o

desempenho dos estudantes. Quanto à interpretação dos erros, cerca de 30% dos professores demonstraram possuir esta habilidade.

Assim, Santos (2015) conclui que os professores não lidam bem com o conhecimento do conteúdo matemático e apresentam dificuldades na compreensão do conhecimento pedagógico do conteúdo. Para superação das dificuldades de interpretar os erros, que, segundo o autor, parecem estar associadas à falta de habilidade em lidar com o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo, sugere a promoção de formação para suprir as lacunas identificadas na formação inicial e continuada dos professores.

Esse trabalho corrobora com a nossa observação e ratifica a necessidade de olhar para a construção do conhecimento pedagógico do conteúdo matemático. O pesquisador sugere a formação do professor como possibilidade de trilhar novos caminhos, denunciando que a problemática é real e requer pesquisas. Porém, a nossa proposta é focar no aluno como ponto de partida para uma interferência mais efetiva no processo de construção do conhecimento.

O estudo de Santos Filho (2015) apresenta uma perspectiva similar à de Santos (2015), no sentido de dar enfoque ao entendimento e aos significados dos professores. Na sua pesquisa de mestrado intitulada "*Investigando como professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais*", o autor tomou por base as expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco.

Santos Filho realizou um estudo diagnóstico com 152 professores que ensinam no 4º e no 5º ano do Ensino Fundamental, em escolas da rede municipal de Jaboatão dos Guararapes – PE. Para tanto, foi elaborado um questionário composto de vinte propostas de ensino sobre os números racionais, sendo quatro para cada uma das cinco expectativas de aprendizagem dos Parâmetros de Pernambuco.

Os resultados indicam que parte dos professores (24,5%) demonstram reconhecer a fração como partes iguais de um todo. Com relação à comparação

de frações (identificar e representar frações maiores e menores que a unidade) apenas um pequeno grupo (4,5%) demonstrou conhecimento para tal. Santos Filho (2015) então sistematiza alguns entraves para o trabalho com racionais, entre eles estão: o não conceber a fração como um número; não compreender o princípio da ordenação de frações; utilizar regras dos números naturais para ordenar e comparar números decimais; dentre outros. O autor destaca a necessidade de se rever a questão da formação dos professores que ensinam nos anos iniciais do Ensino Fundamental e o seu conhecimento de Matemática.

As pesquisas de Santos (2015) e Santos Filho (2015) abordam a importância da formação do professor para o trabalho com números racionais nos anos iniciais. Vale registrar que muitos professores que atuam nesta fase da escolaridade têm formação em pedagogia e o conhecimento específico das áreas de conhecimento tem uma carga horária pequena para um maior aprofundamento.

A dissertação de mestrado de Silva (2017) com o título "*Ensino-aprendizagem de frações: um olhar para as pesquisas e para a sala de aula*" buscou identificar o que as pesquisas têm concluído a respeito do ensino-aprendizagem de frações na sala de aula. O autor realizou um levantamento de dados por meio de um questionário aberto, composto por 10 perguntas, dirigidas a 25 professores do Ensino Fundamental. A pesquisa foi do tipo qualitativa, os dados obtidos foram analisados conforme a abordagem do Discurso do Sujeito Coletivo (DSC). Segundo o autor, as pesquisas têm apontado para a recorrência em salas de aula de uma prática mais voltada para a memorização de fórmulas e de procedimentos, como também uma ênfase na obtenção da resposta correta, o que não implica, necessariamente, em compreensão do conteúdo estudado.

Silva (2017) identificou alternativas para amenizar problemas no ensino-aprendizagem como a falta de atenção e dificuldade para compreender as ideias de equivalência, comparação e operações com frações. Tais alternativas giram em torno da importância de trabalhar com outras representações de

frações, como figuras geométricas e materiais manipuláveis, além da notação barra-fracionária para que os alunos possam compreender este conteúdo.

Nesse sentido, Silva (2017) defende as pesquisas como possibilidade de promoção de uma aprendizagem com compreensão do conteúdo estudado, entretanto, percebe uma distância entre o que se tem pesquisado e o que ocorre efetivamente em sala de aula, dado concluído a partir da análise dos questionários abertos, sobretudo respondidos por professores de alguns municípios do Cariri Paraibano. O pesquisador anuncia uma distância entre as pesquisas e a construção do conhecimento na sala de aula, o que confirma o que estamos apresentando como temática de pesquisa e, de certa forma, direciona para olhar a aprendizagem do aluno. Assim, perceber se esta distância denunciada na pesquisa ainda existe, modifica nossa forma de interpretar a realidade do Ensino Médio, alterando a visão, muitas vezes equivocada, que o conceito de número racional já foi construído no Ensino Fundamental.

A pesquisa de Rogeri (2015) intitulada "*Conhecimentos de professores dos anos iniciais para o ensino dos números racionais em sua representação decimal*", oportunizou reflexões compartilhadas sobre práticas docentes e dificuldades na aprendizagem de noções relativas a este tema por alunos da Educação Básica. Participou da pesquisa um grupo de 18 professores da rede pública estadual da região metropolitana de São Paulo. O estudo foi dividido em duas fases: na primeira, realizou-se uma coleta de dados com questionários, tendo por objetivo identificar conhecimentos e práticas dos professores a respeito do processo de ensino e de aprendizagem de noções concernentes ao tema dos racionais; a segunda fase consistiu na realização de um processo formativo, no qual o grupo de professores discutiu situações de aprendizagem e estudos a respeito dos processos de ensino-aprendizagem dos números decimais, além de proceder à análise das orientações pedagógicas constantes do atual currículo do Estado de São Paulo.

Na pesquisa, Rogeri (2015) analisou os conhecimentos que devem ser de domínio do professor, utilizando categorias preestabelecidas (conhecimento do

conteúdo comum/especializado, conhecimento do conteúdo e do estudante, conhecimento do conteúdo e do ensino e conhecimento curricular) e, no tocante à formação de professores reflexivos, em um ambiente de estudo de inovações curriculares. Este estudo mostrou diferenças consideráveis nas respostas dos professores ao se comparar o diagnóstico inicial e com o apresentado após o processo de formação, apontando a necessidade de haver uma articulação entre diferentes abordagens, estratégias e materiais para os processos de ensino-aprendizagem de números racionais, representados na forma decimal.

O foco na atuação do professor ao analisar as ações desenvolvidas na sala de aula e defender que existe a necessidade de repensar o processo de ensino, vai além de responsabilizá-lo, possibilita uma maior compreensão e a construção de uma atuação mais efetiva e consciente.

Gonçalves (2013) direcionou o seu olhar para um grupo de licenciandos do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário de Belo Horizonte (MG), mais especificamente buscando problematizar as "*Crenças e dificuldades de futuros professores de matemática no domínio dos números racionais*". Os principais objetivos do estudo foram identificar as recordações desses alunos sobre esse conteúdo no ensino básico para tentar identificar nelas as possíveis origens de tais crenças e dificuldades. Os dados foram produzidos a partir das respostas dos alunos a questionários e entrevistas aliados às anotações de um diário de campo do pesquisador.

Gonçalves (2013) identificou quatro dimensões das crenças dos alunos acerca das frações: a) fração como um processo, como um número que se resolve, como divisão (ação); b) fração como (não) resposta a um problema; c) ensino-aprendizagem de fração; d) autoeficácia negativa. Com a pesquisa foi possível registrar que as dificuldades dos alunos em relação às frações foram identificadas principalmente pelas emoções de medo, apreensão, bloqueio, originadas de experiências de ensino-aprendizagem com frações na escolarização básica. Os participantes expressaram que os professores dão pouca atenção ao tratamento deste conteúdo no ensino básico e que pode ser reflexo um ensino tradicional e limitado. A autora propõe uma reflexão sobre

um "papel perverso" que a escola muitas vezes desempenha, visto que esta parece ser a principal responsável pelo descaso e limitação do ensino de frações, sugerindo incorporação de temáticas sobre o papel da afetividade no ensino-aprendizagem nos cursos de desenvolvimento profissional de professores.

A pesquisa Gonçalves (2013) confirma que a atuação do professor é resultante da sua formação na condição de estudante e da sua constituição como profissional ao longo da sua trajetória, destacando o papel das emoções. Não pretendemos nos isentar de pensar a importância do professor e do ensino, visto que temos dimensão da totalidade e da complexidade da construção da aprendizagem. Porém, direcionaremos o nosso olhar para o lugar do estudante e suas construções.

Os próximos trabalhos apresentados contemplam o 5º e o 6º anos do Ensino Fundamental. Ao analisar as propostas curriculares oficiais, é fácil perceber que é nesta fase da escolarização que começa o estudo dos números racionais. Olhar para questões levantadas neste contexto oportuniza uma maior compreensão dos problemas e questões encontradas na continuidade dos estudos, visto que defendemos a ideia de que o processo de construção é contínuo, solidificado e ampliado em todo o ensino básico.

A pesquisa de Gaviraghi (2013) intitulada "*Número racional não negativo na forma fracionária: sentido atribuído por alunos do 6° ano do ensino fundamental*" centrou-se nos conhecimentos dos alunos, mais precisamente, no sentido que eles atribuem para o número racional não negativo. Este trabalho se concentrou também na análise de como os estudantes lidam com situações-problemas que envolvem números racionais não negativos na sua forma fracionária, tendo em vista os seus diferentes significados.

A autora realizou coleta e descrição dos planejamentos e da proposta de ensino deste conteúdo nos 5º e 6º anos do Ensino Fundamental e aplicou um questionário que girava em torno de cinco conceitos referentes ao conteúdo analisado: parte-todo, quociente, número, medida e operador multiplicativo. Os sujeitos de pesquisa foram onze alunos do 6º ano do ensino fundamental de

uma escola da rede estadual de ensino da cidade de Coronel Bicaco, no Rio Grande do Sul. Gaviraghi concluiu que os alunos atribuíram sentido a alguns significados no tratamento do número fracionário, tais como: medida e operador multiplicativo com frações, mas apresentam dificuldade de identificar e representar o objeto matemático estudado.

O estudo de Silva (2016) "*Como os estudantes lidam com diferentes representações? Um estudo com o bingo dos números racionais*" investigou as potencialidades do uso do jogo Bingo para a leitura da relação dos estudantes com as diferentes representações dos números racionais. A pesquisa pautou-se na observação de partidas jogadas em duplas, bem como na realização de entrevistas individuais com estudantes de uma escola situada na Zona da Mata, em Pernambuco. O jogo, tomado como contexto, foi explorado no estudo para mapear alguns teoremas-em-ação falsos utilizados pelos estudantes, identificando também a dificuldade de mobilizar o conceito-em-ação de frações equivalentes, bem como de relacionar porcentagem com representações diferentes da simbólico-numérica percentual. A autora conclui que o jogo foi adequado ao trabalho com o grupo, pois o caráter lúdico proporcionou envolvimento dos estudantes que formularam hipóteses e buscaram formas de validá-las.

Um bom número de pesquisadores volta à atenção para o desempenho de alunos com relação aos números racionais no 5º e 6º ano da escolarização, provavelmente por ser este um momento significativo da passagem do Ensino Fundamental I para o II, juntamente com tantas variáveis de maturação dos sujeitos, estrutura do sistema nesta etapa de ensino etc. Este é o caso de pesquisas como a de Silva (2016): "*Formação dos conceitos relativos aos números racionais no 6º ano do ensino fundamental: uma proposta experimental*".

A autora justifica seu trabalho pela constatação de que o conceito de Fração descrito em livros didáticos está associado à compreensão dos seus autores. Apresenta aspectos essenciais para o entendimento do campo numérico dos números racionais para a plena compreensão conceitual por parte dos alunos. Utilizou-se, para este fim, de um sistema de tarefas de estudo

para a formação dos conceitos relativos aos números racionais no 6º ano do Ensino Fundamental, na perspectiva da teoria histórico-cultural. Como metodologia optou-se por uma revisão da literatura e diagnóstico da realidade a ser pesquisada. Uma pesquisa documental foi realizada levando em conta os Parâmetros Curriculares Nacionais para a Educação Básica (PCN), e o Projeto Político-Pedagógico (PPP) da escola, lócus de atuação e de aplicação da proposta de estudo, bem como do Plano de Ensino (PE) elaborado pela professora. De posse dessas referências, a autora propôs um sistema de tarefas de estudo sobre o tema da pesquisa com a intenção de contribuir de forma efetiva na aprendizagem dos alunos sobre os números racionais.

A pesquisa de Abreu (2018) intitulada "*Ensino de Fração com o Software GeoGebra*" foi realizada em três turmas do 6° ano do ensino fundamental de uma escola pública na cidade de Manaus. O foco do trabalho foram os números racionais na forma fracionária. O autor adotou ferramentas tecnológicas digitais, por reconhecer o potencial das mesmas no processo de ensino e de aprendizagem. O objetivo principal da pesquisa, foi descrever a influência do *software* GeoGebra na aprendizagem dos números racionais entre os estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental. Na investigação, a autora também fez uso da plataforma *Moodle* para a organização de um curso sobre Fração, o qual foi realizado utilizando o espaço da escola. Na sua conclusão, constatou que o *software* serviu como uma ferramenta potencial para contribuir com a melhoria do ensino-aprendizagem do conteúdo Fração.

A proposta investigativa de Oliveira (2015) envolveu um trabalho prático, utilizando calculadoras científicas com um grupo de quatro alunos de uma escola pública situada na periferia de Belém/PA. O trabalho intitulado "*Uma engenharia didática para o ensino das operações com números racionais por meio de calculadora para o quinto ano do ensino*". Foi construída uma sequência de ensino com o objetivo de construir significado para as regras operatórias fundamentais com números fracionários. Para tanto, o autor partiu dos seguintes aportes teóricos, a Teoria das Situações Didáticas (TSD), a Teoria de Registros de Representação Semiótica e a Engenharia Didática.

Oliveira (2015) observou que o uso de calculadora contribuiu para que os alunos verbalizassem e escrevessem regras para adição e subtração de números fracionários com mesmo denominador; para a multiplicação de quaisquer números fracionários e para a divisão de números fracionários que apresentavam tanto os numeradores, quanto os denominadores múltiplos. Porém, destacou que para perceber as regras para a adição e divisão de números fracionários quaisquer, faltou, provavelmente, relacioná-los a outros recursos didáticos para que percebessem as relações entre numeradores e denominadores para as operações de adição e subtração.

Os números racionais expressos na forma fracionária constituem o centro das pesquisas nesta fase da escolaridade. As pesquisas analisadas nem sempre apresentam a relação da forma fracionária com a forma de expressar um número racional, sugerem uma possível omissão ou a falta de exploração da relação entre uma fração e um número decimal ou percentual correspondente. Este distanciamento entre o estudo de fração e de números decimais pode contribuir para uma fragmentação do conteúdo estudado, e na aprendizagem dos números racionais de forma menos concisa.

O trabalho de Teixeira (2018) "*Os números racionais nos níveis curriculares da rede estadual de ensino de São Paulo*" analisou as relações entre as prescrições oficiais materializadas em um currículo e aspectos da realidade escolar. O aporte teórico foi construído a partir de autores que tratam de Currículo, Números Racionais e Avaliações Externas, tendo como referência os níveis curriculares de Gimeno Sacristán. A metodologia adotada foi de abordagem qualitativa, com técnicas de análise documental e bibliográfica, analisando documentos curriculares variados, identificados como Currículo Prescrito; o Livro Didático e os Cadernos do Aluno e do Professor, implantados pela secretaria do estado, na qualidade de currículo apresentado; e também foram analisadas as edições da Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP), aplicadas em 2018, no mesmo estado, representando o currículo avaliado.

Com a documentação o autor identificou convergências e divergências entre os materiais analisados para a escolarização que vai do 6º ao 9º ano de

escolaridade. Após apresentar alguns aspectos conceituais e procedimentais dos números racionais nos materiais pedagógicos descritos, Teixeira concluiu que o professor deve estar atento aos materiais didáticos pelas variações na abordagem e nas nomenclaturas utilizadas, a fim de aprimorar os processos de ensino e não se constituir em obstáculos para o ensino-aprendizagem envolvendo os números racionais; ressalta ainda, a necessidade de repensar a atuação do professor diante dos recursos didáticos; e aponta problemas que persistem no final de Ensino Fundamental em relação ao aprendizado dos números racionais. Mais um trabalho que ratifica que este campo de conhecimento requer um olhar para o currículo e aspectos da realidade escolar.

A pesquisa de Santos (2016) "*Rendimentos e Estratégias de Estudantes Concluintes do Ensino Fundamental na Resolução de Itens de Avaliações Externas*" centrou-se em investigar o desempenho dos alunos em relação à avaliação do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) - temática sempre controvertida para a educação -, a partir de uma intervenção com 56 estudantes de uma escola pública da cidade de São Paulo. A pesquisa se baseou em uma metodologia com características qualitativas e quantitativas, do tipo pesquisa de campo. Teve como base a Teoria dos Campos Conceituais e os procedimentos metodológicos consistiram na aplicação de um pré-teste, composto de questões retiradas de edições de avaliações externas.

Santos (2016) apontou em sua pesquisa que os participantes não dominavam o conceito de fração e apresentavam dificuldades com relação às invariantes: ordem e equivalência, o que é intensificado pela dificuldade de alguns estudantes em operar o algoritmo da divisão. Todos os estudantes passaram por intervenções de ensino sobre números racionais na representação fracionária e decimal, organizadas pelo pesquisador. Após a intervenção, fizeram o pós-teste, idêntico ao pré-teste, o que permitiu ao pesquisador identificar uma alteração significativa nos resultados, uma melhoria do rendimento dos estudantes na resolução dos itens em 90%. A pesquisa afirma que existe uma deficiência no aprendizado dos números racionais no final do Ensino Fundamental. Esta afirmação possibilita pensar que desconsiderar a

aprendizagem de números racionais como uma continuidade no Ensino Médio é negar ao estudante possibilidades reais de construção do conhecimento.

O trabalho de Zanella (2013), "*Um Estudo Teórico Sobre as Estruturas Aditivas e Multiplicativas de Números Racionais na Representação Fracionária*", fundamentou-se na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud. Com o objetivo de identificar elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, a autora buscou por artigos no portal de periódicos CAPES que apresentaram atividades envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais na representação fracionária. A análise, tanto na estrutura aditiva, quanto multiplicativa, aponta a existência de interpretações equivocadas na proposição de atividades e ressalta a necessidade de auxiliar professores na escolha de atividades para a formação e desenvolvimento dos conceitos envolvidos nessas estruturas de racionais na representação fracionária de modo a não incorrer imprecisões no trato com este conteúdo.

O estudo de Zanella (2013) se distancia dos apresentados anteriormente, pois o ambiente de pesquisa não foi a sala de aula, de forma direta. Porém, olhar para propostas de atividades e apontar que existem equívocos, destacando a necessidade de auxílio para o professor nas suas escolhas, potencializa o que defendemos como objeto de pesquisa: existem questões que requerem estudos mais densos na aprendizagem dos números racionais.

De outra parte, é interessante destacar, que em um contexto no qual ora se oscila na ênfase do papel do professor e seus conhecimentos para o ensino dos números racionais, ora se enfatiza as dificuldades e o desempenho dos alunos com relação a este conceito, há trabalhos, como o de Lucena (2013) e Santos (2016), explicitados a seguir, que se dedicaram a análise de um dos materiais centrais no trabalho escolar, que são os livros didáticos, instrumentos fundamentais, pois muitas vezes são organizadores da prática em sala de aula e funcionam como mediação do conhecimento na relação professor e aluno.

A pesquisa de Santos (2016) intitulada "*Equivalência de números racionais na representação fracionária: um olhar para livros didáticos à luz dos três mundos da*

matemática" concentrou-se na investigação de livros didáticos, quando da introdução do conceito de equivalência entre números fracionários. Para tanto foram elegidos quatro livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, os quais estão entre os recomendados pelo PNLD de 2014.

As análises de Santos (2016) foram realizadas à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall (2013), que consiste na admissão da existência do Mundo Conceitual Corporificado, o Mundo Operacional Simbólico e o Mundo Formal Axiomático. O autor destaca também cinco subconstrutos (parte-todo, medida, quociente, razão e operador). Com a investigação é possível analisar se o conceito de equivalência proposto permite a um estudante iniciar uma jornada pelos Três Mundos da Matemática. Na sua conclusão, o autor afirma que a abordagem, as atividades e os procedimentos para cálculo de números fracionários equivalentes, tratam da representação desses números por meio de figuras geométricas; notação e linguagem; e definição de equivalência, os quais podem proporcionar ao estudante a possibilidade de iniciar uma jornada pelos Três Mundos da Matemática. Porém, o autor alerta para a ausência das intersecções das ideias que norteiam o mundo corporificado com as características do mundo simbólico, os quais não são explícitos nas abordagens, nas atividades, nem nos procedimentos. Após a análise dos livros, Santos apresenta como acontece o início e a formação dos conceitos em estudo e, ainda, denuncia a ausência de subconstrutos importantes relacionados à equivalência de fração.

De modo semelhante, o trabalho de Lucena (2013) "*A metacognição no livro didático de matemática: um olhar sobre os números racionais*" objetivou investigar em que medida as atividades de livros didáticos de Matemática poderiam favorecer o desenvolvimento de estratégias metacognitivas dos alunos, durante a sua resolução.

A investigação foi realizada em dois livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLD/2011, com perspectivas distintas em relação à metodologia de ensino. Lucena observou que um livro parecia mais afinado com as novas concepções de ensino (LD 1) e outro mais tradicional (LD 2). Para

isso realizou uma busca na ficha de avaliação dos livros didáticos de Matemática do Guia PNLD/2011, selecionando as atividades e habilidades que poderiam favorecer o desenvolvimento da metacognição. Após a referida análise, constatou que os dois livros pesquisados disponibilizam poucas atividades que podem favorecer o desenvolvimento de estratégias metacognitivas, pois no LD 1 apenas 7,87% das atividades dos capítulos relacionados aos números racionais foram classificadas como favoráveis para essas estratégias. No LD 2 esse número foi ainda menor, correspondendo a apenas 4,03% das atividades que podem favorecer o desenvolvimento da metacognição. Nos resultados, concluiu-se que os dois livros didáticos de Matemática pesquisados trazem, com relação aos números racionais, poucas atividades que podem favorecer o desenvolvimento de estratégias metacognitivas.

O impacto disso, é que o desenvolvimento da metacognição nos alunos vai estar na dependência da forma como o professor explora as atividades propostas por esse material. A pesquisa de Lucena denunciou a existência de uma lacuna nos livros didáticos analisados em relação ao desenvolvimento de estratégias metacognitivas, ressaltando, nas suas conclusões, a importância da atuação do professor como responsável por explorar as atividades do livro didático com foco no desenvolvimento da metacognição.

Também com o foco na metacognição, o estudo de Costa (2018) "*O uso de estratégias Metacognitivas na resolução de problemas matemáticos envolvendo números racionais por alunos do 8º ano do ensino fundamental de uma escola pública de Sinop/MT*", investigou a possibilidade de potencializar a aprendizagem na resolução de problemas matemáticos que envolvem números racionais, com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

A autora realizou uma pesquisa de abordagem qualitativa, adotando como método a pesquisa-ação, a qual envolveu 07 alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Sinop/MT, os quais representam uma amostra dos alunos avaliados com desempenho "abaixo do básico" na Avaliação Diagnóstica do Ensino Público Estadual de Mato Grosso (ADEPE-

MT) em 2016. Foram realizadas entrevistas com estes estudantes, as quais se seguiram de um pré e pós-teste e uma intervenção tendo por base a resolução de problemas, fundamentados nas diferentes representações dos números racionais, com uso de estratégias metacognitivas. Costa concluiu que o uso de estratégias metacognitivas na resolução de problemas matemáticos potencializou a aprendizagem, uma vez que os alunos demonstraram: maior grau de conhecimento ao focar a atenção na compreensão do problema proposto; consciência no planejamento ao escolher os procedimentos e estratégias mais adequados para a resolução do mesmo e controle sobre todo o processo de resolução do problema proposto.

Costa (2018) referiu-se aos processos metacognitivos, como o fato de pensar sobre o próprio pensamento e aprender a regulá-lo. Consideramos a análise do uso de estratégias metacognitivas na resolução de problemas matemáticos envolvendo números racionais uma possibilidade enriquecedora, visto que oportuniza uma participação mais ativa no processo de aprender. A nossa pesquisa também objetiva observar a aprendizagem, considerando o estudante como um ser ativo.

Pensar sobre estratégias metacognitivas não tem relação direta com o nosso estudo, mas destaca a importância da resolução de problemas, como também a atuação do professor e do estudante na relação estabelecida com o objeto de estudo. É o resultante dessa relação que será o ponto de partida para a pesquisa que realizamos.

O trabalho de Severo (2009) "*Números Racionais em Ensino Médio: uma busca de significados*" objetivou analisar registros de representação de números racionais, apresentados por alunos de Ensino Médio, e verificar se estes alunos relacionam o significado dos racionais com situações da vida cotidiana nas quais podem ser empregados. A base teórica da pesquisa foi a teoria dos registros de representação semiótica, de Raymond Duval. Ao analisar a linguagem natural, símbolos algébricos, tabelas, gráficos, entre outros, como formas de representação, Severo questiona-se sobre o ensino e a compreensão desse conteúdo. A pesquisa configura-se como uma forma de refletir sobre o

processo de ensino-aprendizagem e as dificuldades inerentes desta relação e a importância de favorecer espaços de aprendizagem que possibilitem aos alunos estabelecer relações entre o aprendido na escola e as necessidades da vida cotidiana.

O trabalho de Severo (2009) foi baseado em uma abordagem qualitativa do tipo naturalístico-construtivista, representa o interesse da autora pela investigação de novas formas de promover o desenvolvimento do processo de atribuições de significados, particularmente para os números racionais, bem como a pesquisa e análise dos significados expressos pelos alunos. Após o estudo, Severo evidencia que os alunos apresentam dificuldades em relação aos registros de representação dos racionais, que eles nem sempre realizam transformações de registros e que estas limitações potencializam bloqueios diante da necessidade de mudança de registro ou a mobilização simultânea de dois registros. Por fim, alerta para a necessidade de as escolas enfrentarem as dificuldades relacionadas ao ensino e instiga novas discussões sobre o tema na busca de apresentar melhores resultados na formação do aluno do Ensino Médio que, conforme assevera a autora, é útil para potencializar neste aluno a capacidade de utilizar a Matemática como uma ferramenta que auxilia na interpretação do mundo.

Este trabalho está bem próximo do que nos propomos a estudar, destacando a necessidade de olhar para a aprendizagem dos números racionais no Ensino Médio e do enfrentamento das dificuldades observadas como condição para melhor interpretação do mundo. Acrescentamos ainda para uma melhor atuação nos contextos de vivência.

Outro trabalho que também levou em conta os significados foi o de Silva (2013), "*Significados e representações dos números racionais abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM*". A referência teórica utilizada pela autora teve como significados para os números racionais: medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade, um número na reta numérica e porcentagem. A Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval também foi utilizada na análise dos registros de representações dos

números racionais. O percurso metodológico constou de duas etapas, identificando inicialmente os itens que envolviam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados, ao observar as provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008 e as provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011.

Em seguida, a autora analisou os itens identificados na etapa I, quanto aos registros dos números racionais, e, também, quanto aos registros de representações, os tratamentos e as conversões que podiam ser mobilizados, durante a resolução do item identificado. Silva (2013) registra que nas provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008, aproximadamente 5,6% dos itens (3,9 itens por prova) envolviam o conceito de números racionais. Enquanto que nas provas de Matemática e suas Tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011 (novo ENEM), aproximadamente, 21% dos itens (9,6 itens por prova) abordavam esse conceito. A autora apresenta os significados notificados nos exames, destacando que o significado porcentagem é o mais abordado e ainda, que o registro semiótico dos números racionais que mais pôde ser mobilizado durante as resoluções dos itens foi o registro numérico fracionário.

O trabalho de Severo (2009) e de Silva (2013) tiveram como base teórica as representações semióticas de Raymond Duval para o estudo dos números racionais no Ensino Médio. As análises contemplam diferentes formas de representação, o ensino e a compreensão dos estudantes, bem como a presença deste conteúdo nos Exames Nacionais de Ensino Médio. Enquanto o trabalho de Severo foca no ensino-aprendizagem, Silva concentra seu estudo nos significados explorados nas provas do ENEM, ou seja, o resultado esperado do aluno concluinte do ensino básico. Os trabalhos enriquecem o nosso estudo não só por estarem diretamente ligados ao Ensino Médio, mas por apresentarem o estudo dos números racionais de forma coesa, compacta, ao explorar as diferentes representações.

O trabalho de Silva (2011) "*Números Reais no Ensino Médio: identificando e possibilitando imagens conceituais*" dá destaque à importância do estudo dos números reais com ênfase nesta etapa do ensino, pela pouca exploração do

tema nas pesquisas em Educação Matemática, reconhecendo a relevância do campo de estudo no currículo de Matemática no Ensino Médio. A pesquisadora fez uma análise documental, elaborou e aplicou atividades, priorizando as ideias de densidade e infinito. Neste estudo, fez uso das representações decimais finitas e infinitas e dos números irracionais na forma $\sqrt{n}$, n natural, bem como selecionou o algoritmo da divisão como disparador do processo.

Utilizando-se de uma metodologia clínico-qualitativa, Silva aplicou um questionário para um estudo preliminar exploratório e realizou um estudo com 12 alunos para que estes esclarecessem seus julgamentos na realização das atividades. Nas conclusões aponta a necessidade de um trabalho efetivo que consolide o conhecimento das representações decimais, tendo como ponto de partida, o algoritmo da divisão. O trabalho constitui um aprofundamento maior da temática explorando os números racionais como parte de uma conjuntura maior: o conjunto dos números reais.

Interessa-nos destacar também a pesquisa realizada por Geragioli (2011), pois foi a única identificada no nosso levantamento que girou em torno dos saberes relativos à Educação de Jovens e Adultos (EJA): "*Conhecimentos de alunos do Programa de Educação de Jovens e Adultos (EJA) relativos aos números racionais na forma fracionária*". A pesquisa investigou saberes na forma fracionária, particularmente quanto aos significados: Parte-Todo e Quociente, os Invariantes de Equivalência e Ordem, os quais foram construídos por alunos da EJA na cidade de São Paulo. O trabalho constitui uma pesquisa de caráter qualitativo, com a aplicação de um questionário.

A autora aponta que mais da metade dos alunos pesquisados demonstraram ter conhecimento da representação dos significados parte-todo e quociente, porém esses alunos demonstraram dificuldade quanto ao conceito de denominador, quando a abordagem da questão estava focada unicamente nos invariantes. Sugere ainda, a necessidade da inserção na grade curricular do tema "Números Fracionários" a partir do 6º ano da Educação Básica, e na EJA, de modo a auxiliar a promoção de aprendizado significativo que permita aos alunos a transferência para situações-problemas do cotidiano.

Para Geragioli, é necessário a elaboração de uma avaliação diagnóstica para os alunos ingressantes na EJA, que aborde os conteúdos relativos aos números racionais na representação fracionária, abrangendo conhecimentos dos diversos significados das frações com o intuito de oferecer subsídios aos professores dessa modalidade de ensino na definição dos conteúdos a serem ministrados em cada ano/semestre da EJA, tanto do Ensino Fundamental, quanto do Ensino Médio. A modalidade EJA tem características diferenciadas do Ensino Médio Regular, mas faz parte da conclusão da escolaridade básica obrigatória para uma parte da população. Destacamos que foi o único trabalho encontrado sobre a problemática da aprendizagem dos números racionais na realidade da EJA.

Com o objetivo de categorizar os "*Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais*" Silva (2018) desenvolveu a sua pesquisa em duas etapas. Na primeira, fez uma análise das características e tratamentos específicos a cada registro, com a proposição do modelo prévio de categorização dos graus de não congruência semântica entre essas conversões. A segunda etapa constituiu em um estudo empírico, para validação do modelo, realizado com um total de 381 alunos, pertencentes ao 6° e 9° ano do Ensino Fundamental e 1° e 3° anos do Ensino Médio de cinco escolas da rede estadual de ensino de Alagoas, situadas no município de Maceió. Baseou-se em Duval, a partir do qual propôs uma classificação dos tipos de representações semióticas do registro de representação geométrico bidimensional dos números racionais, com base nas variáveis visuais - dimensionais e qualitativas das figuras geométricas. Este trabalho, apesar da base teórica já citada em outras produções, se diferencia dos demais e da nossa pesquisa, visto que associa os números racionais com a geometria, de forma bem específica.

O levantamento aqui apresentado aponta diferentes tendências com respeito ao tema do ensino, aprendizagem e formação de professores relativos aos números racionais.

A variedade de trabalhos descritos aponta para a quantidade de pesquisas sobre a importância da aprendizagem dos números racionais na educação básica. Muitos destes trabalhos anunciam a dificuldade na construção deste conhecimento em sala de aula, bem como as implicações no processo educacional do estudante. A maior parte dos trabalhos concentra-se na etapa inicial da escolarização básica e no estudo de fração.

Importa registrar a existência de pesquisas que têm por foco os professores, ou formação inicial de professores. Este é um dado muito interessante, pois desloca a atenção para um dos principais elos no processo de mediação da aprendizagem. Entretanto, cabe ressaltar que dos cinco trabalhos nesse contexto, quatro deles investigam os saberes, as práticas dos profissionais dos anos iniciais, a saber, pedagogos de formação.

A mesma recorrência se observa em relação às pesquisas relativas à aprendizagem dos estudantes, a maior parte delas é referente aos anos iniciais. Outras vão até o 8º ano, apenas duas pesquisas se referiam às aprendizagens dos estudantes do Ensino Médio, são os trabalhos de Severo (2009) e de Silva (2010).

Neste sentido, é válido destacar as poucas pesquisas ligadas ao currículo e aos materiais didáticos, apenas quatro, duas de cada uma dessas vertentes. Entretanto, os estudos demonstram o quão importante é haver uma coerência na organização de um livro didático, material fundamental, muitas vezes único e no qual se podem identificar ocorrência de imprecisões que atrapalham os processos de ensino-aprendizagem. O currículo também é um elemento que precisa ser investigado, no sentido de se discutir a coerência, pertinência etc., dos diferentes conteúdos na escolarização.

Nos trabalhos apresentados é possível identificar similaridades com a pesquisa por nós empreendida: denúncia das dificuldades no ensino-aprendizagem dos números racionais e a necessidade de estender este estudo no decorrer de toda a educação básica. Em relação às diferenças dos trabalhos citados, podemos destacar a prevalência do estudo das frações ou dos números

decimais, de forma isolada, e a importância do estudo dos números na formação de futuros professores, que não foram objeto da presente pesquisa.

Ao estudar sobre a aprendizagem dos números racionais, não negamos os aspectos defendidos nos trabalhos apresentados. Porém, concentramos nossa investigação no significado pessoal que o aluno do Ensino Médio atribui a esse conjunto numérico: conceitos, características, expressões utilizadas para registros neste campo numérico.

Na pesquisa feita, fica evidente uma limitação na temática em estudo, visto que, em um período de onze anos, apenas vinte e um trabalhos foram registrados no banco de trabalhos da CAPES sobre a aprendizagem de números racionais. Assim, esta pesquisa ocupa um espaço ainda pouco explorado na busca de entender a construção do conhecimento em relação ao conjunto dos números racionais.

No que tange à aprendizagem, é importante destacar que, apesar de reconhecer o papel do ensino no processo de construção do conhecimento, o direcionamento será dado à aprendizagem, nos significados construídos e no desempenho dos estudantes na continuação dos estudos matemáticos.

Lima (1995) destaca que conhecimento matemático é, por natureza, encadeado e cumulativo, exemplificando que o aluno não será capaz de estudar Trigonometria se não conhecer os fundamentos da Álgebra, nem entenderá essa última se não souber as operações aritméticas etc. A dependência acumulada dos assuntos matemáticos propõe uma sequência necessária para que a aprendizagem se efetive.

Assim, ressaltamos que o conhecimento matemático, trabalhado ao longo do Ensino Fundamental, nem sempre se configura como base para favorecer a construção de novos conceitos no Ensino Médio.

Segundo Rodrigues (2005), é pertinente considerar na construção do conhecimento matemático a promoção da participação dos alunos e o relacionamento entre o seu conhecimento intuitivo e conhecimento simbólico. Para o mesmo autor, no estudo de números racionais apresentados em forma de fração, embora haja estudos que demonstram a existência dos

conhecimentos intuitivos que os alunos trazem para a escola, não existem estudos sobre os caminhos que os estudantes podem tomar para, a partir deles, dar significados aos símbolos e procedimentos formais apresentados no ambiente escolar.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

O capítulo está organizado em quatro seções. Na primeira apresentamos o aporte teórico de uma forma mais geral para, em seguida, explicitar o conceito de significado e a implicação na aprendizagem Matemática. Na segunda, discutimos o conjunto dos números racionais enfocando o conceito, os significados e sua construção no contexto escolar. Na terceira, debatemos as ideias e características dos números racionais. Por fim, discorremos os significados institucionais por meio de uma análise dos documentos oficiais brasileiros.

1.1 O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e Instrução Matemática (EOS)

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e Instrução Matemática (EOS) constitui uma teoria da instrução matemática que possibilita a comparação e a articulação de aproximações teóricas construídas dentro do campo da educação matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Estes autores destacam a necessidade de construção de um enfoque unificado da cognição e instrução Matemática, articulando aspectos relacionados aos tipos de objetos e sua natureza (ontológicos), ao acesso ao conhecimento (epistemológicos) e, ainda, ao ensino-aprendizagem no contexto da instituição escolar (socioculturais e institucionais).

O EOS, oferece uma base sólida para a análise dos processos de ensino e de aprendizagem. Afirmam os autores supracitados que "mais que uma prática particular relativa a um problema concreto, interessa considerar os sistemas de práticas (operativas e discursivas) que se tornam evidentes pela atuação das pessoas inseridas em tipos de situações problemáticas" (GODINO; BATANERO; FONT 2008, p. 12).

O EOS tem sua origem no início dos anos 1990, a partir dos estudos de um grupo de pesquisa da Universidade de Granada, na Espanha, sendo Juan Godino, líder e principal organizador da pesquisa, contando com o apoio de vários pesquisadores, destacando Carmen Batanero, Vicenç Font, Ángel Contreras, Miguel Wilhelmi, entre outros. A pesquisa e produção no EOS ajuda a confrontar e articular modelos teóricos no campo da Educação Matemática, relacionando ideias e organizando-as em um corpo teórico unificado para proporcionar a compreensão da aprendizagem Matemática. (GODINO; BATANERO; FONT 2008, p. 12).

Godino (2002), tem interesse especial no uso de noções semióticas no estudo dos processos de ensino-aprendizagem da Matemática. Em Godino, Batanero e Font (2008), verificamos que a função semiótica é apresentada como a relação de dependência entre uma expressão e um conteúdo estabelecido por um sujeito utilizando-se de critério ou código de correspondência determinado. Para esses autores a função semiótica facilita a análise do significado representado pela linguagem, conceitos, proposições, situações-problema, procedimentos e argumentos, elementos característicos das práticas matemáticas. A função semiótica relaciona o objeto (significante) com significados construídos em função de um sistema de práticas. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 12).

Neste enfoque, a compreensão e o conhecimento são vistos como uma dupla face pessoal-institucional e para a produção de significados se faz necessário a negociação e o diálogo.

O EOS busca apresentar noções teóricas na definição da natureza do conhecimento matemático, na interpretação do sistema de signos durante a resolução de situações propostas. E destaca a necessidade de:

> [...] estudar globalmente e com mais profundidade as relações dialéticas entre o pensamento (as ideias matemáticas), a linguagem matemática (sistemas de signos) e as situações-problemas, para as quais se inventam tais recursos. Em consequência, neste período tratamos de progredir no desenvolvimento de uma ontologia e uma semiótica específica que estudem os processos de interpretação dos sistemas de signos matemáticos postos em jogo na interação didática (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 10).

O processo de aprender é resultante da interação entre os indivíduos que fazem parte de trajetórias didáticas, que oportunizem a relação da cognição à gênese e desenvolvimento de significados pessoais, que serão estimulados a se aproximarem dos significados pretendidos com as práticas desenvolvidas no contexto escolar. Daí observam a necessidade de realizar mais investigações sobre o papel dos signos e da própria noção de significado e sobre a articulação entre os componentes semióticos e epistemológicos envolvidos na atividade matemática. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Conforme Godino, Batanero e Font (2008), esse enfoque estuda o conhecimento matemático e a instrução necessária para seu desenvolvimento, levando em conta características específicas da Matemática: como atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e como sistema conceitual logicamente organizado.

Entre as ferramentas teóricas de análises de processos de ensino e aprendizagem oferecidas pelo EOS, destacamos para este estudo as que articulam as facetas institucionais e pessoais do conhecimento matemático. Ao comparar os significados conferidos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições) e verificar que houve discrepâncias então se diz, conforme o EOS, que houve um conflito semiótico.

O significado das expressões vem dado pelo uso que fazem delas. Em relação aos objetos matemáticos, o EOS defende que:

> [...] devem ser considerados como símbolos de unidades culturais, emergentes de um sistema de usos ligados às atividades de resolução de problemas que realizam certos grupos de pessoas e que vão evoluindo com o tempo. Em nossa concepção, é o fato que em certas instituições são realizados certos tipos de práticas que determinam o surgimento progressivo de 'objetos matemáticos' e que o 'significado' desses objetos está intimamente ligado aos problemas e às atividades realizadas para resolvê-los. Esse significado do objeto não pode ser reduzido a sua mera definição matemática (GODINO; BATANERO, 1994, p. 05).

Pensar sobre significados implica em uma análise de ações estabelecidas no processo de ensino-aprendizagem que levem em conta os registros feitos pelos estudantes para expressar ideias e os sentidos atribuídos a partir das relações estabelecidas com o objeto de conhecimento.

A noção de significado vem associada à de função semiótica, as relações estabelecidas entre, o conteúdo entre o antecedente (expressão, significante) e o consequente (conteúdo, significado), estabelecido por um sujeito (pessoa ou instituição) segundo critérios. Assim, "cada função semiótica implica em um ato de semiose por um agente interpretante e constitui um conhecimento" (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 19).

Nas palavras de Godino:

> No trabalho matemático, os símbolos (significantes) referem-se a ou estão no lugar de entidades conceituais (significados). O ponto crucial nos processos de instrução matemática não está, entretanto, no domínio da sintaxe da linguagem simbólica matemática, embora isso também seja importante, mas na compreensão de sua semântica, ou seja, na natureza dos próprios conceitos e proposições matemáticas e sua relação com os contextos e situações-problemas de cuja resolução procedem (GODINO, 2002, p. 04).

Para o autor, os objetos matemáticos são emergentes das práticas matemáticas. Neste sentido, a construção do conhecimento está associada a uma relação entre o sujeito que aprende e o objeto do conhecimento. É uma construção que precisa de envolvimento para se efetivar e o processo de construção é individual, intrínseco, cada um no seu ritmo, da sua maneira, da relação estabelecida facilmente gera conflitos de diversas ordens. (GODINO, 2002, p. 04).

Ao analisar a aprendizagem dos números racionais como objeto matemático, registramos que a ideia de objeto está relacionada a todos os aspectos envolvidos no processo de construção do conhecimento. O EOS estabelece como objetos matemáticos primários:

- linguagem em seus diversos registros: termos, expressões, notações, gráficos;
- situações-problemas: aplicações extra-matemática, exercícios, desafios;
- conceitos-definição: introduzidos através de definições ou descrições;
- proposições: enunciados sobre conceitos;
- procedimentos: algoritmos, operações, técnica de cálculo;
- argumentos: enunciados usados para validar ou explicar proposições e procedimentos.

No estudo, Godino, Batanero e Font, (2008) consideram que as entidades primárias apresentadas ampliam a relação entre signo, objeto e contexto ao problematizar a noção de conceito e interpretar o objeto/conceito de referência em termos de situações-problemas.

Neste sentido, uma atividade é proposta por meio de uma situação-problema que requer conhecimentos matemáticos que se relacionem com ela. O contexto em que a situação é descrita envolve a linguagem verbal e gráfica, onde se expõem termos e expressões específicos da área. Ao resolver a situação, o estudante deve realizar os procedimentos e as proposições relacionados entre si, além de justificar os conceitos envolvidos por meio de argumentos matemáticos. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Por consequência, o significado é também a perspectiva com a qual nos alinhamos, a fim de compreender a relação dos estudantes com o estudo dos racionais. Ao propor uma situação-problema envolvendo números racionais, por exemplo, os recursos, as expressões verbais e gráficas, as hipóteses construídas, as relações estabelecidas, os argumentos que justificam as respostas construídas constituem "objetos matemáticos".

Para Santos (2015), os autores e pesquisadores do EOS destacam uma perspectiva "sistêmica" de significado associado ao uso que se pode fazer de um objeto matemático. Assim, o conceito de significado está relacionado com processos interpretativos de objetos matemáticos e com interações que acontecem na construção do conhecimento, na aprendizagem. Os significados trabalhados podem ser classificados nos níveis pessoais e institucionais.

Godino e Batanero (1994) definem como significado de um objeto institucional (OI) o sistema de práticas institucionais (PI(C)) associadas ao campo de problemas do qual emerge o objeto (OI) em um determinado momento. Neste sentido,

> o objeto institucional também pode ser conceituado como um sinal da unidade cultural constituída por $P_I(C)$ Os objetos institucionais são os constituintes do conhecimento objetivo, considerado no sentido descrito pela Ernest (1991). Se a instituição I é a instituição matemática M, o objeto institucional será chamado de objeto matemático (eles podem ser conceitos, proposições, teorias...) (GONDINO; BATENERO, 1994, p. 11).

Assim, as atividades realizadas em uma instituição das quais emergem uma rede de conceitos e proposições, um campo de problemas que formam um sistema de práticas sociais, caracterizam o significado institucional. Configura-se como conhecimento objetivo. Dentre os significados institucionais destacam o conteúdo apresentado nas propostas curriculares, os sistemas de práticas implementados e avaliados no planejamento pedagógico.

Godino, Batanero e Font (2008) classificam os significados institucionais da seguinte forma:

- implementado: sistema de práticas efetivamente implementadas pelo professor;
- avaliado: sistemas de práticas utilizadas pelo professor para avaliar a aprendizagem;
- pretendido: sistema de práticas incluídas no planejamento do processo de estudo;
- referencial: sistema de práticas que serve de referência para elaborar o significado pretendido.

Como posto anteriormente, o EOS estabelece também a existência do significado pessoal, como o próprio nome enseja, é definido como o sistema de práticas de uma pessoa para resolver o campo do problema do qual o objeto pessoal (OP) emerge em um momento dado. O OP emerge da experiência e da aprendizagem, constituindo o conhecimento subjetivo (GODINO; BATANERO, 1994).

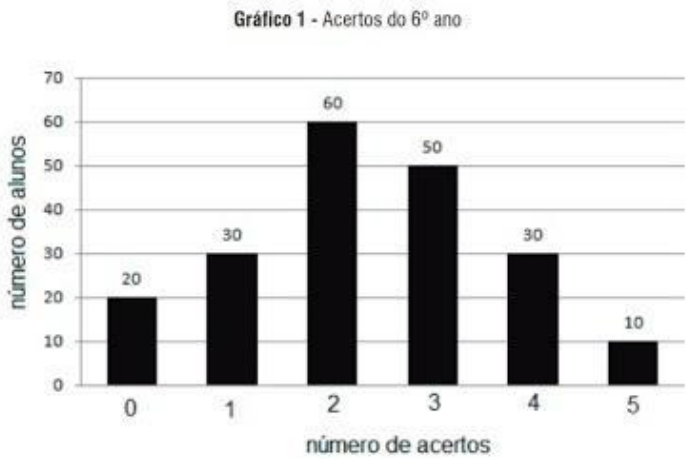
As práticas correspondentes a uma pessoa, sua forma de pensar e de expressar são definidas como os "significados pessoais". Os tipos apresentados pelo enfoque ontossemiótico para significados pessoais são: o global, o declarado e o atingido.

O significado global corresponde à totalidade do sistema de práticas pessoais manifestada pelo sujeito. O significado declarado, caracteriza-se pelas práticas registradas nas avaliações, as respostas elaboradas pelos alunos, mesmo que não correspondam ao esperado do ponto de vista institucional. O

significado atingido é referente às práticas manifestadas que estão condizentes com os significados trabalhados no contexto da instituição. (GODINO; BATANERO, 1994).

Para exemplificar, podemos analisar a seguinte situação:

(OBMEP 2009) Os alunos do sexto ano da Escola Municipal de Quixajuba fizeram uma prova com 05 questões. O gráfico mostra quantos alunos acertaram o mesmo número de questões; por exemplo, 30 alunos acertaram exatamente 4 questões. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?



( ) Apenas 10% do total de alunos acertaram todas as questões.

( ) A maioria dos alunos acertou mais de 2 questões.

( ) Menos de 200 alunos fizeram a prova.

( ) 40 alunos acertaram pelo menos 4 questões.

( ) Exatamente 20% do total de alunos não resolveram nenhuma questão.

Fonte: OBMEP, 2009.

Diante da situação, todo tipo de manifestação que o aluno apresentar configurará o significado global: a leitura e interpretação de uma questão, as dúvidas expressadas, os registros e expressões no contato com o objeto matemático, entre outras. Ao elaborar e registrar uma resposta com cálculo e/ou justificativa, o aluno comunica seu pensamento, o que caracteriza o significado declarado. As respostas que estiverem em consonância com o que

foi sistematizado pela instituição escolar configuram o significado atingido. (GODINO; BATANERO, 1994).

Segundo o EOS a aprendizagem supõe a apropriação dos significados institucionais e pessoais decorrentes das relações dialéticas no processo de ensino-aprendizagem. A figura a seguir apresentada pelos autores, é uma sistematização dos estudos do EOS no tocante aos signficados:

Figura 1: Tipos de significados institucionais e pessoais.

Fonte: Godino et al. (2008).

A figura ilustra as relações entre os significados pessoais e institucionais como parte de uma conjuntura de um sistema de práticas que acontecem na construção do conhecimento. Compreender a dimensão relacional deste processo é defender uma postura que desafia, questiona, instiga a comunicação, incentiva e valoriza a construção de argumentos, oportuniza o confronto entre diferentes construções. Assim, o ambiente escolar torna-se um espaço não só de apresentar o conhecimento institucionalizado ao longo do tempo, mas, principalmente, para oportunizar a construção e reconstrução do objeto de conhecimento. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

D'Amore, Iori e Pinilla (2015) afirmam que cada conhecimento reflete, ao mesmo tempo, uma dimensão social e uma dimensão pessoal e apresentam a escola como lugar onde se institucionaliza essa dupla natureza. Para os autores, aprender é uma construção submetida à necessidade de 'socializar' e

o meio comunicativo, em Matemática de maneira mais decisiva, está condicionado pela escolha do mediador simbólico.

Assim, a análise da aprendizagem exige um olhar atencioso e cuidadoso nos significados institucionais apresentados como propostas de trabalho através de linguagem, símbolos e ações realizadas que possibilitarão a construção dos significados pessoais, que serão instrumentos para novas construções.

1.2 Um breve olhar sobre a origem e evolução dos números racionais

Na introdução deste trabalho, defendemos que a produção de significado está associada à capacidade de falar sobre o objeto e ainda, posicionamos a escola como lugar privilegiado que possibilita ao aluno aumentar seu repertório de significados. Nesse sentido, a presente subseção é dedicada a abordar os números racionais e o desenvolvimento do conceito, bem como os significados atribuídos aos números racionais no contexto escolar. Nosso objetivo é situar o leitor sobre os fundamentos e a natureza do conceito, o significado institucional de referência construído nas propostas oficiais de ensino para, a partir desta breve apresentação, analisar a aprendizagem dos estudantes expressas durante a pesquisa.

O surgimento dos números racionais está associado à necessidade humana e sua sistematização é feita por princípios gerais fundamentados pela construção da Matemática enquanto Ciência. Segundo Boyer (2001, p. 9), "os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações".

Vários autores citam o uso dos números racionais associados à necessidade de medir, tarefa que, segundo Caraça (1975), é uma operação que a vida exige com frequência. Para medir é necessário estabelecer uma unidade de medida e responder à questão – quantas vezes um comprimento cabe em um outro. Assim, o surgimento dos números racionais configura-se como uma

solução para uma necessidade do homem nas tarefas que envolviam medidas, ao comparar grandezas. O desafio de encontrar uma resposta para o impasse quando a comparação entre grandezas não correspondia à números inteiros, gerou a "negação da negação" (CARAÇA, 1975) e, com a divisão indicada, surge um novo conjunto de números, que expressa o resultado da operação, agora aceita como possível. Segundo este autor, o número racional é consequência da intenção "de expressar a medida de uma grandeza em relação a outra" quando a divisão entre duas medidas não resultasse em um quociente inteiro.

Para Caraça (1975), os moldes de criação do novo campo numérico devem considerar as regras e princípios do conhecimento já existente e ainda, as operações utilizadas devem ser as mesmas que atendem ao conjunto numérico antigo (já existente). Assim, utilizando dos "princípios da extensão e da economia" (CARAÇA, 1975), os números naturais devem ser considerados casos particulares do novo conjunto numérico, o conjunto dos números racionais.

As peculiaridades da constituição deste conjunto numérico, muitas vezes, têm trazido dificuldades à sua aprendizagem no contexto educacional, já apontadas em muitos estudos da área. Entre as questões que têm apresentado obstáculos no aprendizado dos números racionais, Rodrigues (2005) destaca a importância de enfatizar o referencial a ser considerado para apresentação das respostas nas situações-problema baseadas nos significados parte-todo e quociente, destacando um olhar atencioso para a escolha da unidade nos seus estudos. Outro aspecto citado por Severo (2009) como questão de análise cuidadosa relacionada à aprendizagem do número racional é o fato de uma mesma quantidade poder ser expressa por diferentes significantes e que um mesmo número pode representar quantidades diferentes, em função da unidade tomada.

Podemos inferir a importância de apresentar situações que possam ser analisadas coletivamente para servir de base para a construção do conhecimento. Ao propor uma situação problema para o estudo dos números

racionais, abrimos possibilidade para se estabelecer relações entre as formas de expressar um número racional e também ter clareza para definir a unidade de referência. Dessa forma, a sistematização matemática do objeto do conhecimento terá uma base mais sólida.

1.3 Os números racionais: ideias e características

O Conjunto dos Números Racionais é um tema que desperta o interesse de vários educadores matemáticos, que estudam tanto os aspectos epistemológicos desse conjunto quanto seus processos de ensino-aprendizagem. Porém, os resultados no contexto escolar denunciam que o problema da aprendizagem dos números racionais ainda não foi solucionado, o que implica na necessidade de aprofundar o conhecimento sobre a sistematização do conjunto numérico dos racionais e como ele é apresentado no contexto escolar para melhor entender os resultados do processo de aprender.

Kieren (1980) apresenta o significado dos números racionais com ideias dos subconstrutos, como meio de interpretar este conjunto numérico. Elias (2017), no seu trabalho de doutorado, destaca o trabalho de Kieren como o mais citado nas pesquisas brasileiras, destacando sua ampla aceitação na comunidade acadêmica.

Segundo Kieren (1980), a definição lógica de um número racional dada por $x\ tal\ que\ ax = b; a, b\ \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ carrega consigo um conjunto de significados e interpretações, que se aplicam a diferentes contextos, e compõem um conjunto conceitual que deve ser mobilizado durante a aprendizagem deste conteúdo. Como uma base para o construto do número racional, o autor apresenta cinco subconstrutos, sendo eles: **parte-todo, razão, quociente, medida e operador**. Apresentaremos a seguir cada um deles de maneira mais detalhada.

Parte-todo: o estudo de fração é associado a um todo (x) dividido em n partes iguais. Neste sentido, a fração configura-se como uma parte de uma

unidade (um objeto ou um conjunto de objetos discretos). É importante observar que este subconstruto é sempre dividido em duas partes, tanto em palavras quanto em símbolos, introduzindo a noção de par ordenado (a, b). Assim como as relações entre conjuntos, esta relação generaliza e, psicologicamente, destaca a noção de equivalência (KIEREN, 1980). O significado de parte-todo é frequentemente trabalhado nas escolas com imagens de pizza, chocolates, quantidades de balas, etc. visando ilustrar o processo de dupla contagem: do todo (x) e das partes do todo (n).

Razão: A notação fracionária e de par ordenado ganha um novo significado quando se trata de razão, definida como a comparação quantitativa de duas qualidades. Três décimos $(\frac{3}{10})$ de um determinado objeto, ou de um conjunto de objetos, que tem em si uma noção de parte-todo, adquire um significado diferente de $\frac{3}{10}$ quando utilizado para comparar, por exemplo, o número de garotas e garotos em um time de futebol. Esse último caso, trata-se do subconstruto de razão (KIEREN, 1980).

Para Kieren (1980) a relação parte-todo é um caso particular de razão, pois se trata de uma comparação subconjunto-conjunto. O autor destaca que embora a relação de equivalência seja a mesma nos dois subconstrutos, a relação construída psicologicamente pelo estudante é diferente.

Quociente: no subconstruto quociente, a expressão $\frac{a}{b}$ configura-se como a operação $a \div b$. O numerador é o inteiro que está sendo dividido por um determinado número de partes definido pelo denominador, também inteiro e diferente de 0. Ele permite quantificar o resultado de uma divisão em um dado número de partes e se relaciona com a álgebra de equações lineares (KIEREN, 1980).

Para Kieren (1980), os subconstrutos quociente e parte-todo são muito próximos, porém, para o estudante, estes significados emergem e se aplicam em contextos diferentes. O autor exemplifica afirmando que mesmo que designar três (3) partes de uma determinada unidade dividida em quatro (4), ou seja, três quartos $\binom{3}{4}$ desta unidade, leve à mesma quantidade que dividir

três (3) unidades por quatro (4), três quartos $\left(\frac{3}{4}\right)$, estas duas situações se configuram contextualmente e, consequentemente, psicologicamente diferentes, sendo, portanto, para o estudante, problemas matemáticos distintos.

Medida: esse subconstruto também se aproxima com a ideia de parte-todo. Kieren (1980) define a medição como a atribuição de um número a uma determinada região. Isso se dá, segundo o autor,

> [...] por meio de uma iteração do processo de contagem do número de unidades inteiras utilizáveis para "cobrir" a região e, em seguida, subdividir igualmente uma unidade para fornecer o ajuste adequado. O foco aqui está na unidade arbitrária e sua subdivisão, e não nas relações parte-todo (KIEREN, 1980, p. 136, tradução nossa).

Um exemplo muito utilizado no dia-a-dia desse subconstruto e que também compõe o currículo escolar, é o Sistema Internacional de Unidades, que utiliza medidas como o metro, o quilograma e o litro.

Operador: nesse subconstruto, os números racionais se constituem como ferramentas capazes de mapear um conjunto em outro através da multiplicação. Por exemplo, um operador dois por três $\left(\frac{2}{3}\right)$ mapeia um elemento de domínio doze (12) para um elemento de alcance (8) através da multiplicação $12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ (KIEREN, 1980).

Campos e Rodrigues (2007), também tendo como base teórica o trabalho de Kieren, apresenta três aspectos do número racional que devem merecer atenção especial dos educadores em um trabalho que busca o pleno domínio do conceito de número racional:

> 1) o duplo papel desempenhado pelo número 1 no conjunto dos racionais, que serve tanto como unidade divisível que forma a base de comparação, quanto a base conceitual para a formação dos inversos multiplicativos, além, de ser o elemento neutro da multiplicação; 2) o fato de que os números racionais às vezes adquirem um caráter de quociente e às vezes de razão, representando, no primeiro caso, o número de partes em que um todo foi dividido e, no segundo caso, estabelecendo apenas uma propriedade relacional entre dois números; e 3) o fato de que a adição e a multiplicação, ao contrário dos naturais, são independentes no conjunto dos racionais, pois enquanto que nos naturais a multiplicação sempre produz números maiores, nos racionais essa regra não vale, e a multiplicação pode até ser interpretada como uma divisão (CAMPOS; RODRIGUES, 2007, p. 77 *apud* KIEREN, 1993, p.55).

No estudo do número racional, um mesmo número pode expressar quantidades diferentes em função da unidade e uma mesma quantidade pode ser expressa por significantes diferentes, o que para o autor agrega dificuldade à compreensão do significado da relação de ordem entre os números racionais.

Para Rodrigues (2005):

> A ideia de estudar essas concepções em sujeitos com um nível de escolaridade mais elevado, que já ultrapassaram a fase do estudo formal das frações, é tentar buscar elementos para verificar quais dessas particularidades têm resistido mais ao tempo e exigem um maior amadurecimento do sujeito para sua plena compreensão ou uma maior atenção dos educadores para elaboração de atividades de ensino que permitam que esses aspectos sejam enfatizados no estudo destes números, durante o período escolar (RODRIGUES, 2005, p. 21).

Assim, ratifica a ideia de que é preciso investigar com mais precisão à aprendizagem dos números racionais, na busca de compreender as características deste campo numérico trabalhadas e consolidadas no decorrer do Ensino Fundamental, com as relações estabelecidas entre os indivíduos e o objeto de conhecimento.

Os números racionais foram apresentados de formas diferentes no contexto escolar ao longo do tempo, ora mais associada com a prática, ora de maneira mais formal. Gomes (2006) analisa alguns livros didáticos utilizados e "apresenta os números racionais na Matemática da escola secundária brasileira no século XX, até os anos 70" (p. 4). Destaca três momentos na busca de descrever cada um desses períodos:

> 1) as três primeiras décadas do século;
> 2) da Reforma Francisco Campos (1931) até o início dos anos 60;
> 3) os anos 60 e o início dos anos 70 – período de penetração e difusão do movimento da matemática moderna em nosso país (GOMES, 2006, p. 4).

O que nos interessa neste estudo é a tentativa de caracterização do enfoque dos racionais representativos de cada um desses momentos, para melhor entender o que vivenciamos na construção deste conhecimento no contexto da escola.

Gomes (2006) destaca que no primeiro momento o estudo da matemática objetivava proporcionar ao aluno a formação geral e básica para o ingresso em

um curso superior através dos exames preparatórios. No seu trabalho, a autora apresenta a definição de grandeza, presente nos livros didáticos, como tudo o que é capaz de aumento ou diminuição, seguido da classificação das grandezas em contínuas ou descontínuas. Nos materiais analisados por Gomes (2006, p. 5), a noção de medição de uma grandeza é apresentada como "a comparação da grandeza com outra grandeza de mesma espécie, já conhecida, a qual recebe o nome de unidade".

Para Gomes (2006), ao classificar os possíveis resultados da medição de grandezas, os autores dos livros didáticos, oferecem dois tipos básicos de números: os racionais ou números comensuráveis e os irracionais ou números incomensuráveis. No período, a preferência era pela denominação comensuráveis e incomensuráveis evidenciando a forte ligação entre número e medida de grandeza.

Com base nos estudos feitos, Gomes (2006) apresenta uma separação de possibilidades de resultados de grandezas em três casos:

> 1) a medida é um número inteiro, quando a grandeza que se quer medir é um múltiplo da unidade; 2) a medida é uma fração, quando a grandeza é um múltiplo de uma parte alíquota da unidade; 3) a medida é um número incomensurável, quando a grandeza não é múltiplo de nenhuma parte alíquota, por menor que seja, da unidade (GOMES, 2006, p. 8).

O segundo momento, caracterizado no trabalho de Gomes (2006), teve início em 1931, nas palavras da autora:

> ano em que se empreende a primeira tentativa de organização nacional da educação do Brasil por meio da Reforma Francisco Campos. A partir dessa reforma, os conteúdos matemáticos da escola secundária, até então ensinados por livros e professores específicos para aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, passam a integrar uma única disciplina nos currículos, com o nome de matemática. Para abordar os números racionais nos livros didáticos brasileiros nesse segundo momento, precisamos apresentar, ainda que de forma sucinta, os antecedentes dessa mudança (GOMES, 2006, p. 10).

O momento caracteriza-se por um contexto de "inquietações e movimentos de reforma" na educação. É lançada a proposta de modernização que tinha como sua característica mais evidente "a criação de uma nova disciplina denominada Matemática, na qual se reuniriam os ensinos até então

isolados da aritmética, da álgebra e da geometria" (GOMES, 2006, p.10). Essa autora afirma que mudanças na legislação educacional não afetaram significativamente os tópicos e sua apresentação nos manuais brasileiros, particularmente no que diz respeito à abordagem dos números racionais.

Gomes (2006) afirma que as mudanças na legislação educacional não afetaram significativamente a à abordagem dos números racionais nos manuais de livros brasileiros.

O conteúdo das obras abrange tópicos de aritmética e geometria e, algumas delas, apresentam ainda tópicos de álgebra. Gomes (2006) procurou identificar, no estudo da aritmética, "a presença ou ausência da definição de grandeza, da conceituação de número como resultado da medição de grandezas e da definição de fração ligada à medição de comprimentos" (p.12). Os autores dos livros analisados não empregam mais as expressões "números comensuráveis" e "números incomensuráveis".

O estudo dos números racionais, a partir da observação de livros didáticos, apresenta uma abordagem sobre a questão da definição de grandeza constatando de maneiras variadas: grandeza como tudo aquilo que pode aumentar ou diminuir; como entes abstratos entre os quais se pode definir a igualdade e a soma; e ainda grandeza como tudo aquilo que podemos medir.

Em relação à conceituação de número como resultado da medição de grandezas, parece continuar a prevalecer no segundo momento. O uso da expressão "números racionais" é empregada por apenas um dos manuais observados por Gomes (2006).

Neste segundo momento, alguns dos livros didáticos analisados apresentam as frações de forma ligada à medição de comprimentos e não utilizam mais a expressão "números comensuráveis". Para Gomes (2006), o abandono do termo "números comensuráveis" na maioria dos livros didáticos parece refletir o desligamento operado ao longo do tempo entre a noção de fração e a medição de comprimentos, o que se configura como a progressiva desvinculação entre grandeza e número.

A ideia que prevalece nos demais livros observados na definição de

fração, é a da fração como uma ou mais partes iguais de uma "unidade". Os autores escolhem diferentes representações de unidade como um segmento, por exemplo, uma laranja, um tablete de chocolate, uma régua de madeira (GOMES, 2006).

> As modificações dos livros didáticos em relação à apresentação dos números racionais verificadas no segundo momento apontam, portanto, na direção da dissociação entre número e medição de grandezas e, particularmente, na direção de um progressivo abandono do segmento de reta como o protótipo preferido de grandeza/unidade. Configura-se, desse modo, uma alteração marcante, a qual diferencia a abordagem dos números, e, particularmente, dos números racionais, entre os dois momentos históricos que focalizamos até agora (GOMES, 2006, p. 15).

Para Gomes (2006, p.15), as "mudanças profundas na Matemática escolar brasileira" foram mais significativas a partir da "penetração e difusão" no país, do movimento da matemática moderna, caracterizando o terceiro momento. A abordagem dos números se modificou, passando a aritmética "a ser concebida como o estudo dos campos numéricos". O número é apresentado com propriedade comum, formando conjuntos.

O aparecimento dos números racionais ocorre somente após uma série de seções, começando pela abordagem das frações como uma ou mais partes iguais em que se divide uma "unidade".

Gomes (2006), ao analisar este terceiro momento, sinaliza:

> uma mudança da escolha da ênfase a ser conferida dentre os vários aspectos que integram a epistemologia dos números racionais: em conformidade com as ideias do movimento da matemática moderna, passa a realizar-se a apresentação formal da fração ou número fracionário por meio de um par ordenado de números inteiros (GOMES, 2006, p. 19)

É possível notar a ampliação do campo numérico, com uma abordagem mais formal para fração, apresentada como par ordenado de inteiros a e b, destacando que a divisão é sempre possível entre eles, desde que b seja diferente de zero.

Gomes (2006) conclui seu estudo destacando a complexidade dos números racionais e sugerindo que o conhecimento das características de cada período possibilita a percepção da variedade que se oculta por trás da

homogeneidade dos conteúdos da matemática escolar. Uma visão sobre estes momentos descritos possibilita uma melhor compreensão de como o conceito de números racionais foi sendo apresentado no ambiente escolar ao longo do tempo, como eram institucionalizados os conceitos, a linguagem, os símbolos.

1.4 Os significados institucionais: uma análise dos documentos oficiais brasileiros

Com o objetivo de definir os significados institucionais de números racionais no contexto atual, é pertinente uma breve análise das propostas de trabalho com os números racionais nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Os PCN (BRASIL, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2017) foram elaborados com a finalidade de construir referências curriculares comuns, atentando para o respeito às diversidades presentes no território brasileiro.

Os PCN apresentam uma discussão acerca da natureza do conhecimento matemático e sugerem orientações básicas para o ensino-aprendizagem em cada etapa de escolaridade. Apresentam objetivos para cada nível de ensino da Educação Básica e cada área de conhecimento que compõe o currículo escolar. A organização dos PCN serviu de base para currículos escolares e para a prática dos professores. Em relação à aprendizagem matemática, os PCN orientam a prática escolar, visando contribuir para que toda a criança e jovem brasileiro tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite a inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e culturais (BRASIL, 1997).

No que se refere à aprendizagem dos números racionais, destacam que esse aprendizado "supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada" (BRASIL, 1997, p. 67). Este documento, também, orienta:

> (…) as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não

> atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos (BRASIL, 1998, p. 63).

Portanto, para que ocorra uma aprendizagem significativa sobre o conteúdo dos números racionais, é preciso que o aluno seja desafiado a construir o conhecimento agindo, refletindo e se comunicando matematicamente.

Os significados e representações de um número racional começam a ser construídos já no segundo ciclo (4º e 5º ano), sendo período importante para o processo de construção dos conhecimentos que serão utilizados e ampliados a partir do 3º ciclo (6º e 7º ano).

Para o 2º ciclo, os PCN sugerem que os alunos construam:

> o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social; interpretem e produzam escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal e ainda que sejam capazes de resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais (BRASIL, 1997, p. 55-56).

É nessa fase que os alunos se aproximam da noção de número racional, da compreensão dos significados quociente, parte-todo e razão, além das representações decimal e fracionária.

O aluno deve, ao final do 5º ano, conhecer, identificar e construir as representações equivalentes e localizar os números na reta numérica, comparando quantidades na forma decimal e fracionária. O documento define conceitos e procedimentos para o ensino dos números racionais nos primeiros anos de escolaridade básica.

Segundo os PCN do Ensino Fundamental, os números racionais devem ser compreendidos como: quociente, razão, parte-todo e operador multiplicativo. Ao apresentar:

> a relação parte-todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes.
> Outro significado das frações é o de quociente; baseia-se na divisão de

> um natural por outro ($a \div b = \frac{a}{b}; \neq 0$). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas. No entanto, nos dois casos, o resultado é representado pela mesma notação: $\frac{2}{3}$.
> Uma terceira situação, diferente das anteriores, é aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo "2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes".
> [...] o significado da fração como operador, ou seja, quando ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa ideia está presente, por exemplo, num problema do tipo "que número devo multiplicar por 3 para obter 2" (BRASIL, 1997, p. 68).

Neste sentido, podemos afirmar que o reconhecimento dos números racionais e suas diferentes representações, a capacidade de análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema envolvendo números racionais, bem como a realização de cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações com números racionais -, por meio de estratégias variadas, são objetos matemáticos que podem ser explorados no fazer pedagógico para a construção do conhecimento dos números racionais, no Ensino Fundamental.

Percebe-se a importância da ampliação dos conhecimentos já construídos em ciclos anteriores para, a partir daí, construir novos conhecimentos, utilizando-os tanto em contextos matemáticos como não matemáticos.

Nessa fase da escolarização básica deve acontecer a consolidação e ampliação dos conhecimentos acerca do conceito e das noções envolvidas no estudo dos números racionais. Entende-se que um conhecimento só está construído plenamente se for identificada a possibilidade de mobilizá-lo em contextos diferentes daquele em que foi originado. Corroborando com o EOS (2008) que defende a compreensão de um objeto matemático como a capacidade de usá-lo de forma competente em diferentes situações práticas.

Ressaltamos ainda que, a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo dos anos finais do Ensino

Fundamental, que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema (BRASIL, 1998).

A compreensão de aspectos da aprendizagem precisa levar em consideração, entre outros pontos, que embora as prescrições curriculares tragam, em sua essência, a explicitação de que é necessário procurar manter um "ritmo geral" para cada ano ou ciclo escolar, cada aluno apresenta seu ritmo próprio de aprendizagem, suas dificuldades e particularidades.

No Ensino Médio, as propostas curriculares propõem que a Matemática vá além do caráter instrumental, colocando-a como Ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador junto às demais Ciências da Natureza. Nesta etapa, é importante "alargar e aprofundar o conhecimento dos alunos sobre números e operações, mas não isoladamente dos outros conceitos" (BRASIL, 2002, p. 122), trabalhando problemas que envolvam medições, cálculos aproximados, porcentagens, entre outros.

Neste sentido, existe uma ideia, muitas vezes equivocada, que os alunos já construíram o conhecimento básico do conjunto dos números racionais, o que permitiria o aprofundamento desse conhecimento com atividades integradas, em diferentes disciplinas. Severo (2009) destaca que o conhecimento dos números racionais que os estudantes têm ao chegar no Ensino Médio deixou a desejar, na maioria dos casos, propondo um estudo sobre o assunto.

Tendo apresentado este retrato da abordagem dos números racionais nos PCN (1997; 1998), segue uma breve abordagem a BNCC (BRASIL, 2017), homologada em dezembro de 2017, destacando o que ela prescreve sobre o trabalho com esses números.

A BNCC é um documento novo, implementado em 2018, que define as aprendizagens consideradas essenciais que todos os alunos devem desenvolver. Nele são indicadas as competências, as habilidades e os conhecimentos que se espera serem desenvolvidos, por todos os alunos, ao longo da sua escolaridade básica. O documento é uma referência nacional obrigatória para que os sistemas e as redes de ensino possam elaborar seus currículos.

Na verdade, a BNCC e os currículos a serem elaborados pelas redes de ensino e instituições escolares, têm papéis complementares para que os conhecimentos definidos para cada etapa da educação básica sejam assegurados. Cabe a cada sistema educacional e cada unidade escolar ajustar os escopos da BNCC à realidade na qual está inserido (BRASIL, 2017).

A BNCC apresenta, em relação à Matemática, cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2017), todas apresentando elementos do trabalho com os números racionais, embora apenas a unidade temática Números explicita a expressão "números racionais". Na unidade temática Números, a expectativa para os anos iniciais do Ensino Fundamental é a de que:

> os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. [...] Espera-se também o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos (BRASIL, 2017, p. 224-225).

Assim, ratificamos a importância de saber quais são as expectativas com relação ao estudo dos números racionais no Ensino Fundamental para que seja possível uma análise do conhecimento sobre números racionais quando os alunos chegam na etapa seguinte da escolarização. Continuando na unidade temática Números, a expectativa para os anos finais é a de que:

> os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos (BRASIL, 2017, p. 225).

Observa-se que existe um aprofundamento do que se espera que os alunos aprendam durante todo o Ensino Fundamental, visto que propõe a compreensão dos processos envolvidos na resolução das operações, utilizando os números racionais nos seus diferentes significados. Destaca-se que os conteúdos relativos a esse conteúdo, que é o foco desta pesquisa, estão organizados na BNCC (BRASIL, 2017), sendo designados no documento como

"objetos de conhecimento", relacionando-os com as unidades temáticas e com as habilidades previstas para serem desenvolvidas.

De acordo com a BNCC, no 2º ano do Ensino fundamental já se inicia o estudo com racionais, apenas trabalhando problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte. Este estudo será um pouco aprofundado no ano seguinte com os significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte.

Nos registros dos conceitos e habilidades, propostos na BNCC para o 4º ano, já é sugerido o trabalho com racionais através de frações unitárias mais usuais e a representação decimal relacionada ao sistema monetário brasileiro. Para o 5º ano, o proposto na BNCC é um aprofundamento maior dos números racionais definindo como domínio necessário: a representação dos decimais na reta numérica; a representação fracionária dos números racionais (reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica); a comparação e a ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência; cálculo de porcentagens e representação fracionária e ainda, problemas envolvendo adição e subtração de racionais cuja representação decimal é finita e multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais.

Nos quatro anos finais do Ensino fundamental o documento da BNCC registra objetos de conhecimentos básicos relacionados ao estudo dos números racionais para aprofundar o estudo e garantir o domínio de habilidades e competências necessárias para a continuidade dos estudos na área Matemática, bem como seu uso efetivo na resolução de situações de outras áreas e, principalmente, na sua atuação no contexto de vivência em que estes números são utilizados.

No 6º ano são definidos como objetos de conhecimentos básicos o estudo de frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações; as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais e o cálculo de porcentagens por meio de

estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três". No ano seguinte, o estudo de fração se amplia um pouco mais através da construção dos significados de razão e operador.

O estudo relacionado aos números racionais propostos na BNCC para no 8º ano corresponde ao trabalho com porcentagem e com dízimas periódicas e fração geratriz. No 9º e último ano do Ensino Fundamental, o documento evidencia como objetos de conhecimento, ampliando o estudo dos racionais, o uso dos números reais para medir segmentos de reta, potências com expoentes negativos, notação científica e o cálculo de percentuais sucessivos.

Percebe-se, nesta breve descrição, que o trabalho indicado com os números racionais, como algumas definições e conceitos, concentra-se nos 6º e 7º anos. A partir do 8º ano, os conceitos são aprofundados e aplicados.

A BNCC sistematiza o conhecimento numérico tendo como objetivo construir, ampliar os significados para os números naturais, inteiros, racionais e irracionais, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção.

A descrição da organização dos objetos de conhecimentos relacionados ao conjunto dos números racionais mostra que a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações que levem o aluno a construir o conceito de número racional, superando a necessidade de expressar as situações que os números naturais e os inteiros não puderam responder. Ao levar em consideração os documentos oficiais, o trabalho com os números racionais deve garantir a construção dos conceitos básicos necessários para uma real compreensão do conteúdo.

O histórico apresentado e a breve descrição sobre bases oficiais para a construção do trabalho pedagógico, relacionado à aprendizagem dos números racionais no Ensino Fundamental, articulam o conhecimento construído com uma atuação ativa de quem aprende, tanto em relação à apropriação e ampliação do saber como em relação ao uso deste saber nos espaços de vivência, fora do ambiente escolar.

Torna-se fundamental entender melhor como acontece à aprendizagem dos números racionais, na busca de pensar novos caminhos, novos posicionamentos no espaço escolar, considerando o aluno, sua aprendizagem e, principalmente, a atuação na construção do conhecimento. Almejando um olhar mais aguçado no processo de aprender para que a aprendizagem ultrapasse a apresentação de respostas corretas.

CAPÍTULO 3
CAMINHOS METODOLÓGICOS

A realização de uma pesquisa requer investigação e uma sistematização dos caminhos que serão trilhados na direção de ampliar os conhecimentos e melhor entender a realidade. No contexto da educação pública, são muitos desafios que enfrentamos, das macroestruturas de políticas públicas até o fazer pedagógico na sala de aula, as estruturas e ações parecem não funcionar bem e não apresentam bons resultados. Pensar sobre a aprendizagem constitui uma ferramenta para uma atuação mais efetiva da atuação profissional.

Neste capítulo, descreveremos a abordagem da pesquisa, as ações desenvolvidas para a produção de dados, entraves ocorridos no processo e a caracterização do público alvo, estudantes participantes.

3.1 Abordagem da Pesquisa

Nosso estudo foi construído numa abordagem qualitativa, a qual se preocupa com a percepção dos sujeitos e seu contexto, o foco está no comportamento do sujeito de pesquisa no contexto em que está inserido e diante da realidade em que vive. Ao conceituar pesquisa qualitativa, Minayo (2002) afirma:

> a pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (MINAYO, 2002, p. 21-22).

Considerando nossa proposta de olhar para a aprendizagem dos alunos em relação ao objeto matemático a ser pesquisado, para garantir uma melhor compreensão do processo de aprender, optamos por uma pesquisa qualitativa, visto que, além de valorizar a perspectiva dos participantes, é capaz de fornecer dados descritivos, por meio do contato direto do pesquisador com a situação estudada, além de possibilitar uma melhor compreensão do fenômeno em

estudo, dando ênfase ao processo de obtenção dos dados e examinando a realidade, haja vista que tudo pode servir de pista para melhor entendimento do objeto de estudo (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Neste sentido, o trabalho configura-se como a concretização de um olhar para as respostas apresentadas pelos alunos, percebendo em cada expressão e/ou escolha a caracterização do conhecimento construído em relação aos números racionais. A realidade observada foi a base para as interpretações feitas e as ideias aqui apresentadas.

De acordo com Lüdke e André, nas pesquisas educacionais, "as coisas acontecem de maneira tão inextricável, que fica difícil isolar as variáveis envolvidas e mais ainda apontar claramente quais são as responsáveis por determinado efeito" (LÜDKE; ANDRÉ, 2017, p. 04), corroborando nossa escolha pela abordagem qualitativa para um estudo cujo foco foi à aprendizagem dos estudantes, com vistas à compreensão dos significados atribuídos por eles para o conjunto dos números racionais.

3.2 Caracterização do lócus da pesquisa

A pesquisa foi realizada em Mutuípe, um município de pequeno porte situado no Recôncavo Baiano. Apesar dos muitos percalços enfrentados nos últimos anos, a qualidade da educação sempre foi um pilar importante para o desenvolvimento do município.

O local da produção de dados foi o Colégio Estadual Professor José Aloísio Dias, a única escola pública, estadual, localizada em Mutuípe-Ba que atende estudantes de Ensino Médio.

Quanto à estrutura física, o colégio possui 08 salas de aula, 01 diretoria, 01 sala de professores, 01 secretaria, 01 biblioteca, 01 pequeno laboratório de química, 01 pátio que serve também como refeitório, 01 sala de coordenação, 01 almoxarifado, 01 laboratório de informática; 03 sanitários para estudantes do sexo feminino; 01, para portadores de necessidades especiais; 02, para docentes e funcionários e 03 para estudantes do sexo masculino.

O quadro docente é composto por 27 professores, dentre os quais 04 (quatro) com formação em matemática.

Esta instituição, em 2020, contava com 863 alunos distribuídos conforme demonstrado no Quadro 1.

Quadro 1 – Distribuição de estudantes por série

Série	Total
1ª	229
2ª	171
3ª	164
1ª (tempo integral)	31
EJA, Tempo Formativo III	268

Fonte: Dados da Pesquisa.

A escola funciona nos três turnos, sendo que quase a totalidade dos alunos do turno matutino reside na zona rural do município. No turno vespertino, a clientela é menor e composta de alunos que, na sua maioria, moram na cidade. À noite, as atividades acontecem em dois espaços físicos diferentes, pois, em virtude da estrutura física limitada para a demanda total dos estudantes, a modalidade EJA é oferecida em uma unidade escolar municipal.

Todo nosso trabalho de pesquisa foi planejado para acontecer em uma turma de 1º ano, no turno matutino. Inicialmente planejamos aplicar um questionário, a fim de verificar o conhecimento dos estudantes sobre números racionais, e, em seguida, faríamos uma intervenção na busca de coletar mais dados sobre os significados atribuídos pelos alunos ao objeto matemático pesquisado. Por fim, após sistematizarmos os significados de referência da Matemática escolar, aplicaríamos um novo questionário cujos registros seriam comparados com os registros iniciais.

No entanto, no início de 2020, o Brasil, assim como o resto do mundo, atravessou um período de pandemia causado pelo novo Coronavírus (COVID 19), e, como consequência, todas as atividades escolares foram suspensas.

Vale registrar a frustração diante da impossibilidade do contato com o aluno para acompanhar, de forma direta, a construção da aprendizagem, no

exercício de aprimoramento do olhar de pesquisadora. O desafio de reconstruir a proposta inicial de pesquisa foi vivenciada com ansiedade e desencanto, pois o período foi marcado por situações nunca antes vivenciadas.

Diante das dificuldades impostas pelo contexto pandêmico, tivemos que criar novas estratégias para realizar a pesquisa. Desta forma, decidimos estender a pesquisa para todas as turmas de 1º ano.

O convite para participar da pesquisa foi feito por meio do link disponibilizado nos grupos de *WhatsApp* de cada turma de 1º ano. Considerando o fato de muitos estudantes não terem acesso ao serviço de internet, aparelho celular e/ou computador, não conseguimos uma participação efetiva da maioria.

Naquele período, a escola propôs a realização de atividades remotas no ambiente virtual *Google classroom* e nos grupos de *WhatsApp*, mas a Secretaria Estadual de Educação não legalizou esta condição como carga horária válida, o que dificultou o envolvimento dos alunos.

Embora os professores tenham feito muitas investidas e incentivado as turmas, apenas quatro estudantes do Colégio Estadual Professor José Aloísio Dias participaram da pesquisa.

Diante desse entrave, resolvemos manter contato com professores de Matemática que atuavam nas cidades vizinhas e estendemos o convite para estudantes de outras duas unidades escolares.

Para possibilitar a participação dos estudantes destas duas escolas, disponibilizamos o questionário no ambiente do *Google Docs* durante os meses de julho, agosto e setembro de 2020.

Assim, conseguimos o total de 15 participantes, quatro da escola que serviu de local para a pesquisa e 11 das escolas convidadas.

É válido destacar que neste texto, nos referimos aos participantes com a letra A e um número correspondente a ordem de recebimento dos questionários.

3.3 Instrumento para a produção dos dados

Nosso instrumento para a produção dos dados foi um questionário estruturado (APENDICÊ B), com questões abertas e fechadas, que teve por objetivo investigar a compreensão dos alunos que ingressam no Ensino Médio, sobre os números racionais, bem como identificar os recursos utilizados para a realização de cálculos e, ainda, identificar as principais facilidades e dificuldades encontradas no trabalho com o objeto matemático apresentado.

Optamos pela utilização do questionário, pela possibilidade de obter, em menor tempo, informações de um maior número de pessoas, sendo um recurso de fácil adequação para a modalidade *online*, visto que não poderíamos dispor do contato presencial em virtude do contexto pandêmico, correspondente ao período de realização do trabalho de campo (de julho a setembro de 2020).

O questionário está estruturado com perguntas sobre as ideias dos números racionais trabalhadas no Ensino Fundamental, que constituem o significado institucional de referência na Matemática. As questões visaram compreender as habilidades relacionadas à resolução de problemas, o uso da linguagem simbólica e do sistema conceitual, próprios do objeto matemático pesquisado. Para tanto, respaldamo-nos em documentos oficiais orientadores para a construção dos currículos escolares deste segmento da escolaridade básica em todo contexto educacional brasileiro, bem como nas orientações de materiais diversos, de livros didáticos e de sites educativos, os quais nos auxiliaram na construção de questões com o objetivo de desenvolver a aprendizagem dos números racionais.

O questionário foi composto por 12 questões, sendo 8 questões objetivas, de múltipla escolha e 4 questões classificadas como abertas, de acordo com a classificação de Fiorentini e Lorenzato (2006) por não apontarem alternativas para as respostas, o que possibilita ao pesquisador uma leitura mais ampla dos significados atribuídos às situações apresentadas, facilitando melhor o processo de produção de dados qualitativos.

As questões do questionário serviram para uma análise epistêmica e cognitiva das expressões e argumentos dos estudantes que se configuram como processos interpretativos para os números racionais nas situações propostas. A seguir, tecemos considerações, ideias subjacentes e intenções educativas referentes às questões deste questionário.

As questões 1 e 4 (de acordo com a sequência em que foram propostas) desafiam a pensar sobre a localização de números racionais, representados na forma decimal e fracionária, na reta graduada. Ao realizar as atividades o estudante demonstrará conhecimento do valor do número e ainda de uma sistematização mais formal da sua construção.

A representação de números racionais na reta numérica possibilita uma melhor compreensão da ampliação dos números inteiros, bem como uma consciência sobre o valor real do número ao realizar comparações entre diferentes registros numéricos. Neste sentido, Silva (2008) reconhece a reta graduada como poderoso mecanismo para o reconhecimento da equivalência e para a construção do conhecimento formal dos números racionais.

Quando tomamos a reta numérica e fazemos a correspondência entre o número e o ponto da reta, cada racional é associado a um determinado ponto (ponto racional) e, reciprocamente, a cada ponto racional corresponde um número racional.

As questões 2 e 3 associam números racionais e medidas. O primeiro questionamento é sobre a unidade e, o seguinte, sobre o valor do número expresso em relação à unidade de medida, o quilograma. Na questão 3, como a grandeza tomada como padrão não cabia um número exato de vezes no objeto medido, a unidade e o objeto medido foram redivididos em partes menores, em subunidades. A representação escrita destacada corresponde ao número de unidades fracionárias do quilograma associado ao "peso" do objeto.

Caraça (1951) salienta que em um problema de medida, três fases e três aspectos distintos devem ser considerados: escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão do resultado dessa comparação por um número.

Na questão 5 o objetivo é observar como os estudantes resolvem problema da vida cotidiana envolvendo fração de quantidade. Espera-se que o estudante resolva a situação proposta com números racionais, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. A prática de resolução desta natureza requer habilidades no que se refere à leitura e escrita de números racionais por meio da identificação e compreensão de características deste campo numérico.

A questão 6 está relacionada à ideia de quociente, de forma bem simples e prática. A proposta é dividir 3 folhas de papel para 5 pessoas. O resultado da divisão seria expresso por um número fracionário atribuído a cada parte que resulta quando dividimos 3 unidades para 5.

A questão 7 desafia o estudante a calcular uma fração de um número natural. Além de realizar o cálculo, ele deveria explicar o caminho percorrido até chegar a resposta. O objeto matemático institucionalizado apresentado na questão é de cálculo com a ideia de operador multiplicativo. Multiplicar 72 por ¾ para resultar em um novo número de quilômetros. Ao solicitar que o participante explicasse o caminho que realizou para encontrar o resultado, a questão possibilita a emergência de novos objetos matemáticos pessoais.

A questão 8 que foi um desafio proposto na prova da OBMEP de 2009, configura-se um exercício de leitura e interpretação dos números racionais, envolvendo aspectos importantes na construção do conhecimento como a leitura do texto, leitura de gráfico, cálculo simples e compreensão de porcentagem. Vale destacar que as expressões sugeridas para respostas trabalham com ideias de partes de um todo, quantidades inclusas ou exclusas por expressões como "pelo menos", "mais de" e "a maioria", recursos importantes para compreensão e construção do conhecimento.

A questão 9 apresenta uma situação-problema de área e ocupação de espaço. Neste sentido, ao propor uma questão para analisar a medida de duas salas de tamanhos diferentes para identificar a capacidade de cada sala e

compará-las, esperasse-se que o estudante utilize o conhecimento de razão e argumente sua resposta através de cálculos matemáticos.

Ainda envolvendo a ideia de razão, o desafio das questões 10 e 11 foi relacionar números racionais com a quantidade de água e a quantidade de água sanitária em uma mistura que fosse eficaz contra o coronavírus, de acordo com a indicação de especialistas. No primeiro momento, para indicar a quantidade de água na mistura, as opções oferecidas eram expressas por meio de números fracionários e, no segundo momento, a ideia era associar o número fracionário com a representação decimal e percentual para a quantidade de água sanitária na mistura. Essas duas questões representam possibilidades de uma atuação matemática que requer práticas com o uso de objetos institucionalizados (leitura de escritas formais: porcentagem, decimais e fração tipo: a/b) e de objetos pessoais (formas de comunicar, validar e generalizar suas hipóteses).

Na última questão, a de número 12, o objetivo foi a identificação da relação de inclusão entre os conjuntos, reconhecendo que: um número natural também é inteiro; todo número inteiro também é racional; todo número fracionário também é racional.

A obtenção dos dados ficou restrita à análise do questionário devido às limitações de contato com os estudantes no período da pandemia, o que impossibilitou um acompanhamento mais efetivo de caminhos traçados e de estratégias estabelecidas pelos estudantes na resolução das questões. A condição descrita limitou, de forma significativa, os entendimentos advindos da investigação.

A análise das respostas dos questionários foi realizada ultrapassando o sentido conceitual, focando também nos registros, nos argumentos, nas expressões. Todas as representações que os estudantes utilizaram para apresentar os resultados serão concebidas como objetos matemáticos.

3.4 Análise dos dados

Iniciamos a análise dos dados produzidos pela observação das respostas dos estudantes ao questionário e, em seguida, observamos o resumo total das respostas. A análise dos dados foi desenvolvida por meio de um comparativo entre as respostas dos alunos e as habilidades propostas para a aprendizagem do objeto matemático pesquisado nos documentos curriculares oficiais.

Diante desse contexto, Lüdke e André (2017) sinalizam aspectos importantes a respeito da análise de dados, destacando a importância do aprofundamento do referencial teórico para estruturar as análises, pois fornecem uma base para novas leituras.

Outro ponto importante é que na análise das informações obtidas por meio da observação deve se estabelecer a relação entre teoria e dados coletados, possibilitando novas reflexões, novos conhecimentos.

Nesse sentido, ao analisar as respostas apresentadas no questionário, observamos que as expectativas de categorizar os significados pessoais foram muito limitadas pelo formato do instrumento, a saber, na condição *online*, a maioria das questões objetivas, sem a presença do pesquisador para instigar e desafiar argumentações. Assim, não foi possível classificar as respostas de acordo com o tipo de significado pessoal apresentado.

A análise foi pautada numa perspectiva interpretativa das respostas dos alunos ou da ausência delas, amparada pelos nossos referenciais teóricos. Foram consideradas todas as expressões registradas no questionário, mesmo com a limitação que o instrumento de coleta apresentou, no contexto em que foi utilizado, pois trouxeram aspectos que possibilitam ao pesquisador uma comparação com o significado institucional de referência na Matemática Escolar.

Os resultados estão apresentados como um mural criado a partir de partes da colagem que fazem sentido nas formas de ver e entender as partes de um todo maior. A análise qualitativa possibilitou a tarefa de dar sentido aos dados observados, identificando expressões significativas e construindo uma estrutura para comunicar a essência do que os dados revelaram.

CAPÍTULO 4
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

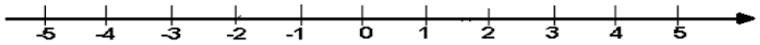
Neste capítulo, apresentamos as ideias dos problemas que compõem o questionário aplicado bem como as respostas dos estudantes, fazendo uma análise sobre a aprendizagem. As questões selecionadas serviram para a análise epistêmica e cognitiva das expressões e argumentos dos estudantes que se configuram como processos interpretativos para os números racionais nas situações propostas. Faremos uma correspondência entre a literatura apresentada e os documentos oficiais que norteiam o ensino de matemática recentemente, descrevendo cuidadosamente as aproximações e distanciamentos entre os significados pessoais e os significados institucionais de referência para os números racionais na matemática escolar, com o objetivo de melhor compreender o desempenho dos estudantes na aprendizagem desse conjunto numérico.

Para as análises, em alguns momentos, faremos agrupamento de questões segundo afinidades de seus objetivos que serão apresentadas a seguir:

Análise das questões 01 e 04:

Questão 01

Localize na reta numérica o número 0,3 *

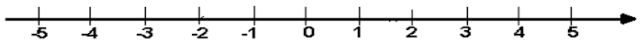


Você deve descrever em sua resposta a localização aproximada do número, por exemplo: entre 1 e 2, exatamente no meio; ou entre 3 e 4, mais próximo do três que do quatro.

Fonte: Questão adaptada da pesquisa de Patrícia Konic sobre números decimais (KONIC, 2011).

Questão 04

Localize na reta numérica o número 1/2 *



( ) Entre os números 0 e 1, exatamente no meio.
( ) Entre os números 0 e 1, mais próximo do 1 que do 0
( ) Entre os números 1 e 2, mais próximo do 1 que do 2
( ) Entre os números 1 e 2, exatamente no meio
( ) Entre os números 1 e 2, mais próximo do 2 que do 1
( ) Não sei responder
( ) Outro:

Fonte: Questão adaptada do trabalho de Jéssica Naves de Oliveira. Dificuldades na aprendizagem dos números racionais: confrontando dois níveis de escolaridade (OLIVEIRA, 2016).

Ao responder as questões 01 e 04, o estudante é desafiado a demonstrar conhecimento do valor do número e, ainda, de uma sistematização mais formal da sua construção. Na questão 01 é sugerido opções de texto para elaboração da resposta e o aluno é desafiado a expressar-se por escrito. A questão 04, de forma diferente, oferece opções de escolhas para o aluno.

Pretendíamos verificar se o aluno faz a conversão do registro numérico na forma decimal para o registro gráfico (também chamado figural).

O esperado, na primeira questão, é que os alunos localizassem o número decimal 0,3 entre o 0 e o 1 e, ainda, argumentassem que está mais próximo do 0. Dos 15 (quinze) alunos participantes da pesquisa, 5 (cinco) responderam que a localização do número racional seria entre 0 e 1, mais próximo do 0 e, 2 (dois) alunos disseram apenas que se localizava entre o 0 e o 1, demonstrando alcançar o significado atingido. Porém, 4 (quatro) alunos apresentaram respostas variadas: entre o 2 e o 3; ente o 0 e o 3; entre o 2 e o 4; entre o 3 e o 4. O significado declarado aparenta uma relação direta com o conjunto dos números inteiros ao relacionar a escrita em que aparece o algarismo 3 com a localização próxima do 2 ou do 4. Uma das respostas registra que o número seria representado entre o 4, sendo interpretada como uma falha na compreensão da questão ou um erro na escrita. Um aluno assumiu não entender a questão e dois deles não responderam.

Praticamente a metade dos alunos, não demonstrou compreender o valor numérico do número racional 0,3 ao localizá-lo na reta graduada. Algumas respostas sugerem uma interpretação do número escrito estabelecendo uma relação com os números naturais. Causa-nos inquietação verificar que alunos ingressando no Ensino Médio não apresentaram sequer uma hipótese de resposta para uma atividade considerada básica no estudo dos números racionais.

Nesse sentido, Severo (2009), ao observar como os alunos registraram frações em forma de números decimais e como estes explicaram a tarefa realizada, registra erros associados, exemplificando com a escrita de 2,4 para dois quartos e de 9,6 para nove sextos. Para a autora, "pode-se pensar que o significado de fração não é compreendido por esses respondentes, pois consideram que o numerador é a parte inteira do número, como julgaram ao tentar localizar o numerador na reta numérica" (SEVERO, 2009, p. 53).

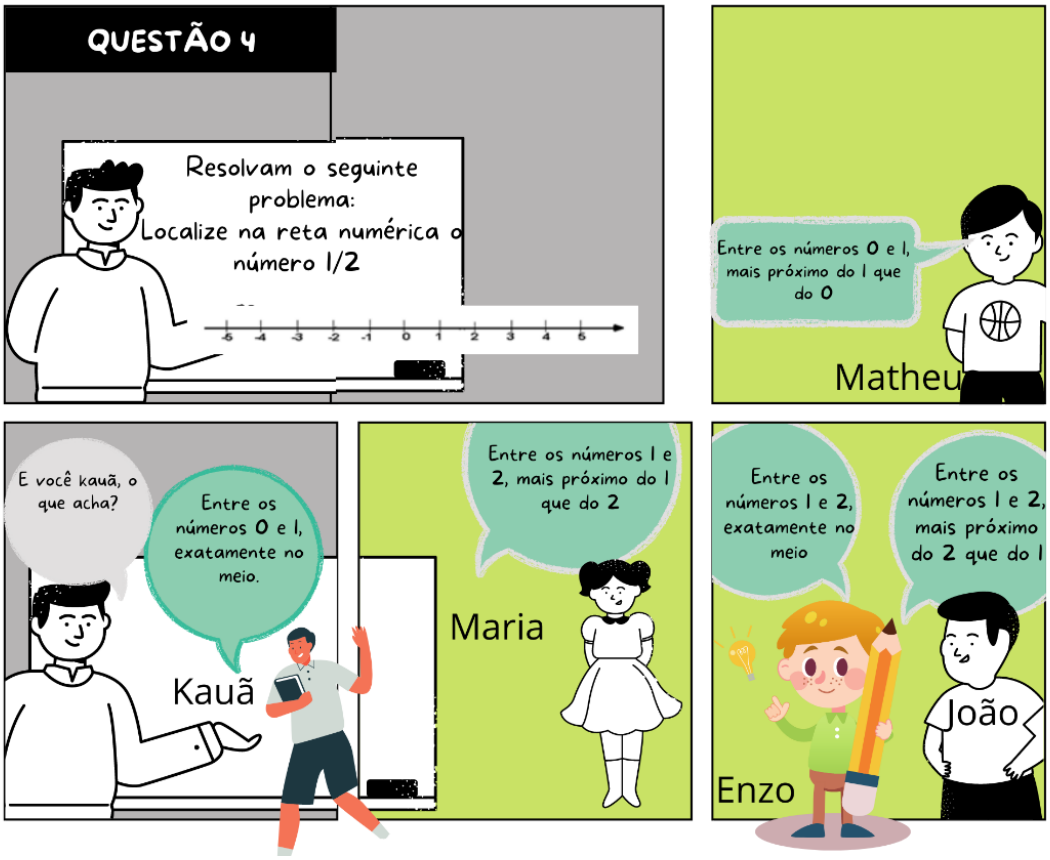
A resolução da quarta questão está contemplada na BNCC entre as habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental. O número expresso em forma de fração, correspondente a uma metade, pode ser considerado um objeto de conhecimento básico já trabalhado desde o segundo ano e ampliado nos anos seguintes, ainda de acordo com a BNCC. Nas respostas observadas, 8 (oito) alunos localizaram o número entre o 1 e 2 e, 2 (dois) dos participantes não souberam responder. Assim, é possível afirmar que a maioria dos alunos, 10 (dez) deles, que não relaciona o número ½ com uma metade da unidade na reta real. Apenas 5 (cinco) deles responderam que o número ½ está localizado entre o 0 e o 1, exatamente no meio. O significado que a maioria atribuiu à representação ½ foi de 1 inteiro e uma metade, o que está a uma distância significativa do valor institucionalizado pela matemática, referenciado no contexto escolar.

Os dados anunciam que nas duas questões as respostas permitem analisar a representação fracionária e a representação decimal em relação à representação geométrica, o que ratifica uma limitação na compreensão do ponto, na reta numérica, como sendo a distância do número racional ao zero.

Observando as respostas dos estudantes nas questões envolvendo a localização de números na reta real, temos que o significado que se esperava atingir não foi contemplado no Ensino Fundamental, visto que a maioria das respostas demonstra uma fragilidade em relação ao significado de referência apresentados nos documentos curriculares oficiais, em que os significados pessoais, não raramente, estão relacionados a características e regras dos números inteiros.

Vale destacar que a elaboração da questão não possibilitou uma maior expressão do significado pessoal por ser muito direta, dentro de um modelo objetivo no qual o aluno participante deveria localizar os números apresentados. Esta condição foi um obstáculo desafiador para a análise dos significados e nos instigou a pensar em formas diferenciadas de perguntar, compreendendo que a forma de interação com o objeto de conhecimento deve possibilitar respostas com maior liberdade de expressão e construção de significados.

Neste sentido, podemos observar a mesma questão com uma possível nova configuração que possibilitaria uma construção mais ampla de argumentação na elaboração da resposta e expressões mais significativas dos significados pessoais.



Fonte: Elaborado pela autora e colaborador.

a) Diante da situação acima, apenas um(a) aluno(a) acertou a pergunta do professor, quem foi ele(a)? Justifique a sua resposta.

b) Dentre os alunos que erraram, escolha um e explique por qual motivo você acredita que a resposta dele está incorreta.

Análise das questões 2 e 3:

Questões 2

Observe a etiqueta e analise os números registrados. Qual a unidade de massa utilizada?

( ) Grama
( ) Quilograma

( ) Miligrama
( ) Preço
( ) Outro.

Questão 3

Em relação ao número que representa o "peso" registrado na etiqueta da questão anterior, podemos afirmar que:

( ) É maior que meio quilo
( ) É menor que meio quilo
( ) É maior que um quilo
( ) Vale 1 quilo e 60 gramas
( ) Outro.

Fonte: Elaborado pela autora.

As questões 02 e 03 associam números racionais e medidas. O primeiro questionamento corresponde à noção de unidade e o segundo à noção de valor do número expresso em relação à unidade de medida, no caso da referida questão, o quilograma. Como saber institucionalizado temos a medida de massa e uma unidade institucionalizada pelo Sistema Internacional de Unidades (SI) que é o grama. Porém, no contexto social, a maioria das medidas realizadas tem o quilograma como unidade de medida e esta, é associada ao "peso" como sinônimo de massa. Assim, a representação escrita destacada corresponde ao número de unidades fracionárias do quilograma associado ao "peso" do objeto.

Na questão 02, 8 (oito) alunos identificaram o quilograma como unidade; 4 (quatro) alunos registraram que a unidade é o grama, o que pode ser entendido pela associação da unidade de medida de massa do Sistema Internacional de Medidas (SI) ou, ainda, pode ser interpretada como uma relação construída entre quilograma e grama, visto que não existe o registro expresso do grama na etiqueta apresentada. Não é possível afirmar que a leitura do grama seja como unidade de medida ou mesmo como parte da unidade apresentada, o quilograma.

Dentre as respostas que não atingiram o significado institucional, 4 (quatro) estudantes responderam que a unidade de medida utilizada foi o grama. É importante observar que nem a palavra grama nem sua representação

(g) estão expressas na imagem, de modo que, podemos inferir que estes estudantes compreendem a relação entre grama e quilograma, sendo o grama uma parte do quilograma. Portanto, o erro parece decorrer do fato de esses estudantes possuírem uma maior facilidade em perceber o inteiro do que o fracionário, visto que, ao pensar em grama, temos o valor 160.

Apenas 2 (dois) alunos associaram unidade de massa com o preço expresso na etiqueta. Podemos interpretar estas últimas respostas como falta de conhecimento do que seja medida de massa, problema na leitura e interpretação da questão ou ainda, que a referência ao preço possa ser atribuída ao contexto de um supermercado, pois, geralmente, é o preço que é lido por eles.

Na Física, a expressão "peso" é a força gravitacional que atrai o corpo para baixo, e massa está associada à inércia. Utilizamos a expressão "peso" para facilitar a compreensão dos alunos visto que, no dia a dia, as pessoas tratam massa e peso como sendo a mesma coisa, priorizando o uso deste último.

Na questão em análise, apesar de a maioria dos alunos identificar a unidade de massa utilizada numa balança de supermercado, muitos deles ainda não relacionam o "peso" do produto associado a uma unidade de medida estabelecida. Observamos, com surpresa, a distância entre os significados pessoais e o significado matemático de referência, o que ratifica que nem sempre o aluno consegue estabelecer a conexão entre as vivências e a construção do saber institucionalizado.

A questão 03, também associada à leitura da etiqueta, requer que o aluno interprete o registro do "peso" do produto expresso pelo número 0,160 kg. A pesagem de produtos em supermercado é uma atividade comum no cotidiano das pessoas, por esta razão a expectativa era que os alunos apresentariam uma resposta mais próxima do significado de referência, associando a expressão escrita na etiqueta como representação de parte da unidade. Na questão, tendo que a grandeza tomada como padrão não cabia um número exato de vezes no objeto medido, a unidade e o objeto medido foram redivididos em partes menores, em subunidades. As opções oferecidas comparam o registro com

meio quilo ou um quilograma. 12 (doze) alunos, uma maioria significativa da amostra, compreendem o registro numérico como sendo um valor menor que meio quilo, não apresentando dificuldade. Porém, os outros 3 (três) alunos participantes responderam que 0,160 kg vale mais que meio quilo, uma resposta que não corresponde ao significado avaliado para um aluno concluinte do Ensino Fundamental.

Análise da questão 05:

Questão 05 O décimo terceiro salário, direito garantido pela CF/88 (art. 7º VIII), consiste no pagamento ao empregado de 1/12 da remuneração devida no mês de dezembro, por mês de serviço prestado ou fração superior a 15 dias. Com base nas informações, calcule o décimo terceiro de uma pessoa que está trabalhando há cinco meses em uma empresa com salário mensal de R$ 954,00. (Além da resposta, você deve tentar explicar o raciocínio utilizado para chegar ao resultado).

Fonte: Elaborado pela autora a partir do material do GESTAR. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/gestar/tpmatematica/mat_tp6.pdf. Acesso em: 20.08.2020.

O objetivo da quinta questão foi observar como os alunos resolvem problemas envolvendo situações cotidianas, utilizando frações. Era esperado que o aluno resolvesse a situação proposta com números racionais, envolvendo diferentes significados das operações, argumentassem, justificassem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliassem a plausibilidade dos resultados encontrados. Por ser uma questão aberta, o problema possibilitava ao aluno elaborar sua resposta e argumentar, expressando o significado pessoal construído. A prática de resolução desta natureza requer habilidades no que se refere à leitura e escrita de números racionais por meio da identificação e compreensão de características deste campo numérico.

Do total de 15 (quinze) alunos, 8 (oito) responderam e descreveram o processo realizado para chegar ao resultado, demonstrando assim o significado atingido, como ilustra uma das respostas apresentadas:

> *Peguei o valor do salário mensal (no caso 954), dividir por 12 em que deu 79,5. Com este resultado, multipliquei por cinco, que foi o tempo de trabalho e cheguei a conclusão R$397,5 (A 08).*
>
> *397,5. Peguei o valor que ela recebe por mês, dividir por 12 que é a quantidade de meses e multipliquei por 5 que são os meses que ela trabalhou (A 12).*

Dois alunos apresentaram como resultado o valor de R$ 2.385 para o décimo terceiro e não argumentaram a sua resposta. Um outro aluno registrou que o décimo terceiro equivale ao valor de 4.770 e, também, não apresenta explicação para esse resultado. A falta de argumentação não nos permitiu identificar o raciocínio utilizado durante a resolução do problema nem tampouco perceber os significados que os dois últimos participantes descritos atribuíram a situação desafiadora. Importante registrar que 6 (seis) alunos não responderam à questão.

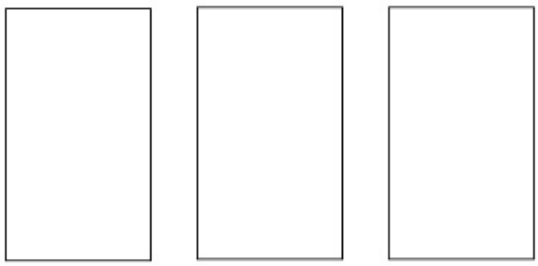
Porém, vale registrar que, boa parte dos alunos participantes não demonstrou um resultado que pode ser interpretado como significado atingido, pois não construíram argumentos que justificassem a resposta apresentada.

Silva (2017) destaca que as pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de frações têm apontado para as atividades propostas mais voltadas para a memorização de fórmulas e de procedimentos, como também uma ênfase na obtenção da resposta correta, o que não implica, necessariamente, em compreensão do conteúdo estudado, Silva (2017), como já foi dito anteriormente, denuncia a existência de uma distância entre as pesquisas observadas por ele e a construção do conhecimento na sala de aula, o que ratifica nossa observação de que o fazer pedagógico nem sempre tem resultado na aprendizagem.

Análise da questão 06:

Questão 6

Uma professora deu três folhas de papel para ser dividido igualmente em um grupo de cinco alunos. Qual o número que representa a quantidade de papel que cada aluno recebeu?



( ) 1/2
( ) 1/3
( ) 2/3
( ) 3/2
( ) 3/5
( ) 5/2
( ) 5/3
( ) 5/4
( ) Não sei responder
( ) Não é possível dividir.
( ) Outro: _____

Fonte: Elaborado pela autora a partir do material do GESTAR. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/gestar/tpmatematica/mat_tp6.pdf. Acesso em: 20.08.2020.

A questão apresenta a ideia de quociente, de forma bem simples e prática, intuitiva. A proposta é dividir 3 folhas de papel para 5 pessoas. O resultado da divisão seria expresso por um número fracionário atribuído a cada parte que resulta quando dividimos 3 folhas para 5 pessoas.

As respostas apresentadas nos intriga pela variedade de resultados. De um total de 15 (quinze) alunos, 5 (cinco) não admitem essa divisão como possível. Os estudantes que responderam dessa forma, possivelmente, compreendem que a divisão só seja possível quando o divisor é menor que o dividendo. 2 (dois) alunos responderam que 2/3 seria o quociente da divisão. Outros dois, responderam que o resultado é 1/3, 2 dos participantes, definiram como resposta o número racional 3/5. Mais dois alunos, ainda, responderam que a divisão resultaria em 5/4. Um aluno respondeu que cada um receberia ½ de uma folha e um outro, apresenta como resultado o número fracionário 5/3.

Dentro do subconstruto quociente, a relação parte-todo é trabalhada desde as séries iniciais. Esta atividade, provavelmente, tem um significado institucional pretendido, pois é muito comum os professores dos anos iniciais utilizarem-se de cortes de papel em diferentes situações no trabalho com frações. É muito possível acreditar que, no contexto de sala de aula, a divisão seria realizada ou, ao menos, muitas hipóteses seriam levantadas e argumentadas nos grupos. Mas, diante do que observamos nestes resultados, podemos confirmar a premissa de que existe uma distância entre o significado que os alunos atribuem ao conjunto dos números racionais como quociente (parte-todo) e o significado de referência da matemática. Uma maioria significativa de alunos não conseguiu associar o número 3/5 como o quociente da divisão.

Observa-se nessa questão um distanciamento do conceito de fração com o de divisão. É provável que, se a questão propusesse alguma escrita na forma 3÷5, obtivéssemos um número maior de acertos. No entanto, a escrita fracionária parece não se conectar com o sentido da operação proposta, a divisão. Além disso, há um fator a ser observado nessa questão: a imagem apresentada não colabora para uma materialização da questão, no sentido que imaginar a divisão das três folhas para os cinco alunos não é uma tarefa fácil. Isso decorre do fato de os números 3 e 5 serem primos entre si e, por consequência, o mínimo múltiplo comum entre eles se dá por $3 \cdot 5=15$. A partir disso, podemos concluir que, o processo mais curto para obter pedaços iguais de papel na divisão proposta seria dividindo cada folha em cinco partes e entregando três dessas partes para cada pessoa.

É claro que existem outras maneiras de realizar tal divisão, como por exemplo: dividindo cada folha em duas partes, obtendo-se desta divisão seis pedaços; entregando uma dessas partes para cada um dos cinco alunos; dividindo a parte restante em cinco partes e refazendo a partilha. Esta forma de divisão, no entanto, não permite a visualização imediata da fração que a representa, 3⁄5 como a divisão anterior o faz. No entanto, o processo de resolução anterior, exige do estudante uma análise matemática mais profunda,

a mobilização de diversos conceitos que muitas vezes são estudados de maneira desconexa na escola. Portanto, o recurso de imagem não favorece a resolução do problema, restando a relação fração/divisão que, como os dados apresentados nos mostram, parece não fazer parte dos significados pessoais.

Análise da questão 07:

Questão 07 Numa viagem de 72 km, já foram percorridos 3/4. Quantos km já foram percorridos? (Além da resposta, você deve tentar explicar o raciocínio utilizado para chegar ao resultado).

Fonte: Adaptação da autora a partir de problemas sugeridos nos livros didáticos.

A sétima questão do questionário, desafia o aluno a calcular uma fração de um número natural. Além de realizar o cálculo a questão solicita que explique o caminho. O objeto matemático institucionalizado apresentado nessa questão é o de cálculo com a ideia de operador multiplicativo, ou seja, o resultado é dado por: Km percorridos=72·3÷4. Ao solicitar que o participante explique o caminho que realizou para encontrar o resultado, a questão possibilita a emergência de novos objetos matemáticos pessoais.

Do total de 15 (quinze) alunos, 8 (oito) demonstraram compreensão da questão. Entre estes, 6 (seis) fizeram primeiro a divisão pelo denominador da fração e, posteriormente, multiplicaram o resultado pelo numerador, como evidenciado nas respostas a seguir:

> *Já foram percorridos 54 km. Dividi 72 por 4 que deu 18, mas eu queria saber o que já havia percorrido que foi o 3, então mutipliquei 18 por 3 que deu 54 (A08).*
>
> *Percorreu 54 km e falta 18km. Pequei 72 e dividir por 4 =18 1/4 de 72. Depois peguei 18×3=54 valor percorrido e o restante que é 18 que falta percorrer (A13).*

> *54 km já foram percorrido. Pois dividir a rota de 72 km por 4 que deu 18 km, como já tinha percorrido mais que a metade 3/4, 18 × 3=(54 km)(A15).*

Ao justificar, um deles argumentou que, para encontrar a resposta, recorreu ao processo de "regra de três[1]". *"54 Km. Usei o método da regra de três (A10)"*.

Outro participante dividiu, inicialmente, o numerador pelo denominador e, em seguida, multiplicou pelo número que representa a unidade. Porém, a resposta do estudante apresentou um "erro" ao multiplicar por 75 e não por 72, que corresponde ao valor total de Km a ser percorrido.

Por falta de argumentação por parte dos resolvedores, não conseguimos compreender as respostas de 3 (três) alunos que apresentaram como resposta final os números 34, 38 e 80. A ausência de argumentos se apresentou como uma dificuldade para a análise das construções destes estudantes e, consequentemente, da compreensão de cada um. Por fim, 2 (dois) alunos escolheram a opção "Não sei" e outros 2 (dois) não responderam.

A habilidade de resolver problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural está expressa na BNCC, ou seja, faz parte do significado institucional referencial. O quantitativo de alunos que apresentaram uma resposta sem sentido aparente, que afirmam não saber e ainda que não responderam foi alto, o que nos permite inferir que o conceito de número racional, como operador multiplicativo, não foi construído no Ensino Fundamental, de forma efetiva. Ao observar atentamente, entendemos que a ausência de argumentos para respostas, ou de argumentos que não estão relacionados com o conceito mobilizado pelos estudantes (como o de regra de três), bem como a desistência de apresentar respostas demonstram que estes alunos não dominam o objeto do conhecimento, não estabelecendo relações diante de um problema.

---

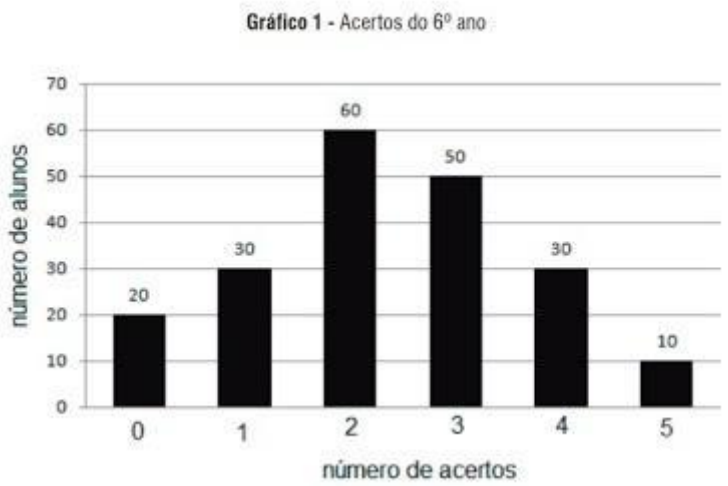
[1] Regra de três é conceituada na literatura do ensino fundamental como um recurso técnico utilizado para encontrar um quarto valor, construindo-se uma proporção com três valores já apresentados e aplicando o teorema fundamental da proporcionalidade: "o produto dos extremos é igual ao produto dos meios".

Remetemos a Rodrigues (2005, p. 208) quando em seu trabalho de pesquisa, observa "as atividades desenvolvidas na escolarização inicial podem não estar sendo suficientemente abrangentes para que se construa esse conceito em todos os seus aspectos".

Análise da questão 08:

Questão 08

(OBMEP 2009) Os alunos do sexto ano da Escola Municipal de Quixajuba fizeram uma prova com 5 questões. O gráfico mostra quantos alunos acertaram o mesmo número de questões; por exemplo, 30 alunos acertaram exatamente 4 questões.



Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

( ) Apenas 10% do total de alunos acertaram todas as questões.
( ) A maioria dos alunos acertou mais de 2 questões.
( ) Menos de 200 alunos fizeram a prova.
( ) 40 alunos acertaram pelo menos 4 questões.
( ) Exatamente 20% do total de alunos não resolveram nenhuma questão.

Fonte: OBMEP, 2009.

A questão configura-se um exercício de leitura e interpretação dos números racionais, envolvendo aspectos importantes na construção do conhecimento como a leitura do texto, leitura de gráfico, cálculo simples e compreensão de porcentagem. Vale destacar que as expressões sugeridas para respostas trabalham com ideias de partes de um todo, quantidades inclusas ou

exclusas por expressões como "pelo menos", "mais de" e "a maioria", recursos importantes para compreensão e construção do conhecimento.

Entre as respostas apresentadas, 9 (nove) delas configuram-se como uma limitação na interpretação. Ao ler o termo "mais de 2 questões", alguns alunos interpretaram o número 2 como parte inclusa. Apenas 3 (três) alunos apresentaram o resultado esperado, ou seja, o significado atingido, ao demonstrar compreensão da expressão "pelo menos 4", incluindo o 4 e o número maior que 4 que aparece na questão (05). 2 (dois) interpretaram o número 20, correspondente ao número de alunos que não acertaram nenhuma questão da referida prova, como sendo 20% e um outro aluno faz a leitura do número 10 como sendo 10%, sem considerar o total de alunos quantificados no gráfico. Os demais alunos demonstraram, pelas respostas apresentadas, não terem domínio efetivo do conceito de porcentagem.

Severo (2009) destacou dificuldades observadas em relação aos registros de representação dos racionais e bloqueios diante da necessidade de mudança de registro ou a mobilização simultânea de dois registros. A autora alerta para a necessidade de as escolas enfrentarem as dificuldades relacionadas ao ensino dos números racionais como condição para uma atuação mais efetiva em situações do cotidiano.

Análise da questão 09:

Questão 09
Numa sala de reuniões, de 4 m de largura por 4 m de comprimento estão 12 pessoas. Em outra, de 6 m de largura por 4 m de comprimento estão 15 pessoas. As pessoas espalharam-se nas salas, ocupando o espaço disponível. Em que sala as pessoas estão mais concentradas? Explique como você pensou para responder a essa questão. Você pode redigir sua resposta, representá-la por meio de um diagrama ou de alguns cálculos.

Fonte: Elaborado pela autora a partir do material do GESTAR. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/gestar/tpmatematica/mat_tp6.pdf. Acesso em: 20.08.2020.

Ao propor uma questão para analisar a medida de duas salas de tamanhos diferentes para identificar a capacidade de cada sala e compará-las,

espera-se que o aluno utilize o conhecimento de razão e argumente sua resposta através de cálculos matemáticos. Esta questão tem um toque de desafio e exige do aluno a construção de argumentos matemáticos para justificar sua resposta.

O processo de resolução da questão em pauta inicia-se pelo cálculo de área das duas salas descritas no problema. Assim, tomando área=largura·comprimento, tem-se 16m² na primeira sala e 24m² na segunda. Por sua vez, as razões a serem analisadas são dadas por:

$$\frac{quantidade\ de\ pessoas}{área\ da\ sala}$$

Tem-se, portanto, as seguintes razões:

$$ocupação\ da\ sala\ 1\ = \frac{12}{16}\ ;\ \ ocupação\ da\ sala\ 2\ = \frac{15}{24}.$$

A análise das razões em pauta requer ainda a mobilização do conceito de "frações equivalentes", uma vez que, por possuírem áreas diferentes, as frações construídas possuem denominadores diferentes. Uma das maneiras de encontrar frações equivalentes com denominadores iguais mais trabalhados nas escolas é encontrando o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores. Assim temos:

$$ocupação\ da\ sala\ 1 = \frac{36}{48}; ocupação\ da\ sala\ 2 = \frac{30}{48}$$

Embora ainda possam ser simplificadas, as frações acima permitem perceber que a sala 1 possui um maior número de pessoas por metro quadrado que a sala 2.

A maioria das respostas foi bem direta, com pouca ou nenhuma argumentação relacionada aos cálculos. Quatro alunos responderam que as pessoas ficam mais concentradas na primeira sala. Só um deles apresentou o cálculo das duas áreas e justificou sua resposta com o argumento de que a sala tem menor área, o que é insuficiente, visto que não estabelece a relação

comparativa entre as pessoas e a área. Em nenhuma das respostas observa-se o registro das razões estabelecendo relação entre as grandezas número de pessoas e área da sala, como forma de argumentar sobre a concentração nas salas apresentadas. Quatro alunos defenderam que a segunda sala concentrará mais pessoas. Porém, se contradizem ao afirmarem que a área é mais ampla, mas o espaço é menor ou mais estreito. Um dos alunos afirmou que as duas têm o mesmo nível de concentração de pessoas, usando a justificativa que os cálculos feitos (sem o registro) deram o mesmo resultado: "*as duas salas, pois fazendo a divisão as duas mostra o mesmo resultado (A09)*". E o resultado 27, que foi registrado em um dos questionários devolvidos, não tem justificativa e não conseguimos compreender o raciocínio utilizado pelo estudante. Cinco participantes não responderam esta questão.

Vale lembrar que esse subconstruto faz parte das orientações curriculares oficiais e pode ser encontrado nos livros didáticos do Ensino Fundamental, fazendo parte do significado institucional.

Análise das questões 10 e 11:

Questão 10

10. Especialistas recomendam uma mistura de água sanitária e água para higienização de ambientes contra o corona vírus. A dose recomendada de água sanitária é uma medida para 19 medidas de água. O número fracionário que melhor expressa a quantidade de água sanitária nesta mistura é:

a) 1/20 b) 1/19 c) 19/20 d) 10/100 e) Outros

11. Quais dos números abaixo também podem representar a quantidade de água sanitária recomendada na mistura?

a) 10 % b) 0,19 c) 0,20 d) 5% e) 0,05 f) 1% g) 19% h) Outro.

Fonte: Elaborado pela autora.

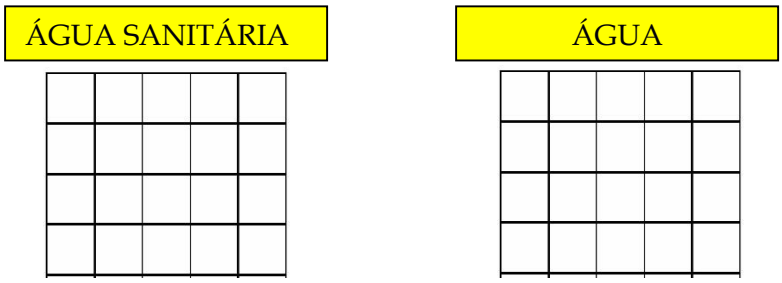
As questões 10 e 11 envolvem a ideia de razão, tendo como desafio relacionar números racionais com a quantidade de água e a quantidade de água sanitária em uma mistura eficaz na limpeza de objetos e superfícies contra o corona vírus, de acordo com a indicação de especialistas.

No primeiro momento, para indicar a quantidade de água sanitária na mistura, as opções oferecidas foram expressas através de números fracionários e, no segundo momento, a ideia é associar o número fracionário com a representação decimal e percentual para a quantidade de água sanitária na solução. As questões 10 e 11 representam possibilidades de uma atuação matemática que requer práticas com o uso de objetos institucionalizados (leitura de escritas formais: porcentagem, decimais e fração tipo: a/b) e de objetos pessoais (formas de comunicar, validar e generalizar suas hipóteses).

As respostas, mais uma vez, confirmam a premissa inicial: existe uma distância entre o significado apresentado no estudo da matemática escolar e o significado construído pelo aluno. A maioria dos alunos (9) afirma que a fração que representa a quantidade de água sanitária na mistura é 1/19. 2 (dois) alunos ainda escolheram como opção de resposta 10/100, um número aparentemente sem conexão com a situação descrita. Ou seja, esses alunos não conseguiram associar o texto em linguagem natural da questão com o número fracionário correspondente. 4 (quatro) alunos escolheram a opção 19/20 que representa a fração de 19 partes de água para 20 partes da mistura. Talvez, se a questão proposta fosse ilustrada como na apresentação a seguir, os significados pessoais tivessem sidos expressados com mais recursos.

Especialistas recomendam uma mistura de água sanitária e água para higienização de ambientes contra o coronavírus. A dose recomendada de água sanitária é uma medida para 19 medidas de água.

Na figura, cada quadradinho representa uma medida. Pinte a quantidade de medidas referente à água sanitária e à água para a mistura para higienização, com as medidas que indicam o texto.



a) Observando as imagens pintadas, qual fração corresponde quantidade de água sanitária nesta mistura?

b) Observando as imagens pintadas, qual fração corresponde quantidade de água nesta mistura?

c) Sem o uso de desenhos represente qual fração corresponde quantidade de água sanitária na seguinte mistura: "A dose recomendada de água sanitária é três medida para 57 medidas de água."

Uma forma de apresentar a questão com ilustrações poderia oportunizar a construção da relação entre a linguagem natural e a escrita matemática, favorecendo melhor a expressão de significados.

O objetivo da questão 11 foi verificar se os alunos conseguem converter a língua natural em registro numérico e expressar uma fração na forma decimal ou percentual.

As respostas apresentaram um resultado intrigante. Os alunos, na sua maioria, construíram as respostas com base na visualização da escrita numérica, ou seja, escolheram uma opção com o número 19 ou o número 1. Apenas cinco alunos afirmaram que a quantidade de água sanitária na mistura pode ser representada por 19%, outros 4 alunos optam por expressar numericamente a relação entre água sanitária e a mistura com o número 0,19 e ainda 2 alunos marcaram a opção 1% como representação da relação 1 para 20. O restante das respostas apresentadas (um total de 4 alunos) expressou a relação com número percentual 10%.

Nenhuma das respostas aproximou-se da razão um para vinte. Os alunos participantes demonstraram não compreender o conceito, nem a possibilidade de representá-lo de diferentes formas.

Análise da questão 12:

Questão 12 O número 18/3 é: ( ) Natural ( ) Inteiro ( ) Racional ( ) Irracional ( ) Outro:

Fonte: PANIZZA, 2006.

O objetivo desta última questão foi identificar a relação de inclusão entre os conjuntos, reconhecendo que: um número natural também é inteiro; todo número inteiro também é racional; todo número fracionário também é racional. Vale registrar que a questão permitia a escolha de mais de uma opção, possibilitando assim que o número fosse classificado como natural, inteiro e racional. Porém, isto não ficou descrito na questão, de forma explícita, o que pode justificar a escolha de uma única opção de resposta por quase todos os alunos.

A questão está relacionada com a classificação do número expresso na forma fracionária 18/3. Dos 15 alunos participantes, 10 (dez) deles classificaram o número apresentado apenas como racional, 4 (quatro) alunos afirmaram que o número faz parte do conjunto dos números naturais. Entre as respostas observadas, apenas uma expressa a classificação do número como natural, inteiro e racional.

A escrita 18/3 foi interpretada, pela maioria dos alunos participantes, como racional por ser uma fração (a/b), situação que pode ser justificada pela apresentação do conceito de número racional: todo número que pode ser escrito na forma de fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.

Esta questão foi apresentada em um artigo intitulado "*Reflexões gerais sobre o ensino da Matemática*", escrito por Panizza (2006), como recurso para analisar a associação do objeto de conhecimento com a representação do mesmo, na construção da aprendizagem Matemática, processo apontado pela identificação do número 18/3 apenas como número racional pela forma de representação fração. A autora destaca a necessidade de "reconhecer nos alunos diversas maneiras de conhecer" (PANIZZA, 2006, p. 24) (implícitas, conscientes, explícitas) relacionadas com um saber matemático, e considerá-las constitutivas do sentido dos conhecimentos.

Assim, podemos relacionar a ideia de "identificar aspectos específicos da aprendizagem" ao considerar "as diversas representações que os alunos utilizam como maneira de conhecer, constitutiva dos conhecimentos construídos" (PANIZZA, 2006, p. 24) como um alerta para observar e valorizar o significado pessoal e, ainda, reconhecê-lo como ponto de partida para a sistematização do significado institucional do objeto matemático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho teve como foco principal a aprendizagem dos alunos em relação aos racionais e, a teoria do EOS, além de exemplos de questões aplicadas em outras pesquisas, direcionaram o estudo e outras leituras. O objetivo foi adquirir uma melhor compreensão das aproximações e distâncias entre o conhecimento do aluno e o saber institucionalizado na construção do conjunto dos números racionais, como objeto de conhecimento, que pudesse possibilitar atuações mais efetivas na atuação de professores do Ensino Médio.

O EOS, ao destacar a importância de ampliar a relação entre signo, objeto e contexto, alerta para o fato de que a construção do conhecimento envolve a linguagem verbal, gráfica e outras. Assim, na análise de cada situação apresentada, foi feita uma releitura com outro olhar, considerando que tal relação citada não está determinada *a priori* e que é construída, reconstruída por cada estudante de forma individual, pessoal. Desnudar-se da ideia de que o aluno concluinte do Ensino Fundamental já tem o domínio dos números racionais e deveria, portanto, apresentar uma resposta esperada dentro de um padrão institucionalizado pela instituição escolar foi um dos obstáculos enfrentados na minha tarefa de pesquisadora. Em cada questão o aluno apresentava uma resposta a partir do que já tinha sido vivenciado, mas também era uma proposta de construir/reconstruir uma nova resposta, um novo significado, o que instigaria uma nova leitura.

Neste processo, na qualidade de pesquisadora, percebi que o questionário de pesquisa, com a maioria de questões objetivas e realizado de forma *online*, não possibilitou a ampliação de respostas o que limitou a minha leitura.

O ponto de partida para o aprendizado da Matemática, a partir do aporte teórico exposto, deve ser a resolução de problemas, como meio de evitar formas de ensino que apenas informam e reproduzem o conhecimento, apresentando como caminho metodológico a mediação de atividades que

oportunizem ao aluno a elaboração de hipóteses e a organização de argumentação que valide o pensamento.

Ao resolver uma determinada situação, o estudante deve realizar os procedimentos e as proposições relacionados entre si e justificar os conceitos envolvidos por meio de argumentos matemáticos. Assim, no processo de aprender, a linguagem simbólica da Matemática tem um papel de destaque.

A concepção de aprendizagem defendida pelo EOS, como a construção do conhecimento através da ação, e todas as nuances nela envolvidas contribui para uma leitura dos dados registrados na pesquisa que vai além de encontrar respostas que justifiquem tal situação. A confirmação de que existe uma distância entre os significados que os alunos construíram para os números racionais ao longo do Ensino Fundamental e o significado institucional de referência no contexto escolar, instiga-nos a pensar no trabalho com a Matemática de forma muito mais profunda e reflexiva.

Observamos tal distância nos significados dos alunos ao expressar suas aprendizagens em relação aos números racionais (ponto racional, fração, decimal e percentual), ao localizar um número racional na reta numérica, ao conceber fração apenas como dois números distintos, ao relacionar porcentagem com representações diferentes da simbólico-numérica percentual, bem como nos processos de conversão de uma representação para outra e na atribuição de significados aos símbolos e procedimentos formais apresentados no ambiente escolar.

Vale salientar que muitos estudantes demonstraram uma falta de envolvimento na resolução das questões, negando-se a responder. Esta situação pode ser analisada como significado global, mesmo sem definir a causa específica de tal recusa. A ausência de resposta pode sugerir falta de domínio do conteúdo, medo de errar, resistência em apresentar uma elaboração de resposta que se distancie da requerida pela instituição escolar ou, ainda, uma desistência da aprendizagem escolar ou, especificamente, da matemática escolar.

Atentamos ao fato de que muitos alunos não cumprem os aspectos

elencados em documentos oficiais para a concretização formal da aprendizagem dos números racionais. Fato este, evidencia a necessidade de reflexões em relação a uma aprendizagem que possibilite ao aluno sentir-se apto a utilizar o conhecimento construído para a solução de problemas e para sua aplicação em situações novas.

Nas questões cujas soluções requeriam o emprego de técnicas operatórias, provavelmente exercitadas no ambiente escolar, as respostas foram mais elaboradas. Os alunos descreveram todo seu percurso para chegar ao resultado encontrado. Os resultados evidenciaram que os alunos apresentaram mais argumentos na tentativa de resolver as questões com cálculos de fração de quantidade, descrevendo o caminho percorrido.

Tal observação aponta que o exercício de resolver problemas para atingir um objetivo exige um planejamento cuidadoso, para não mecanizar formas de resolução, que nem sempre desenvolvem o raciocínio ou habilitam o aluno a resolver outros problemas.

Neste sentido, concordamos com Valera (2003) ao destacar o prevalecimento de "questões convencionais" no trabalho com racionais, ou seja, questões com pouca ou nenhuma relação com a realidade e que, muitas vezes, não possibilitam a expressão do modo de pensar do aluno, alertando para uma adequada relação entre o fazer escolar, o significado institucional e a construção social do aluno, o significado pessoal.

Em questões aparentemente simples, como localizar o número $\frac{1}{2}$ na reta numérica, observamos uma distância significativa entre o significado institucional que requeria a compreensão de que o número corresponde à metade da unidade, representada na reta numérica por cada espaço entre dois números inteiros consecutivos. A análise dos "erros" oportuniza a reflexão sobre o aprendizado dos números racionais, pois muitos estudantes ainda tendem a associar a reta aos números inteiros (SEVERO, 2009).

As respostas registradas confirmam dificuldades no aprendizado dos racionais, ratificando que não basta oferecer atividades diversificadas que oportunizem a construção do conhecimento, é necessário ter conhecimentos

sobre os fatores envolvidos na aprendizagem de cada conceito matemático e, para isso, é necessário conhecer teorias sobre ensino e aprendizagem, que possam além de embasar novas metodologias, possibilitar uma intervenção comunicativa que desafie a produção e argumentação no processo de aprender.

Assim, entendemos que a real percepção da aprendizagem é o ponto de partida para o nosso olhar, pois é a partir das construções que os estudantes têm dos números racionais, que podemos propor situações problemas que possam ser desafiadoras para novas construções e para a sistematização do conhecimento institucionalizado do Conjunto Numérico dos Racionais.

A proposta do EOS, enquanto um aporte teórico que nasce de um pensar coletivo sobre o conhecimento e processo de ensinar e aprender Matemática, configura-se numa construção que orienta a busca de maneiras de fazer com que os estudantes se apropriem dos conceitos básicos de Matemática, que lhes permitirão entender as conexões entre a Matemática e os assuntos de sua vida cotidiana.

A proposta do EOS, enquanto um aporte teórico que nasce de um pensar coletivo sobre o conhecimento e processo de ensinar e aprender Matemática, configura-se numa construção que orienta a busca de maneiras de fazer com que os estudantes se apropriem dos conceitos básicos de Matemática, que lhes permitirão entender as conexões entre a Matemática e os assuntos de sua vida cotidiana. Neste sentido, o resultado deste estudo configurou-se como uma oportunidade para se questionar o que ocorre na prática pedagógica, em sala de aula, com relação ao ensino dos conceitos de números racionais.

Poderíamos compreender o resultado do estudo como uma oportunidade para se questionar o que ocorre na prática pedagógica, em sala de aula, com relação ao ensino dos conceitos de números racionais.

Pensar sobre os dados apresentados na pesquisa e a aprendizagem dos números racionais, analisando a articulação das facetas institucionais e pessoais do conhecimento matemático, desafia-nos a novas posturas diante da realidade encontrada. Uma ação consciente, a partir do conhecimento do aluno, poderá criar formas de possibilitar a construção e reconstrução do objeto

matemático em estudo, evitando perpetuar uma realidade que poderá persistir durante o Ensino Médio.

Assim, ao concluir esta dissertação, entendo que há uma série de dificuldades que não têm sido enfrentadas pelas escolas, talvez pela forma do professor apresentar o objeto do conhecimento ou pela pouca comunicação do aluno ao argumentar suas respostas às atividades propostas. Este estudo é uma forma de instigar discussões sobre o processo de ensinar e aprender e, na medida do possível, motivar os profissionais da área para que possamos rever os conteúdos básicos para a formação do aluno do Ensino Médio, que precisa desenvolver a competência de interpretar o mundo, contando com o conhecimento matemático como uma poderosa ferramenta para isso.

REFERÊNCIAS

ABREU, Mirna Denise Silva de. **Ensino de fração com o software GeoGebra**. 2018. 74 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. Dados Qualitativos. In: BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação - uma introdução às teorias e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília : MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais –** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; RODRIGUES, Wilson Roberto. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. REVEMAT - **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** v 2.4, p.68-93, 2007.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: nome da editora, 1975.

CERAGIOLI, Laíde. **Conhecimentos de alunos do programa de Educação de Jovens e Adultos (EJA) relativos aos números racionais na forma fracionária.** 2011. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

COSTA, Luciane Reichert. **O Uso de Estratégias Metacognitivas na Resolução de Problemas Matemáticos envolvendo Números Racionais por Alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental de uma Escola Pública de Sinop/MT**. 2018. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2018.

D'Ambrósio, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre a tradição e a modernidade.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMORE, Bruno; IORI, Maura; PINILLA, Martha Isabel Fandiño. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino aprendizagem da matemática. Cidade: Editora Livraria da Física, 2015.

D' AMORE, Bruno. GODINO, Juan. **Metaprácticas matemáticas y didácticas originadas en relaciones de dependencia institucional.** Documento interno, Universidad de Bolonia, 2007.

DÍAZ, Juan; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç; Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. Acta Scientiae - **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Canoas, v. 10, n.2, jul./dez., 2008. p. 07.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. Florianópolis: Editora da UFSC, 2009.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

ELIAS, Henrique Rizek. **Fundamentos Teórico-metodológicos para o Ensino do Corpo dos Números Racionais na Formação de Professores de Matemática.** 2017. 325f.Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Londrina, 2017.

FILHO, Josue Ferreira Dos Santos. **Investigando Como Professores dos Anos Iniciais julgam propostas de Ensino para de Pernambuco Centro de Educação Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica Curso de Mestrado o Trabalho com os Números Racionais.** 2015. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

GAVIRAGHI, ANALUCIA. **Número racional não negativo na forma fracionária: sentido atribuído por alunos do 6° ano do ensino fundamental.** 2013. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação) Fundação Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2013.

GERHARDT, Tatiana Engel. SOUZA, Aline Corrêa de. Aspectos teóricos e conceituais. In: **Métodos de pesquisa.** Tatiana Engel Gerhardt e Denise Tolfo Silveira (Org). Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. p. 11-30.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. - São Paulo: Atlas, 2002.

GIMENEZ, Joaquim; BAIRRAL, Marcelo. **Frações no currículo do ensino fundamental: conceituação, jogos e atividades lúdicas.** Seropédica, RJ: GEPEM/EDUR, v.2, 2005.

GODINO, Juan; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae** - Revista de Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, v. 10, n.2, jul./dez., 2008. p. 07-37.

GODINO, Juan; BATANERO, Carmen. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, 1994.

GODINO, Juan. Un el enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.** 10(2): 191-218, 2007.

GONCALVES, Maria Imaculada de Souza Marcenes. **Crenças e dificuldades de futuros professores de matemática no domínio dos números racionais.** 2013. 203 f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

GODOY, Arllda Schmidt. Introdução à Pesquisa Qualitativa e suas Possibilidades. **Revista de Administração de Empresas São Paulo**, v. 35, n. 2, p. 57-63 Mar./Abr. 1995.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Os Números Racionais em Três Momentos da História da Matemática Escolar Brasileira Boletim de Educação Matemática, **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, vol. 19, núm. 25, 2006.

KIEREN, Thomas E. The Rational Number Construct: its elements and mechanisms. In: KIEREN, Thomas E. **Recent Research on Number Learning**. (p. 125-149). Washington D. C: National Inst. of Education, 1980.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Maria de Andrade. **Fundamentos de Metodologia Científica.** 5ª edição. Editora S.A. São Paulo. 2003.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI.** Campinas- São Paulo: Papirus, 2000.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI.** Campinas- São Paulo: Papirus, 7ª edição 2006.

LUCENA, Alexandre Marcelino de. **A metacognição no Livro didático de Matemática: um olhar sobre os números racionais.** 2013. 145f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa Social, Teoria, Método e Criatividade.** Editora Vozes. 2002.

MONTEIRO, Alexandre Branco. **O estudo dos números racionais no Brasil e no México: um olhar na perspectiva da Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa.** 2017. 255 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2017.

OLIVEIRA, Antonio Sérgio dos Santos. **Uma engenharia didática para o ensino das operações com números racionais por meio de calculadora para o quinto ano do ensino.** 2015. 127 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituição de Ensino Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

PANIZZA, Mabel. Reflexões gerais sobre o ensino da matemática. In: PANIZZA, M. (Org.). **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais: análise e propostas.** Porto Alegre: Artmed, 2006, p. 19-33.

RODRIGUES, Wilson Roberto. **Números racionais: Um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.** PUC/ SP. 2005.

ROGERI, Norma Kerches de Oliveira. **Conhecimentos de professores dos anos iniciais para o ensino dos números racionais em sua representação decimal'**. 2015. 289 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

SILVA, Marcelo Cordeiro da. Reta Graduada: **Um registro de representações dos números racionais.** São Paulo, 2008. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11353/1/Marcelo%20Cordeiro%20da%20Silva.pdf. Acesso em: 13.08.2020.

SILVEIRA, Denise Tolfo. CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. A pesquisa científica. In: **Métodos de pesquisa.** Tatiana Engel Gerhardt e Denise Tolfo Silveira (Org). Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. p. 31-42.

SANTOS, John Kennedy Jeronimo. **A Compreensão do Professor sobre os Erros dos Alunos, em itens envolvendo expectativas de Aprendizagem dos Números Racionais, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** 2015. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

SANTOS, Rosivaldo Severino dos. **Rendimentos e Estratégias de Estudantes Concluintes do Ensino Fundamental na Resolução de Itens de Avaliação Externas.** 2016. 206 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Universidade Anhanguera de São Paulo Biblioteca Depositária: Anhanguera Pirituba, 2016.

SEVERO, Daniela Fouchard. **Números Racionais e Ensino Médio: uma busca de significados.** 2009. 65 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

SILVA, Fernanda Andrea Fernandes. **Significados e Representações dos Números Racionais Abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.** 2013. 154f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

SILVA, Ronald de Santana da. **Jogo Distância em Batalha: Investigação do Processo Contextualizado de Aprendizagem Matemática à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.** 2010. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural De Pernambuco, Recife, 2010.

SILVA, Viviane Pereira. **Formação dos conceitos relativos aos Números Racionais no 6º ano do Ensino Fundamental: Uma Proposta Experimental.** 2016. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de Uberaba, Uberaba, 2016.

SILVA, Paulo Henrique Freitas. **Ensino-Aprendizagem de Frações: um olhar para as pesquisas e para a sala de aula.** 2017 164 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraiba, Campina Grande, 2017.

SILVA, Fernanda Andrea Fernandes. **Graus de não Congruência Semântica nas Conversões entre os Registros Geométrico Bidimensional e Simbólico Fracionário dos Números Racionais.** 2018. 258 f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural De Pernambuco, Recife, 20018.

TEIXEIRA, Alessandra Carvalho; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. As prescrições curriculares e o ensino dos números racionais nos anos finais do

ensino fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, v.8, n.17, p.201-228, jul-dez. 2019.

TEIXEIRA, Alessandra Carvalho. **Os Números Racionais nos níveis Curriculares da Rede Estadual de Ensino de São Paulo.** 2018. 264 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências). Universidade Cruzeiro Do Sul, São Paulo, 2018.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **O nascimento da matemática do ginásio.** São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004.

VALENTE, W.R. (Org.). A disciplina Matemática: etapas históricas de um saber escolar no Brasil. In: OLIVEIRA, M. A. T. ; RANZI, S. M. **História das disciplinas escolares no Brasil: contribuições para o debate.** Bragança Paulista: EDUSF, 2003. p. 217-257.

VASCONCELOS, Isabel Cristina Peregrina. **A compreensão das Relações Numéricas na Aprendizagem de Frações: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica.** 2015. 143 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. **Psicologia pedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

XIMENES, Sérgio. **Minidicionário Ediouro da Língua Portuguesa.** 2ª ed. reform. São Paulo: Ediouro, 2000.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP/ MEC). **Escalas de Proficiência do SAEB**. Brasília, 2020.

ZANELLA, Marli Schmitt. **Um estudo teórico sobre as Estruturas Aditivas e Multiplicativas de Números Racionais na Representação Fracionária.** 2013. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual De Maringá, Maringá, 2014.

APÊNDICE A – Cópia do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido dos alunos.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

Campus de Jequié

Prezado(a) estudante,

Que bom contar com você!

Pedimos a sua atenção e seriedade nas respostas. É importante que você deixe registrado o seu raciocínio na resolução de cada questão. Desde já, agradecemos sua colaboração.

Lourdes Cleides Santana Sales - Mestranda
Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina. R. S. Gusmão - Orientadora

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO (TCLE)

Resolução nº 466, de 12 de dezembro de 2012, Conselho Nacional de Saúde. Título do Projeto: A aprendizagem de Números racionais - Ensino Médio PESQUISADORA RESPONSÁVEL: Lourdes Cleides de Santana Sales ORIENTADORA: Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão.

Prezado(a) Senhor(a): Eu sou Lourdes Cleides de Santana Sales, aluna do programa de Mestrado Acadêmico em Educação Científica e Formação de Professores – PPG-ECFP da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) estou realizando, com a orientação da Profª.Drª. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão, uma pesquisa intitulada: "A aprendizagem de Números racionais - Ensino Médio." O objetivo geral desse projeto é comparar os significados de números racionais, apresentados por alunos do 1º ano do Ensino Médio, com os significados de referência em Matemática, verificando as distâncias e as aproximações entre estes significados, tendo como base o Enfoque Onto-semiótico do Conhecimento e Instrução Matemática (EOS). O menor de idade pelo qual o(a) senhor(a) é responsável está sendo convidado(a) a participar desta pesquisa, de forma voluntária através de questionários, após autorizada sua participação desse Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Este estudo apresenta risco mínimo tais como: incômodo na realização do questionário. Destacamos o compromisso de uma postura ética no decorrer do trabalho, respeitando a individualidade de cada um e resguardando sua integridade. O participante não se sentir confortável para contribuir com o trabalho, poderá, livremente, deixar de responder as indagações propostas.

Informamos ainda não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. O participante será esclarecido (a) em todas as formas que desejar e estará livre para participar ou recusar-se, podendo retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A identidade não será revelada, após as análises dos dados seus nomes terão caráter fictício como forma de assegurar o anonimato dos participantes. Assim, o participante tem assegurado o direito a compensação ou indenização no caso de quaisquer danos eventualmente produzidos pela pesquisa. Mesmo não tendo benefícios diretos em participar, indiretamente cada um estará contribuindo para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico.

Quaisquer esclarecimentos podem ser obtidos com a pesquisadora Lourdes Cleides de Santana Sales, por meio do e-mail keuss@hotmail.com e do telefone (75) 9-8827-3745.
Com a Orientadora Profº Drª. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão, e-mail: professorataniagusmao@gmail.com. Desde já, agradeço sua atenção e colaboração com a pesquisa.

( ) Sim. Eu concordo.

( ) Não. Eu não concordo.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES

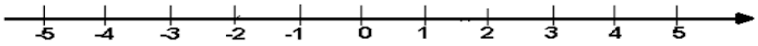
Qual o seu nome?

Qual a sua idade?

Com qual gênero você se identifica?

( ) Masculino
( ) Feminino
( ) Prefiro não dizer

Questão 01: Localize na reta numérica o número 0,3



Você deve descrever em sua resposta a localização aproximada do número, por exemplo: entre 1 e 2, exatamente no meio; ou entre 3 e 4, mais próximo do três que do quatro.

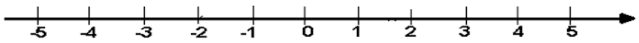
Questão 02: Observe a etiqueta e analise os números registrados. Qual a unidade de massa utilizada?

( ) Grama
( ) Quilograma
( ) Miligrama
( ) Preço
( ) Outro:

Questão 03: Em relação ao número que representa o "peso" registrado na etiqueta da questão anterior, podemos afirmar que:

( ) É maior que meio quilo
( ) É menor que meio quilo
( ) É maior que um quilo
( ) Vale 1 quilo e 60 gramas
( ) Outro:

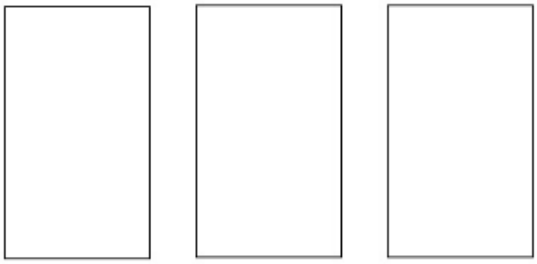
Questão 04: Localize na reta numérica o número 1/2 *



( ) Entre os números 0 e 1, exatamente no meio.
( ) Entre os números 0 e 1, mais próximo do 1 que do 0
( ) Entre os números 1 e 2, mais próximo do 1 que do 2
( ) Entre os números 1 e 2, exatamente no meio
( ) Entre os números 1 e 2, mais próximo do 2 que do 1
( ) Não sei responder
( ) Outro:

Questão 05: O décimo terceiro salário, direito garantido pela CF/88 (art. 7º VIII), consiste no pagamento ao empregado de 1/12 da remuneração devida no mês de dezembro, por mês de serviço prestado ou fração superior a 15 dias. Com base nas informações, calcule o décimo terceiro de uma pessoa que está trabalhando há cinco meses em uma empresa com salário mensal de R$ 954,00. (Além da resposta, você deve tentar explicar o raciocínio utilizado para chegar ao resultado).

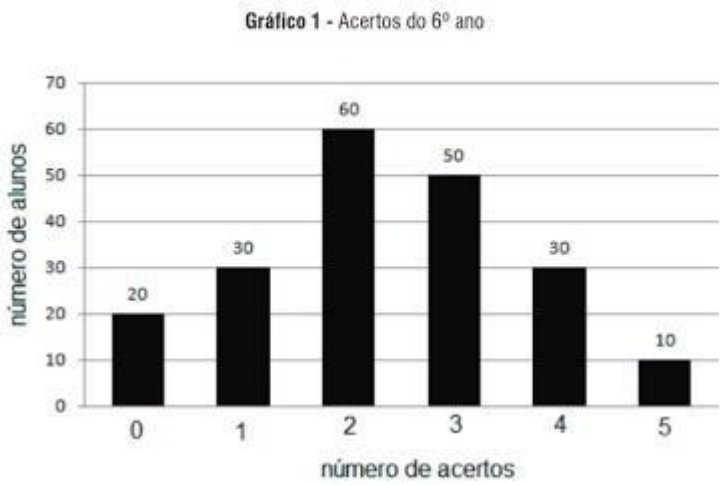
Questão 06: Uma professora deu três folhas de papel para ser dividido igualmente em um grupo de cinco alunos. Qual o número que representa a quantidade de papel que cada aluno recebeu?



( ) 1/2
( ) 1/3
( ) 2/3
( ) 3/2
( ) 3/5
( ) 5/2
( ) 5/3
( ) 5/4
( ) Não sei responder
( ) Não é possível dividir
( ) Outro:

Questão 07: Numa viagem de 72 km, já foram percorridos 3/4. Quantos km já foram percorridos? (Além da resposta, você deve tentar explicar o raciocínio utilizado para chegar ao resultado).

Questão 08: (OBMEP 2009) Os alunos do sexto ano da Escola Municipal de Quixajuba fizeram uma prova com 5 questões. O gráfico mostra quantos alunos acertaram o mesmo número de questões; por exemplo, 30 alunos acertaram exatamente 4 questões.



Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

( ) Apenas 10% do total de alunos acertaram todas as questões.

( ) A maioria dos alunos acertou mais de 2 questões.

( ) Menos de 200 alunos fizeram a prova.

( ) 40 alunos acertaram pelo menos 4 questões

( ) Exatamente 20% do total de alunos não resolveram nenhuma questão

Questão 09: Numa sala de reuniões, de 4 m de largura por 4 m de comprimento estão 12 pessoas. Em outra, de 6 m de largura por 4 m de comprimento estão 15 pessoas. As pessoas espalharam-se nas salas, ocupando o espaço disponível. Em que sala as pessoas estão mais concentradas? Explique como você pensou para responder a essa questão. Você pode redigir sua resposta, representá-la por meio de um diagrama ou de alguns cálculos.

Questão 10: Especialistas recomendam uma mistura de água sanitária e água

para higienização de ambientes contra o corona vírus. A dose recomendada de água sanitária é uma medida para 19 medidas de água. O número fracionário que melhor expressa a quantidade de água sanitária nesta mistura é:

a) 1/20 b) 1/19 c) 19/20 d) 10/100 e) Outros

Questão 11: Quais dos números abaixo também podem representar a quantidade de água sanitária recomendada na mistura?

b) 10 %
c) 0,19
d) 0,20
e) 5%
f) 0,05
g) 1%
h) 19%
i) Outro:

Questão 12: O número 18/3 é:

( ) Natural
( )Inteiro
( )Racional
( )Irracional
( )Outro:

DECLARAÇÃO DE AUTORIA

Eu, Lourdes Cleides Santana Sales declaro para os devidos fins que a presente dissertação é de minha autoria e que estou ciente:

- do conteúdo da Lei no 9.610[2], de 19 de fevereiro de 1998, sobre os Direitos Autorais;
- e que plágio consiste na reprodução integral ou parcial de obra alheia, apresentando-a como se fosse de própria autoria, ou ainda na inclusão em trabalho próprio de textos, imagens de terceiros, sem a devida indicação de autoria.

Declaro, ainda, estar ciente de que, se a qualquer tempo, mesmo após a defesa, for detectado qualquer trecho do texto em questão que possa ser considerado plágio, isso poderá implicar em processo administrativo, resultando, inclusive, na não aceitação do trabalho para a defesa ou, caso esta já tenha ocorrido, na perda do título (Mestrado ou Doutorado) do Programa de Educação Científica e Formação de Professores (PPG-ECF),

_____

Assinatura do(a) Autor(a) Local e data

[2] Disponível em <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9610.htm>.