UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO

APARECIDO ALVES DAS FLÔRES

PROCESSOS DE PENSAMENTO ATIVADOS POR ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA
2019

APARECIDO ALVES DAS FLÔRES

PROCESSOS DE PENSAMENTO ATIVADOS POR ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino, na área de concentração de Ensino na Educação Básica.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO

PROCESSOS DE PENSAMENTOS ATIVADOS POR ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS

Autor: Aparecido Alves das Flores

Data de aprovação: 26 de fevereiro de 2019

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino, da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino.

Área de concentração: Ensino na Educação básica

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão - Orientadora

Leandro do Nascimento Diniz

Prof. Dr. Leandro Nascimento Diniz (UFRB)

Alzira Ferreira da Silva.

Profa. Dra. Alzira Ferreira da Silva (UESB)

Maria Deusa F da Silva

Profa. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva (UESB)

2019

F657p

Flôres, Aparecido Alves das.
Processos de pensamento ativados por estudantes na resolução de tarefas matemáticas. / Aparecido Alves das Flôres, 2019.
109f. il.
Orientador (a): Drª. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Programa de Pós Graduação em Ensino – PPGEn, Vitória da Conquista, 2019.
Inclui referência F. 101 - 105.
1. Tarefas *Standards* – Matemática. 2. Tarefas não *Standards*. 3. Processos cognitivos e metacognitivos. I. Gusmão, Tânia Cristina Rocha Silva. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Acadêmico em Ensino- PPGEn.

CDD: 510

Catalogação na fonte: ***Juliana Teixeira de Assunção – CRB 5/1890***

Bibliotecária UESB – Campus Vitória da Conquista-BA

A todos aqueles que acreditam na Educação como uma força motriz que capacita homens e mulheres para a uma vida social de respeito e crescimento coletivo.

Sou muito grato...

Ao nosso Bom Deus, porque Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas!

A minha amada esposa, Lu, por me apoiar e incentivar em todos os momentos.

À minha querida orientadora, por ter mergulhado comigo na busca por um trabalho investigativo de qualidade.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino, que, de forma direta ou indireta, colaboraram com as discussões e com a construção deste trabalho.

Aos meus colegas, pelo companheirismo, pelo carinho e pelas contribuições científicas no cotidiano de nossa sala de aula e fora dela.

À direção, aos professores e aos alunos do Curso Técnico em Edificações do Centro Territorial de Educação Profissional de Vitória Da Conquista (CETEP), por acolher e apoiar a nossa pesquisa.

Aos professores, Leandro Diniz, Alzira Silva e Maria Deusa, por suas valiosas contribuições como membros da banca avaliadora.

RESUMO

O trabalho de pesquisa aqui apresentado surge para agregar-se a outros que têm procurado desvendar modos pelos quais os alunos resolvem situações-problemas de Matemática. E assim, nessa afiguração, este estudo busca responder à seguinte questão: que processos de pensamento são ativados por estudantes ao resolverem tarefas matemáticas *standards* e *não standards*? Para respondê-la, procuramos analisar os processos de pensamento de estudantes na resolução de tarefas matemáticas *standards* e *não standards*, processos de ordem cognitiva e metacognitiva. Assim sendo, apresentamos neste trabalho uma revisão de literatura centrada na resolução de problemas, com base em autores como González (1998), Gusmão (2006), Gontijo (2007), Vale (2012), Pochulu, Font e Rodriguez (2016), Cyrino e Jesus (2014) e Moura (2015). Esta pesquisa possui abordagem qualitativa, pois ela é capaz de identificar e analisar dados que não podem ser mensurados numericamente. Do ponto de vista da produção dos dados, utilizamos a pesquisa de campo, e, do ponto de vista dos objetivos, a pesquisa descritiva, por meio da aplicação de documentos – testes com tarefas *standards* e *não standards* – e de notas de campo em quatro turmas da Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio (EPI), do curso Técnico em Edificações, do Centro de Educação Profissional de Vitoria da Conquista (CETEP). Na análise de conteúdo, fizemos uma leitura flutuante das soluções apresentadas pelos alunos nos testes, construímos o *corpus* com registros escritos, exploramos essas unidades de registro e tratamos dos resultados organizando-os nas seguintes categorias de processos de pensamento cognitivos e metacognitivos ativados: *pobre*, *rico*, *muito rico*, *confuso* e *em branco*. Como resultado, percebemos que, tanto na solução de tarefas *standards* quanto na resolução de tarefas *não standards*, a maior parte dos alunos apresenta processos de pensamento *pobre* fazendo pouco uso tanto de estratégias cognitivas quanto metacognitivas, embora existam alunos, mesmo em menor número, que se enquadrem nas outras categorias de análise. Observamos também que os alunos procuram resolver mais as tarefas *standards* do que as *não standards*, nos levando a inferir que eles estejam mais acostumados com o primeiro tipo de tarefa do que com o segundo.

Palavras-Chaves: Tarefas *Standards*. Tarefas *não Standards*. Processos Cognitivos e Metacognitivos.

ABSTRACT

The research presented here arises to be added to others that have tried to uncover ways in which students solve situations-problems of Mathematics. And so, in this sense, this study seeks to answer the following question: what thought processes are activated by students when solving standard and non-standard mathematical tasks? To answer this question, we try to analyze the students' thinking processes in solving standard and non-standard mathematical tasks, cognitive and metacognitive processes. Thus, we present in this work a literature review focused on problem solving, based on authors such as González (1998), Gusmão (2006), Gontijo (2007), Vale (2012), Pochulu, Font e Rodriguez (2016), Cyrino and Jesus (2014) and Moura (2015). This research has a qualitative approach, since it is able to identify and analyze data that cannot be measured numerically. From the point of view of data production, we used field research, and, from the point of view of the objectives, the descriptive research, through the application of documents - tests with standard and non-standard tasks - and of field notes in four classes of the Integrated Professional Education to High School (EPI), of the Technical Engineering in Buildings, of the Vocational Education Center of Vitoria da Conquista (CETEP). In the content analysis, we made a floating reading of the solutions presented by the students in the tests, constructed the corpus with written records, explored these record units and treated the results by organizing them into the following categories of activated cognitive and metacognitive thought processes: poor, rich, very rich, confused and blank. As a result, we realize that, in both standard task solution and non-standard task resolution, most students present poor thinking processes with little use of either cognitive or metacognitive strategies, although there are even fewer students who fall into the other categories of analysis. We also note that students seek to solve standard tasks more than non-standards, leading them to infer that they are more accustomed to the first type of task than to the second.

Keywords: Tasks Standards. Non-standard tasks. Cognitive and Metacognitive Processes.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 10

CAPÍTULO 1: REVISÃO DE LITERATURA 14
1.1 Tarefas matemáticas *standards*, *não standards* e desenho de tarefas 14
1.2 Processos de pensamentos ativados durante a resolução de tarefas Matemáticas 19
1.2.1 Processos cognitivos 21
1.2.2 Processos metacognitivos 22
1.3 Modelos para avaliação de processos cognitivos e metacognitivos na resolução de problemas 25
1.4 Processos de pensamento: pobres, ricos e muito ricos 28

CAPÍTULO 2: METODOLOGIA 34
2.1 Abordagem qualitativa 34
2.2 Pesquisa de campo e descritiva 35
2.3 Lócus 35
2.4 Sujeitos 36
2.5 Procedimentos 37
2.6 Estágios da pesquisa 38

CAPÍTULO 3: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS 42
3.1 Primeiro Teste 42
3.1.1 Resoluções possíveis, tabulação e estudo pormenorizado das questões *standards* 43
3.2 Segundo Teste 65
3.2.1 Resoluções possíveis, tabulação dos dados e estudo pormenorizado das questões *não standards* 65
3.3 Análise comparativa entre questões dos testes com conteúdos afins 90
3.4 Uma análise geral dos testes 94

4 CONCLUSÃO 97

BIBLIOGRAFIA 101

ANEXOS 106
ANEXO A – Documento 1 – Teste *standard* 106
ANEXO B – Documento 2 – Teste *não standard* 108

INTRODUÇÃO

Em 1991, iniciei o meu trabalho como professor na escola infantil. Lecionei dois anos em turmas multisseriadas, na zona rural de Livramento. Numa mesma classe, foi um tempo em que trabalhei com crianças desde a alfabetização até a quarta série do ensino fundamental I. A matemática trabalhada na minha sala de aula era a de um jovem professor que acabara de sair do curso de Magistério com nível médio e tinha apenas a experiência no estágio supervisionado. Dessa forma, a minha prática em sala de aula se apoiava basicamente na feitura de exercícios propostos pelo livro didático.

Trabalhei também no ensino fundamental II e no ensino médio. Em alguns momentos do ensino fundamental II, construí, com a participação dos alunos, materiais concretos para o estudo de conteúdos como geometria plana, geometria espacial e funções – por exemplo, planificação de sólidos geométricos em cartolinas, montagem desses sólidos e cálculos dos seus volumes e também a montagem de tabuleiros de damas, cartões de bingo, que usamos no estudo do sistema cartesiano e de funções. Atuando no ensino médio, utilizamos a tecnologia digital, especialmente o *software GeoGebra*, para estudarmos a construção e o comportamento dos gráficos de uma função e os entes da geometria analítica.

A reflexão que faço dessa experiência nesses diferentes contextos e níveis de ensino em que lecionei é que, mesmo quando iniciante e com pouca experiência, procurei sempre trazer à minha prática recursos/materiais que pudessem enriquecer a aprendizagem dos alunos.

Ao ingressar no Mestrado e fazer diversas leituras, passei a refletir mais sobre a minha atuação como professor de matemática. Além disso, busquei relacionar as leituras e reflexões propostas nos componentes curriculares do curso com o meu trabalho na sala de aula.

As minhas leituras e reflexões a respeito do processo de ensino e aprendizagem, especificamente em Matemática, levaram-me a constatar que o trabalho com esse componente curricular precisa ser sempre reavaliado com o intuito de tomarmos decisões cada vez mais assertivas no planejamento e na execução das atividades em nossa sala de aula. Muitas vezes os alunos são levados apenas à resolução de exercícios padronizados, exercitando a matemática de forma mecânica, não dando lugar a uma matemática mais criativa e flexível.

Com o objetivo de amadurecer meu papel de professor e galgar outras conquistas em prol da melhoria do ensino, ingressei no Mestrado em 2016 e iniciei um trabalho de pesquisa buscando descobrir os processos de criatividade dos alunos. Entretanto, construí um instrumento irregular, com tarefas matemáticas padronizadas, não dando margem para a criatividade do aluno. No exame de qualificação, a banca percebeu que as tarefas criadas poderiam ser reflexo de uma abordagem apoiada no paradigma do exercício, pois tanto as tarefas propostas quanto a maneira como as conduzimos não deixaram espaço para sugestões, diálogos e, de modo geral, para a criatividade do aluno, ocupando este um papel passivo. Nesse momento, percebi que mais uma vez precisava rever minha prática, pois embora responsável e dedicada, ela necessitava revisitar outras teorias e modos de concepção.

Assim, com Skovsmose (2000), entendi que a abordagem do paradigma do exercício pode ser notada quando as atividades não envolvem os alunos num processo de exploração e argumentação ou quando são adotados exercícios propostos pelo livro didático (em caráter de fixação), o que configura um ensino sem criatividade. Além do mais, este autor ressalta: "[...] a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma, resposta correta" (p. 1). Skovsmose afirma que o paradigma do exercício pode ser contraposto por um cenário para investigação que seria a promoção de um ambiente favorável à investigação e à criatividade por parte do aluno. E assim destaca: "[...] Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo." (SKOVSMOSE, 2000, p. 6)

Mesmo com muita dedicação e inovação nos recursos tecnológicos, observei que o uso e o domínio de conteúdo não são suficientes para uma mudança ou uma prática nova voltada para o protagonismo do aluno, permitindo a este maior diálogo e autonomia em sala de aula.

Também nesse contexto de reflexão e conhecendo outras literaturas, notei que a maneira como os estudantes resolvem tarefas está bastante relacionada com o tipo de tarefa e com "o contrato didático estabelecido em sala de aula entre professores e alunos" (MOURA, 2015, p. 7). Nesse processo de ensino e aprendizagem, é preciso considerar que:

> Se uma situação leva o aluno à solução como um trem em seus trilhos, qual é a sua liberdade de construir seu conhecimento? Nenhuma. A situação didática deve conduzir o aluno a fazer o que se busca, porém, ao mesmo tempo, não deve conduzi-lo. Isto porque se a resposta se deve exclusivamente às virtudes da situação, nada deve às "qualidades" do aluno. (BROUSSEAU, 2001, p. 54)

Nosso trabalho de qualificação levou em conta somente tarefas rotineiras. Dessa forma, enveredamos por outras leituras e encontramos nelas a preocupação em investigar como os estudantes resolvem problemas matemáticos. Esses trabalhos de alguns pesquisadores continham a análise de processos cognitivos e metacognitivos que poderiam nos auxiliar a compreender os processos de pensamento ativados por estudantes quando resolvem tarefas matemáticas *standards* e *não standards*.

Ao buscarmos entender que processos de pensamento são ativados por estudantes ao resolverem tarefas matemáticas *standards* e *não standards*, procuramos nos bancos de dados do Brasil, especialmente na área de Educação Matemática, trabalhos científicos com essa temática, mas não encontramos. Os poucos trabalhos que conseguimos localizar – os de González (1998), Gusmão (2006) e de Moura (2015), os quais utilizados para fundamentar a presente pesquisa – foram desenvolvidos em outros países, como Venezuela e Espanha.

Assim, diante do exposto e sem perder a ideia de analisar os processos de pensamento de estudantes – modo de fazer, de raciocinar e estratégias seguidas – é que reelaboramos nossa proposta de pesquisa. Como na primeira proposta não houve mudanças nos modos dos alunos de fazer as tarefas, dado às condições nas tarefas e o modo como elas foram conduzidas, propomos agora, a seguinte questão principal: que processos de pensamento são ativados por estudantes ao resolverem tarefas matemáticas *standards* e *não standards*? E, a partir dessa problematização, elaboramos outras questões secundárias: "Existem diferenças nos processos de pensamento ativados, segundo o tipo de tarefa? Os processos de resolução de uma tarefa mudam conforme o tipo, o grau de dificuldade, exigências ou condições da tarefa?"

Tendo em vista as questões ora apresentadas, formulamos o seguinte objetivo geral: **analisar os processos de pensamento de estudantes na resolução de tarefas matemáticas *standards* e *não standards***. E como objetivos específicos: **(a) identificar e classificar processos de pensamento na resolução de tarefas**; **(b) comparar os processos de pensamento de alunos para tarefas *standards* e *não standards*.**

Assim, na perspectiva até aqui expressa, organizamos este trabalho dissertativo em capítulos. No capítulo 1, efetuamos a revisão da literatura, oportunidade em que tratamos dos seguintes assuntos, os quais sustentam teoricamente a nossa investigação: tarefas matemáticas *standards*, *não standards* e desenho de tarefas; processos de pensamentos ativados durante a resolução de tarefas Matemáticas; processos cognitivos; processos metacognitivos; modelos para avaliação de processos cognitivos e metacognitivos na resolução de problemas; e processos de pensamento pobres, ricos e muito ricos.

No capítulo 2, discorremos sobre a metodologia utilizada na pesquisa, momento em que tratamos da abordagem qualitativa, por meio da pesquisa de campo e, no tocante aos objetivos, descritiva. Tratamos também do local da pesquisa, dos sujeitos investigados, dos procedimentos empregados durante a produção e a coleta dos dados e dos estágios de preparação e de aplicação do nosso trabalho de pesquisa.

No capítulo 3, efetuamos a análise dos dados do nosso trabalho investigativo com base na literatura levantada, fazendo as inferências e interpretações acerca dos dados coletados.

Por fim, na conclusão, expomos o nosso ponto de vista a respeito dos dados da análise, considerando a questão de pesquisa e o objetivo geral e os objetivos específicos que foram estruturados para nortear a investigação.

CAPÍTULO 1: REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, apresentamos conceitos e ideias, que constituem o aporte teórico de nosso trabalho de pesquisa produzidos por alguns autores. Para iniciá-lo, abordamos as tarefas matemáticas *standards*, *não standards* e critérios para o desenho de tarefas.

Em seguida, tratamos sobre os processos de pensamento ativados durante a resolução de tarefas matemáticas executadas por estudantes na sala de aula, mais especificamente os processos cognitivos e metacognitivos utilizados por eles durante a resolução de problemas. Por fim, classificamos os processos cognitivos e metacognitivos em três tipos: pobre, rico e muito rico. Relativamente a tais processos, apresentamos uma relação de gestões ativadas pelos alunos durante a resolução de tarefas matemáticas.

1.1 Tarefas matemáticas *standards*, *não standards* e desenho de tarefas

É sabido que o vocábulo "tarefa" apresenta vários significados, mas tomaremos o seu conceito do ponto de vista da Educação Matemática. Nesse contexto, as tarefas são entendidas de duas maneiras, a primeira se refere às tarefas como exercícios (CYRINO; JESUS, 2014).

Segundo esses autores, as tarefas são um conjunto de atividades elaboradas pelos professores ou retiradas de livros didáticos com base nos conteúdos trabalhados em sala de aula e que podem ser propostas aos estudantes como lista de exercícios. Além disso, os estudantes têm a possibilidade de resolver as questões sugeridas mecanicamente ou observar um exemplo desenvolvido pelo professor em suas aulas como modelo para solucioná-las. Nas palavras dos autores:

> Alguns professores, ao planejarem suas aulas, escolhem as tarefas tendo como base os conteúdos trabalhados ou a presença dessas tarefas em livros didáticos. Neste contexto, as tarefas podem se tornar sinônimo de listas de exercícios, nas quais o trabalho dos estudantes se limita a resolvê-las de forma mecânica e, em alguns casos, tendo como ponto de partida um "exercício-modelo" explicado anteriormente pelo professor. (CYRINO; JESUS, 2014, p. 753)

O conceito de tarefas desse ponto de vista se aproxima das concepções do paradigma do exercício, referido por Skovsmose (2000) e definido como atividades propostas pelo professor em sala de aula nos moldes tradicionais e, de modo geral, são retiradas de livro didático. Assim sendo, "[...] os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula.

Isso significa que a justificação da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma.” (SKOVSMOSE, 2000, p. 1)

A segunda forma se refere às tarefas que podem ser entendidas como atividades pensadas e planejadas pelos professores com a finalidade de desafiar o aluno a pensar em solucioná-las, de levá-lo a estabelecer estratégias de resolução, de motivá-lo a buscar caminhos alternativos para encontrar as respostas e de promover a justificativa do estudante acerca da escolha dos caminhos tomados na resolução das questões (GUSMÃO, 2009; POCHULU; FONT; RODRÍGUEZ, 2016). Para Gusmão (2009), as tarefas são:

> [...] um conjunto de atividades pensadas e desenhadas pelo professor cujo objetivo é desenvolver e avaliar destrezas cognitivas e metacognitivas dos estudantes, em relação a determinados conteúdos matemáticos, por meio da aprendizagem significativa de conceitos e do desenvolvimento da aprendizagem científica (p. 2).

De acordo com Pochulu, Font e Rodriguez (2016), “[...] tarefas são as situações que o professor propõe (problema, pesquisa, exercício, etc.) aos alunos. Este é o ponto de partida da atividade do aluno, que, por sua vez, produz a aprendizagem como resultado.[1]” (p. 76, tradução nossa).

Conforme Gusmão (2016), pesquisas na área de Educação Matemática – no âmbito internacional – recuperam e ressignificam o termo tarefa e sua implicação para a construção do conhecimento. Ele ressalta que “[...] as novas tendências em Educação Matemática destacam o uso de recursos metodológicos e de estratégias inovadoras com vistas à melhoria do Ensino e da Aprendizagem Matemática, e nesse contexto se encontram as tarefas.” (GUSMÃO, 2016, p. 183). Como se vê, as tarefas são recursos estratégicos que acrescentam novidade e melhoramento no ensino e na aprendizagem de matemática.

No contexto de uma nova tendência, alguns autores apresentam critérios para elaboração de boas tarefas, por exemplo: que sejam abertas, que tenham significado para o educando, que não tenham dicas nos enunciados de como resolvê-las (POCHULU; FONT; RODRÍGUEZ, 2016), que sejam desafiadoras (GUSMÃO, 2016) e que solicite dos alunos os "porquês" da escolha dos caminhos utilizados para solucioná-las. Dessa forma, eles são incentivados a falar sobre o problema e a relacionar ideias e artifícios conforme consideram Cyrino e Jesus (2014): “[...] importante que o professor conheça seus alunos e investigue o

[1] [...] tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.), a los alumnos. Éstas son el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje. (POCHULU; FONT; RODRÍGUEZ, 2016, p.76)

tipo de tarefas nas quais eles se disponham a conjecturar, argumentar, estabelecer relações e desenvolver estratégias de resolução." (p. 762).

Conforme Gusmão (2016), as tarefas: "[...] podem ser classificadas em abertas e fechadas, admitir uma única ou múltiplas respostas, apresentar níveis de raciocínio e de exigências diferentes e requerer maior ou menor esforço cognitivo." (p. 187). A autora ainda argumenta:

> As tarefas denominadas fechadas [...] normalmente exigem um baixo nível de desempenho cognitivo dos alunos e uma única resposta. [...]. As tarefas de tipo abertas [...] admitem múltiplas respostas e múltiplas representações, possibilitam uma maior interação e comunicação em classe, exigem maior desempenho cognitivo, desafiam os alunos a buscar/criar estratégias para solucionar o problema, dão espaço para a subjetividade, cria um ambiente propício para o desenvolvimento da autonomia, do autoconhecimento e, portanto, da metacognição. (GUSMÃO, 2016, p. 187)

Entre os estudos ligados ao desenho de tarefas, Molina e Fernández (2017) ao desenvolver tarefas para a Educação Infantil consideram "o desenho de tarefas como síntese da prática educativa[2]" (p. 1274, tradução nossa). Segundo as autoras, "tomando como referência as características dos alunos da Educação Infantil, temos que desenhar tarefas que deem à criança a oportunidade de pensar, formular e resolver conflitos e, se levarmos em conta todo o trabalho a partir das emoções, o aprendizado será significativo e relevante[3]" (MOLINA; FERNÁNDEZ, 2017, p. 1274, tradução nossa). Para elas, o desenho de tarefas deve considerar as características de socialização das crianças.

Nesse encadeamento das ideias acerca das tarefas, especialmente das matemáticas abertas e fechadas e dos critérios para o seu desenho, é que situamos as tarefas *standards* e *não standards*.

De acordo com Gusmão (2006), entendemos por tarefas *standards* situações corriqueiras propostas aos alunos. Para resolvê-las, os estudantes se valem de automatismos e da reprodução de conhecimentos já adquiridos. A autora, nesse contexto, mostra que o estudante faz uso de habilidades, cálculos ou algoritmos padronizados. Esse tipo de tarefa pode ser encontrado, por exemplo, em livros didáticos e pode demandar uma, e apenas uma, resposta correta. Dessa forma, as tarefas *standards* se aproximam da concepção de paradigma

---

[2] El diseno de tareas como sínteses de la práctica educativa. (MOLINA; FERNÁNDEZ, 2017, p. 1274)

[3] Teniendo como referente las características del alumnado de Educación Infantil hemos de disenar tareas que den al nino la oportunidade de pensar, de formular e resolver conflitos y si todo eso lo trabajamos desde las emociones, el aprendizaje será significativo y relevante. (MOLINA; FERNÁNDEZ, 2017, p. 1274)

do exercício comentado por Skovsmose (2000), ou seja, uma atividade centrada na prática da aula tradicional.

Também compreendemos tarefas *standards* como problemas fechados. Nesse sentido, nós nos aproximamos das ideias, por exemplo, dos autores Allevato (2005) e Moura (2015), que definem problemas fechados como aqueles que possuem uma única resposta ou uma só solução.

Nessa mesma perspectiva, Medeiros (2001) entende que o problema fechado é um problema-padrão ou ainda, um problema clássico de matemática colocado no processo de ensino-aprendizagem a fim de limitar a criatividade do aluno. Nesse caso, o aluno não tem muito o que criar ou descobrir, pois opera com instruções ou regras e seus passos sucessivos que o conduzem a um resultado único.

Ao contrário das tarefas *standards*, as *não standards* são situadas no contexto das tarefas abertas que são propostas aos alunos para encontrar múltiplas respostas e utilizar variados caminhos com finalidade de solucioná-las com criatividade (GUSMÃO, 2006, 2016). Com Gusmão (2006), entendemos que as tarefas *não standards* são os problemas não rotineiros. Ao comentar sobre o instrumento utilizado em seu trabalho, composto por problemas abertos e que fogem do padrão de rotina, a autora revela:

> Nosso instrumento não é baseado em automatismos. É composto por um conjunto de problemas não rotineiros, o que significa que o aluno não possui (em nossa opinião) habilidades padronizadas para resolvê-lo, embora possa ter recursos adequados para experimentá-lo.[4] (GUSMÃO, 2006, p. 123, tradução nossa)

Outros autores também trazem uma aproximação para o entendimento do que chamamos de tarefas *não standards*. Por exemplo, Dalto, Santos e Buriasco conceituam problemas abertos como "[...] aqueles que apresentam uma situação que requer uma ação por parte daquele que pretende resolvê-los, não havendo alternativa de respostas em seu enunciado." (DALTO; SANTOS; BURIASCO, 2017, p. 111). Moura (2015), em seu trabalho sobre problemas de teoria de jogos aplicados à educação, acrescenta que as tarefas *não standards*, ou seja, os problemas abertos “[...] são aqueles que admitem várias soluções que normalmente deverão ser avaliadas em termos de probabilidade ou de utilidade.” (MOURA, 2015, p. 66)

[4] Nuestro instrumento no se basa en automatismos. Está compuesto por un conjunto de problemas no-rutinarios, lo que significa que el estudiante no dispone (en nuestra opinión) de habilidades estandarizadas para resolverlo, aunque podría tener recursos adecuados para intentarlo. (GUSMÃO, 2006, p. 123)

Segundo Moura (2015), quando propomos tarefas não rotineiras, estamos sugerindo quebra de paradigmas e esse tipo de problema favorece a ruptura do contrato didático[5], pois o aluno se depara com questões que não estão sendo estudadas no momento. Com isso, é esperado que ele busque novas estratégias para resolver o problema:

> Com a proposição da tarefa *não standard*, estamos propondo a quebra de um paradigma, e se instala aí uma ruptura do contrato, o problema pede uma estratégia de resolução que não está ao alcance imediato do aluno, não compatível com seus estudos no momento, uma vez que, em uma prática pedagógica normal, espera-se que os problemas propostos tenham uma lógica de solução próxima ao conteúdo estudado. (MOURA, 2015, p. 108)

De acordo com Rodrigues et al. (2014), as tarefas *não standards* podem estimular a criatividade, a qual pode afigurar-se um elemento impulsionador da resolução e formulação de problemas, ou melhor, do aprendizado entre os alunos: “[...] a implementação de tarefas de exploração e investigação, ditas tarefas não rotineiras, incentiva a persistência do trabalho dos alunos, tornando-os mais autónomos e ativos, traduzindo-se num desempenho mais criativo e numa atitude mais positiva em relação à matemática” (p. 11).

Segundo Vale (2012), somente tarefas instigantes podem gerar o pensamento criativo, o que promoveria circunstâncias favoráveis para o raciocínio dentro da matemática: “Apenas podemos ser criativos se nos sentirmos atraídos e desafiados pela tarefa. As situações desafiantes proporcionam oportunidades para pensar matematicamente” (p. 193).

Em Gontijo (2007), podemos observar uma relação entre tarefas *não standards* e criatividade. O autor leva em consideração que a criatividade em matemática assenta-se na capacidade em buscar e apresentar diversas soluções para uma situação-problema, de maneira que esta seja percebida nas suas diferentes dimensões, e/ou mesmo solucionada de diferentes formas – particularmente de modo não habitual.

O pesquisador reforça a ideia de que a capacidade criativa não se situa somente em circunstâncias que necessitem resolução e elaboração de problemas, mas também “em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma sequência de ações” (GONTIJO, 2007, p. 37).

Para Mira (1989, p. 62), o professor é o responsável pelo encorajamento do aluno para atitudes criativas dentro do contexto de ensino e aprendizagem, o que depende de posturas

[5] O Contrato Didático (CD) se refere à relação entre professor e aluno, de forma a estabelecer o conjunto de comportamentos que o professor espera do aluno e o conjunto de comportamentos que o aluno espera do docente. O sentido deste contrato leva a necessidade de explicar, em detalhes, as regras implícitas e explícitas das relações na sala de aula entre o professor, o aluno e o saber. (MOURA, 2015, p. 79)

docentes, como estar disponível, ser autêntico, manejar bem as estratégias de ensino e ser um programador de experiências educativas de significado, de modo a desenvolver a criticidade, a sensibilidade e a capacidade de iniciativa. Ao considerarmos a elaboração de tarefas *não standards* para os alunos, estamos tomando novas posturas metodológicas e nos responsabilizando pelo encorajamento da criatividade do estudante.

No entendimento geral de tarefas proposto aqui, enquadramos as tarefas *standards* e *não standards*. O primeiro conjunto de tarefas encontra-se numa perspectiva mais tradicional de aplicação de exercícios em que o aluno utiliza definições, fórmulas, algoritmos, regras e passos sequenciados para resolver as questões propostas que, essencialmente, apresentam uma única solução (MOURA, 2015; SKOVSMOSE, 2000), já o segundo conjunto propõe uma abertura para que o aluno pense, repense e possa apresentar variadas soluções, dando lhe a oportunidade de fazer uso de processos metacognitivos – a reflexão do aluno sobre a sua própria ação e sobre o seu pensamento, ou seja, sobre os seus próprios processos cognitivos (GURAT; MEDULA JR, 2016; GUSMÃO, 2016).

Neste campo de ação, pesquisadores consideram que o professor deve pensar e planejar contextos e situações variadas que possam ser aplicadas na sala de aula e que favoreçam a aprendizagem adequada do educando (MOREIRA; GUSMÃO; MOLL, 2016). Assim sendo, montamos dois instrumentos – testes – para serem aplicados em nossa pesquisa: um com questões *standards* e o outro com questões *não standards*, tomando por base instrumentos validados, os quais trataremos no capítulo 3 desse trabalho dissertativo.

1.2 Processos de pensamentos ativados durante a resolução de tarefas Matemáticas

No contexto da resolução de problemas em Educação Matemática, e numa perspectiva cognitivista da aprendizagem, González (2002) argumenta que as pesquisas consideram que o aluno tem participação ativa no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, além dos conhecimentos prévios do estudante, é fundamental levar em conta o que ele faz com o conhecimento no decorrer da aprendizagem, pois esse comportamento provoca efeitos no ensino (GONZÁLEZ, 2002).

De acordo com Nickerson (1998 apud GONZÁLEZ, 2002) é importante estudarmos os processos de pensamento dos estudantes diante do avanço tecnológico e das mudanças do mundo contemporâneo, pois a educação não pode consistir apenas em uma mera acumulação quantitativa de conhecimento, pelo contrário, deve promover a formação de cidadãos bons pensadores, que não apenas solucionem problemas, mas que sejam reflexivos e que saibam como e quando usar as ferramentas de pensamento formais e informais de que dispõem.

Ao estudar matemática, os alunos fazem uso de processos internos de funcionamento intelectual, ou seja, ativam processos de pensamento – cognitivos e metacognitivos – e utilizam as ferramentas formais e informais na realização de tarefas, especialmente, na resolução de problemas matemáticos (GONZÁLEZ, 2002; ALLEVATO, 2005; GUSMÃO 2006; GUSMÃO; FONT; CAJARAVILLE, 2009; HIDALGO; GONZÁLEZ, 2009; DANTAS; RODRIGUES, 2013; LEAL JUNIOR, 2018).

Para analisar a forma como os estudantes resolvem tarefas matemáticas *standards* e *não standards*, é preciso lançar mão da cognição e da metacognição, que são dois processos de pensamento ligados à ocorrência do ato de aprender ou adquirir conhecimento e à reflexão que o indivíduo faz sobre esse ato de conhecer ou, ainda, como ele avalia o acontecimento da sua própria aprendizagem. Conforme Gusmão ressalta, cognição e metacognição juntos "[...] ajudarão a entender os motivos que norteiam as práticas que os alunos realizam no processo de Resolução de Problemas[6] (GUSMÃO, 2006, p. 2, tradução nossa).

Como bem salientou Gusmão, é importante considerar que os processos de cognição e metacognição estão intimamente ligados. Ao fazer uso desses processos de pensamento, o indivíduo pode buscar soluções para as situações que surgem no ambiente, especialmente, em situações decorrentes da matemática e refletir sobre o melhor caminho para solucioná-las.

Essa inter-relação existente entre a cognição e a metacognição é destacada Brown (1987) apud Ribeiro (2003):

> Um domínio onde este problema parece estar acentuado é no da leitura e, por conseguinte, do estudo. De acordo com Flavell (1976), o autoquestionamento sobre um texto pode funcionar não apenas para aumentar o seu conhecimento (função cognitiva), mas também para o monitorizar (função metacognitiva). Esta afirmação demonstra a inter-relação das funções cognitivas e metacognitivas, isto é, uma determinada atividade pode ser vista como uma estratégia (olhar para os pontos principais), possuir uma função de monitorização (uma atividade metacognitiva), e ser uma reflexão sobre o conhecimento (também uma atividade metacognitiva). (BROWN, 1987 apud RIBEIRO, 2003, p. 110).

É notória a ligação entre esses processos, por isso: "nem sempre é fácil distinguir o cognitivo do metacognitivo" (STEDILE; FRIENDLANDER, 2003, p. 795). Desse modo, uma das maneiras de perceber esses processos é por meio das tarefas matemáticas *standards* e *não*

[6] [...] ayudarán a comprender las razones que guían las prácticas que realizan los estudiantes en el proceso de Resolución de Problemas. (GUSMÃO, 2006, p. 2)

standards, apresentando aos alunos "situações problematizadoras que mobilizem diversos tipos de recursos cognitivos e metacognitivos" (SMOLE, s/d, p. 1) e, também, conforme González (2014), é possível explicitar esses processos a partir do comportamento dos alunos e do seu desempenho no decorrer da resolução de problemas matemáticos.

A reflexão sobre o caminho percorrido na solução de um problema é importante e deve ser incentivada pelo professor em sala de aula, pois aumenta a probabilidade de ocorrência da aprendizagem, conforme alerta o NCTM (2000):

> À medida que os professores mantêm um ambiente no qual o desenvolvimento da compreensão é monitorado consistentemente por meio da reflexão, os alunos têm mais probabilidade de aprender a assumir a responsabilidade de refletir sobre seu trabalho e fazer os ajustes necessários ao resolver problemas[7]. (NCTM, 2000, p. 55, tradução nossa).

Dito isso, vamos discorrer um pouco mais sobre os processos cognitivos e metacognitivos que estão no centro do nosso trabalho investigativo.

1.2.1 Processos cognitivos

Ao buscarmos o vocábulo "cognitivo" no dicionário Houaiss, entre outros significados do termo, lemos: "[...] relativo ao processo mental de percepção, memória, juízo e/ou raciocínio; diz-se de estados e processos relativos à identificação de um saber dedutível e à resolução de tarefas e problemas determinados [...]". (HOUAISS, 2009). Para além do dicionário, investigamos como o vocábulo é apresentado por alguns estudiosos em seus trabalhos científicos.

Ao considerar os estudos de Aguilar (1994), González (1998, p. 60) aponta para a existência de processos relacionados com a codificação, o armazenamento, a recuperação e a transformação de informações que fazem parte do nível denominado pelos autores de *destrezas cognitivas de ordem inferior*. Segundo o autor, este é o primeiro nível que auxilia na averiguação das características de aprendizagem dos estudantes.

Em Kuhl e Kraska (1989, apud RIBEIRO, 2003, p. 110), a cognição pode ser entendida, resumidamente, como "[...] um tipo específico de representação dos objetos e fatos (isto é, representações proposicionais) [...]" e, num sentido mais amplo, como "[...] qualquer tipo de

---

[7] As teachers maintain an environment in which the development of understanding is consistently monitored through reflection, students are more likely to learn to take responsibility for reflecting on their work and make the adjustments necessary when solving problems. (NCTM, 2000, p. 55)

representação da informação proveniente do meio, incluindo todos os tipos de representações multidimensionais (Ex.: imagens espaciais) [...]".

Por sua vez, Eysenck e Keane (2017), ao buscarem uma definição na Psicologia Cognitiva, compreendem os processos cognitivos como aqueles que são intrínsecos ao indivíduo e "[...] envolvidos em extrair sentido do ambiente e decidir que ação deve ser apropriada. Esses processos incluem atenção, percepção, aprendizagem, memória, linguagem, resolução de problemas, raciocínio e pensamento." (EYSENCK; KEANE, 2017, p. 1).

A respeito do desenvolvimento da cognição, Stedile e Friendlander (2003) chamam a atenção para o fato de que esses processos na criança "[...] são desenvolvidos [...] a partir das interações concretas que realiza, permitindo o fortalecimento de operações mentais, mediadas pelo pensamento, as quais, gradualmente, ampliam-se no aspecto da complexidade" (p. 795). Nesse sentido, conforme o tempo vai passando, o desenvolvimento cognitivo vai se ampliando, pois a criança passa do concreto para situações cada vez mais abstratas.

1.2.2 Processos metacognitivos

Outro vocábulo existente nos estudos dos processos de pensamento é a metacognição. Segundo estudiosos, a compreensão de metacognição está diretamente ligada à definição de Flavell (1976, apud RIBEIRO, 2003; GUSMÃO, 2006; DANTAS e RODRIGUES, 2013; GURAT e MEDULA JR, 2016).

Em González (1996 apud GUSMÃO, 2006, p. 43, tradução nossa), o vocábulo metacognição é considerado:

> [...] "um neologismo produto da ciência psicológica contemporânea, particularmente da orientação cognitivista" (ibid., p.110). Embora não seja uma palavra de origem grega, traz consigo uma ideia ligada ao prefixo grego "meta" (meta) que, entre outras acepções, pode significar "posterior a" ou "que acompanha" e, portanto, a compreensão da metacognição como um "vocábulo que se refere ao que vem depois, ou acompanha a cognição" (ibid.).[8]

Para Aguilar (1994 apud GONZÁLEZ, 1998, p. 60) existe um segundo nível de processos de pensamento, podendo auxiliar na identificação das características de

[8] [...] "un neologismo producto de la ciencia psicológica contemporánea, particularmente la de orientación cognoscitivista" (ibid. p.110). A pesar de no ser una palabra de origen griego lleva consigo una idea vinculada al prefijo griego "meta" (metá) que, entre otras acepciones, puede significar "posterior a" o "que acompaña" y de ahí el entendimiento de la metacognición como um "vocablo que hace referencia a lo que viene después de, o acompaña a la cognición" (ibid.). (GONZÁLEZ, 1996 apud GUSMÃO, 2006, p. 43)

aprendizagem de estudantes e no entendimento de como eles aprendem. Dessa vez, o autor os denomina de *processos de ordem superior* e os considera como processos metacognitivos ou de autorregulação que são usados pelos estudantes para planejar, ativar, monitorar, avaliar e modificar os processos de nível inferior (cognitivos).

Para Ribeiro (2003, p. 110), "A metacognição diz respeito, entre outras coisas, ao conhecimento do próprio conhecimento, à avaliação, à regulação e à organização dos próprios processos cognitivos." Ainda sobre a definição, a autora acrescenta: "[...] as metacognições podem ser consideradas cognições de segunda ordem: pensamentos sobre pensamentos, conhecimentos sobre conhecimentos, reflexões sobre ações." (WEINERT, 1987 apud RIBEIRO, 2003, p. 110).

Na concepção de Stedile e Friendlander (2003), o processo metacognitivo é uma poderosa ferramenta para se desenvolver a autonomia. Segundo elas, o processo metacognitivo é aquele que conduz o aluno a refletir sobre a sua prática, ou seja, que o leva a pensar sobre como ele pode dominar e desenvolver aptidões para resolver problemas.

Por sua vez, Gusmão (2006) apresenta a metacognição da seguinte maneira:

> [...] um conhecimento teórico-prático-social que acompanha a cognição (ambos interagindo continuamente sem que se possa considerar que um determina o outro de maneira "mecânica") pode ser desenvolvido e/ou incrementado ao mesmo tempo em que o conhecimento cognitivo é desenvolvido e, como tal, é resultado das exigências da conduta social efetiva e satisfatória e, que, também, é usada e modificada segundo restrições contextuais[9]. (GUSMÃO, 2006, p. 103, tradução nossa)

De acordo com Flavell (1976 apud GUSMÃO, 2006) existe uma diferenciação entre as habilidades cognitivas e as metacognitivas: "[...] as estratégias são cognitivas quando são usadas para fazer a atividade cognitiva progredir em direção a um objetivo, e são metacognitivas quando têm a função de monitorar esse progresso.[10]" (FLAVEL, 1976 apud GUSMÃO, 2006, p. 3, tradução nossa).

Ainda a respeito do processo metacognitivo, a autora aponta: "a metacognição como um 'processo' está mais próxima de um conhecimento do tipo procedimental que, [...] se refere a

---

[9] [...] *un conocimiento teórico-práctico-social, que acompaña a la cognición (interaccionando ambos continuamente sin que se pueda considerar que uno determina al otro de manera "mecánica"), pudiendo ser desarrollado y/o incrementado al mismo tiempo que el conocimiento cognitivo es desarrollado, y como tal es resultado de las exigencias de la conducta social efectiva y satisfactoria y que además, se usa y se cambia bajo constricciones contextuales.* (GUSMÃO, 2006, p. 103, grifo da autora)

[10] [...] las estrategias son cognitivas cuando son empleadas para hacer progresar la actividad cognitiva hacia una meta, y son metacognitivas cuando su función es supervisar ese progreso. (FLAVEL, 1976 apud GUSMÃO, 2006, p. 3).

como conhecemos, isto é, ao saber como eu sei de algo.[11]" (GUSMÃO, 2006, p. 65, tradução nossa).

Em Dantas e Rodrigues (2013), encontramos:

> O conceito de metacognição está relacionado à consciência e ao automonitoramento do ato de aprender, é a aprendizagem sobre o processo da aprendizagem ou a apropriação e comando dos recursos internos se relacionando com os objetos externos. A metacognição é a capacidade do ser humano de monitorar e autorregular os processos cognitivos, a consciência sob os múltiplos significados dessa palavra. (DANTAS; RODRIGUES, 2013, p. 227)

Uma outra definição a respeito da metacognição é apresentada por González (2014). Segundo o autor, "Metacognição é uma voz interior que atua como um "treinador intelectual" (Schoenfeld) quando uma pessoa vai realizar qualquer tarefa que requeira algum esforço intelectual; portanto, uma indicação de desenvolvimento metacognitivo é a possibilidade de 'ouvir a voz'[12]". (GONZÁLEZ, 2014, p. 61, tradução nossa).

Finalmente, Gurat e Medula Jr (2016) entendem que metacognição é:

> [...] uma habilidade frequentemente estudada e associada à solução de problemas. Metacognição refere-se ao conhecimento sobre os próprios processos cognitivos e produtos ou qualquer coisa relacionada a eles. Também se refere ao monitoramento ativo e consequente regulação e orquestração de processos cognitivos em relação aos objetos cognitivos ou dados sobre os quais eles se baseiam, geralmente a serviço de algum objetivo ou objetivo concreto.[13] (GURAT; MEDULA JR, 2016, p. 171, tradução nossa).

Por meio das definições apresentadas pelos autores supracitados a respeito da cognição e da metacognição, percebemos que os dois processos são intrínsecos, ou seja, caminham juntos na aprendizagem dos educandos tanto no ato de aprender quanto na reflexão que esses fazem sobre o que e como estão aprendendo. De modo geral, o desenvolvimento da metacognição é um meio usado para auxiliar os alunos a melhorar suas aptidões na resolução de problemas (GUSMÃO, 2006; DANTAS; RODRIGUES, 2013; GONZÁLEZ, 2014;

---

[11] La metacognición como "proceso" se acerca más a un conocimiento de tipo procedimental que, [...] se refiere al cómo conocemos, o sea, el *saber cómo sé* algo. (GUSMÃO, 2006, p. 65)

[12] La Metacognición es una voz interior que actúa como un "coach intelectual" (Schoenfeld) cuando una persona se aboca a realizar cualquier tarea que le demande algún esfuerzo intelectual; por consiguiente, un indicio de desarrollo metacognitivo es la posibilidad de "escuchar dicha voz". (GONZÁLEZ, 2014, p. 61)

[13] Metacognition is a skill often studied and associated with problem solving. Metacognition refers to one's knowledge concerning one's own cognitive processes and products or anything related to them. It also refers to active monitoring and consequent regulation and orchestration of cognitive processes in relation to the cognitive objects or data on which they bear, usually in the service of some concrete goal or objective. (GURAT; MEDULA JR, 2016, p. 171).

GURAT; MEDULA JR, 2016) e, por conseguinte, aprender matemática com responsabilidade e reflexão (NCTM, 2000).

1.3 Modelos para avaliação de processos cognitivos e metacognitivos na resolução de problemas

Dada a difícil tarefa de identificar os processos metacognitivos durante a resolução de problemas no campo da matemática, Gusmão estabeleceu alguns critérios que tomaremos como referência para orientar o nosso trabalho.

Tratando-se dos processos metacognitivos, Gusmão (2006, p. 104-105) apresenta três níveis de organização que auxiliam na identificação das habilidades dos estudantes durante a resolução de problemas: (1) *Gestões primárias (metacognição primária)*; (2) *Gestões secundárias (metacognição secundária)*; (3) *Gestões para uma metacognição ideal*.

No primeiro nível (1), segundo a autora, os procedimentos abrangem a leitura, a interpretação do problema e os planos de resolução num contexto de processos semiautomáticos de supervisão, regulação e avaliação. Vejamos:

> Para começar a resolver um problema, o solucionador especialista deve compreender primeiro o que se pede no enunciado e, posteriormente, tomar consciência de todos os aspectos para a resolução da situação-problema. Esses aspectos guiarão o desenvolvimento das ações posteriores. Depois, levando em conta as exigências e condições impostas pela tarefa, ele deve decidir ou eleger os passos que supostamente o levarão à solução. As decisões tomadas por um especialista na matéria, em particular, serão rápidas na maioria dos problemas (automáticas em alguns casos, inclusive); também suas argumentações acerca da eficácia do plano adotado serão precisas e de acordo com os conhecimentos institucionais.
> As gestões para este primeiro nível cobrem desde a fase de ataque ao problema até o ensaio de um ou mais planos de resolução e, com ele, um nível relativamente semiautomático de processos de supervisão regulação e avaliação.
> Podemos dizer, de modo geral, que as ações metacognitivas iniciais que se esperam para este nível serão, sobretudo, de compreensão e de organização/planificação.[14] (GUSMÃO, 2006. p. 104, tradução nossa)

[14] Para empezar a resolver un problema, el resolutor experto, debe comprender primero lo que se pide en el enunciado, debe tomar conciencia de todos los aspectos que se han de tener en cuenta para la resolución de la situación problema. Dichos aspectos guiarán el desarrollo de las acciones posteriores. Después, teniendo en cuenta las exigencias y condiciones impuestas por la tarea, debe decidir o elegir los pasos que supuestamente le llevarán a la solución. Dado que se supone que es experto en la materia, las decisiones que tomará en la mayoría de los problemas serán rápidas (e incluso en algunos casos automáticas); también sus argumentaciones sobre la bondad del plan adoptado serán precisas y de acuerdo con los conocimientos institucionales.
Las gestiones para este primer nivel cubren desde la fase de ataque al problema hasta el ensayo de uno o más planes de resolución y, con ello un nivel relativamente semiautomático de procesos de supervisión, regulación y evaluación.

No segundo nível (2), a autora considera que não se trata de gestão automatizada. Devido à complexidade do problema, serão necessários períodos de espera e gerenciamento deliberado de supervisão, regulação e avaliação que são mais reflexivos do que aqueles usados no primeiro nível. Vejamos:

> Quando não se trata de gestão rápida ou automática devido à complexidade do problema proposto, serão necessários períodos de espera e novas abordagens. Essas novas abordagens implicam gestões deliberadas de supervisão, regulação e avaliação que são mais reflexivas do que aquelas que são dadas na primeira.
> 1) Dado um plano que pode ou não ser apropriado, uma ação de supervisão é aquela em que o solucionador, implícita ou explicitamente, faz questionamentos do tipo: "estou seguindo corretamente o plano previsto?". Esse tipo de pergunta é indício da existência consciente de um processo de supervisão pontual ou constante das ações empreendidas. Tal supervisão possibilita a ele (e garante) um maior desempenho.
> 2) Em uma ação regulatória, supõe-se que o solucionador, implícita ou explicitamente, faz perguntas do tipo: "se eu não alcançar os objetivos ou não cumprir as condições impostas, o que posso corrigir ou que novo caminho posso realizar?". Ele percebe que estava errado e, acima de tudo, pergunta a si mesmo quando ou onde estava errado.
> 3) Em uma ação avaliativa/verificativa, presume-se que o solucionador faz, explicitamente, questionamentos do tipo: "estou respondendo corretamente à tarefa?"; "a solução que dou é aquela que resolve o problema?". Esses tipos de perguntas são indicações da existência consciente de um processo de avaliação/verificação final das ações empreendidas.[15] (GUSMÃO, 2006. p. 105, tradução nossa)

Conforme Gusmão, o que evidencia o terceiro nível (3) metacognitivo é o uso deliberado de processos cognitivos com características mais gerais, conscientes e reflexivas às exigências de supervisão, regulamentação e avaliação prévias. Para a autora:

Podemos decir de modo general que las acciones metacognitivas iniciales que se esperan para este nivel serán, sobre todo, de *comprensión* y de *organización/planificación.* (GUSMÃO, 2006, p. 104)

[15] Cuando no se trata de gestiones rápidas o automáticas debido a la complejidad del problema propuesto, serán necesarios periodos de espera y de nuevos planteamientos. Estos nuevos planteamientos implican gestiones deliberadas de supervisión, regulación y evaluación más reflexivas que las que se que se dan en la primera.
1) Dado un plan que puede ser el adecuado o no, una acción *supervisiva* es aquella en la que el resolutor, implícita o explícitamente, hace cuestionamientos del tipo "estoy siguiendo correctamente el plan previsto". Este tipo de preguntas son indicios de la existencia consciente de un proceso de supervisión puntual o constante de las acciones emprendidas.Tal supervisión le conduce (y garantiza) a un mayor rendimiento.
2) En una acción *regulativa* se supone que el resolutor implícitamente o explícitamente hace cuestionamientos del tipo "si no consigo los objetivos o no cumplo las condiciones impuestas, qué puedo corregir o qué nuevo camino puedo emprender". Se da cuenta de que se equivocó y sobre todo se pregunta *cuándo* o dónde se equivocó.
3) En una acción *evaluativa/verificativa* se supone que el resolutor explícitamente hace cuestionamientos del tipo "estoy respondiendo correctamente a la tarea" ¿La solución que doy es la que resuelve el problema?". Este tipo de preguntas son indicios de la existencia consciente de un proceso de evaluación/verificación final de las acciones emprendidas. (GUSMÃO, 2006. p. 105)

> Quando não se trata de gestões rápidas ou automáticas devido à complexidade do problema proposto, como já foi dito, serão necessários períodos de espera e novas abordagens. Essas novas abordagens envolvem gestões deliberadas de supervisão, regulamentação e avaliação. O que caracteriza esse terceiro nível metacognitivo é o uso deliberado de processos cognitivos de características muito gerais (pensamento metafórico, analógico, particularização, generalização, transferência, contextualização, descontextualização, mudança de representação, resolução alternativa, uma solução original, etc.), que são propostas como novas alternativas (muito mais conscientes e reflexivas) às exigências de supervisão, regulamentação e avaliação anteriores.[16] (GUSMÃO, 2006. p. 105, tradução nossa)

Gusmão argumenta que nem sempre é fácil fazer a distinção desses níveis, pois, às vezes, um se une ao outro, mas eles são orientativos e nos ajudam a avaliar tais processos.

A pesquisa de Moura (2015) apresenta semelhança à de Gusmão (2006) ao estabelecer critérios para avaliar a forma e processos cognitivos de estudantes frente às situações-problemas. O pesquisador investigou as condutas[17] de "alunos quando resolvem problemas de matemática" (MOURA, 2015, p. 86). Entre as condutas apontadas por Moura, transcrevemos as que interessam para este trabalho:

> - *sobrevivência escolar*: [...] o estudante acaba respondendo qualquer coisa a fim de sobreviver no sistema [...];
> - *econômica*: os alunos são muito econômicos em suas ações, em seus raciocínios e em suas justificativas; apresentam respostas pouco elucidativas, algumas vezes monossilábicas do tipo: "sim" e "não" [...];
> - *evasiva*: [...] demonstram não ter interesse em se implicar no problema, apresentando respostas evasivas, do tipo: "não sei"; fogem a obrigatoriedade de um uso explícito da linguagem matemática; abstém-se de procedimentos de cálculos; modificam a linguagem adaptando-a às informações que se quer comunicar;
> - *ingênua*: [...] apresenta um raciocínio mais simplório, não se sujeita as restrições dos problemas, muitas vezes desprovida de conhecimentos teóricos e, por isso, as respostas podem ser associadas à falta de conhecimento [...]. (MOURA, 2015, p. 161-162, grifo do autor)

---

[16] Cuando no se trata de gestiones rápidas o automáticas debido a la complejidad del problema propuesto, tal como se ha dicho serán necesarios periodos de espera y de nuevos planteamientos. Estos nuevos planteamientos implican gestiones deliberadas de supervisión, regulación y evaluación. Lo que caracteriza este tercer nivel metacognitivo es el recurso deliberado de procesos cognitivos de características muy generales (pensamiento metafórico, analógico, particularización, generalización, transferencia, contextualización, descontextualización, cambio de representación, resolución alternativa, una solución original, etc.), los cuales se proponen como nuevas alternativas (mucho más conscientes y reflexivas) a las demandas de supervisión, regulación y evaluación anteriores. (GUSMÃO, 2006. p. 105)

[17] Condutas entendidas aqui como sendo as maneiras como os estudantes reagem ante uma situação problema que requer (implícita ou explicitamente) o uso de um raciocínio matemático, que pode ser observado por meio de suas respostas escritas ou orais dadas a estas situações. (MOURA, 2015, p. 155)

Gusmão (2006) e Moura (2015) apresentaram parâmetros que os auxiliaram na análise dos comportamentos de estudantes ao solucionarem problemas matemáticos. Mediante os critérios usados para a análise e avaliação dos dados produzidos por esses pesquisadores, consideraremos os processos de pensamento ativados pelos estudantes participantes do nosso trabalho investigativo, dos quais trataremos no próximo tópico.

1.4 Processos de pensamento: pobres, ricos e muito ricos

Nesse ponto, direcionaremos a nossa atenção, em especial, para os estudos de Gusmão (2006) e de Moura (2015), pois esses trabalhos trazem definições que nos auxiliarão na análise dos dados da nossa pesquisa.

Moura (2015), ao abordar a teoria de jogos na educação, discute as condutas e "estratégias de dominação" utilizadas por alunos ao resolver problemas; e apresenta a existência de duas formas de domínio das situações-problemas: uma no sentido débil e a outra no sentido forte.

Para o autor, o domínio do estudante sobre a situação-problema no sentido débil é constatado quando se observa o aluno "[...] representando respostas muito simples, de cunho intuitivo, e o conflito se dá porque não faz uma avaliação de resultados e elege simplesmente porque "algo ou alguma coisa", fruto da própria experiência, lhe apontasse para isso." (MOURA, 2015, p. 150)

Dessa forma, segundo Moura, quando um estudante compreende uma questão no sentido débil, ele produzirá uma resposta também no sentido débil, configurando respostas bastante simples e sem avaliar o efeito ou produto da operação matemática, pois tem como base apenas o que é indicado pela sua experiência.

Para a outra forma de dominação do problema, o autor argumenta que um domínio no sentido forte é aquele em que o aluno:

> [...] apresenta conhecimentos teóricos de referência [...], faz uso correto de técnicas, processo de validação, indo além de uma simples manipulação de informações. Se bem que desde o ponto de vista individual, cada aluno ao decidir por uma determinada estratégia e dado o grau de satisfação alcançado por sua escolha, esta estratégia terá para ele sempre um sentido forte. (MOURA, 2015, p. 150)

Portanto, a dominação da tarefa no sentido forte consiste na ideia de que o aluno domina a teoria estudada na instituição escolar, aplica as técnicas de resolução de problemas de forma correta e vai além da mera manipulação das informações.

Nesse mesmo sentido de conceituar os processos de pensamento, tomamos ainda como referência os estudos de Gusmão (2006). Como dito anteriormente, a autora considera três níveis que um solucionador pode apresentar no seu comportamento ao resolver situações-problemas: as gestões primárias (metacognição primária), as gestões secundárias (metacognição secundária) e as gestões para uma metacognição ideal.

Assim, ao tomar emprestadas as ideias de Moura (2015) e Gusmão (2006), neste trabalho, consideraremos como *processos de pensamento pobres* aqueles que se manifestarem de modo muito simples e intuitivo (MOURA, 2015), com características de: dedução mecânica, imitação de um modelo, falta de domínio de conteúdo ou de técnica, raciocínio ingênuo, ensaio-erro, planos confusos ou baseados em crenças erradas e no senso comum, sobrevivência escolar, econômica e evasiva. Ademais, levaremos em conta os processos que se manifestem com nível metacognitivo muito baixo, não levando em consideração elementos essenciais e restrições do problema e, com pouca consciência dos processos de supervisão, regulação e avaliação.

Os *processos de pensamento ricos* serão concebidos nesse trabalho investigativo como práticas dos estudantes na resolução de tarefas matemáticas, em que eles apresentem conhecimentos teóricos de referência, façam "uso correto de técnicas, processo de validação, indo além de uma simples manipulação de informações" (MOURA, 2015, p.150) e possuam características de dedução inquerida ou parcial, domínio de elementos particulares, múltiplas respostas. E durante a resolução da tarefa, os estudantes deveriam apresentar processos metacognitivos com sinais de "períodos de espera e novas abordagens" (GUSMÃO 2006, p. 105), fazendo uso consciente de supervisão, regulação e avaliação para enriquecer a solução do problema.

Relativamente aos *processos de pensamento muito rico*, consideraremos aqueles que, segundo Gusmão (2006), fazem uso de analogia, pensamento metafórico, particularização, generalização, transferência, contextualização, descontextualização, mudança de representação, solução original, flexibilidade e criatividade, além de revelarem nas suas ações processos de supervisão, regulação e avaliação mais reflexivos e elaborados do que nos processos ricos.

Na sequência, sintetizamos em três quadros os processos de pensamentos cognitivos e metacognitivos que levaremos em conta no nosso trabalho, com base também em outros estudos.

Quadro 1: Processos de pensamento cognitivos e metacognitivos de tipo pobres

Processos ativados	Descrição dos processos
Sobrevivência escolar	Responde qualquer coisa, seja para cumprir um contrato didático ou satisfazer o professor, seja para sobreviver no contexto escolar. (MOURA, 2015, p. 161)
Econômico	Apresenta linha de raciocínio e justificativa de forma muito econômica; “respostas pouco elucidativas, às vezes monossilábica do tipo: ‘sim’ e ‘não’.” (MOURA, 2015, p. 161)
Evasivo	“demonstram não ter interesse em se implicar no problema, apresentando respostas evasivas do tipo: ‘não sei’; fogem à obrigatoriedade de um uso explícito da linguagem matemática; abstêm-se de procedimentos de cálculos; modificam a linguagem adaptando-a às informações que se quer comunicar.” (MOURA, 2015, p. 161)
Ingênuo/Raciocínio ingênuo/Experimentação ingênua	“[...] apresenta um raciocínio mais simplório (...) muitas vezes desprovida de conhecimentos teóricos e, por isso, as respostas podem ser associadas à falta de conhecimento.” (MOURA, 2015, p. 162); Nesse tipo de raciocínio, os alunos costumam incluir os dados procurados em suas resoluções; costumam experimentar qualquer coisa, sem se sujeitar às condições do problema ou às características do contexto (GUSMÃO, 2006, p. 139)
Dedução mecânica	Aplica um processo usual nas aulas de matemática, exemplo: $3x - 6 = 0 \rightarrow 3x=6$. (GUSMÃO, 2006)
Não domina conteúdo/Erros de cálculo	Apresenta erros de cálculos tentando manipular regras ou algoritmos ou imitar algum modelo; respostas desprovidas de conhecimentos teóricos, indicando falta de conhecimento. (MOURA, 2015, p. 162)
Ensaio e erro	“aplicam aleatoriamente qualquer tipo de transformação autorizada e percorre o espaço do problema até que encontra o estado-fim.” (MOURA, 2015, p. 68)
Ingenuidade dependente	Uma demonstração da ingenuidade dependente é quando se “realizam cálculos com os números do enunciado, como se fosse necessário encaixá-los, ainda que não tenham sentido.” (GUSMÃO, 2006, p. 331)
Discute crenças válidas ou erradas baseadas no senso comum	Usa argumentos baseados em experiências de mundo e no senso comum, o que impede de perceber outros caminhos para resolução do problema.
Única solução/Solução parcial	Apresenta uma única solução para problemas que admitem múltiplas soluções; apresenta uma solução parcial não se sujeitando, em parte, às condições do problema e dando por certa e completa a resolução.
Planos confusos, imprecisos/Argumentações imprecisas	Os planos ou argumentos apresentados não deixam claro uma linha de raciocínio precisa, dificultando a avaliação do processo ativado. (GUSMÃO, 2006)
Domínio de técnica sem justificativa	Apresenta somente a resposta correta e sem cálculo; provavelmente faz uso do cálculo mental ou então apagam suas tentativas. (SANTOS; BURIASCO, 2008, p. 29)
Experimentação seletiva de uma eleição	Num conjunto de opções de respostas possíveis experimenta/elege a resposta conforme o contexto da tarefa e dos instrumentos que estão à sua disposição. (GUSMÃO, 2006, p. 139)
Semântica	A capacidade de interpretar símbolos, mas não confronta outras informações do problema. (GUSMÃO, 2006, p. 337)
Descoberta de insuficiência	Indica que faltam dados no enunciado da tarefa e por conta disso não continua a resolução. (GUSMÃO, 2006, p. 337)
Nível pouco consciente dos processos de supervisão, regulação e avaliação	Os planos e argumentos apresentam-se com pouca compreensão, quando se refere ao enunciado da tarefa; não se sujeitam às

	condições e exigências da tarefa; não são flexíveis e não modificam as estratégias de pensamento.

Fonte: organização nossa (2019)

Quadro 2: Processos de pensamento cognitivos e metacognitivos de tipo ricos

Processos ativados	Descrição dos processos
Dedução inquerida	"[...] desenha a estratégia completa e, portanto, experimenta o processo que o leva a descobrir a resposta." (GUSMÃO, 2006, p. 140)
Dedução parcial/Domínio de elementos particulares	Apresenta uma dedução parcial do raciocínio; apresenta exemplos do tipo ilustração, demonstrando domínio de elementos particulares.
Múltiplas respostas/Múltiplas representações	Percebe a abertura do problema, apresentando várias soluções ou representações para ele. Nesse processo, percebe-se a flexibilidade de pensamento.
Contraste de informações: coerência frente à relevância	Detecta contradições implícitas e explícitas existentes nas tarefas e também as redundâncias. (GUSMÃO, 2006, p. 337)
Raciocínio hipotético concreto/ Aceitação hipotética de um termo médio	Aponta a falta de dados na tarefa e depois fazer suposições, levantar hipóteses e trabalhar um ou mais dados possíveis. (GUSMÃO, 2006, p. 331)
Nível consciente e elaborado dos processos de supervisão, regulação e avaliação	Faz revisões dos planos e estratégias empregadas; modifica procedimentos empregados; aponta correlações pontuais; realiza correções pontuais. (GUSMÃO, 2006)

Fonte: organização nossa (2019)

Quadro 3: Processos de pensamento cognitivos e metacognitivos de tipo muito ricos

Processos ativados	Descrição dos processos
Pensamento metafórico	"[...] é um tipo particular de raciocínio, que utiliza ideias conhecidas para criar sentidos novos para outras ideias." (PRIMI et al., 2007, p. 198)
Pensamento analógico	"[...] tenta seguir a mesma estratégia ao passar de uma situação simples para outra mais complexa." (GUSMÃO, 2006, p. 164)
Solução alternativa/Solução original	Capacidade de desenhar/propor uma alternativa diferente ─ não pensada pelo professor ─ para o problema ou uma solução original, podendo ser uma aplicação em outros contextos, demonstrando processos de criatividade e flexibilidade de pensamento. (GUSMÃO, 2006)
Particularização/Generalização	Os processos de particularização se manifestam nos exemplos particulares ilustrativos da solução geral (GUSMÃO, 2006); os processos de generalização são a habilidade de ver algo geral conhecido no particular e concreto ou desconhecido no isolado e particular; implica substituir elementos constantes por elementos variáveis; implica ampliar a estrutura matemática (WIELEWSKI, 2005).
Transferência	No processo de transferência, há uma percepção da estrutura comum subjacente em duas situações-problemas para então reduzir o novo problema ao anterior. (GUSMÃO, 2006, p. 161)
Flexibilidade	A flexibilidade é percebida pela facilidade de mudança de uma operação mental ou do método de resolução, essa mudança pode ser qualitativa (WIELEWSKI, 2005); "capacidade para pensar de modos diferentes" (VALE, 2012, p. 191); "capacidade de alterar o pensamento ou conceber diferentes categorias de respostas" (GONTIJO, 2007, p. 37).

Nível consciente e bastante elaborado dos processos de supervisão, regulação e avaliação global	As ações de supervisão, regulação e avaliação são muito mais elaboradas e declaradas que nos processos anteriores. Com total consciência desses processos, o resolutor é capaz de demonstrar um domínio dos processos cognitivos e de conhecimento do conteúdo que o leva a uma reflexão mais ampla sobre a solução do problema.

Fonte: organização nossa (2019)

É nesse contexto de processos pobres, ricos e muito ricos que caracterizamos as tarefas *standards* e *não-standards*, observando que qualquer uma delas podem ser resolvidas por diferentes processos, mas isso vai depender do resolutor, da bagagem de conhecimento que este traz e de como a tarefa é conduzida pelo professor (isso não foi objeto de estudo desse trabalho).

Assim, o aluno que se deparar com uma tarefa *standard* pode apresentar na sua resolução um desenvolvimento pobre, rico, mas também muito rico. Da mesma forma, as tarefas *não standards* podem ser resolvidas de uma maneira pobre, mas também rica ou muito rica.

Conforme a abordagem da nossa construção teórica, ao resolverem tarefas *standard*s e *não standards,* os alunos ativam processos cognitivos e metacognitivos. Esses processos classificamos como pobres, ricos ou muito ricos.

A seguir, temos um organograma capaz de sintetizar a nossa revisão de literatura, o qual apresenta os três conjuntos de processos de pensamento ativados com as suas respectivas características cognitivas e metacognitivas.

Processos ativados durante a resolução de tarefas

Tarefas matemáticas *standards* e *não Standards*

Processos ativados durante a resolução de uma tarefa matemática

cognitivo | metacognitivo

pobre | rico | muito rico

pobre — Cognição/Metacognição

(1) Econômico;
(2) Evasiva;
(3) Ingênuo/ Raciocínio ingênuo/ Experimentação ingênua;
(4) Não domina conteúdo/ Erros de cálculo;
(5) Domínio de técnica sem justificativa;
(6) Semântica;
(7) Ingenuidade dependente;
(8) Única solução/ Solução parcial;
(9) Planos confusos, imprecisos/ Argumentações imprecisas;
(10) Experimentação seletiva de uma eleição;
(11) Descoberta de insuficiência;
(12) Nível pouco consciente dos processos supervisão, regulação e avaliação.

rico — Cognição/Metacognição

(1) Dedução inquerida;
(2) Dedução parcial/ Domínio de elementos particulares;
(3) Contraste de informações: coerência frente a relevância;
(4) Raciocínio hipotético concreto/ Aceitação hipotética de um termo médio
(5) Nível consciente e elaborado de processos de supervisão, regulação e avaliação.

muito rico — Cognição/Metacognição

(1) Pensamento analógico;
(2) Particularização/ Generalização;
(3) Flexibilidade;
(4) Nível consciente e bastante elaborado de processos de supervisão, regulação e avaliação global.

CAPÍTULO 2: METODOLOGIA

Neste capítulo, trataremos da metodologia de pesquisa utilizada neste estudo. Dentro de uma pesquisa mista, visto que conecta uma abordagem qualitativa e quantitativa, realizamos um trabalho de campo e, no tocante aos objetivos, ele será descritivo. Dentro desse contexto, apresentaremos o *locus* da pesquisa, os sujeitos, os procedimentos utilizados, os estágios de desenvolvimento do trabalho, a saber: (1) autorização para a realização da pesquisa; (2) contatos do professor-pesquisador com a escola, os professores e os sujeitos (alunos); (3) aplicação de um teste para os alunos. Por fim, abordaremos os fundamentos utilizados na análise dos dados do nosso trabalho investigativo.

2.1 Abordagem qualitativa

O nosso trabalho harmoniza-se com a abordagem qualitativa de pesquisa, porém, aparecem alguns dados quantitativos que se juntam, em certos momentos, para dar maior visão interpretativa aos dados coletados. No tocante ao uso de dados quantitativos como auxiliares na análise qualitativa, Bardin argumenta: “[...] a análise qualitativa não rejeita toda e qualquer forma de quantificação” (BARDIN, 1977, p. 115).

De acordo com D’Ambrosio (2004, p. 7), a abordagem qualitativa "tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes.” E complementa: “Ela depende da relação observador-observado [...]. A sua metodologia por excelência repousa sobre interpretação e várias técnicas de análise de discurso” (p. 7).

Para Araújo e Borba (2004), não é fácil realizar uma pesquisa qualitativa como educador matemático, pois essa modalidade é própria da área de Ciências Sociais. Na realidade, os pesquisadores da Educação Matemática, em sua maioria professores de Matemática, estão lidando constantemente com a área de Ciências Exatas. Assim, para esses autores, realizar uma pesquisa dessa natureza, cria-se um desafio “familiar a muitos que pretendem iniciar, ou mesmo continuar, suas pesquisas em Educação Matemática, já que a maioria deles é professor de Matemática que, se chegou a ter contato com pesquisas, o fez em uma área de investigação completamente diferente daquela à qual decidiu se dedicar.” (ARAÚJO; BORBA, 2004, p. 21)

Embora desafiadora para os educadores matemáticos, conforme advertiram esses dois últimos autores, a pesquisa qualitativa tem alimentado estudos investigativos e, por conseguinte, discussões acerca dos temas pertinentes ao ensino e à aprendizagem na área deste trabalho, com vistas a aperfeiçoar a postura metodológica dos professores diante da missão de ensinar.

Neste trabalho, como dito anteriormente, utilizamos dados numéricos (quantidades e porcentagens) para expressar o número e o percentual de alunos, conforme os tipos de repostas e os processos ativados por categorias denominadas, nesta investigação, de processos de pensamento pobre, rico e muito rico, pois entendemos que os resultados numéricos nos auxiliarão na análise dos dados de forma integrada com os conceitos teóricos, que neste trabalho, envolvem os processos de pensamento ativados por estudantes ao responderem tarefas matemáticas *standards* e *não standards*.

2.2 Pesquisa de campo e descritiva

Para produzir os dados, promovemos encontros com quatro turmas de uma escola pública, onde aplicamos testes e observamos o comportamento dos alunos durante a realização da pesquisa. Esse procedimento, a respeito da produção dos dados, enquadra-se na pesquisa de campo em Educação, que, de acordo com Tozoni-Reis, "[...] caracteriza-se pela ida do pesquisador ao campo, aos espaços educativos para coleta de dados, com o objetivo de compreender os fenômenos que nele ocorrem." (TOZONI-REIS, 2009, p. 39).

A presente pesquisa, quanto aos objetivos, é classificada como descritiva, pois buscamos descrever tipologias de respostas dadas pelos alunos do curso de Técnico em Edificações do Centro Territorial de Educação de Vitória da Conquista (CETEP). Os alunos fizeram testes com questões *standards* e *não standards*, para isso, utilizamos o documento – registro escrito, como fonte de informação, das respostas apresentadas pelos alunos nos testes aplicados (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2001).

2.3 Lócus

Para conduzirmos o estudo, procuramos o ambiente natural de uma escola: o Centro Territorial de Educação Profissional de Vitória da Conquista (CETEP), pois, conforme Lincoln e Guba (1985, apud TREVISANI, 2012, p. 41), uma das características da pesquisa qualitativa é a produção de dados em ambiente natural dos estudantes. Segundo essa perspectiva, esse procedimento vai favorecer a adaptação da pesquisa para trabalhar com realidades diversas. Investigações desse tipo criam, com maior naturalidade, uma interação entre pesquisador e sujeitos pesquisados.

Fizemos opção pelo CETEP porque essa unidade escolar – situada na Estrada do Bem-Querer, km 4, s/n, no Bairro Universitário, Fazenda Candeias, em Vitória da Conquista, na Bahia – possui alunos provenientes de diferentes territórios do município de Vitória da Conquista e de municípios vizinhos. Schneider e Flach (2014) afirmam: “O território é mais do que um simples local geográfico, pois implica o espaço da convivência social e da mediação afetiva, cultural e material, que permite que os sujeitos trabalhem, habitem, circulem, relacionem-se, divirtam-se.” (SCHNEIDER; FLACH, 2014, p. 9)

Desse modo, tivemos elementos suficientes para proceder a nossa investigação, pois o CETEP possui turmas diversificadas: os alunos pertencem a diferentes classes sociais, econômicas e culturais, sendo de vários bairros da cidade de Vitória da Conquista, do entorno da escola, de assentamentos próximos e ainda de outras cidades da região. Essa diversidade apresenta formas variadas de interação entre os estudantes e enriquece a nossa observação acerca da prática deles na resolução de tarefas matemáticas *standards* e *não standards*.

2.4 Sujeitos

A nossa pesquisa foi realizada do dia 25 de outubro ao dia 1º de novembro de 2018, em quatro turmas, uma de cada série, do curso Técnico em Edificações do CETEP. Esse curso é oferecido pela Secretaria de Educação do Estado da Bahia (SEC) e faz parte da Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio (EPI) que abrange cursos técnicos integrados ao ensino médio com duração de quatro anos.

Os alunos possuíam idade média de 16 anos e estavam assim distribuídos: vinte e seis (26) alunos compunham o primeiro ano, vinte e sete (27) alunos o segundo ano, vinte e nove (29) alunos o terceiro ano e trinta e três (33) o quarto ano. A escolha das turmas foi baseada na aceitação desses grupos em participar do projeto de pesquisa e na disponibilidade dos professores em ceder suas aulas para a aplicação dos testes.

Tivemos três professoras, duas professoras de Matemática, uma do primeiro ano e a outra do segundo ano e uma professora de História do segundo ano. As professoras cederam as suas aulas – duas aulas de cada professora com duração total de 100 minutos – para que pudéssemos aplicar os testes da pesquisa. Elas também estiveram presentes com o intuito de auxiliar na organização da sala de aula, na distribuição e no recolhimento dos testes.

As turmas do terceiro e do quarto ano eram formadas por alunos do professor-pesquisador e os testes foram aplicados nos horários de aula do pesquisador. Vale salientar que, durante a aplicação dos testes no primeiro e no quarto anos, houve a participação da orientadora de mestrado do professor-pesquisador.

2.5 Procedimentos

Com o propósito de responder à questão de pesquisa: "Que processos de pensamento são ativados por estudantes ao resolverem tarefas matemáticas *standards* e *não standards*?", lançamos mão dos seguintes procedimentos:

Documentos – testes com questões *standards* e *não standards* – utilizamos estes procedimentos com a finalidade de identificar e classificar processos de pensamento na resolução de tarefas e comparar os processos de pensamento de alunos para tarefas *standards* e *não standards*. Do ponto de vista conceitual, os testes são considerados documentos. Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2001) definem documento como "[...] qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação. [...] No caso da educação, livros didáticos, registros escolares, programas de curso, planos de aula, trabalhos de alunos são bastante utilizados." (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2001, p. 169).

Os nossos documentos (testes) foram elaborados com base na nossa experiência antes da qualificação e em questões retiradas dos trabalhos de Chamorro e Belmonte (2000), Gusmão (2006) e Gusmão (2014) que já haviam sido validadas em outras pesquisas relacionadas à Educação Matemática. Naquela ocasião, utilizamos apenas tarefas *standards* para desenvolver a pesquisa, mas com a colaboração da banca avaliadora durante a qualificação e o aprofundamento nos nossos estudos, decidimos reformular o nosso trabalho investigativo para que ele ficasse mais próximo do que queríamos: analisar os processos de pensamento de estudantes na resolução de tarefas matemáticas *standards* e *não standards* e atingir os nossos objetivos na investigação. Por esse motivo, elaboramos dois testes: o primeiro foi composto de seis questões rotineiras que denominamos tarefas *standards* e o segundo composto de sete questões não rotineiras que chamamos de tarefas *não standards*. No próximo capítulo desse trabalho dissertativo, abordaremos as informações detalhadas acerca dos testes e de suas respectivas questões.

De acordo com Guba e Lincoln (1981, apud KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015, p. 246), as vantagens de utilizarmos os documentos – testes – é que eles nos proporcionam uma fonte rica e estável, a baixo custo, para a retirada de evidências a fim de sustentar as nossas afirmações e que nos dá a oportunidade de consultar o material inúmeras vezes, pois eles estão mais acessíveis. Por outro lado, segundo os autores, existem desvantagens no uso de documentos, pois podem ser amostras não representativas, as informações podem não ser fidedignas, não estarem padronizados e ocorrer dificuldade na leitura e compreensão do conteúdo escrito.

2.6 Estágios da pesquisa

No quadro seguinte, apresentamos os estágios da pesquisa de maneira sistemática e, em seguida, descrevemos cada um deles.

Quadro 4 – Estágios e descrição

Estágios	**Descrição**	**Duração**
1 – Autorização para a realização da pesquisa	O professor-pesquisador solicita autorização de execução da pesquisa ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UESB, por meio da Plataforma Brasil.	7 meses
2 – Contatos do professor-pesquisador com a escola e com os professores	1º contato: o professor-pesquisador solicita à diretora da escola uma autorização para executar a pesquisa no estabelecimento.	20 min
	2º contato: o professor-pesquisador reúne-se com os colegas na sala dos professores do CETEP, faz uma breve apresentação do projeto de pesquisa e solicita o espaço de sala de aula para execução da pesquisa. Três professores se prontificam a ceder as aulas para a aplicação dos testes.	20 min
3 – Encontros entre o professor-pesquisador e os alunos	1º dia: o professor-pesquisador conversa com os alunos de cada turma sobre a possibilidade de aplicação dos testes da pesquisa. Houve aceitação dos alunos em participar da investigação.	20 min (5 min em cada turma)
4 – Aplicação do teste	2º dia: os alunos do 2º ano responderam o primeiro teste da pesquisa – tarefas *standards*.	50 min
	3º dia: os alunos do 4º ano responderam o primeiro teste da pesquisa – tarefas *standards*.	50 min
	4º dia: • os alunos do 1º ano e 3º ano responderam os dois testes da pesquisa – tarefas *standards* em um horário e tarefas *não standards* em outro. • os alunos do 4º ano responderam o segundo teste da pesquisa – tarefas *não standards*.	150 min (50 min para cada teste)
	5º dia: os alunos do 2º ano responderam o segundo teste da pesquisa – tarefas *não standards*.	50 min

Fonte: o autor (2019)

A junção dos dados constitutivos do *corpus* desta pesquisa ocorreu de maneira cuidadosamente planejada, de sorte que cada estágio pudesse potencializar os resultados pretendidos e aqui relatados sob a forma de objetivos.

Antes de irmos a campo e realizarmos a produção de dados da nossa investigação, submetemos o nosso projeto ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), da UESB, por meio da Plataforma Brasil. O comitê solicitou algumas alterações na folha de rosto, no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e no cronograma do nosso projeto de pesquisa. Dessa forma, aguardamos a apreciação e a permissão ou consentimento expresso para pôr em prática a investigação pretendida. A autorização para executarmos a nossa investigação ocorreu no início do ano de 2018, mais precisamente no dia 27 de abril de 2018.

O segundo estágio consistiu em dois contatos. O primeiro foi realizado com a direção do CETEP para apresentarmos o projeto de pesquisa e, então, solicitarmos a autorização com o intuito de desenvolver a investigação naquele estabelecimento de ensino – proposta esta aceita como atrativa e importante pela direção.

O segundo contato com os docentes aconteceu na sala dos professores daquele estabelecimento de ensino. Na oportunidade, mostramos o nosso projeto, discutimos a viabilidade de investigarmos a respeito da prática de estudantes na resolução de tarefas matemáticas *standards* e *não standards* e solicitamos apoio no sentido de que os colegas professores pudessem ceder algumas aulas para realizarmos encontros com os alunos e aplicarmos dois testes.

A propósito, ao comunicarmos sobre o estudo aos professores da Unidade Escolar, duas professoras de Matemática e uma professora de História demonstraram interesse pelo nosso projeto e colocaram-se à disposição para contatar seus alunos e estudar a viabilidade de execução da pesquisa no ambiente de suas salas de aulas.

Ao constatarmos o interesse dos professores, combinamos que faríamos uma visita breve às salas de aula para conversarmos sobre a aplicação dos testes e verificarmos o grau de aceitação dos alunos para uma possível participação na nossa pesquisa. Assim sendo, entre os dias 15 e 19 de outubro de 2018, realizamos o primeiro encontro, no terceiro estágio, com cada uma das quatro turmas (individualmente) do Curso Técnico em Edificações. A duração desses encontros foi de, aproximadamente, 5 minutos em cada turma, perfazendo um total de 20 minutos nas quatro turmas, logo depois, os alunos concordaram em participar dos encontros a fim de responderem os testes. Fizemos o agendamento com eles e com os professores para a realização do último estágio da produção de dados, conforme quadro a seguir:

Quadro 5 – cronograma de aplicação dos testes

Data	Ano de escolaridade	Encontro	Teste	Duração
25/10/2018	2º	1º	Primeiro	50 min
26/10/2018	4º	2º	Primeiro	50 min
30/10/2018	1º	1º e 2º	Primeiro e segundo (um em cada horário)	100 min
30/10/2018	3º	1º e 2º	Primeiro e segundo (um em cada horário)	100 min
30/10/2018	4º	2º	Segundo	50 min
01/11/2018	2º	2º	Segundo	50 min

Fonte: o autor (2019)

Na semana seguinte, precisamente no dia 25 de outubro, aconteceu o primeiro encontro da quarta e última etapa da produção de dados para a aplicação do teste com a turma do 2º ano do referido curso. Neste dia, aplicamos o teste com tarefas *standards* – primeiro teste – e contamos com a participação e o auxílio da professora de História, que colaborou na distribuição e no recolhimento dos testes, bem como nas anotações do tempo utilizado por cada aluno na execução da tarefa. Uma vez que os alunos fizeram o teste, individualmente, com dedicação e exclusividade, não houve nenhum episódio que pudesse comprometer o andamento da atividade.

No dia 26 de outubro, realizamos o segundo encontro da quarta etapa ao aplicar o primeiro teste na turma do 4º ano. Neste dia, contamos com a participação da nossa orientadora, que auxiliou na distribuição, recolhimento e anotações sobre o tempo gasto de teste por cada aluno. Mais uma vez tudo ocorreu dentro da normalidade, sem nenhum episódio de "cola" ou desconforto de qualquer natureza.

No dia 30 de outubro, no terceiro encontro da quarta etapa, aplicamos os testes no 1º ano, no 3º ano e, novamente, no 4º ano. Na turma de 1º ano, contamos com a presença da nossa orientadora e da professora de Matemática da turma, que auxiliaram na entrega e retirada dos testes, assim como nas anotações sobre o tempo gasto por cada aluno na realização da tarefa. Na turma do 3º ano, no momento da aplicação, não houve participação de outros professores senão do professor-pesquisador. Vale salientar que, nestas duas turmas, os dois testes foram aplicados no mesmo dia, porém em horários distintos. Tivemos à nossa disposição duas aulas geminadas, com 50 minutos cada. Aplicamos as tarefas *standards* em um horário e as *não standards* no outro, perfazendo um total de 100 minutos. Neste mesmo dia, aplicamos na turma do 4º ano o segundo teste com tarefas *não standards*, com duração de 50 minutos.

O nosso quarto encontro, da quarta etapa, aconteceu no dia primeiro de novembro com a turma do 2º ano. Neste dia, os alunos responderam o segundo teste que foi aplicado, única e exclusivamente pelo professor-pesquisador. Mais uma vez, vale reforçar que os alunos responderam o teste individualmente e sem diálogo entre eles e entre estes e o aplicador e, portanto, não foram detectados episódios que pudessem interferir no andamento das atividades da nossa produção de dados.

Os dois testes aplicados na nossa pesquisa eram compostos por 13 questões, sendo seis questões *standards* e sete questões *não standards*. Esses testes foram respondidos individualmente. No primeiro teste, contamos com a participação de 115 alunos e, no segundo, tivemos 112 alunos presentes, visto que três alunos do 2º ano se ausentaram no dia combinado para execução do segundo teste naquela turma.

A parte descritiva compreendeu, pois, um registro das informações ocorridas durante o desenvolvimento da atividade pedagógica, considerando a forma como os alunos responderam as questões e os caminhos utilizados por eles nas respostas apresentadas, tanto nos cálculos quanto nos relatos escritos nas soluções de cada questão.

Como critério para analisar os dados emergentes da nossa investigação, organizamos os dados produzidos – as respostas dadas pelos alunos – em categorias pré-estabelecidas que foram pontuadas na nossa revisão de literatura, a saber: processos de pensamento pobre, rico, muito rico e tratamos os resultados com a enumeração das características existentes nas respostas apresentadas. Após esse tratamento, fizemos *inferências* baseadas em indicadores quantitativos e qualitativos e demos significação às características enumeradas – *interpretação*.

CAPÍTULO 3: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Nesse capítulo, trouxemos resoluções possíveis de todas as questões, a tabulação dos dados, por categoria, das respostas dos alunos e um estudo pormenorizado de quatro questões *standards* e cinco *não standards* devido ao tempo reduzido para o término do nosso trabalho dissertativo. Também acreditamos que o quantitativo de questões analisadas foi suficiente para inferirmos sobre os processos de pensamento ativados para os tipos de testes propostos.

No item resoluções possíveis, o leitor poderá conhecer melhor a natureza de cada questão e algumas possibilidades de respostas que os alunos podem mostrar nas tarefas *standards* e *não standards*. Na tabulação dos dados, o leitor poderá acompanhar o percentual dos alunos que apresentaram determinado tipo de resposta por processo ativado nas categorias – pobre, rico, muito rico, confuso e em branco. Durante o estudo pormenorizado, fizemos inferência e interpretação dos dados obtidos e trouxemos alguns exemplos por tipologia de resposta para os processos pobre, rico e muito rico. Para finalizar, apresentamos um comparativo entre algumas questões *standard*s e *não standards*.

3.1 Primeiro Teste

O primeiro teste é composto por seis questões *standards*. Consideramos *standards* porque elas apresentam condições e exigências em seu enunciado que conduzem o estudante a uma única solução e remetem a um modelo de resolução usual. O estudante pode apresentar mais de uma forma de solucioná-las, porém incorrerá em resposta única.

Nesse tipo de questão o aluno nem sempre apresenta um raciocínio mais elaborado e, geralmente, resolve a tarefa com o auxílio de técnicas ou algoritmos já automatizados por ele. São questões as quais consideramos que requerem domínio de conteúdos básicos ou elementares da matemática. Há questões que estão presentes desde os anos iniciais de escolaridade. O motivo da escolha deste modelo de teste é baseada na observação do tipo de raciocínio que o aluno pode apresentar ao responder questões padrões que têm feito parte do seu dia-a-dia escolar e fazer um comparativo com as questões do segundo teste.

Vale salientar que, mesmo tratando-se de questões *standards*, a nossa intensão é também observar a capacidade do aluno de apresentar uma solução fora do padrão, que demonstre flexibilidade na linha de raciocínio e ative processos de pensamento *rico* ou *muito rico*.

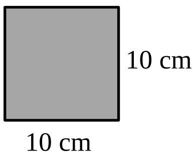
3.1.1 Resoluções possíveis, tabulação e estudo pormenorizado das questões *standards*

Na sequência, mostramos resoluções possíveis, a tabulação dos dados e um estudo pormenorizado obtidos na nossa pesquisa de campo para esse primeiro teste. Para tabular e fazer o estudo pormenorizado dos dados, levamos em consideração as categorias *pobre*, *rico*, *muito rico*, *confuso* (para as respostas cujos raciocínios não formos capazes de analisar) e *em branco* (para as respostas em branco), os processos de pensamento ativados pelos alunos ao responderem as tarefas matemáticas, as características de cada resposta denominadas aqui de "tipologias de respostas", as séries (anos) em que foram aplicados os testes e os processos de supervisão, regulação e avaliação (S/R/A). Além disso, fizemos um tratamento quantitativo percentual dos dados obtidos e analisamos do ponto de vista qualitativo cada questão aplicada.

3.1.1.1 Questão 1: resoluções possíveis, tabulação e estudo pormenorizado

Questão 1

Qual a área da figura?



Resoluções possíveis:

O cálculo de área de figuras planas é um conteúdo trabalhado desde os primeiros anos do ensino fundamental que se adequa às exigências dos currículos previstos para o 5º ano e o 8º ano escolares. Essa questão apresenta uma única solução e deve ser respondida considerando a unidade de medida (cm). A medida da área da figura geométrica, neste caso, o quadrado, é dada por $A = l \cdot l$, ou seja, $A = l^2$. Assim sendo, uma possível solução para essa questão é $A = 10cm \times 10cm = 100cm^2$, ou ainda, $A = (10cm)^2 = 100cm^2$.

Resposta: 100 cm^2.

Tabulação dos dados:

A tabela que sintetiza os resultados para essa questão apresenta-se a seguir:

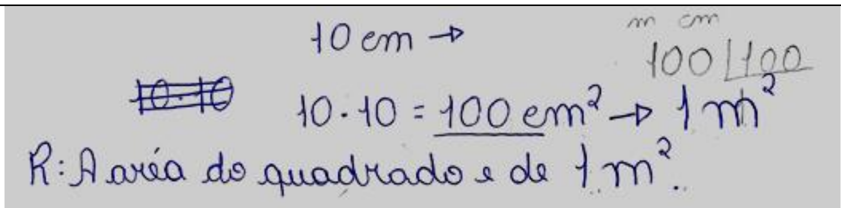
Tabela 1: Questão 1

Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre	Não domina conteúdo/Erros de cálculo	Não utiliza a unidade de medida/ Confunde ou erra a unidade de medida.	17	10	9	13	42,6%	1S/A
61,7%		Confunde a área com o perímetro.	4	13	0	2	16,5%	
		Utiliza fórmula errada.	0	0	0	1	0,9%	
	Domínio de técnica sem justificativa; imitação de um modelo	Apresenta resposta correta sem justificar ou apresentar outros cálculos.	0	0	1	1	1,7%	
Rico 35,7%	Domínio de elementos particulares	Apresenta uma resposta que consideramos correta.	4	4	18	15	35,7%	2S/A
Muito rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Confuso 2,6%	Planos confusos, imprecisos/ Argumentações imprecisas	Apresenta resposta confusa, impossibilitando a análise.	1	0	1	1	2,6%	
Em branco 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
		Total	26	27	29	33	100,0%	

Fonte: o autor (2019)

Estudo pormenorizado:

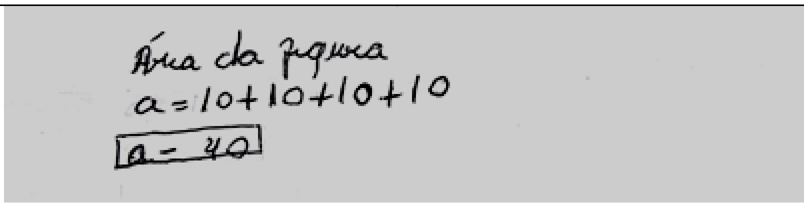
Contamos com a participação de 115 alunos neste primeiro teste. Ao analisarmos essa questão, percebemos que 71 alunos, aproximadamente 61,7%, enquadram-se nos processos de pensamento do tipo *pobre*. Destes, 49 *não dominam conteúdo* ou apresentam *erros de cálculo*, confundindo ou não utilizando, por exemplo, a unidade de medida nas respostas apresentadas, conforme podemos observar na resposta:



Aluno (A15)

Nessa solução apresentada pelo aluno A15, percebemos que ele confunde a unidade de medida cm^2 com m^2. Dessa maneira, deduzimos que, mesmo num nível pouco consciente, ele parece fazer *supervisão* ao apresentar dois traços em cima da operação iniciada como se certificasse de ter começado o cálculo corretamente, além de fazer uma *avaliação*, pois “dá por resolvido o problema” (GUSMÃO, 2006), apresentando uma resposta final: “A área do quadrado é de 1 m^2”.

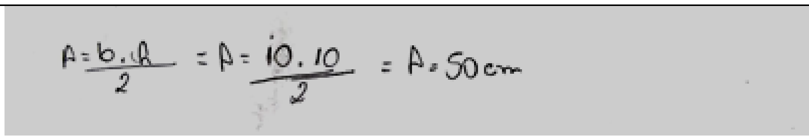
Por sua vez, nessa mesma categoria (*pobre*), e considerando que o aluno *não domina conteúdo* ou apresenta *erros de cálculo*, percebemos que, aproximadamente 16,5% (19 alunos), confundem área com perímetro conforme podemos observar neste outro exemplo:



Aluno (A102)

O aluno A102 escreve “Área da figura”, mas aplica a soma dos quatro lados do quadrado, o que configura o perímetro e não a área como ele havia pensado. Esse aluno parece não dominar o conteúdo solicitado na questão, em vista disso, encontra-se na categoria de processo de pensamento *pobre*.

Ainda nessa categoria e com relação à falta de domínio do conteúdo matemático, detectamos a resposta de um aluno que apresentou uma fórmula equivocada:

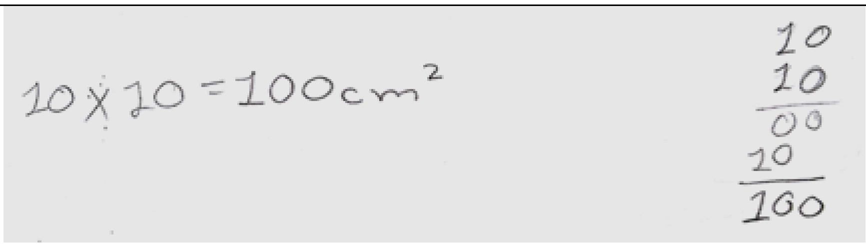


Aluno (A101)

O aluno A101 apresentou uma fórmula para calcular a área de um triângulo ($A = \frac{b \cdot h}{2}$), o que não serve de ferramenta para solucionar a questão proposta (a área de um quadrado).

Dois alunos apresentaram resposta correta, mas sem justificar ou apresentar outros cálculos. Consideramos que esses alunos tiveram *domínio de técnica sem justificativa*, ou seja, suponhamos que o aluno é capaz de executar o cálculo implicitamente com precisão ou, até mesmo, que ele esteja imitando uma resposta vista a priori. Classificamos essas respostas também na categoria de pensamento *pobre*, pois, embora tenham acertado, esses alunos se privaram do exercício de cálculo do problema.

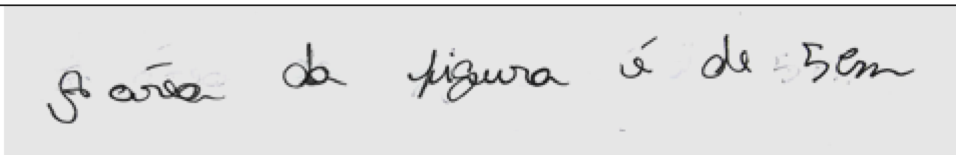
Como dito anteriormente, o aluno que se deparar com uma tarefa *standard* (fechada) pode apresentar, na sua resolução, um desenvolvimento *pobre*, *rico*, mas também *muito rico*. Assim sendo, detectamos quatro respostas do 1º ano, quatro do 2º, 18 do 3º e 15 do 4º, perfazendo um total de, aproximadamente, 35,7% das respostas (41 alunos) consideradas corretas, e que foram classificadas como processos de pensamento *rico*, pois mostram em suas soluções escritas um *domínio de elementos particulares*. Vejamos um exemplo:



Aluno (A6)

Percebemos que este aluno *supervisionou* e *avaliou* a sua resposta ao realizar a operação ao lado da solução apresentada. Ainda com relação a esses processos de supervisão e avaliação, percebemos que, no conjunto das tipologias de respostas de *domínio de elementos particulares*, tivemos outro aluno que fez esse tipo de supervisão e avaliação tal qual esse aluno A6.

Três alunos apresentaram respostas confusas ou equivocadas, impossibilitando a análise. Vejamos uma dessas respostas:



Aluno (A16)

A resposta do aluno A16 está confusa, portanto não favoreceu a nossa análise.

3.1.1.2 Questão 2: resoluções possíveis e tabulação dos dados

Para essa questão, apresentamos apenas as resoluções possíveis e a tabulação dos dados.

Questão 2 - (GUSMÃO, 2014):
Dona Rosa comprou três metros e meio de mangueira para molhar a sua horta. Quantos milímetros de mangueira ela comprou?

Resoluções possíveis:

Para resolver este problema, o estudante poderia se apoiar no clássico esquema de conversão:

$$\text{km} \underset{:10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{hm} \underset{:10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{dam} \underset{:10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{m} \underset{:10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{dm} \underset{:10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{cm} \underset{:10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{mm}$$

Fonte: o autor (2019)

De acordo com esse esquema, temos:

$$\begin{aligned} &3{,}5m \times 10 \Rightarrow 35dm \\ &35dm \times 10 \Rightarrow 350cm \quad , \\ &350cm \times 10 \Rightarrow 3500mm \end{aligned}$$

ou ainda: $3{,}5m \times 1000 \Rightarrow 3500mm$.

Também é provável que o aluno resolva à questão por meio de outro clássico esquema, usando a seguinte tabela:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
			3	5	0	0

Nesse caso, o aluno colocaria o algarismo 3 na casa da unidade (o metro), o algarismo 5 na casa imediatamente à direita (o decímetro) e completaria as demais casas à direita com zeros até chegar na casa desejada que é o milímetro.

Poderemos encontrar respostas em que o aluno apresente uma regra de três simples e direta:

	metros	milímetros	
⬇	1	1000	⬇
	3,5	x	

O aluno poderá estabelecer a igualdade entre as duas razões e multiplicar meios com meios e extremos com extremos, assim:

$$\frac{1}{3{,}5} = \frac{1000}{x} \Rightarrow x \cdot 1 = 3{,}5 \cdot 1000 \Rightarrow x = 3500$$

Resposta: 3500 milímetros de mangueira.

Esse tipo de questão é de solução única, porém com certa flexibilidade na forma de resolvê-la. Ela se refere à unidade temática “Grandezas e Medidas” que é apresentada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os documentos oficiais recomendam a presença dessa temática na escolaridade do estudante desde os primeiros anos do ensino fundamental, sendo dosada ao passo que a escolaridade do aluno se desenvolve. Segundo os documentos oficiais,

“[...] a unidade temática Grandezas e Medidas, [...] favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, [...] contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico” (BRASIL, 2016, p. 271).

Tabulação dos dados:

A tabela que sintetiza os resultados apresenta-se a seguir:

Tabela 2: Questão 2

Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre 59,1%	Não domina conteúdo/Erros de cálculo	Apresenta erros de cálculo ou cálculo incompleto.	5	6	8	14	28,7%	
	Domínio de técnica sem justificativa	Apenas apresenta a resposta correta sem o uso de cálculos ou cálculos incorretos.	2	4	6	7	16,5%	
	Experimentação ingênua	Resposta incorreta e sem cálculo.	0	12	1	3	13,9%	
Rico 22,6%	Dedução inquirida	Soluciona a questão por meio de regra de três ou por equivalência entre as unidades de medidas.	4	2	3	6	13,0%	
	Domínio de elementos particulares	Utiliza a tabela do sistema métrico ou multiplica por 1000.	5	0	4	2	9,6%	
Muito rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Confuso 13,9%	Planos confusos, imprecisos	Resposta que impossibilita análise: utiliza tabela com o sistema métrico decimal invertido (do submúltiplo para o múltiplo).	9	2	4	1	13,9%	
Em branco 4,3%		Não respondeu.	1	1	3	0	4,3%	
		Total	26	27	29	33	100,0%	

Fonte: o autor (2019)

3.1.1.3 Questão 3: resoluções possíveis, tabulação dos dados e estudo pormenorizado

Questão 3 – (GUSMÃO, 2006):

Se vou de carro a 40 km/h até um determinado local, demoro 20 minutos para chegar. Quanto tempo levarei para retornar, se retorno a 50 km/h?

a) 20 minutos b) 16 minutos c) 25 minutos d) 21,25 minutos

Resoluções possíveis:

Essa questão pode ser resolvida por meio de regra de três ou baseada na ideia de proporcionalidade. No primeiro caso, a resposta do aluno estaria se adequando ao objetivo da

Matemática para o 4º ciclo (5ª a 8ª série), proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): “Do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: [...] resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três.” (BRASIL, 1998, p. 82). Sendo assim, teríamos:

<table>
<tr><td rowspan="3">⬇</td><td>Velocidade</td><td>Tempo gasto</td><td rowspan="3">⬆</td></tr>
<tr><td>40 km/h</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td>50 km/h</td><td>x</td></tr>
</table>

Após perceber que se trata de uma regra de três inversa, o aluno poderá estabelecer a igualdade entre as duas razões e multiplicar meios com meios e extremos com extremos, assim:

$$\frac{40}{50} = \frac{x}{20} \Rightarrow 50 \cdot x = 40 \cdot 20 \Rightarrow 50x = 800 \Rightarrow x = \frac{800}{50} \Rightarrow x = 16$$

Resposta: se retorno a 50 km/h, levarei 16 minutos para retornar.

Do outro modo, seria observando o que está proposto na BNCC para o sexto ano, na habilidade EF06MA13: “Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.” (BRASIL, 2016, p. 299). Como não fizemos uso da calculadora, então a questão estaria contemplada na ideia inicial dessa habilidade. Vejamos como resolver a questão por proporcionalidade:

1º passo: descobrir a constante de proporcionalidade que, nesse caso, por ser uma grandeza inversamente proporcional, é simbolicamente representada pela equivalência $x \cdot y = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$, com k constante e diferente de zero.

2º passo: montar uma tabela para visualizar melhor os dados da questão.

x (tempo em min)	**y** (velocidade em km/h)
20	40
?	50

3º passo: desenvolver o cálculo.

Ao considerarmos a constante de proporcionalidade k e ao observarmos a primeira linha da tabela, temos: se $x \cdot y = k$, então $20 \cdot 40 = k$. Logo $k = 800$. Assim sendo, para a segunda linha da tabela, teremos: se $x \cdot y = k$, então $t \cdot y = k$, mas y=50 e k=800. Dessa informação, decorrem: $t \cdot 50 = 800$ e $t = \frac{800}{50}$. Portanto $t = 16$.

Resposta: se retorno a 50 km/h, levarei 16 minutos para retornar.

Tabulação dos dados:

Tabela 3: Questão 3

Categorias	**Processos ativados**	**Tipologias de respostas**	**1º ano**	**2º ano**	**3º ano**	**4º ano**	**%**	**S/R/A**
Pobre	Não domina conteúdo/Erros de cálculo	Apresenta uma resposta com regra de três direta (deveria ser inversa).	5	2	16	22	39,1%	11S/A; 1S/R/A
83,5%		Aplica proporção, mas não percebe a inversa.	0	0	1	1	1,7%	
		Utiliza uma fórmula de Física, mas não conclui.	0	0	1	0	0,9%	1S/A
	Domínio de técnica sem justificativa	Assinala apenas a resposta correta, sem cálculo.	11	11	4	6	27,8%	
	Conduta evasiva	Assinala a resposta incorreta sem apresentar cálculo.	6	5	3	2	13,9%	
Rico	Dedução inquirida	Apresenta uma regra de três inversa (correta).	0	2	0	0	1,7%	1S/A
7,8%		Aplica proporcionalidade e acerta.	0	0	1	1	1,7%	
		Faz uma redução à unidade e encontra a resposta.	0	1	0	0	0,9%	
		Considera a grandeza inversamente proporcional, analisa as alternativas e marca a resposta correta.	2	1	1	0	3,5%	1S/A
Muito rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Confuso 8,7%	Planos confusos, imprecisos/ Argumentações imprecisas	Apresenta cálculo ou justificativa (relato escrito) confusos.	2	5	2	1	8,7%	
Em branco 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
		Total	26	27	29	33	100,0%	

Fonte: o autor (2019)

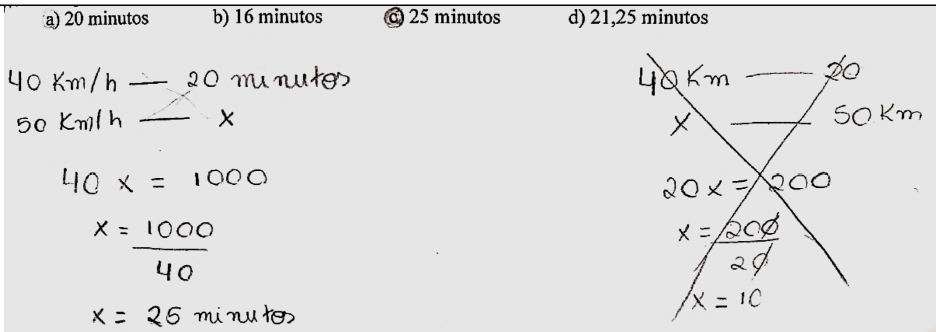
Estudo pormenorizado:

Dos 115 alunos que participaram da resolução dessa terceira questão, aproximadamente 83,5% (96 alunos) estão na categoria *pobre*. Nessa categoria, 41,8% dos estudantes (48 estudantes) demonstram que *não dominam conteúdo* e cometem *erros de cálculo*, pois nas soluções apresentadas constatamos as seguintes características: apresentação de uma regra de três direta e não inversa como requer o problema, aplicação de uma proporcionalidade direta e não inversa e aplicação de fórmula da velocidade média (Física) para calcular a distância sem conclusão de resposta.

Outros 27,8% (32 alunos), consideramos que estão na mesma categoria (pobre) e apresentam *domínio de técnica sem justificativa*, pois apenas assinalam a resposta correta sem cálculo. Também nessa categoria, encontramos 13,9% (16 alunos) que marcam a resposta incorreta sem apresentar cálculo, incidindo numa conduta *evasiva*, pois nesse tipo de conduta, os alunos "fogem a obrigatoriedade de um uso explícito da linguagem matemática" ou, até mesmo, o estudante "abstém-se de procedimentos de cálculos" (MOURA, 2015, p. 162).

Concebemos que 12 alunos desse grupo apresentam em suas respostas os processos de *supervisão* e de *avaliação* e um estudante apresenta, além desses dois processos, a *regulação*, visto que mostra operações estruturadas, respostas finais nas suas tarefas e, nesse último caso, mudança de estratégia conforme aponta Gusmão (2006).

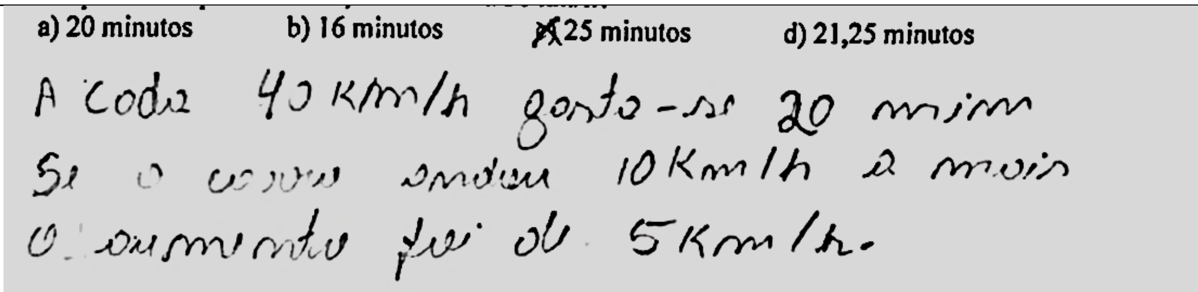
Vejamos alguns exemplos de resposta dessa categoria:



Aluno (A94)

O estudante A94, classificado na categoria *pobre*, apresenta em vez de uma regra de três inversa, uma regra de três direta. Este aluno não percebe a proporcionalidade inversa. O estudante faz uma *supervisão* e uma *regulação*, pois percebe que tinha organizado a regra de três de forma equivocada (lado direito da imagem), abandona o caminho e passa a estruturá-lo novamente. Dito de outra forma, *supervisiona*, *regula* e *avalia* o caminho usado para resolver a tarefa, ainda que em um nível baixo, porque não toma a decisão assertiva. Também, no que tange aos processos de supervisão e avaliação, notamos que, no conjunto das tipologias de respostas *não domínio de conteúdo/erros de cálculo*, onze alunos fazem *supervisão* e *avaliação* de forma semelhante ao aluno A94.

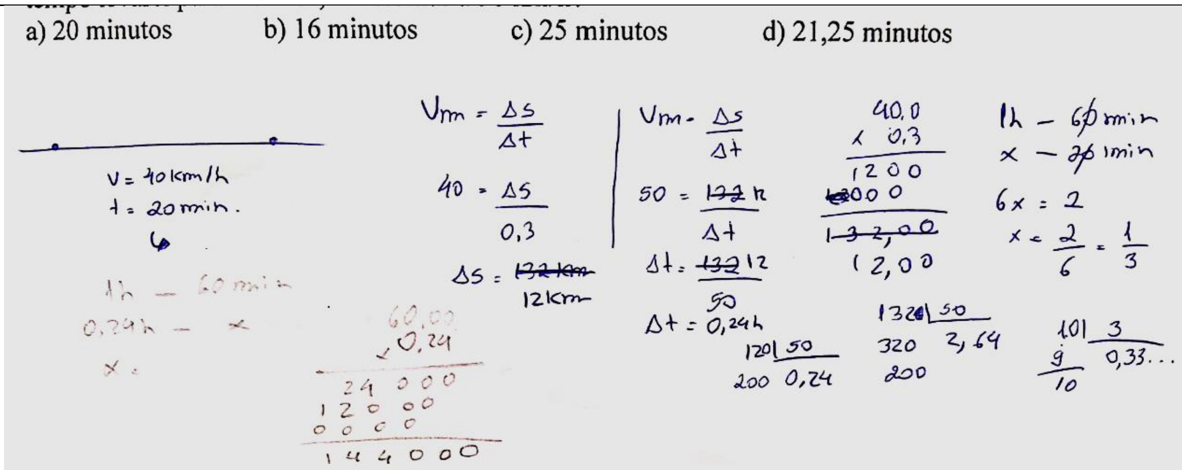
Um segundo exemplo representa os alunos que aplicam proporção, entretanto não percebem a proporcionalidade inversa:



Aluno (A61)

O estudante A61 estabelece, implicitamente, que 40 km/h está para 20 min, assim como 10 km/h está para 5 min, mas não percebe que quanto mais se aumenta a velocidade, neste caso aumentou de 40 km/h para 50 km/h, o tempo gasto na viagem é reduzido na mesma razão de proporcionalidade, porém inversa. Assim, acreditamos que, na frase: “o aumento foi de 5 km/h”, o aluno quis dizer 5 min e não 5 km/h, dado que ele chega à conclusão que deveria aumentar 5 para se chegar à resposta 25 minutos.

Para concluir os processos de pensamento *pobre*, apresentamos a resposta do aluno que utiliza conhecimentos de Física e tenta resolver a tarefa utilizando a fórmula da velocidade média $vm = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (velocidade média=distância/tempo):

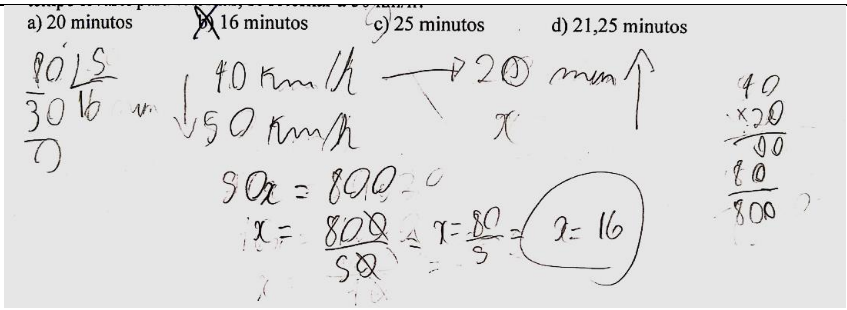


Aluno (A57)

Apesar de optar por um caminho diferente em relação aos demais alunos, o aluno A57, ao usar a fórmula da velocidade média, não conseguiu estruturar a sua resposta e concluir com êxito a questão, demonstrando *não dominar conteúdo* suficiente para encontrar a solução desejada. É importante salientar que este estudante *supervisiona*, *regula* e *avalia* durante a resolução da tarefa, porque mostra em sua resposta cálculos auxiliares, “risca” aquilo que não deu certo e, de certa forma, apresenta resultados finais das suas operações.

Já que durante a aplicação não constatamos “cola”, consideramos que alguns alunos apresentaram uma conduta *evasiva*, uma vez que se abstiveram do procedimento de cálculos para respostas com essas características, conforme argumenta Moura (2015).

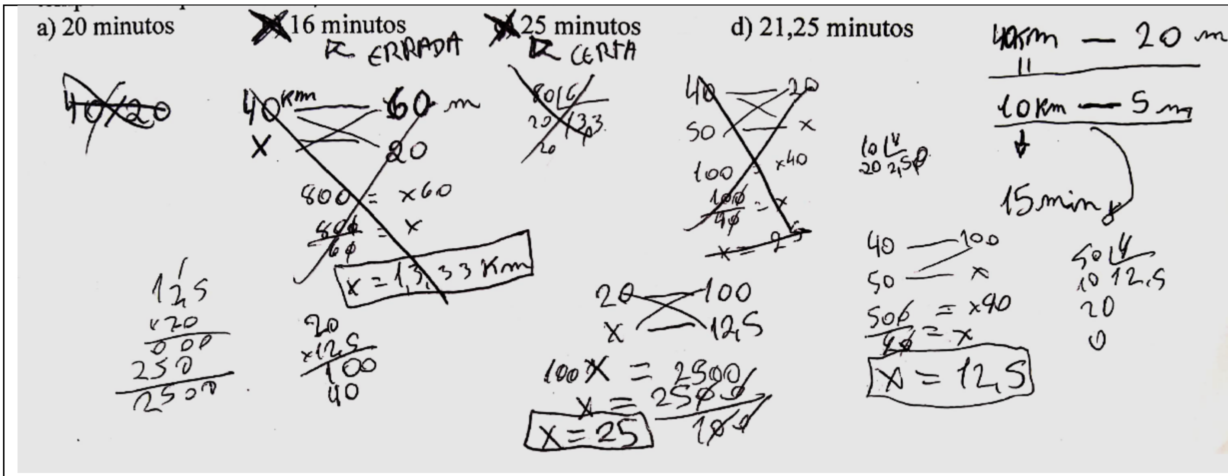
Nove alunos dos 115, isto é, aproximadamente 7,8% dos estudantes, apresentaram cálculos ou justificativas que consideramos corretos e, portanto, os definimos como elementos do conjunto de alunos que ativam *processos de pensamento rico*. Como solução ilustrativa temos:



Aluno (A40)

O aluno A40 consegue resolver a questão quando apresentou um procedimento de regra de três inversa. Isso significa que o estudante percebe que, ao aumentar a velocidade, o tempo diminui, ou seja, ao voltar mais rápido chega em menos tempo. Esse aluno se enquadra no processo de *dedução inquirida*, pois apresenta um cálculo completo, isto é, “desenha a estratégia completa e, portanto, experimenta o processo que o leva a descobrir a resposta” (GUSMÃO, 2006, p. 140). Além disso, percebemos que o aluno *supervisiona*, *regula* e *avalia* o seu processo de pensamento, já que estrutura cálculos auxiliares, deixa vestígios de ter “apagado” cálculos, num sinal de que retoma o caminho em busca da solução. Ao supervisionar e ao regular, muda de estratégia, demonstrando que verifica se as condições impostas pela tarefa estão sendo cumpridas.

Nessa questão 3, 8,7% (10 alunos) apresentaram respostas que impossibilitaram a nossa análise, porque os cálculos ou as justificativas estavam confusos, conforme podemos observar no exemplo:



Aluno (A89)

O aluno A89 apresentou vários cálculos, mas anulou (riscou) várias vezes de forma que não conseguimos compreender qual cálculo ele considerou como correto. Embora tenha assinalado a resposta 25 e colocado como “certa”, o cálculo dele ficou muito confuso e impediu a nossa análise. Podemos considerar que ele *supervisionou* e *regulou*, mesmo não conseguindo uma resposta desejável, uma vez que cancelou várias operações e as retomou para tentar resolver a tarefa.

3.1.1.4 Questão 4: resoluções possíveis, tabulação dos dados e estudo pormenorizado

Questão 4 – (Adaptada de GUSMÃO, 2006):

Resolva o seguinte sistema de equação do 1º grau: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.

Resoluções possíveis:

Essa é mais uma questão tradicional apresentada pelos livros didáticos. Embora seja uma questão *standard* e não esteja contextualizada, está de acordo com a unidade temática “Álgebra”, que aparece na BNCC proposta para o 8º ano e que se encaixa no objeto do conhecimento “Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano”. Esse sistema apresenta a habilidade EF08MA08: “Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.” (BRASIL, 2016, p. 311).

Os alunos podem apresentar a solução desta questão por meio do método da substituição, da adição ou por substituição de valores que satisfaçam as igualdades apresentadas. Vejamos essas três maneiras de solucionar a questão:

Pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$$

Vamos isolar a variável y na equação $x+y=3$.

$x+y=3 \Rightarrow y=3-x$

Agora, vamos substituir o valor de y na equação $2x+3y=7$ e desenvolver os cálculos.

$2x+3(3-x)=7 \Rightarrow 2x+9-3x=7 \Rightarrow 2x-3x=7-9 \Rightarrow -x=-2 \Rightarrow x=2$.

Finalmente, como $y=3-x$, substituímos o valor de x = 2 na expressão e encontramos y = 1.

Resposta: x = 2 e y = 1

Pelo método da adição:

Multiplicamos a equação $x+y=3$ por – 2 e obtemos $-2x-2y=-6$.

Assim, temos: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-6 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$. Ao somarmos as duas equações, obtemos y=1.

Finalmente, vamos substituir o valor de y = 1 na equação $x+y=3$:

$$x+y=3 \Rightarrow x+1=3 \Rightarrow x=3-1 \Rightarrow x=2$$

Resposta: x = 2 e y = 1

Pela substituição de valores:

O aluno poderia fazer tentativas de substituição com valor numérico e poderia chegar à seguinte solução:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+1=3 \\ 2\cdot 2+3\cdot 1=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+1=3 \\ 4+3=7 \end{cases} \Rightarrow \mathit{Conclusão}: x=2 \; e \; y=1.$$

Tabulação dos dados:

Tabela 4: Questão 4

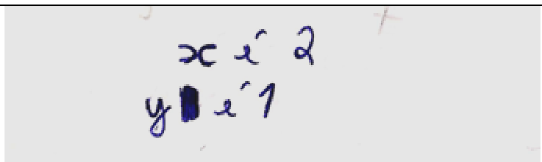
Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre	Domínio de técnica sem justificativa	Apresenta o valor de x e o valor de y, mas não apresenta cálculo.	1	0	0	0	0,9%	S/R/A(1)
27,8%	Não domina conteúdo/Erros de cálculo	Apresenta erros nos cálculos ou apresenta solução incompleta.	3	4	12	10	25,2%	6S/R/A; 3S/A
	Evasivo	justifica: “não sei” ou “utilizaria baskara, mas não me recordo”.	0	0	0	2	1,7%	
Rico	Dedução inquirida	Aplica o método da substituição ou da adição e acerta.	1	3	6	1	9,6%	2S/A
14,8%	Dedução parcial/Domínio de elementos particulares	Substitui valor numérico nas incógnitas e encontra a resposta.	4	1	1	0	5,2%	1S/R/A
Muito rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Confuso 29,6%	Planos confusos, imprecisos	Resposta que impossibilita análise.	11	10	5	8	29,6%	
Em branco 27,8%		Não respondeu.	6	9	5	12	27,8%	
		Total	26	27	29	33	100,0%	

Fonte: o autor (2019)

Estudo pormenorizado:

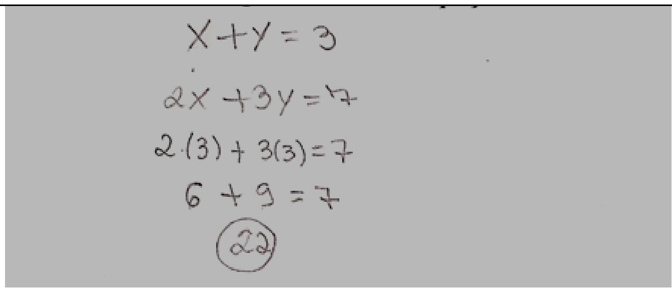
Nessa questão 4, dos 115 alunos participantes, tivemos 27,8% (32 alunos) que se enquadram na categoria *pobre*, 14,8% (17 alunos) na categoria *rico*, 29,6% (34 alunos) apresentaram resposta *confusa* e 27,8% (32 alunos) entregaram a questão em *branco*.

Na categoria *pobre*, tivemos um aluno que apresentou o valor de x e o valor de y, porém não apresentou cálculo, provavelmente fez uso do cálculo mental conforme sugerem Santos e Buriasco (2008) e se adequa ao *domínio de técnica sem justificativa*. Ele apresentou rasuras (riscou a resposta) demonstrando que *supervisionou*, *regulou* e *avaliou* a sua ação durante a resolução da tarefa. Vejamos a resposta desse aluno:



A3

Nessa categoria, tivemos também 25,2% (29 alunos) que apresentaram *erros nos cálculos* ou trouxeram uma solução incompleta. Esses alunos demonstram *não dominar o conteúdo*. Vejamos um exemplo:

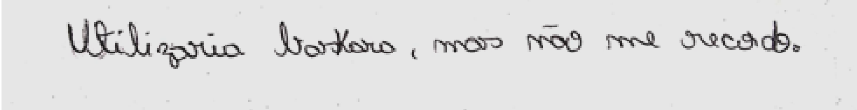


A64

O estudante A64 tenta responder a questão substituindo o valor “3” no lugar das incógnitas, mas, além de substituir um valor inadequado, não consegue operar corretamente a sentença aritmética e, por isso, apresenta dificuldade em operar matematicamente e demonstra *não dominar o conteúdo*.

Vale salientar que, dos alunos que não dominam conteúdo e apresentam erros de cálculo, seis fizeram rascunhos, apresentaram rasuras ou deixaram vestígios de ter apagado suas respostas demonstrando *supervisionar*, *regular* e *avaliar* as suas ações. Nesse contexto, ainda tivemos três alunos que apresentaram cálculos auxiliares e respostas conclusivas (embora erradas), demonstrando *supervisão* e *avaliação*.

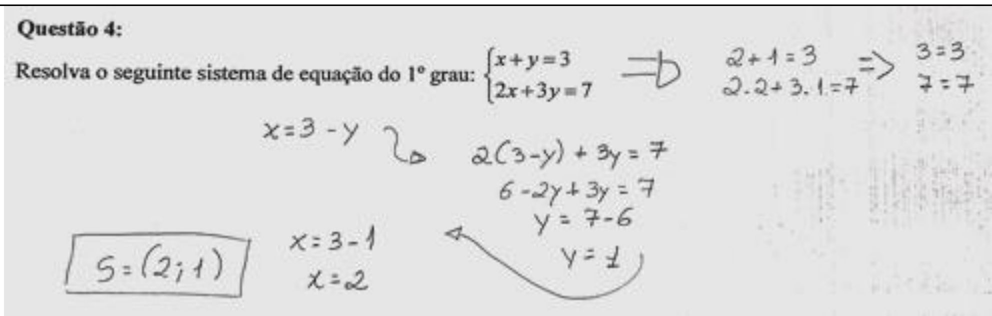
Ainda nessa categoria, 1,7% (2 alunos) teve uma conduta *evasiva*. Um deles apresentou a resposta “não sei” e o outro “utilizaria baskara, mas não me recordo”. Pensamos que esses alunos “demonstram não ter interesse em se implicar no problema” (MOURA, 2015, p. 161). A seguir, apresentamos um desses exemplos:



A96

O aluno A96 parece não ter interesse em se envolver na tarefa, uma vez que “modifica a linguagem adaptando-a as informações que se quer comunicar” (MOURA, 2015, p. 161) e, dessa maneira, apresenta um comportamento *evasivo*.

Na categoria *rico*, encontramos 9,6% (11 alunos) que acertaram a questão ao aplicarem o método da substituição ou o método da adição. Esses alunos ativam o processo de *dedução inquirida*, pois desenham a estratégia completa e descobrem a resposta para a situação apresentada (GUSMÃO, 2006). A seguir, um exemplo:

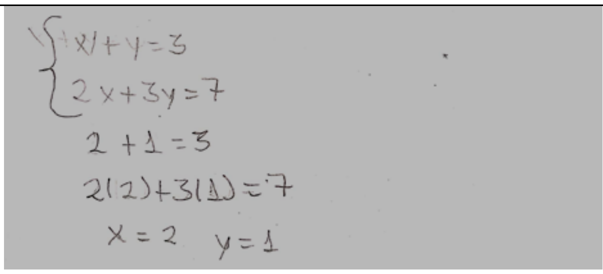


A114

O aluno A114 aplica o método da substituição para resolver a tarefa e encontra a resposta desejável. Além disso, faz uma *supervisão* e uma *avaliação* ao testar os valores encontrados, como podemos ver no canto superior direito da imagem da sua resposta.

Além disso, na categoria *rico*, encontramos dois alunos que *supervisiona* e *avalia* suas ações e um aluno que *supervisiona*, *regula* e *avalia*. No primeiro caso, os dois alunos apresentam cálculos auxiliares e respostas conclusivas. No segundo caso, o aluno abandona o caminho (risca a resposta) e procura redirecionar a sua solução.

Ainda nessa mesma categoria (rico), tivemos 5,2% (6 alunos) que conseguiram encontrar a resposta ao substituir um valor numérico em lugar das incógnitas. Esses alunos apresentam um *domínio de elementos particulares*, já que mostram exemplo a modo de ilustração. Vejamos esse tipo de resposta:



A43

O aluno A43 apresenta *dedução parcial/domínio de elementos particulares* ao encontrar uma resposta aceitável, substituindo valores numéricos no lugar das incógnitas (2 em lugar de *x* e 1 m lugar de *y*).

3.1.1.5 Questão 5: resoluções possíveis e tabulação dos dados

A seguir trouxemos a resoluções possíveis e a tabulação dos dados da quinta questão *standard*.

Questão 5 – (Adaptada de CHAMORRO; BELMONTE, 2000):

Assinale V para a alternativa verdadeira ou F para a falsa e justifique cada resposta:

a) $8m \times 4m = 32$ **(   )**

b) $\frac{125}{25cm} = 5$ **(   )**

c) $8m \times 5 = 40m$ **(   )**

d) $8m \times 5 = 40$ **(   )**

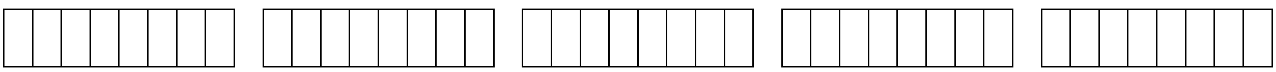
Resoluções possíveis:

As seguintes justificativas são esperadas para essa questão:

A alternativa "a" é falsa, pois foi aplicado o algoritmo da multiplicação sem considerar a unidade de medida em evidência.

A alternativa "b" é falsa, porque ao realizar a operação de divisão, o resultado deveria vir acompanhado da unidade de medida, mesmo ela estando no numerador.

A alternativa "c" é verdadeira, uma vez que a maneira de resolver seria considerar que o número 5 é um número natural (ou escalar) e pode ser entendido como sendo cinco barras e, cada barra, dividida em 8 partes iguais, como no modelo a seguir:



A alternativa "d" é falsa devido a resposta não apresentar a unidade de medida apropriada, sendo, portanto, contraditória à alternativa anterior (c).

É importante considerar que essa questão não está contextualizada, ou seja, não tem ligação com a realidade. Esse tipo de questão, segundo Chamorro e Belmonte (2000), não tem significado porque não conduz o aluno à compreensão dos algoritmos ou das fórmulas que o leva à solução de situações reais de áreas e de volumes.

Tabulação dos dados:

Tabela 5: Questão 5

Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre 79,1%	Não domina conteúdo/Erros de cálculo	Apresenta respostas e justificativas incorretas.	10	10	8	9	32,2%	8S/R/A; 5S/A
	Domínio de técnica sem justificativa	Apenas apresenta a resposta certa, porém sem justificar.	3	0	2	0	4,3%	2S/R/A; 1S/A
	Experimentação seletiva de uma eleição	Elege e justifica a resposta conforme o contexto da tarefa.	4	2	7	12	21,7%	1S/R/A
	Evasivo	Resposta incorreta e sem justificativa.	6	8	6	4	20,9%	
Rico 17,4%	Dedução inquirida	Apresenta a estratégia completa.	0	3	5	3	9,6%	1S/A
	Dedução parcial/Domínio de elementos particulares	Acerta a resposta e apresenta exemplos a modo de ilustração.	3	4	1	1	7,8%	4S/A
Muito rico 0,9%	Flexibilidade	Apresenta diferentes categorias de resposta.	0	0	0	1	0,9%	
Confuso 1,7%	Planos confusos, imprecisos	Resposta que impossibilita análise.	0	0	0	2	1,7%	
Em branco 0,9%		Não respondeu.	0	0	0	1	0,9%	
		Total	26	27	29	33	100,0%	

Fonte: o autor (2019)

3.1.1.6 Questão 6: resoluções possíveis, tabulação dos dados e estudo pormenorizado

Fechamos esta seção com a apresentação das resoluções possíveis, da tabulação dos dados e da análise da sexta questão do teste *standard*, a qual veremos a seguir.

Questão 6:

Seja a função $y = x^2 - 6x + 8$. Calcule as raízes e construa o gráfico dessa função.

Resoluções possíveis:

Para resolver os alunos podem aplicar a fórmula resolutiva da equação do segundo grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim sendo, temos:

Coeficientes: $a = 1,\ b = -6\ e\ c = 8.$

Aplicação da fórmula:

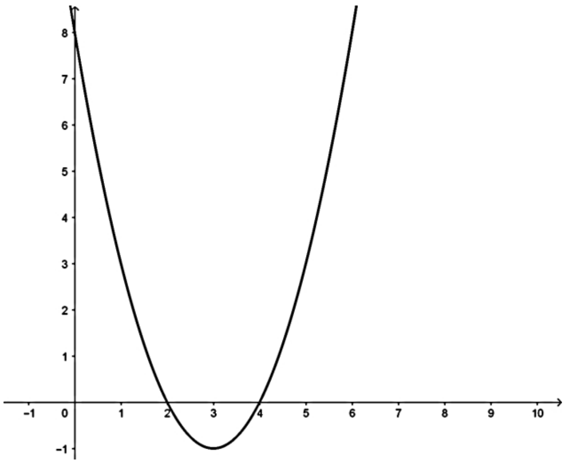
$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}\Rightarrow x=\frac{6\pm 2}{2}.$$

Portanto, as raízes são:

$$x_1=\frac{6-2}{2}\Rightarrow x_1=\frac{4}{2}\Rightarrow x_1=2 \quad e \quad x_2=\frac{6+2}{2}\Rightarrow x_2=\frac{8}{2}\Rightarrow x_2=4.$$

Conjunto solução: $S=\{2,4\}$.

Provavelmente o aluno apresentará o gráfico:



Tabulação dos dados:

Tabela 6: Questão 6

Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre 37,4%	Não domina conteúdo/Erros de cálculo	Reconhece os termos *a*, *b* e c da função, mas erra os cálculos.	0	4	9	2	13,0%	1S/A
	Solução parcial	Calcula as raízes, mas não apresenta ou erra o gráfico.	9	8	6	2	21,7%	1S/R/A; 4S/A
	Evasivo	Apresenta as respostas “não sei” ou “não me lembro”.	0	0	0	3	2,6%	
Rico 9,6%	Dedução inquirida	Calcula as raízes por meio da fórmula resolutiva da equação do 2º grau e esboça o gráfico.	2	5	3	0	8,7%	1S/A
	Dedução parcial/Domínio de elementos particulares	Monta uma tabela e resolve a questão sem usar a fórmula resolutiva.	0	1	0	0	0,9%	
Muito rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Confuso 19,1%	Planos confusos, imprecisos	Resposta que impossibilita análise.	7	3	0	12	19,1%	
Em branco 33,9%		Não respondeu.	8	6	11	14	33,9%	
		Total	26	27	29	33	100,0%	

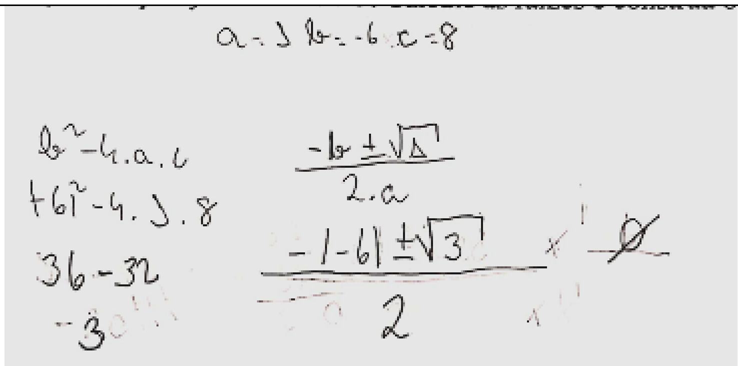
Fonte: o autor (2019)

Estudo pormenorizado:

Para a questão 6 do teste *standard*, tivemos 37,4% do total de alunos participantes (43 alunos) que se enquadraram na categoria *pobre*, 9,6% (11 alunos) na categoria *rico*, 19,1% (22 alunos) na categoria *confuso* e 33,9% (39 alunos) que deixaram a questão *em branco*.

Como podemos observar, mesmo com um alto número de alunos que entregaram a questão em branco, tivemos mais da metade dos alunos (66,1% do total) que apresentaram uma resposta para a questão. A seguir, passaremos a analisar as respostas por categoria.

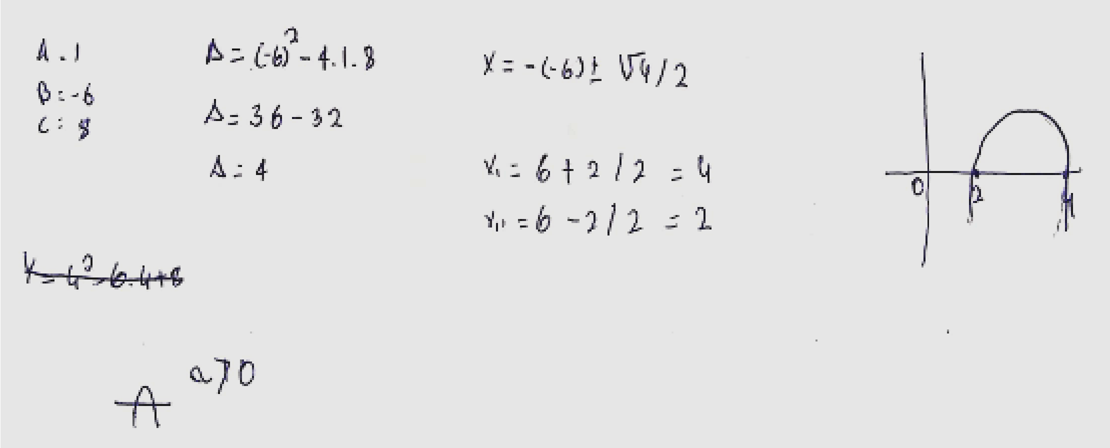
Na categoria pobre, 13% (15 alunos) *não dominam o conteúdo* para resolver esta questão ou apresentam *erros de cálculos* no desenvolvimento da sua resposta. Nessa tipologia de resposta, encontramos um aluno que *supervisiona* e *avalia* as suas ações. Alguns desses até reconhecem os termos a, b e c da função polinomial do 2º grau, mas não acertam os cálculos. Vejamos um exemplo:



A46

O aluno A46 identifica os coeficientes de uma função quadrática ao apresentar os coeficientes a = 1, b = – 6 e c = 8 e demonstra conhecer a fórmula resolutiva da equação do 2º grau, mas ao dar continuidade à sua resposta, apresenta um *erro de cálculo* (36 – 32 = 3) não conseguindo solucionar a tarefa.

Nessa mesma categoria (pobre), 21,7% (25 alunos) apresentaram uma *solução parcial*. Nesse tipo de resposta, encontramos um aluno que *supervisiona*, *regula* e *avalia* as suas ações e quatro alunos que mostram *supervisão* e *avaliação* nas suas respostas. Eles conseguem calcular as raízes da função, mas não constroem o gráfico ou apresentam erro na construção dessa representação geométrica. A seguir, vejamos um exemplo:

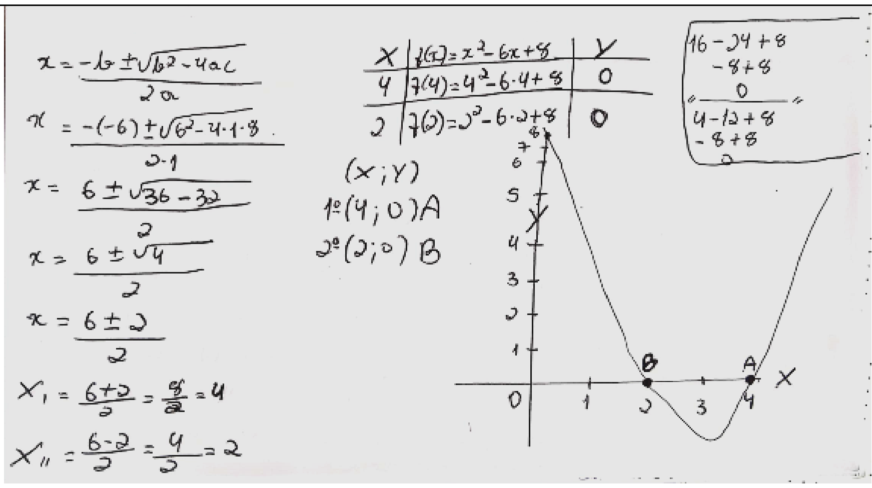


A52

O aluno A52 consegue calcular as raízes da função quadrática, mas não consegue esboçar o gráfico corretamente, visto que apresenta um esboço da parábola com concavidade voltada para baixo (deveria ser voltada para cima, pois o termo *a* da função é positivo). Dessa maneira, o aluno apresenta uma *solução parcial* da tarefa. Ele também *supervisiona*, *regula* e *avalia* ao modificar o caminho (riscar a resposta) – como podemos ver no canto inferior esquerdo da imagem da sua solução.

Também, nessa categoria, encontramos três alunos que apresentaram uma conduta *evasiva* ao escrever no espaço destinado a resposta “não sei” ou “não me lembro”.

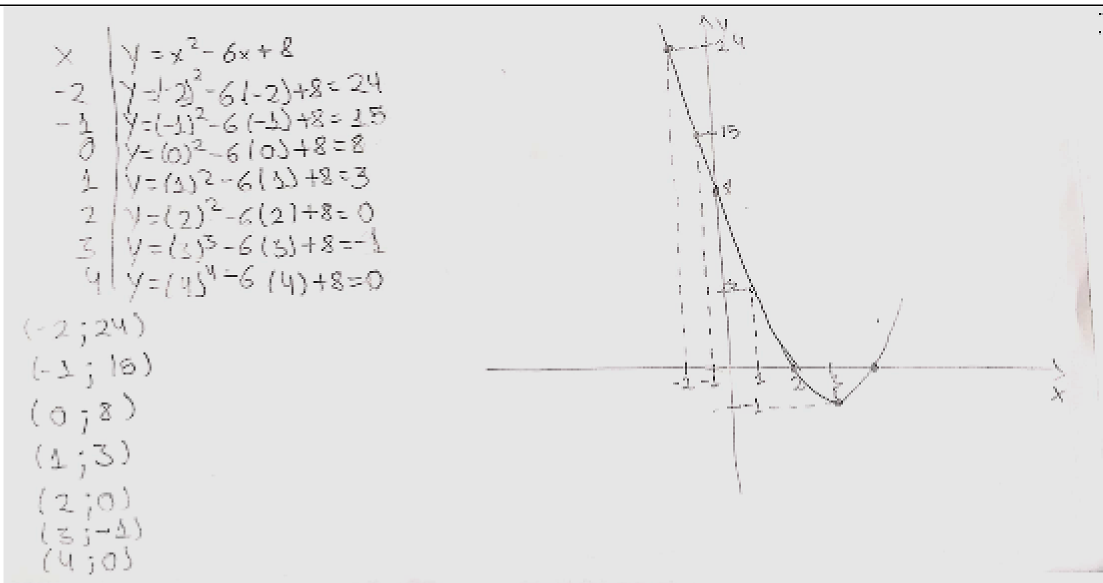
Na categoria *rico*, tivemos 8,7% do total de participantes (10 alunos) que conseguiram calcular as raízes por meio da fórmula resolutiva da equação do segundo grau e esboçar o gráfico corretamente. Um desses alunos *supervisionou* e *avaliou* as suas ações. Consideramos que esse grupo de alunos ativa o processo de *dedução inquirida*. Trouxemos um exemplo desse tipo de resposta:



A68

Ao observarmos o canto superior esquerdo da imagem da solução apresentada pelo estudante A68, percebemos que ele apresenta a fórmula resolutiva da equação do segundo grau. Na sequência, substitui adequadamente os valores dos coeficientes da função dada na fórmula e obtém as raízes da função. Além disso, o aluno apresenta uma tabela com os valores das raízes substituídos na função, pontos (A e B) e cálculos auxiliares que servem de *supervisão* e de *avaliação* das ações implementadas por ele na resolução da tarefa. No canto inferior direito da imagem da sua resposta, podemos ver um esboço correto do gráfico dessa função. Dessa forma, A68 incorre em *dedução inquirida*, uma vez que "desenha a estratégia completa e, portanto, experimenta o processo que o leva a descobrir a resposta" (GUSMÃO, 2006, p. 140).

Também tivemos, na categoria *rico*, um aluno que montou uma tabela e conseguiu resolver a questão sem usar a forma resolutiva. Consideramos que esse aluno ativou o processo de *dedução parcial*, porque apresentou uma dedução parcial do raciocínio e demonstrou *domínio de elementos particulares* (a construção de uma tabela e a aplicação de valores numéricos de uma expressão matemática). Vejamos a resposta desse aluno:



A43

O estudante A43 constrói uma tabela, atribui valores para *x* e consegue determinar o valor de *y* encontrando pontos que posteriormente utiliza na construção do seu gráfico, além de ativar um processo de *dedução parcial/domínio de elementos particulares*.

Nessa questão, lembramos que 19,1% dos estudantes (22 alunos) apresentaram respostas *confusas* que impossibilitaram a nossa análise e 33,9% (39 alunos) deixaram a questão em branco, conforme mencionamos anteriormente.

3.2 Segundo Teste

Este segundo teste é constituído de questões *não standards*, ou seja, não rotineiras – “abertas”. São consideradas *não standards* porque fogem da rotina estabelecida nas aulas tradicionais de Matemática. As questões apresentadas darão oportunidade para que o aluno apresente várias ou múltiplas soluções, levando-o ao uso do raciocínio lógico, à reflexão, à tomada de decisão e, de certo modo, a dizer o “porquê” da escolha de determinado caminho na solução das questões. Esse desafio de apresentar tarefas abertas aos estudantes é uma preocupação presente também nos documentos oficiais da educação brasileira:

> O problema do tipo “aberto” procura levar o aluno à aquisição de procedimentos para resolução de problemas. A prática em sala de aula desse tipo de problema acaba por transformar a própria relação entre o professor e os alunos e entre os alunos e o conhecimento matemático. O conhecimento passa a ser entendido como uma importante ferramenta para resolver problemas, e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em momentos de “provas escritas”. (BRASIL, 2006, p. 84)

Cientes da importância das tarefas matemáticas *não standards* no processo de ensino e aprendizagem, propomos o segundo teste composto e passamos a apresentar a resoluções possíveis, a tabulação dos dados e o estudo pormenorizado de cada questão do teste aplicado nesse trabalho investigativo.

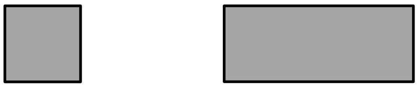
3.2.1 Resoluções possíveis, tabulação dos dados e estudo pormenorizado das questões *não standards*

Assim como no primeiro teste, utilizaremos os mesmos procedimentos para as resoluções possíveis, a tabulação e o estudo pormenorizado dos dados obtidos na nossa pesquisa de campo para esse segundo teste.

Faremos análise das questões *não standards*, considerando 112 alunos participantes, pois três alunos do 2º ano não compareceram no segundo encontro previsto para essa turma. Esse fato não ocorreu com as demais turmas.

Questão 1 – (GUSMÃO, 2014):

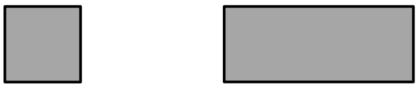
Aproximadamente, quantas vezes a medida do comprimento da barra menor cabe no comprimento da barra maior?



Não analisamos essa questão, pois nos equivocamos ao extrairmos a questão da autora. A questão deveria ter sido assim apresentada:

Questão 1 – (GUSMÃO, 2014)

Aproximadamente, quantas vezes a medida do comprimento da barra maior cabe no comprimento da barra menor?



Como pode ser observado, trocamos o vocábulo “menor” pelo vocábulo “maior” e vice-versa, o que inviabilizou a nossa análise, pois ao trocar o vocábulo transformamos a questão em *standard*, não permitindo ao aluno usar um raciocínio inverso e não usual nas aulas de matemática.

3.2.1.1 Questão 2: resoluções possíveis, tabulação dos dados e estudo pormenorizado

Questão 2 – (GUSMÃO 2014):

Qual a área de um retângulo cujo perímetro é de 30 cm?

Resoluções possíveis:

Do contrário da questão 1 do primeiro teste, admitindo apenas uma resposta, esta questão vem para verificar uma abertura de pensamento e para comprovar o conhecimento do aluno para com este assunto.

Nessa questão, o aluno deveria se dar conta de que há múltiplas respostas e explicar a propriedade matemática: dado um perímetro fixo a área de uma figura pode variar. O aluno pode experimentar a construção de variados retângulos com dimensões distintas e mesmo perímetro e se dar conta de diferentes resultados para a área desses retângulos. Dessa forma, o aluno estaria numa *abstração reflexionante*[18] com "[...] reflexões sobre reflexões, dito de outro modo, um início de pensamento reflexivo e não mais somente refletido." (PIAGET, 1995, p. 273). No tocante à associação que se pode fazer com os documentos oficiais, essa questão pode ser considerada como uma tarefa que se engaja na habilidade EF05MA20 da BNCC: "Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes." (BRASIL, 2016, p. 295)

Tabulação dos dados:

Tabela 7: Questão 2

Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre 50,0%	Ingenuidade dependente	Apresenta um cálculo com os dados do enunciado.	6	1	1	1	8,0%	
	Única solução	Apresenta a área de um quadrado ou de um retângulo, mas não percebe que, ao fixar o perímetro, a área é variável.	3	3	16	14	32,1%	3S/A
	Domínio de técnica sem justificativa	Apresenta uma resposta possível sem justificar ou apresentar cálculos.	0	3	2	2	6,3%	
	Pouca compreensão do enunciado da tarefa	Mostra uma resposta que dá a impressão de levar em conta o enunciado da questão, mas não toma uma decisão precisa.	0	1	0	2	2,7%	
	Conduta evasiva	Apresentar respostas do tipo "não sei" ou "não fiz".	0	0	1	0	0,9%	
Rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Muito rico 1,8%	Generalização/Flexibilidade	Apresenta resposta partindo do particular para o geral e admite diferentes e variadas respostas.	0	0	0	2	1,8%	1S/A; 1S/R/A

Continua

[18] "[...] é um processo que permite construir estruturas novas, em virtude da reorganização de elementos tirados de estruturas anteriores, e, como tal, tanto pode funcionar de maneira inconsciente como sob a direção de interações deliberadas particularmente [...]" (PIAGET, 1995, p. 193)

Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Confuso 34,8%	Planos confusos, imprecisos/ Argumentações imprecisas	Apresenta cálculos ou argumentos que dificultam a avaliação do processo.	10	13	7	9	34,8%	
Em branco 13,4%		Não respondeu.	7	3	2	3	13,4%	
		Total	26	24	29	33	100,0%	

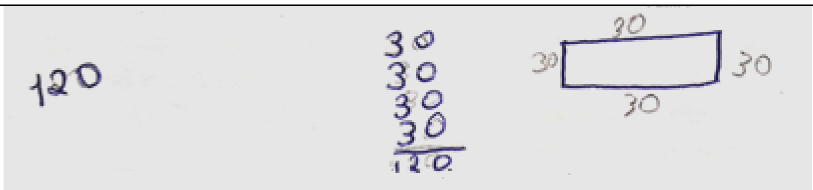
Fonte: o autor (2019)

Estudo pormenorizado:

Dos 112 alunos, encontramos 50% (56 estudantes) que ativaram *processos de pensamento pobre*, 1,8% (dois alunos) ativou *processos de pensamento muito rico*, 34,8% (39 alunos) apresentaram respostas confusas e 13,4% (15 estudantes) deixaram de responder à questão proposta.

Apresentamos a seguir exemplos para cada tipo de processo ativado nas suas respectivas categorias *pobre*, *rico* e *muito rico*.

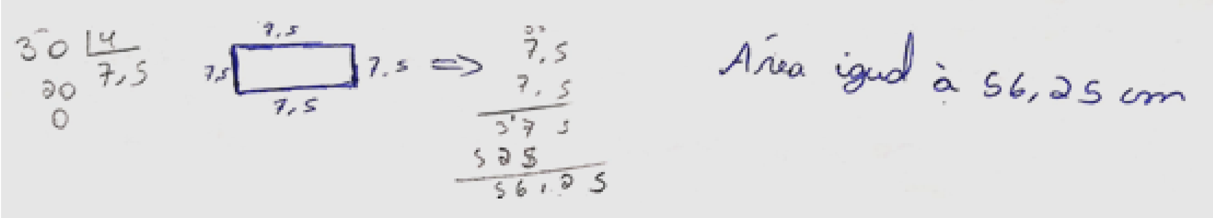
Na categoria *pobre*, tivemos 8% dos participantes (9 alunos) que apresentaram respostas as quais configuram uma *ingenuidade dependente*. Esses alunos apresentam cálculo com os dados do enunciado. Vejamos um exemplo:



Aluno (A23)

O aluno A23 apresenta uma resposta que demonstra ativação do processo de *ingenuidade dependente*. Segundo Gusmão (2006), isso ocorre quando o aluno usa os dados do enunciado para realizar as suas operações matemáticas, numa tentativa de inseri-los, mas sem nenhum sentido.

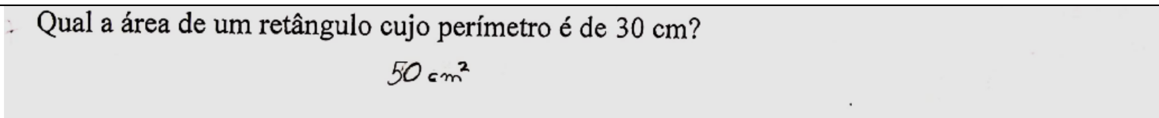
Também nessa categoria *pobre*, aproximadamente 32,1% (36 estudantes) apresentam uma *única solução* para essa questão que requer múltiplas soluções. Esses alunos mostram a área de um quadrado ou de um retângulo de perímetro 30 cm, mas não percebem a propriedade: a perímetro fixo da área pode variar. A seguir, um exemplo desse tipo de resposta:



Aluno (A83)

O aluno A83 apresentou um retângulo (deveria ser um quadrado) medindo 7,5 cm de lado e calculou a área. Esse aluno apresenta uma *única solução*. Parece que faz uma *avaliação* ao dar por concluída a questão com uma resposta redigida. Assim como esse aluno, mais dois estudantes *supervisionam* e *avaliam* o seu processo de resolução.

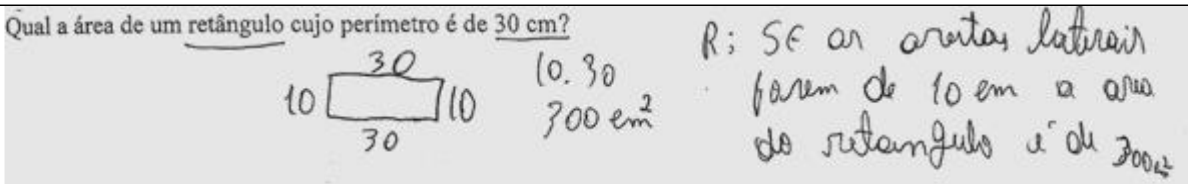
Observamos que 6,3% do total (7 alunos) da categoria *pobre* trazem uma resposta possível sem justificar ou apresentar cálculos. Pensamos que eles se enquadram no processo de *domínio da técnica sem justificativa*, pois conseguiram encontrar uma resposta possível – a área de um retângulo de 10 cm de comprimento por 5 cm de largura –, mas não justificaram as suas respostas. Vejamos um modelo desse tipo de resposta:



Aluno (A44)

Como podemos observar, o aluno A44 não evidencia cálculo ou outra justificativa para sua resposta, incorrendo no processo de pensamento de *domínio de técnicas sem justificativa*. Nesse caso, por não apresentar múltiplas soluções, consideramos esse aluno na categoria *pobre*.

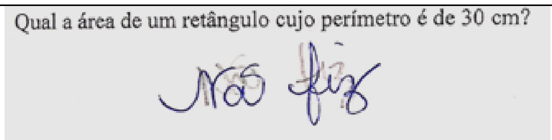
Também, na categoria *pobre*, notamos que 2,7% do total (3 alunos) apresentam *pouca compreensão do enunciado da tarefa*, visto que suas respostas evidenciam tal fato e não apresentam uma decisão assertiva. Um exemplo que caracteriza esse processo é:



Aluno (A89)

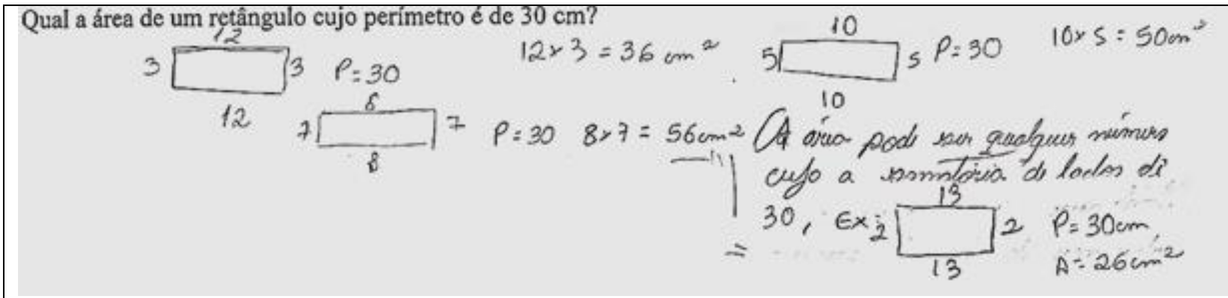
O estudante A89 demonstra utilizar o anunciado, porque grifa o vocábulo “retângulo” e a medida expressa “30 cm”, que são elementos presentes no comando da questão, entretanto, "sua compreensão não é suficiente para levá-lo a tomar uma decisão mais precisa." (GUSMÃO, 2006, p. 152).

Encontramos um aluno que demonstrou uma *conduta evasiva*, uma vez que, conforme Moura (2015), apresenta em sua resposta argumento do tipo "não sei" ou, nesse caso, "não fiz", conforme podemos ver na ilustração de sua resposta:



Aluno (A66)

Observamos que 1,8% do total de participantes (2 alunos) apresentou uma solução que demonstra ativação dos processos de pensamento *muito rico*. Vejamos um exemplo:



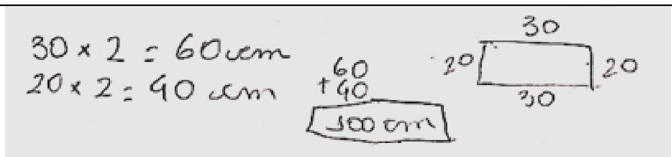
Aluno (A114)

Podemos ver, na resposta apresentada pelo estudante A114, alguns retângulos de dimensões diferentes, mas todos com o perímetro de 30 cm e sua respectiva área. Para concluir o seu raciocínio, o aluno expressa: "A área pode ser qualquer número cujo a somatória de lados dê 30".

A construção do aluno mostra a ativação de, no mínimo, três processos ativados de pensamento *muito rico*: o primeiro processo é o de *analogia*, porque este aluno "passa de uma situação simples para outra mais complexa" (GUSMÃO, 2006, p. 164), o segundo, um processo de *particularização*, uma vez que desenha figuras como exemplo ilustrativo (GUSMÃO, 2006), e o terceiro processo evidente é o de *generalização* na descoberta de múltiplas respostas para esta questão, porque parece que ele é "capaz de generalizar um caso particular para uma situação geral" (GUSMÃO, 2006, p.164).

Esse aluno parece *supervisionar* e *avaliar,* já que apresenta uma resposta conclusiva para a questão. Neste mesmo conjunto, notamos mais um aluno que apresenta o processo de *supervisão*, de *regulação* e de *avalição*, pois anula partes da questão, toma novos rumos na sua resolução e apresenta uma resposta conclusiva.

Ainda para essa questão, destacamos que 34,6% do total (39 alunos) apresentaram respostas confusas que dificultaram o nosso trabalho de análise, conforme podemos ver no exemplo a seguir:



Aluno (A27)

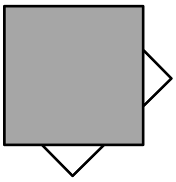
Para concluir, observamos que 15 alunos não responderam a questão, deixando-a *em branco*. Esse evento corresponde a 13,4% dos participantes.

3.2.1.2 Questão 3: resoluções possíveis, tabulação dos dados e estudo pormenorizado

Passamos agora para a terceira questão do teste *não standard*.

Questão 3 – (GUSMÃO, 2006):

Que figura está por trás do quadro cinza? Como você pensou?



Resoluções possíveis:

Segundo Gusmão (2006), antes de ser aplicada em sua pesquisa, essa questão foi resolvida e validada por especialistas matemáticos. Ainda, segundo a autora, para resolver esse problema do ponto de vista matemático, é necessário que o estudante tenha pré-requisito e certa bagagem matemática, já que há uma importante propriedade aí implícita: na ausência de restrição a um problema, a sua resposta deve ser a mais geral possível e não pode restringir a um exemplo de modelo. Assim, esse problema se enquadra no tipo de tarefa no qual é possível encontrar múltiplas respostas. Outro fato importante mencionado pela autora é que a opção pelo vocábulo “figura” em vez de “figuras” pode levar o aluno a – admitir ou não – diferentes soluções para a questão.

Resposta: múltiplas respostas apresentando uma representação geométrica que não se enquadra apenas no modelo de figuras planas como polígonos regulares.

Tabulação dos dados:

Tabela 8: Questão 3

Categorias	**Processos ativados**	**Tipologias de respostas**	**1º ano**	**2º ano**	**3º ano**	**4º ano**	**%**	**S/R/A**
Pobre 91,1%	Única solução	Apresenta somente a resposta retângulo/quadrado/losango/triângulo/polígono regular, sem justificativa.	4	8	6	3	18,8%	31S/A
		Apresenta a resposta quadrado/retângulo/losango/polígono regular e justifica a resposta apresentada.	16	15	21	29	72,3%	
Rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Muito rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Confuso 1,8%	Planos confusos, imprecisos/ Argumentações imprecisas	Apresenta resposta confusa, impossibilitando a análise.	1	0	0	1	1,8%	
Em branco 7,1%		Não respondeu.	5	1	2	0	7,1%	
		Total	26	24	29	33	100,0%	

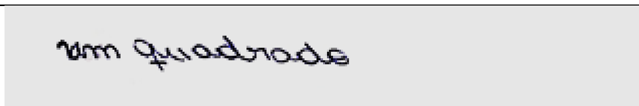
Fonte: o autor (2019)

Estudo pormenorizado:

Nessa questão 3, notamos que os alunos não apresentaram respostas que pudéssemos enquadrar nos processos de pensamento *rico* e *muito rico*, pois todas as respostas encontradas incorreram em *única solução* que consideramos como *processos de pensamento pobre*. Ora o aluno apresentou somente a resposta retângulo/quadrado/losango/triângulo/polígono regular, sem justificativa, ora exibiu uma resposta com justificativa. Constatamos ainda que, 1,8% do total participantes (2 alunos), exibiu solução confusa e 7,1% (8 alunos) não responderam à tarefa.

Na categoria *pobre*, estão 91,1% do total de alunos (102 alunos), sendo que desses, 21 apresentam somente uma resposta, por exemplo, retângulo ou quadrado ou losango ou triângulo ou polígono regular, sem justificativa alguma. Os outros 81 alunos apresentam resposta parecida, só que com um diferencial: exibem uma justificativa para sua resposta. Assim sendo, consideramos que esses dois tipos de respostas se encaixam no processo de *única solução* da categoria supracitada.

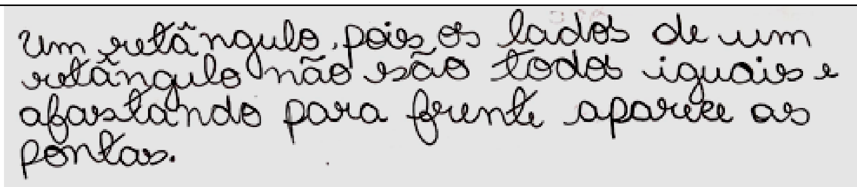
Vejamos um exemplo de resposta sem justificativa:


um quadrado

Aluno (A18)

O aluno A18 apresenta “um quadrado” como resposta. Essa exibição revela o processo de *única solução*, pois o aluno “apresenta um termo ou expressão que indica que a tarefa só tem uma solução” (GUSMÃO, 2006, p. 189).

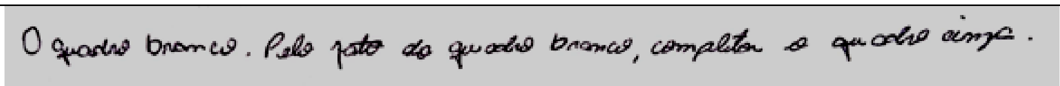
Agora, exibimos um exemplo de solução única, mas com uma justificativa:


Um retângulo, pois os lados de um retângulo não são todos iguais e afastando para frente aparece as pontas.

Aluno (A47)

Ao escrever “um retângulo”, o aluno mostra *única solução* para essa tarefa. A diferença dessa resposta para a anterior é que esse estudante justifica: “pois os lados de um retângulo não são todos iguais e afastando para frente aparece as pontas”, deixando a entender que se fosse um quadrado ou outra figura, as pontas apareceriam. Percebemos ainda uma carência conceitual na seguinte afirmação: “os lados de um retângulo não são todos iguais”, confirmando desconhecimento sobre o quadrado também ser um retângulo. Vale salientar que esse aluno *supervisiona* ao expressar “afastando para frente aparece as pontas” e *regula* ao buscar uma solução graças a essa supervisão. O aluno também *avalia*, uma vez que “considera o problema resolvido com o que foi feito anteriormente” (GUSMÃO, 2006, p. 192).

Visto esses dois tipos de respostas na categoria *pobre* e com *única solução*, vejamos a seguir um exemplo de um aluno que apresentou uma resposta do tipo confusa:


O quadro branco. Pelo fato do quadro branco, completar o quadro cinza.

Aluno (A101)

Ao expressar em sua resposta: “O quadro branco. Pelo fato do quadro branco, completar o quadro cinza”, o aluno A101 exibiu uma solução *confusa* que impossibilitou a nossa análise.

Outro aluno também apresentou resposta que pode ser enquadrada na mesma categoria e, além disso, encontramos, como dito, oito alunos que deixaram a questão *em branco*.

3.2.1.3 Questão 4:

Questão 4 – (GUSMÃO, 2006):

Quatro amigos vão a uma sorveteria e tomam sorvetes do mesmo tipo e sucos também do mesmo tipo. Eles pagam tudo junto e, para determinar o preço do sorvete (x) e o preço do suco (y), cada um deles escreveu duas relações entre os preços, ou seja, montou um sistema de equações para a situação. Veja as equações escritas pelos quatro amigos:

Andreia: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ Carol: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$ Beto: $\begin{cases} 2x+2y=6 \\ 4x+4y=12 \end{cases}$ David: $\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

Comente e justifique se cada uma das propostas pode ser ou não válida.

Resoluções possíveis:

Tendo resolvido a questão 4 do primeiro teste, esperamos que o aluno perceba a relação entre as duas questões para apresentar o sistema.

Com base em Gusmão, vejamos uma análise para essa questão:

O sistema apresentado por Andreia nesta questão é impossível, pois se um sorvete e um suco custam três, como pode dois de cada custar cinco? Não seria seis?

O sistema elaborado por Carol é determinado, porque possui um resultado compatível com o que é proposto no enunciado.

O sistema proposto por Beto é possível, porém indeterminado, pois a segunda equação não traz nada de novo em relação à primeira e impossibilita a definição de um valor real para x ou para y.

O sistema mostrado por David é impossível, porque como pode dois sorvetes e dois sucos, representados na primeira equação, custarem cinco e a mesma situação representada na segunda equação ter custo igual a seis? Cinco é igual a seis? Então há aí uma contradição explícita.

Para Gusmão (2006) o que se pretende com esse tipo de questão é verificar o domínio do aluno sobre o reconhecimento e avaliação de contradições e redundâncias e não a preocupação com a resolução dos sistemas de equações em si.

Tabulação dos dados:

Tabela 9: Questão 4

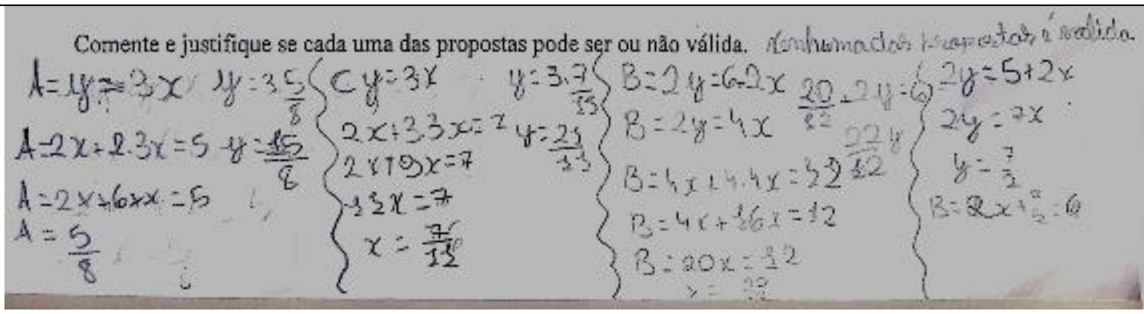
Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre	Não domina conteúdos/erros de cálculo	Apresenta erros na resolução dos sistemas.	5	4	5	3	15,2%	3S/A
28,6%	Semântica	Apresenta a resolução de cada sistema e interpreta os valores numéricos que satisfazem os sistemas, mas não percebe outras informações.	0	2	2	4	7,1%	2S/A
	Ingenuidade dependente	Apresenta justificativa com os dados do enunciado.	0	1	0	0	0,9%	
	Evasivo	Respostas do tipo "não sei fazer isso" ou "pode ser".	2	0	1	2	4,5%	1S/R/A
	Econômico	Resposta pouco elucidativa: "sim".	0	0	0	1	0,9%	
Rico 1,8%	Contraste de informações	Percebe as contradições implícita e explícita nos sistemas, porém não percebe a indeterminação do sistema proposto por Beto.	0	1	1	0	1,8%	
Muito rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Confuso 26,8%	Planos confusos, imprecisos/Argumentações imprecisas	A justificativa não deixa clara uma linha de raciocínio.	8	6	5	11	26,8%	
Em branco 42,9%			11	10	15	12	42,9%	
		Total	26	24	29	33	100,0%	

Fonte: o autor (2019)

Estudo pormenorizado:

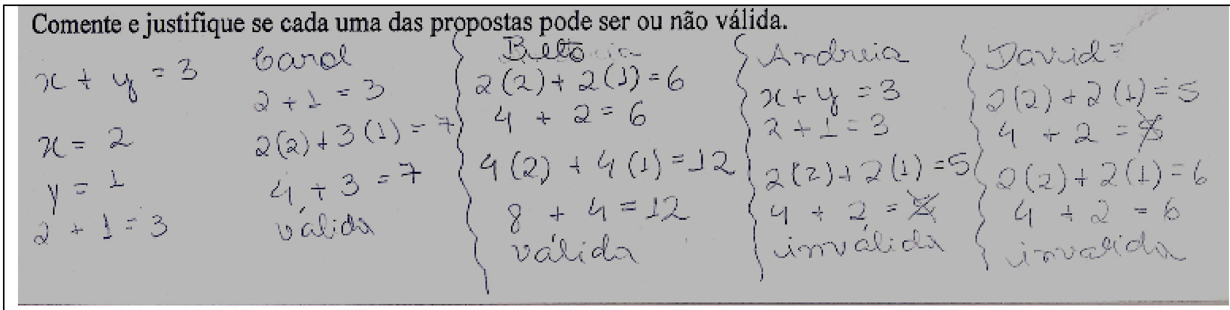
Ao analisarmos a quarta questão do teste *standard*, notamos que 28,6% (32 alunos) se enquadram nos *processos de pensamento pobre* e 1,8% (2 alunos) nos *processos de pensamento rico*. Constatamos também que 26,8% (30 alunos) apresentaram respostas *confusas* que impossibilitaram a nossa análise e 42,9% (48 alunos) não responderam a questão deixando-a *em branco*.

Na categoria *pobre*, encontramos 15,2% (17 alunos) que apresentaram respostas com erros nas resoluções do sistema. Esses alunos demonstraram *não dominar conteúdo*, uma vez que incorreram em *erros de cálculo* como no exemplo a seguir:



A17

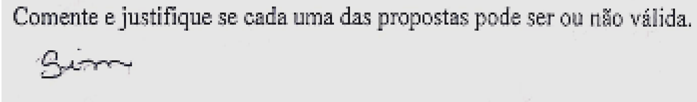
Também na categoria pobre, 7,1% (8 alunos) apresentaram uma resposta que demonstra reconhecer valores numéricos que satisfazem as equações dos sistemas, mas não percebem informações de *contradição* e *redundância* presentes na tarefa. Assim sendo, esse grupo ativa um processo de *semântica*: "aluno é capaz de interpretar símbolos, mas não confronta outras informações do problema" (GUSMÃO, 2006, p. 337). A seguir, apresentamos um exemplo.



A35

Outro aluno nessa categoria apresentou *ingenuidade dependente* ao justificar a sua resposta com os dados do enunciado e um percentual de 4,5% (5 alunos) apresentou respostas *evasivas*: "não sei fazer isso" ou "pode ser".

Ainda nessa categoria, tivemos um aluno bem *econômico* em suas palavras, pois apresentou uma resposta pouco elucidativa. Vejamos:

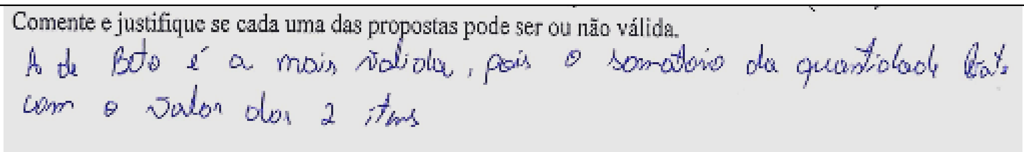


Comente e justifique se cada uma das propostas pode ser ou não válida.

Sim

A93

Como dito, detectamos que 26,8% (30 alunos) não deixaram claro uma linha de raciocínio nas justificativas apresentadas. Consideramos que esses alunos apresentam *planos confusos*, *imprecisos* ou mostraram *argumentações imprecisas* que impossibilitaram a nossa análise. Vejamos um exemplo:

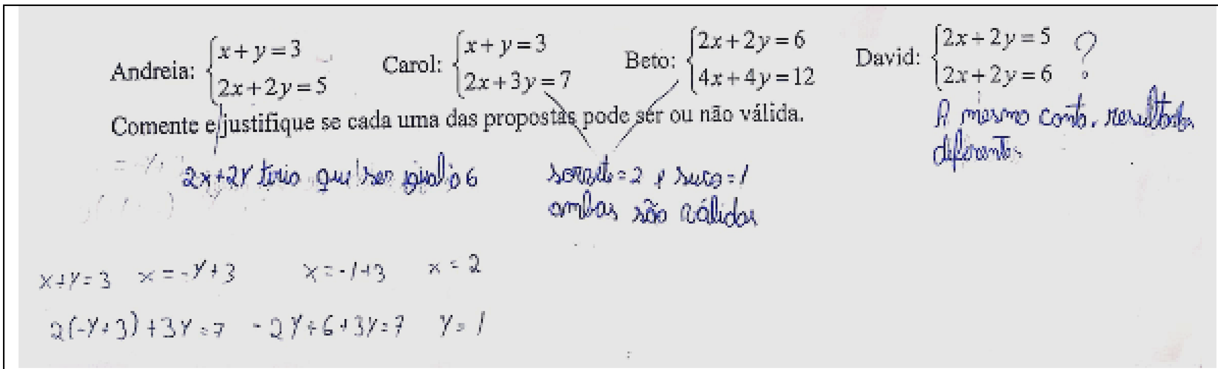


Comente e justifique se cada uma das propostas pode ser ou não válida.

A de Beto é a mais válida, pois o somatório da quantidade bate com o valor dos 2 itens

A87

Tratando-se de *processo de pensamento rico*, dois alunos perceberam a contradição implícita existente no sistema de Andreia e explícita no sistema de David, entretanto não perceberam a indeterminação no sistema proposto por Beto. Por essas percepções, consideramos que esses alunos ativam o processo *contraste de informações*. A seguir, a resposta de um desses alunos:



Andreia: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ Carol: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$ Beto: $\begin{cases} 2x+2y=6 \\ 4x+4y=12 \end{cases}$ David: $\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$?

Comente e justifique se cada uma das propostas pode ser ou não válida.

2x+2y tinha que ser igual a 6

somado = 2 y sendo = 1
ambas são válidas

o mesmo conta, resultados diferentes

$x+y=3 \quad x=-y+3 \quad x=-1+3 \quad x=2$

$2(-y+3)+3y=7 \quad -2y+6+3y=7 \quad y=1$

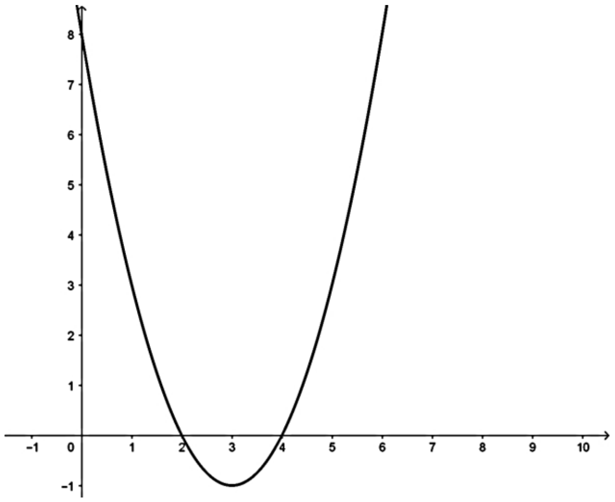
A67

Finalmente, como dito no início da análise dessa questão, dois alunos apresentaram respostas *confusas* que impossibilitaram a nossa análise e 42,9% (48 alunos) entregaram a questão *em branco*.

3.2.1.4 Questão 5:

Questão 5:

Observe o gráfico de uma função polinomial do 2º grau.



a) Encontre a função algébrica que representa o gráfico da função.

b) Quantas raízes tem esta função?

c) Para quais intervalos de x a função é positiva e negativa?

Resoluções possíveis:

Buscamos nessa questão fazer analogia com a questão 6 do teste *standard*. Conforme já dito, ela envolve os conhecimentos teóricos acerca do estudo de funções, mais especificamente da função polinomial do 2º grau. Assim, ela foi colocada em meio às questões *não standards* com o objetivo de observar até que ponto os alunos conseguem estabelecer uma relação com o que foi visto recentemente na questão 6 do teste 1, porém, agora, foi solicitado que o aluno encontrasse a função algébrica que representasse o gráfico dado. Perguntamos: até que ponto o aluno perceberá isso? Outro fato curioso dessa questão é que a pergunta da letra *b* não solicita muito esforço do aluno para descobrir. Na verdade, supomos que ele já tenha calculado as raízes da função na questão 6 do outro teste e, portanto, encontrou duas raízes reais e distintas. Se ele não se recordar de tal fato, poderá observar o gráfico e, se souber que as raízes simplesmente são os pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas, descobrirá as duas raízes explicitas no gráfico dado: $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$.

Caso nada disso seja suficiente para solucionar a letra a, o aluno deve lembrar que uma função quadrática completa tem a seguinte configuração: $y = ax^2 + bx + c$, com *a* diferente de zero e *b* e *c* reais quaisquer. Assim, o aluno poderia, por exemplo, escolher os dois pontos do gráfico que configuram as raízes da equação e o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas e montar um sistema de equações. Vejamos como isso pode ser feito:

Tomamos os pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas e com o eixo das ordenadas e os denominamos A, B e C. Desse modo, no eixo das abscissas, temos: A(2, 0) e B(4, 0); no eixo das ordenadas: C(0, 8).

Agora vamos substituir esses pontos na forma geral da função quadrática e estruturar um sistema de equações:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 8 \\ 0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a \cdot 4 + b \cdot 2 + 8 \\ 0 = a \cdot 16 + b \cdot 4 + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a \cdot +2b = -8 \\ 16a + 4b = -8 \end{cases}$$

O aluno poderá utilizar o método da adição, da substituição ou aplicar no lugar das incógnitas valores para encontrar *a* e *b*. Esses três métodos foram apresentamos na questão 4 do primeiro teste ao resolver um sistema de equações. Dessa forma, mostramos para essa questão apenas um desses métodos: o método da adição.

Considerando o sistema $\begin{cases} 4a \cdot +2b = -8 \\ 16a + 4b = -8 \end{cases}$, multiplicamos a equação $4a + 2b = -8$ por – 2 e obtemos $-8a - 4b = 16$.

Desse jeito, temos: $\begin{cases} 4a \cdot +2b = -8 \\ 16a + 4b = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a - 4b = 16 \\ 16a + 4b = -8 \end{cases}$ e, somarmos as duas equações, obtemos a=1.

Finalmente, vamos substituir o valor de a = 1 na equação $4a + 2b = -8$:

$$4a + 2b = -8 \Rightarrow 4 \cdot 1 + 2b = -8 \Rightarrow 4 + 2b = -8 \Rightarrow 2b = -8 - 4 \Rightarrow 2b = -12 \Rightarrow b = -6.$$

Encontrados os valores de *a* e *b*, retornamos à configuração $y = ax^2 + bx + c$ e substituímos esses valores $y = 1x^2 + (-6)x + c$, mas temos c = 8, pois o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas é (0, 8), portanto $y = x^2 - 6x + 8$.

Depois passamos para a solução da próxima pergunta desta tarefa – a letra *b*. Para responder à pergunta da letra b, o aluno poderá observar o gráfico e dizer quantas raízes ele está visualizando no gráfico ou calculá-las conforme apresentamos na questão 6 do primeiro teste.

Para a terceira pergunta (a letra c), o aluno deve ser capaz de observar o gráfico cartesiano e fazer o estudo dos sinais da função $y = x^2 - 6x + 8$. Esse estudo poderá ser feito da seguinte forma:

i. Para o valor de x igual a 2 ou igual a 4, temos o valor de y igual a zero.

ii. Para quaisquer valores de x menores que 2 ou maiores que 4, temos valores de y positivos;

iii. Para valores de x entre 2 e 4, temos valores de y negativos.

O estudante poderá representar esse estudo dos sinais, também, utilizando símbolos matemáticos. Vejamos uma resposta possível:

i. $x = 2 \; ou \; x = 4 \Rightarrow y = 0$;

ii. $x < 2 \; ou \; x > 4 \Rightarrow y > 0$;

iii. $2 < x < 4 \Rightarrow y < 0$.

Tabulação dos dados:

Tabela 10: Questão 5

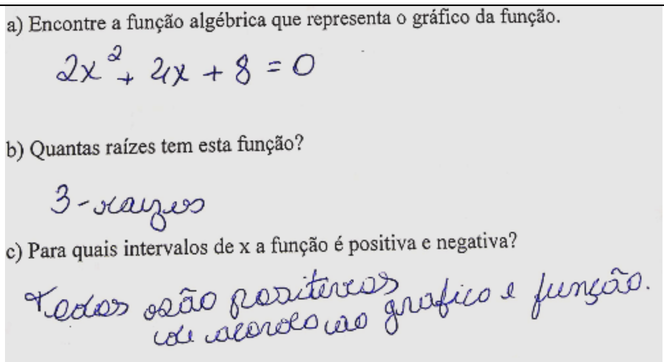
Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre 67,9%	Não domina conteúdo/Erros de cálculo	Mostra respostas incorretas às perguntas *a*, *b* e *c*.	7	12	0	14	29,5%	
	Solução parcial	Apresenta a resposta correta para a pergunta da letra *b* da tarefa.	7	7	10	6	26,8%	
	Evasivo	Responde: "não sei" ou usa o símbolo "?" como resposta.	3	0	8	2	11,6%	
Rico 2,7%	Analogia	Responde corretamente à pergunta da letra *a* por analogia à questão 6 do teste *standard* .	0	0	3	0	2,7%	
Muito rico 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Confuso 0,0%			0	0	0	0	0,0%	
Em branco 29,5%		Não respondeu.	9	5	8	11	29,5%	
		Total	26	24	29	33	100,0%	

Fonte: o autor (2019)

Estudo pormenorizado:

Nessa questão 5, 70,5% (79 alunos) enquadram-se na categoria *pobre*, 2,7% (3 alunos) adequam-se à categoria *rico* e 29,5% (33 alunos) não responderam à questão proposta, deixando-a *em branco*.

Na categoria *pobre*, 29,5% dos alunos (33 alunos) demonstram *não dominar conteúdo*, já que apresentam *erros* em todas as perguntas da tarefa (perguntas a, b e c), conforme podemos notar no exemplo a seguir:


a) Encontre a função algébrica que representa o gráfico da função.

$2x^2 + 4x + 8 = 0$

b) Quantas raízes tem esta função?

3-raizes

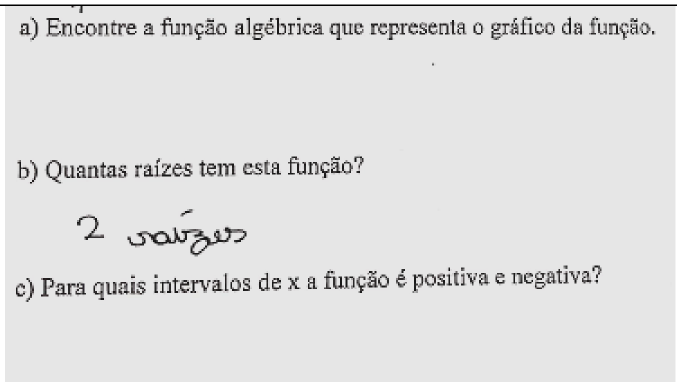
c) Para quais intervalos de x a função é positiva e negativa?

Todos são positivos de acordo ao grafico e função.

A109

O aluno A109 enquadra-se nos processos de pensamento pobre. *Não domina conteúdo*, pois não consegue acertar nenhuma das três perguntas relacionadas à questão dada.

Tivemos ainda 26,8% (30 alunos) que apresentaram uma resposta correta para pergunta da letra *b* da tarefa. Esses alunos *solucionaram parcialmente* a questão e pode ser que eles tenham observado o gráfico dado para obter a resposta. A seguir, apresentamos um exemplo desse tipo de resposta:


a) Encontre a função algébrica que representa o gráfico da função.

b) Quantas raízes tem esta função?

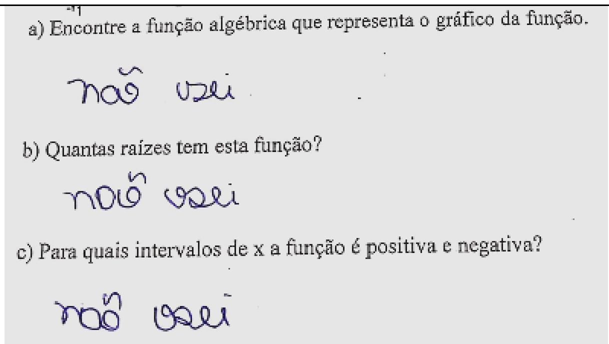
2 raízes

c) Para quais intervalos de x a função é positiva e negativa?

A16

O aluno A16 respondeu corretamente à pergunta da letra b. Esta resposta demonstra uma *solução parcial*, uma vez que não se sujeitou, em parte, às condições do problema, pois deixou de responder às demais perguntas da tarefa.

Também, nessa categoria (pobre), encontramos 11,6% (13 alunos) que apresentaram a resposta “não sei” ou usa o símbolo de interrogação no espaço destinado à apresentação da solução. Consideramos que esses alunos não demonstraram interesse em resolver a questão e tiveram um comportamento *evasivo*, conforme podemos observar no exemplo a seguir:



a) Encontre a função algébrica que representa o gráfico da função.

não sei

b) Quantas raízes tem esta função?

não sei

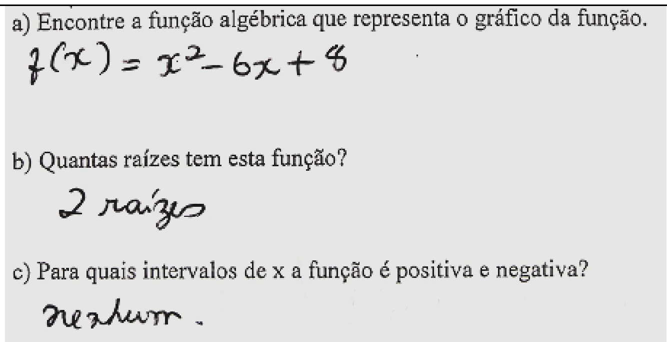
c) Para quais intervalos de x a função é positiva e negativa?

não sei

A84

Como podemos ver, o estudante A84 demonstrou não ter interesse em se implicar no problema e apresenta a resposta *evasiva* "não sei" para as três perguntas da questão.

Na categoria *rico,* três alunos conseguiram responder corretamente à pergunta da letra *a*. Pode ser que eles responderam por *analogia* à questão 6 do teste *standard*, pois mostraram somente a função que já tinha sido vista no outro teste (presente no enunciado da questão 6 *standard*) e não apresentaram nenhum cálculo que demonstrasse outro tipo de processo ativado. Os alunos que conseguiram responder por analogia à pergunta da letra *a* são do 3º ano – mesma turma que respondeu aos dois testes em um só momento, ou seja, num mesmo dia. Esse processo analógico não ocorreu com as demais turmas. Vejamos um exemplo:



a) Encontre a função algébrica que representa o gráfico da função.

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

b) Quantas raízes tem esta função?

2 raízes

c) Para quais intervalos de x a função é positiva e negativa?

nenhum.

A68

3.2.1.5 Questão 6:

.

Questão 6 – (GUSMÃO, 2006):

Três bolas são do mesmo tamanho, cor e forma. Duas têm o mesmo "peso" e a outra é a "mais leve". Usando uma balança com dois pratos e realizando uma **única pesagem**, José pegou duas das bolas quaisquer e colocou uma em cada prato da balança. Veja como ele pensou a forma de verificar qual era a bola "mais leve":

a) Se a balança desequilibrasse, a mais leve estaria no prato de cima.

b) Se pesassem o mesmo, a bola que ficou sem pesar seria a mais leve.

Suponha, agora, que você tem nove bolas semelhantes, das quais uma também é mais leve que as outras. Como você pode descobrir qual é a bola mais leve **em apenas duas pesagens**?

Resoluções possíveis:

Para essa questão, espera-se que o aluno, com base no exemplo de resolução das três bolas, seja capaz de perceber, por analogia, que as mesmas estratégias utilizadas por José para solucionar aquele problema poderão ser ferramentas para a solução da situação com nove bolas, além de identificar a bola mais leve por meio da generalização.

Segundo Gusmão (2006), o aluno pode encontrar a solução com base no desequilíbrio da balança e justificar a sua resposta fundamentada na hipótese de que quanto maior a quantidade, maior a massa, demostrando que ele tem sustentado seu pensamento nessa hipótese. Outra forma de resolver o problema, segundo a autora, é o aluno fazer reflexões acerca da distribuição das bolas nos pratos da balança, utilizando as propriedades já conhecidas, e justificar o desequilíbrio dos pratos provocado pelo "peso" diferente das bolas.

A respeito da generalização do problema das três bolas para esse de nove bolas, Gusmão argumenta:

> [...] o aparecimento de uma reflexão metacognitiva que permite usar as estratégias cognitivas relevantes para reduzir (agrupar) o caso de 9 bolas ao caso de 3 cuja solução é explícita. É uma estratégia generalizável, de acordo com as potências sucessivas de 3, onde o número de pesos (n) necessários para discriminar a bola mais leve é constante para qualquer número de bolas, incluídas no intervalo: $[3^{n-1} + 1 , 3^n]$ (para qualquer $n \geq 1$).[19] (GUSMÃO, 2006, p. 159, *tradução nossa*)

Nesse caso, temos: $[3^{1=1} + 1, 3^1] = [3^0 + 1, 3] = [1+1, 3] = [2,3]$. Isso quer dizer que, quando se têm duas ou três bolas, é possível descobrir a bola mais leve com apenas uma pesagem (n=1). De forma análoga: $[3^{2=1} + 1, 3^2] = [3^1 + 1, 9] = [3+1, 9] = [4,9]$. Este último resultado quer dizer que com 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 bolas é possível descobrir a mais leve em apenas duas pesagens.

[19] "[...] la aparición de una reflexión metacognitiva que permita usar las estrategias cognitivas pertinentes para reducir (agrupar) el caso de 9 bolas al caso de 3 cuya solución se explicita. Se trata de una estrategia generalizable, según las potencias sucesivas de 3, en donde el numero de pesadas (n) necesario para discriminar la bola más ligera, es constante para cualquiera cantidad de bolas, comprendida en el intervalo: [3n-1 + 1, 3n] (para cualquier n≥1)." (GUSMÃO, 2006, p. 159)

Tabulação dos dados:

Tabela 11: Questão 6

Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre 48,2%	Raciocínio ingênuo	Pesa as bolas uma a uma até descobrir a resposta.	12	8	2	6	25,0%	
	Experimentação ingênua	Não usa a balança; estima o "peso" com a mão ou colocando as bolas na água; Coloca cinco bolas em um prato e quatro no outro e examina o desequilíbrio.	5	2	5	5	15,2%	11S/A
	Não se sujeita às condições e exigências da tarefa	Supõe uma balança de três pratos para resolver o problema.	0	0	1	0	0,9%	
	Experimentação seletiva de uma eleição	Coloca duas bolas em cada prato, se desequilibrar testa as que estão no prato que subiu. Senão, repete a operação até encontrar a resposta.	1	0	5	2	7,1%	8S/A
Rico 26,8%	Pensamento analógico; experimentação seletiva de uma eleição	Põe quatro bolas em cada prato. Se os pratos ficarem equilibrados a bola "mais leve" está fora. Caso contrário "pesa" novamente as bolas do prato que subiu.	2	7	8	13	26,8%	30S/A
Muito rico 4,5%	Pensamento analógico; generalização; particularização; dedução inquirida; experimentação seletiva de uma eleição	Utiliza a estratégia de José com agrupamentos de três bolas e seleção de um grupo – resolve a tarefa com eficácia.	1	1	1	2	4,5%	5S/A
Confuso 0,0%							0,0%	
Em branco 20,5%		Não responderam.	5	6	7	5	20,5%	
		Total	26	24	29	33	100,0%	

Fonte: o autor (2019)

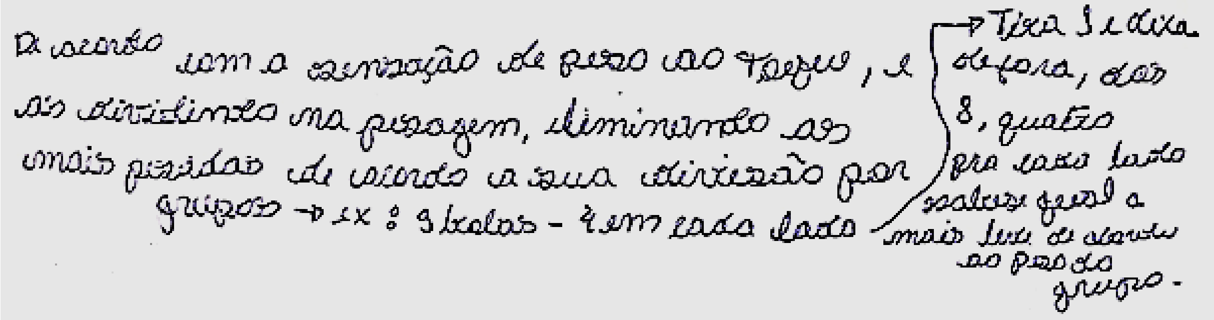
Estudo pormenorizado:

Para a questão 6, dos 112 alunos participantes, 48,2% (54 alunos) estão na categoria *pobre*, 26,8% (30 alunos) apresentaram respostas que se enquadram no processo de pensamento *rico*, 4,5% (5 alunos) ativam processos de pensamento *muito rico* e 23 participantes não responderam à questão proposta.

Visto esse panorama geral da questão, passamos a especificar os processos ativados por tipologia de respostas.

Constatamos que 25% do total (28 alunos) apresentam um *raciocínio ingênuo*, já que incluem "no raciocínio os dados procurados" (GUSMÃO, 2006, p. 139) e buscam solucionar a questão pesando as bolas uma a uma. Esse comportamento foge da proposta da questão que é a de solucionar com apenas duas pesagens.

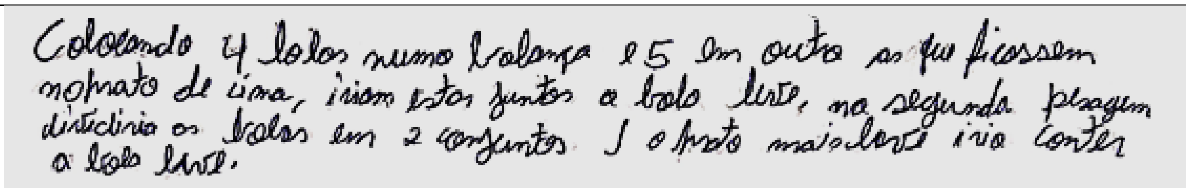
Outro processo de pensamento ativado foi o processo de *experimentação ingênua*. Nesse caso, tivemos 15,2% (17 alunos) que não usam a balança de acordo com as regras estabelecidas no problema. Estimam peso com as mãos ou pelo contato físico. Esse tipo de resposta está na categoria *pobre* e classificamos como *experimentação ingênua*. A seguir, exemplos de respostas que representam essa tipologia:


De acordo com a sensação de peso ao toque, e as dividimos na pesagem, eliminando as mais pesadas de acordo a sua divisão por grupos → 1x : 9 bolas - 4 em cada lado → Tira 1 e deixa de fora, das 8, quatro pra cada lado se a balança pesar a mais leve de acordo ao peso do grupo.

Aluno (A109)

O aluno A109 escreve: “De acordo com a sensação de peso ao toque”. Esse argumento indica que o aluno dispensa, inicialmente, o uso da balança e, portanto, “faz qualquer coisa sem se sujeitar às condições do problema ou às características do contexto” (GUSMÃO, 2006, p. 139). Dessa maneira, desenvolve uma *experimentação ingênua*.

Continuando a análise, encontramos ainda nessa subcategoria alunos que colocam cinco bolas em um prato da balança e quatro no outro e, com base na sua observação visual, examina o desequilíbrio e faz uma nova pesagem na busca pela bola mais leve. Nesse caso, os alunos pesaram com agrupamentos não uniformes e utilizaram o conceito de massa de forma confusa. Esse tipo de solução também configura uma *experimentação ingênua*. Nesse caso há uma *supervisão* e uma *avaliação* do processo, porque o aluno inspeciona a sua pesagem, estabelece uma nova pesagem e apresenta uma resposta final, mesmo que de forma precária. Vejamos um modelo com essa característica:

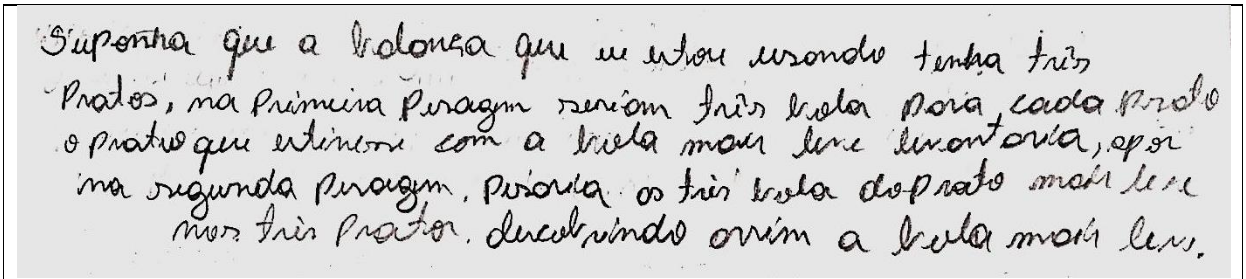

Colocando 4 bolas numa balança e 5 em outra as que ficassem no prato de cima, iriam estar juntas a bola leve, na segunda pesagem dividiria as bolas em 2 conjuntos. O prato mais leve iria conter a bola leve.

Aluno (A11)

O aluno A11 inicia a solução da tarefa utilizando agrupamentos não uniformes: “colocando 4 bolas numa balança em 5 em outra”. Após colocar os dois grupos de bolas na balança, compara todas as bolas de uma só vez e, em seguida, elege a bola mais leve, observando o movimento dos pratos: "as que ficassem no prato de cima, iriam estar juntas a bola leve".

Esse argumento mostra que ele utiliza o conceito de massa de uma forma confusa, incorrendo num processo de pensamento *pobre* e *experimentação ingênua* – a bola mais leve não poderia estar no prato de baixo? Ou será que essa bola não tem massa? É preciso considerar que esse aluno, mesmo de forma precária, *supervisiona* e *avalia* as suas ações, pois inspeciona os pratos com as bolas, e toma a decisão de pesar novamente para concluir a sua experiência com a descoberta da bola mais leve: "na segunda pesagem dividiria as bolas em dois conjuntos/ o prato mais leve iria conter a bola leve".

Ainda, na categoria *pobre*, encontramos um aluno que foge, explicitamente, das condições e exigências da tarefa. Vejamos a sua resposta:


Suponha que a balança que eu estou usando tenha três pratos, na primeira pesagem seriam três bola para cada prato o prato que estiver com a bola mais leve levantaria, e por na segunda pesagem, poria os três bola do prato mais leve nos três prato, descobrindo assim a bola mais leve.

Aluno (A71)

Ao apresentar "Suponha que a balança que eu estou usando tenha três pratos", o aluno A71 *não se sujeita às condições e exigências da tarefa*, uma vez que apresenta um instrumento de pesagem modificado em relação às condições estabelecidas na situação problema. Notamos que, ao continuar a argumentação, o aluno se mostra bastante confuso em sua resposta.

Ainda, na categoria *pobre*, encontramos 7,1% do total (8 alunos) que põem duas bolas em cada prato e, se houver desequilíbrio, testam as que estão no prato que subiu. Senão, repete a operação até encontrar a resposta ou fazem agrupamentos diferenciados na tentativa de encontrar a bola mais leve.

Esse grupo de alunos faz *experimentação seletiva de uma eleição* e *experimentação ingênua* e, de certo modo, apresentam *confusão* na finalização das respostas, já que, inicialmente, experimenta de acordo com o contexto da tarefa e dos recursos disponíveis elegendo quatro bolas e comparando-as duas a duas. Na sequência, fazem experimentos com agrupamentos diferentes e, por fim, apresentam dificuldade na distinção entre "mais alto" e "mais leve" e fazem confusão com o conceito de massa. Vejamos um exemplo de resposta:

• Colocaria na primeira pesagem 2 bolas em cada prato (totalizando 4 bolas), se equilibrasse a balança, saberia que a mais leve não estaria entre essas 4. Colocando então na segunda pesagem 3 em um prato e duas bolas em outro prato, a que ficasse mais alto (pra cima) eu saberia que a mais leve estaria no outro prato.
• Se não equilibrasse aqui, ficando um mais alto e um mais leve tiraria então uma bola da mais leve e seria qual das duo seria a tal.

Aluno (A70)

Inicialmente, o aluno A70 coloca duas bolas em cada prato da balança e observa o equilíbrio. Se a balança estiver equilibrada, descarta as bolas e parte para outra tentativa. Agindo dessa forma, ativa o processo de *experimentação seletiva de uma eleição*. Nesse caso, da balança equilibrada, ele executa nova pesagem com as bolas ainda não pesadas, porém numa *experimentação ingênua*, visto que pesa com agrupamentos não uniformes e apresenta confusão a respeito do conceito de massa. Se, já na primeira pesagem, a balança não estiver equilibrada, o aluno sugere retirar uma bola, porém faz confusão entre “mais alto” e “mais leve” e não consegue se expressar com clareza.

No tocante ao processo de pensamento *rico*, encontramos 26,8% do total (30 alunos) que põem quatro bolas em cada prato. Se os pratos ficarem equilibrados, concluem que a bola mais leve está fora, caso contrário, pesam novamente as bolas do prato que subiu até encontrarem a resposta. Classificamos as respostas desses alunos na categoria *rico*, uma vez que fazem tentativas de desenvolver um *pensamento analógico*, mesmo não encontrando a bola mais leve em duas pesagens, e uma *experimentação seletiva de uma eleição*, conforme podemos observar na resposta de um aluno exibida a seguir:

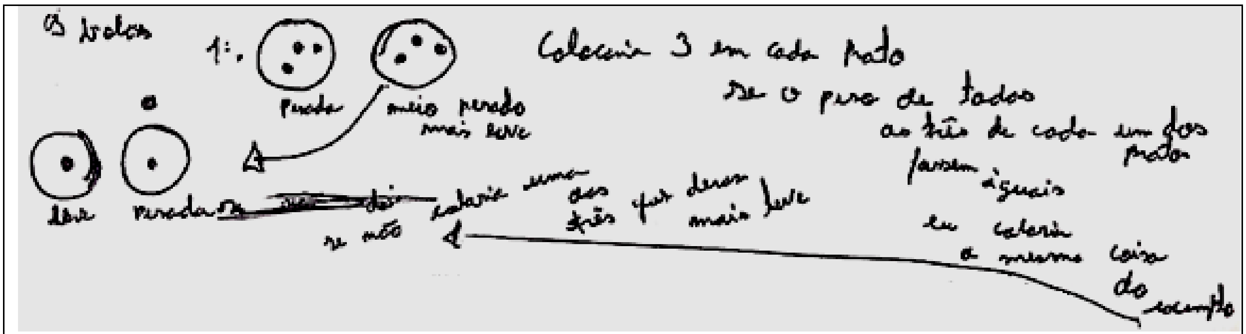
Coloca-se 4 em um prato e quatro no outro, a bola que sobrar seria a leve, caso a balança não desequilibrasse. Se desequilibrasse, então o prato que ficasse em cima, conteria a bola mais leve.
Na segunda pesagem se descobriria qual a bola mais leve.

Aluno (A30)

O aluno A30 apresenta um *pensamento analógico* ao tentar seguir, implicitamente, a estratégia utilizada por José para responder o problema com as três bolas. Essa conduta é notada ao verificar que ele distribui as bolas em dois grupos e avalia o equilíbrio da balança: “Coloca-se 4 em um prato e quatro no outro, a bola que sobrar seria a leve, caso a balança não desequilibrasse”. Outra decisão semelhante à de José é a observação de que o prato da balança que sobe contém a bola mais leve: “Se desequilibrasse, o prato que ficasse em cima, conteria a bola mais leve”.

Notamos ainda que o aluno A30 faz uma *experimentação seletiva de uma eleição* e uma *supervisão*, uma vez que ele elege um grupo de bolas para encontrar a bola mais leve e inspeciona as etapas da sua pesagem. Consideramos também que o estudante faz uma *dedução parcial*, já que desenha parte da estratégia que pode levar à resolução da tarefa. Não chega a ser completa, porque afirma que de um grupo de quatro bolas (do prato que subiu) pode-se descobrir a bola mais leve em mais uma pesagem. Mas esse procedimento não é possível, pois é necessário realizar mais duas pesagens (n=2), dado que esse número de bolas está no intervalo $[3^{n-1} + 1, 3^n]$ (para n=2).

No que tange aos processos de pensamento *muito rico*, encontramos 4,5% do total de participantes (5 alunos) que utilizam a estratégia de José com agrupamentos de três bolas e seleção de um grupo de bolas com o pensamento voltado para a situação apresentada como exemplo (solução de José). Esses alunos resolvem a tarefa com eficiência e as suas respostas mostram a ativação dos processos de pensamento: *analógico*, *particularização*, *generalização*, *dedução inquerida*, *experimentação seletiva de uma eleição* e *supervisão*. Vejamos uma dessas respostas:



Aluno (A108)

O aluno A108 apresenta figuras que ilustram a solução geral – *particularização*. Ele consegue fazer uma *analogia* do problema das nove bolas com o exemplo das três bolas, pois estabelece a mesma estratégia e passa de uma situação mais simples (problema das três bolas) para uma mais complexa que pode incorrer em *generalização*. Além do mais, ele “desenha a estratégia completa e, portanto, experimenta o processo que leva a descobrir a resposta” (GUSMÃO, 2006, p. 140) – *dedução inquerida*. Vimos também que esse aluno utiliza os instrumentos disponíveis e o contexto do problema para realizar a sua experiência – *experimentação seletiva de uma eleição*. Dessa maneira, em todo esse contexto, pensamos que o aluno supervisiona e avalia suas ações.

3.2.1.6 Questão 7:

Questão 7 – (GUSMÃO, 2006):

Um pescador trouxe 50 quilos de peixe ao mercado. Durante a manhã, vendeu o quilo a dez reais, e, à tarde, para vender tudo, baixou o preço para sete reais. Se ele vendeu os 50 quilos, quanto arrecadou?

Resoluções possíveis:

Essa questão também admite múltiplas soluções. Com base em Gusmão (2006), a tarefa não especifica a quantidade de quilos vendidos no turno matutino ou no turno vespertino. O que se tem na verdade é que o pescador vendeu os 50 quilos. Não é sabido se ele vendeu quase tudo pela manhã ou quase tudo à tarde ou até mesmo um pouco ao meio-dia. Vamos considerar a proposição de que vendeu pela manhã e à tarde. Nesse caso, se vendesse tudo pela manhã, arrecadaria 500 reais. Se vendesse tudo à tarde, conseguiria 350 reais. Seguindo esse raciocínio, as soluções estariam num intervalo [350, 500].

Assim sendo, pela manhã, o pescador teria vendido x quilos de peixe, e, à tarde, (50 – x) quilos. Dessa forma, a arrecadação final y seria: $y = 10x + 7(50 - x)$, o x estaria no intervalo [0, 50] e y no intervalo [350, 500]. O número x pode ser um número inteiro ou decimal, considerando a precisão da unidade de medida utilizada. Ao manipular a equação $y = 10x + 7(50 - x)$, obteríamos $y = 3x + 350$ e assim conseguiríamos obter valores possíveis da arrecadação final do pescador.

Tabulação dos dados:

Tabela 12: Questão 7

Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Pobre	Raciocínio ingênuo/Experimentação ingênua	A resposta apresentada não está sujeita às condições da tarefa.	1	0	0	2	2,7%	
38,4%	Ingenuidade dependente	Apresenta respostas com os dados do enunciado.	3	3	7	8	18,8%	3S/A
	Evasivo	A resposta aponta para o fato de que o aluno se abstém dos procedimentos de cálculo.	5	8	2	2	15,2%	
	Descoberta de insuficiência	O aluno indica que faltam dados no enunciado da tarefa e não dá continuidade à solução.	0	0	2	0	1,8%	

Continua

Categorias	Processos ativados	Tipologias de respostas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	%	S/R/A
Rico	Dedução parcial/ Domínio de elementos particulares	A resposta apresenta um exemplo possível.	0	0	2	2	3,6%	2S/A
26,8%	Raciocínio hipotético concreto/ Aceitação hipotética de um termo médio	O aluno aponta falta de dados no enunciado da tarefa, mas trabalha com exemplo possível.	7	1	6	12	23,2%	5S/A
Muito rico 0,0%			0	0			0,0%	
Confuso 21,4%	Planos confusos, imprecisos/ Argumentações imprecisas	Apresenta uma resposta sem linha de raciocínio precisa ou resposta rasurada (riscada).	5	8	4	7	21,4%	
Em branco 13,4%		Não respondeu.	5	4	6	0	13,4%	
		Total	26	24	29	33	100,0%	

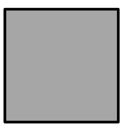
Fonte: o autor (2019)

3.3 Análise comparativa entre questões dos testes com conteúdos afins

Para finalizar este bloco de análise, iremos fazer aqui um estudo comparativo dos processos de pensamentos ativados pelos alunos nas questões *standards* e *não standards*. Para esse procedimento, apresentaremos o comparativo das questões que expõem conteúdos matemáticos afins. Por exemplo, a questão que solicita o cálculo da área do quadrado e a outra que pede para calcular a área de um retângulo cujo perímetro é fixo, depois disso, faremos o comparativo delas, já que envolvem o mesmo conteúdo. Uma está formulada de maneira fechada, propondo ao aluno uma só resposta, enquanto a outra está aberta.

Todas as questões que têm essa mesma característica – conteúdos afins – foram colocadas nos testes propositadamente, uma que apresentasse um raciocínio fixo e a outra que envolvesse o mesmo conteúdo e o aluno pudesse abrir o seu pensamento para que pudéssemos observar e comparar os processos de pensamento ativados por eles na resolução de cada tarefa.

Assim sendo, vejamos o comparativo das questões que envolvem área e perímetro.

Questão *standard*	Questão *não standard*
Questão 1 Qual a área da figura?  10 cm 10 cm	**Questão 2 – (GUSMÃO 2014):** Qual a área de um retângulo cujo perímetro é de 30 cm?

Na questão *standard*, os alunos responderam e apresentaram de fato uma única resposta. Não houve um processo ou uma tentativa de resposta mais elaborada. Essa ocorrência mostra que essas questões de uma única resposta, conduz o aluno a apresentar o esperado, uma solução única. Já na questão *não standard*, que esperávamos que o aluno demonstrasse uma abertura de pensamento, só dois alunos apresentaram um *processo de pensamento rico* com generalização e flexibilidade.

Apontamos outro fato que nos chamou a atenção: o número de alunos que apresentaram respostas confusas ou em branco (54 alunos) é maior na questão *não standard* do que na questão *standard* (três alunos). Esse resultado mostra uma desistência maior em responder a questões abertas em detrimento das questões fechadas, ainda que se trate do mesmo assunto/conteúdo matemático.

No geral, os alunos responderem à questão *não standard* aplicando os mesmos procedimentos de uma única resposta que eles utilizaram para responder à questão *standard*. Portanto, notamos que mesmo que a questão seja aberta, nem todos os alunos conseguem perceber essa abertura, essa flexibilidade de raciocínio que foi exigido na segunda questão. Desse modo, podemos inferir que, possivelmente, esses alunos não conhecem a propriedade matemática “a perímetro fixo área variável” que poderia levá-los a outras possíveis respostas para a questão *não standard*, além de não estar acostumados a esse tipo de questão.

A falta de base, o desconhecimento da propriedade implícita nesse problema, talvez a própria forma como a matemática vem estruturada e o contrato didático estruturado – tudo isso são fatores que podem nos ajudar a compreender que, mesmo a questão sendo aberta, os alunos ainda aplicam modos de procedimento *standard*, algoritimizado, um comportamento muito parecido com o paradigma do exercício de que fala Skovsmose (2000).

Dito isso, passamos agora para o comparativo entre as questões que envolveram sistema de equações.

Questão *standard*	Questão *não standard*
Questão 4 – (Adaptada de GUSMÃO, 2006): Resolva o seguinte sistema de equação do 1º grau: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.	**Questão 4 – (GUSMÃO, 2006):** Quatro amigos vão a uma sorveteria e tomam sorvetes do mesmo tipo e sucos também do mesmo tipo. Eles pagam tudo junto e, para determinar o preço do sorvete (x) e o preço do suco (y), cada um deles escreveu duas relações entre os preços, ou seja, montou um sistema de equações para a situação. Veja

	as equações escritas pelos quatro amigos: Andreia: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ Carol: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$ Beto: $\begin{cases} 2x+2y=6 \\ 4x+4y=12 \end{cases}$ David: $\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ Comente e justifique se cada uma das propostas pode ser ou não válida.

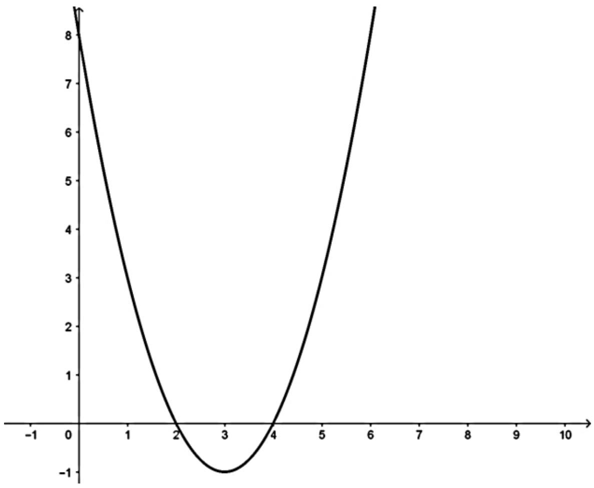
Nas duas questões que envolveram sistema de equações, tivemos o mesmo número de alunos que apresentaram respostas que mostra a ativação de processos de pensamento pobre, 32 alunos em uma questão e 32 alunos na outra questão. Já na categoria processos de pensamento rico, na tarefa *standard* encontramos 17 alunos contra dois da *não standard*. Podemos dizer que essa ocorrência mostra que esses alunos tiveram uma maior facilidade de responder à questão *Standard* do que a *não Standard*. Podemos inferir que os alunos estão mais acostumados com esse modelo de questão no seu dia-a-dia de sala de aula. Quanto à quantidade de respostas confusas apresentadas pelos alunos tivemos uma diferença muito pequena de uma questão para outra, 34 *standards* e 30 *não standards*.

No que tange ao número de alunos que deixaram de responder às questões, ou seja, deixaram-nas em branco, é um pouco maior na questão *não standard* (48 alunos), uma vez que na questão *standard* esse número chegou a 32 alunos. Nenhum estudante notou que a questão *standard* do primeiro teste tinha um sistema que foi repetido na outra questão, nem mesmo nas turmas em que os alunos fizeram o teste em um só encontro, pelos menos essa conduta não ficou evidente.

Vale salientar que só reformulamos o contexto na questão *não standard*, mas o sistema dado na questão *standard* foi o mesmo sistema atribuído a Carol na outra questão. Nesse caso, esperávamos que o aluno pudesse ter usado aquele mesmo sistema de equações do primeiro teste como resposta para a questão *não standard*, por meio de um processo analógico, mas esse tipo de resposta não ocorreu mesmo nas turmas que fizeram um teste junto com outro, isto é, no mesmo dia. Pensamos que os dois testes respondidos em um só momento possibilitariam ao aluno olhar o sistema no primeiro teste e tentar puxar esse sistema para a resposta durante o segundo, por analogia, já que o estudante estava com os dois testes em mãos.

De fato, as turmas que fizeram os dois testes em dias diferentes (2º e 4º ano), a dificuldade de estabelecer uma analogia entre as questões pode ser explicado pelo esquecimento, ou por não ter gravado, ou não ter feito a relação por causa do tempo que foi diferente de aplicação. Nas turmas em que o teste foi aplicado ao mesmo tempo (1º e 3º ano), esperávamos que os alunos pudessem fazer esse trabalho de analogia, mas esse evento não ocorreu com essas duas questões.

Comparativo entre as questões sobre a função polinomial de 2º grau

Questão *standard*	Questão *não standard*
Questão 6: Seja a função $y = x^2 - 6x + 8$. Calcule as raízes e construa o gráfico dessa função.	**Questão 5:** Observe o gráfico de uma função polinomial do 2º grau.  a) Encontre a função algébrica que representa o gráfico da função. b) Quantas raízes tem esta função? c) Para quais intervalos de x a função é positiva e negativa?

Nas duas questões sobre a função polinomial do 2º grau, tivemos um número maior de alunos com dificuldades para responder à questão *não standard*, uma vez que 76 alunos apresentaram tipos de respostas que se enquadraram na categoria *pobre*. Já com relação às respostas apresentada para a questão *standard*, foram 43 alunos na mesma categoria. Na questão *não standard,* constatamos que apenas três alunos fizeram analogia entre as duas questões. Esses alunos são da turma do 3º ano que, como dito, tiveram a oportunidade de realizar os dois testes no mesmo turno e com aulas geminadas. Os alunos das outras turmas não apresentaram esse pensamento analógico e nem mesmo a turma do 1º ano que teve também a oportunidade de fazer os dois testes em um só momento.

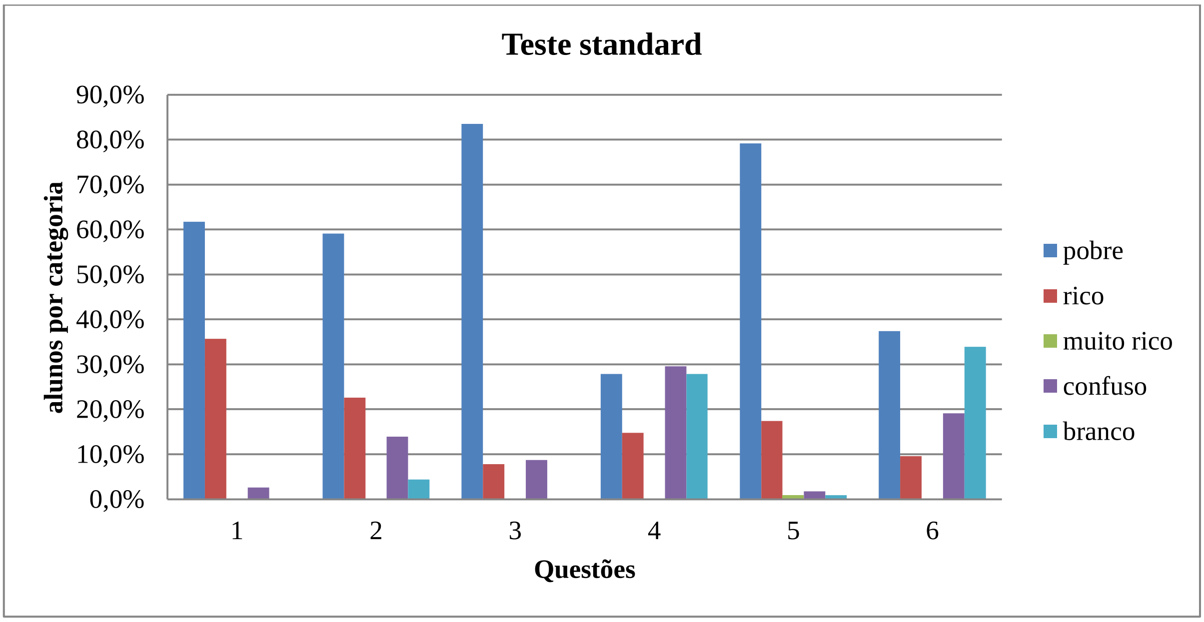
Para essas duas questões, era esperado que mais alunos pudessem perceber a relação de analogia dos elementos matemáticos presentes nas duas questões, mas só três alunos perceberam. A questão deu abertura para os alunos procurarem a fórmula da função que já estava no enunciado da questão *standard*, porém só esse número reduzido de alunos notou esse aspecto; o gráfico na questão *não standard* oferecia a possibilidade de procurar a fórmula, o que poderia ser usado para responder à questão *standard*, mas os alunos também não conseguiram estabelecer essa analogia.

Dessa forma, podemos inferir que quase todos os alunos apresentaram dificuldade de resgate dos processos conceituais, de diagnóstico do problema, de fazerem perguntas para descobrir onde estão determinadas coisas e conseguir chegar à função. Enfim, a maioria dos alunos não têm segurança e domínio de determinadas estratégias para conseguir solucionar questões por analogia, exceto no caso dos três alunos.

3.4 Uma análise geral dos testes

Faremos aqui um comparativo geral das questões por categoria. Para facilitar a análise, trouxemos gráficos que mostram o resultado por questão em cada categoria e em cada teste. Vejamos os resultados apresentados no teste *standard*.

Gráfico 1: Primeiro teste



Fonte: o autor (2019)

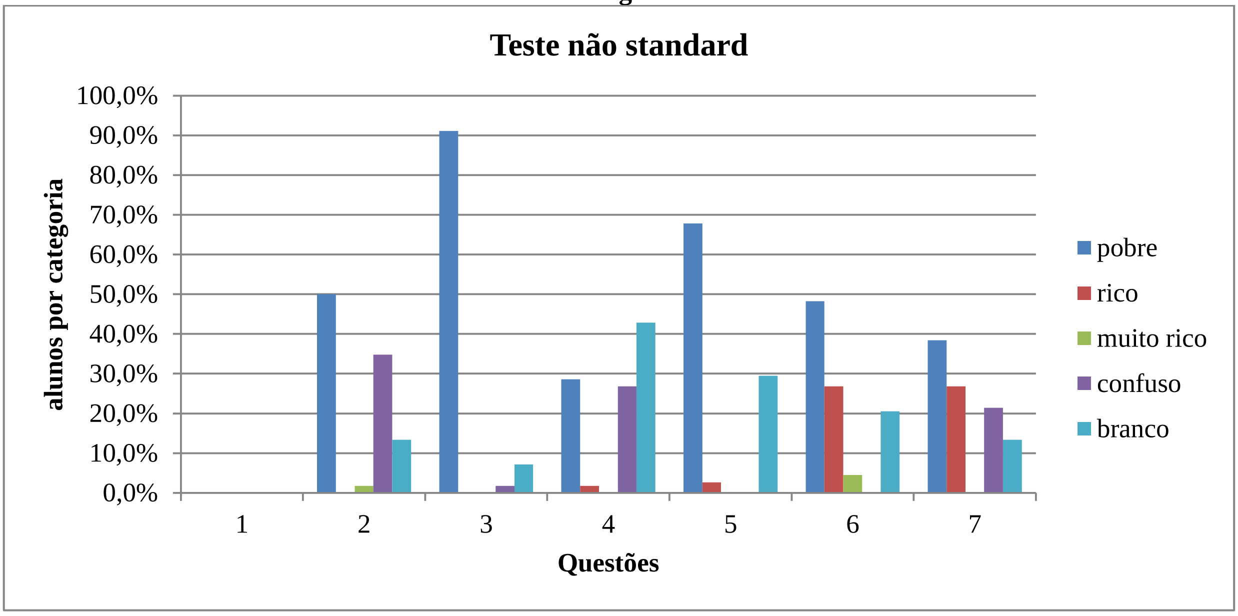
Este gráfico mostra o percentual de alunos que se enquadra, por questão, em cada uma das categorias *pobre*, *rico*, *muito rico*, *confuso* e *em branco*. O gráfico mostra que a maioria dos alunos ativou *processos de pensamento pobre*. As únicas exceções foram a questão 4 – que solicitava a resolução de um sistema de equações – e a questão 6 – que pedia as raízes e o gráfico da função polinomial do 2º grau. Nessas duas questões, o percentual de alunos na categoria *pobre* é, praticamente, o mesmo daqueles que entregaram a questão *em branco*. Podemos inferir que este fato mostra uma desistência maior nesses dois tipos de questão.

Outro resultado importante que podemos ver no gráfico é que, mesmo nas tarefas *standards*, encontramos alunos que ativam os processos de pensamento *rico* e *muito rico*. Esse último em número muito baixo.

De forma geral, podemos inferir que os alunos apresentaram dificuldade para solucionar tarefas matemáticas *standards*. Eles, em algumas tarefas, por exemplo, nas tarefas 4 e 6, apresentaram um número razoável de respostas em branco e com ocorrência de planos confusos e imprecisos, o que aponta para uma desistência na resolução, pelo menos nesses dois tipos de questão.

Vejamos o gráfico para o teste *não standard*.

Gráfico 2: Segundo teste



Fonte: o autor (2019)

Podemos observar neste gráfico, que, assim como nas questões *standards*, um percentual maior de alunos ativa *processos de pensamento pobre*, exceto na questão 4 (questão do sistema de equações). Nessa questão, os alunos que a deixaram *em branco* superam os que se adequaram à categoria *pobre*. Mais uma vez, podemos dizer que eles apresentam dificuldade para lidar com essa questão, pois a questão do sistema de equações foi a menos respondida pelos alunos.

Vale ressaltar que na questão 6 (pesagem das nove bolas) e na questão 7 (venda de peixes pelo pescador) um percentual razoável de alunos ativaram *processos de pensamento rico*. Além disso, o percentual de respostas *confusas* foi mais alto na questão 2 (área e perímetro), na questão 4 (sistema de equações) e na questão 7 (questão do pescador).

No que tange à ativação dos processos de *pensamento muito rico*, assim como nas questões *standards*, os alunos apresentaram respostas que demonstram a dificuldade de lidar com os conteúdos matemáticos. Talvez esse comportamento seja devido ao contrato didático ou à forma como acontece o processo de ensino e aprendizagem desse componente curricular nas nossas escolas.

De fato, os alunos pesquisados apresentaram grande dificuldade na resolução tanto das tarefas *standards* quanto das tarefas *não standards*. Esse fator é importante porque promove uma inquietação no sentido de continuarmos investigando o ensino e aprendizagem da matemática, além de revermos a prática como professores e as atividades/tarefas que ofertamos aos nossos alunos desse componente curricular.

4 CONCLUSÃO

As pesquisas na área de Educação Matemática têm buscado responder a questões relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem no que diz respeito à resolução de situações problemas por estudantes. Cada vez mais professores e pesquisadores têm se debruçado sobre formulações teóricas na busca de entender como ocorre a aprendizagem e de contribuir com o ato de ensinar e de aprender de forma mais efetiva.

Nesse sentido, vimos alguns dos trabalhos que buscam compreender os modos e pensamentos de estudantes na resolução de problemas matemáticos como os de González (1998), Skovsmose (2000), Gusmão (2006), Gontijo (2007), Vale (2012), Pochulu, Font e Rodriguez (2016), Cyrino e Jesus (2014) e Moura (2015), dos quais lançamos mão para construir a nossa revisão de literatura.

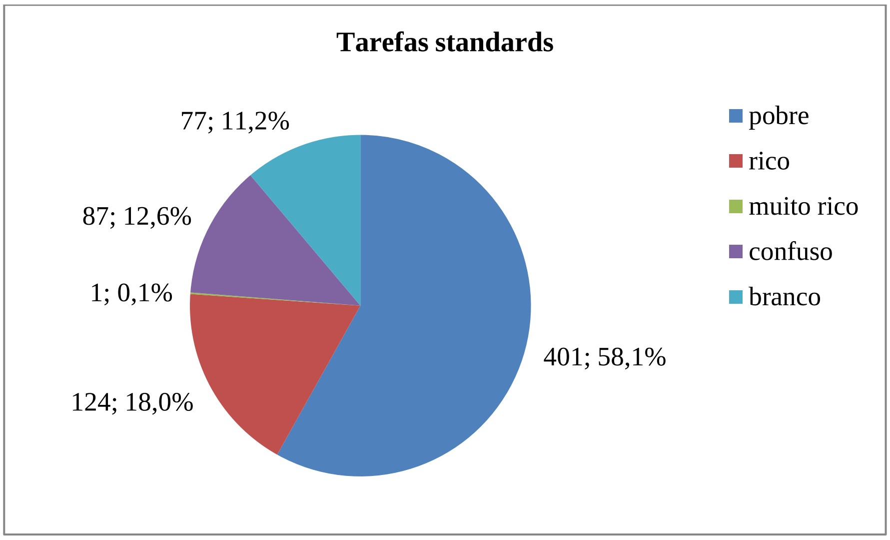
Ao estudarmos os trabalhos desses autores, encontramos a possibilidade de buscar respostas para a nossa questão de pesquisa, procurando entender que processos de pensamento são ativados por estudantes ao resolverem tarefas matemáticas *standards* e *não standards*, fazendo-nos ainda indagar: existem diferenças nos processos de pensamento ativados entre os tipos de tarefa? Os processos de resolução mudam de acordo com o tipo, o grau de dificuldade, as exigências ou as condições da tarefa. Obtivemos a seguinte resposta: não foi possível perceber diferenças de processos de pensamento nos dois tipos de tarefas utilizadas, ou seja, as respostas dos alunos foram praticamente *standards* para ambos os tipos de testes utilizados, não apresentando modos de resolução diferentes nem para o tipo, grau de dificuldade das tarefas, nem pelas condições propostas.

Tudo isso nos fez inferir uma certa rigidez no pensamento do aluno e um padrão de resposta que não se mostrou flexível para as questões que fugiam da rotina escolar. A esse respeito, observamos que esse processo de pensamento flexível praticamente não foi ativado, ou seja, esteve ausente nos modos de resolução utilizados pelos alunos.

Para uma melhor visualização do resultado geral da nossa pesquisa, apresentamos dois gráficos que resumem os resultados obtidos em todas as questões analisadas por categoria.

Vejamos o resultado das tarefas *standards*:

Gráfico 3: Tarefas standards



Fonte: o autor (2019)

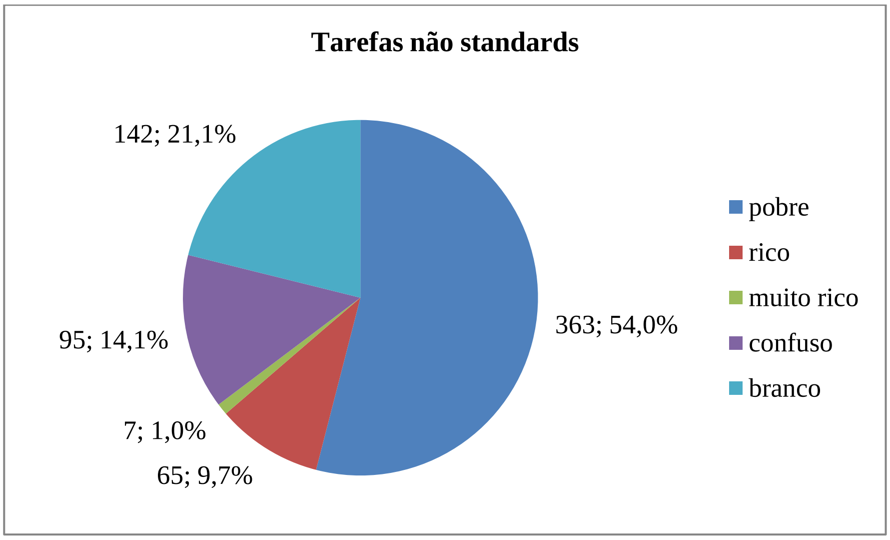
Nas seis questões *standards*, obtivemos 690 respostas, as quais foram distribuídas nas categorias, conforme podemos ver no gráfico acima. Assim, 58,1% das respostas apresentadas mostram alunos capazes de ativar *os processos de pensamento pobre*. Deduzimos que eles apresentam dificuldade de domínio do conteúdo, confundem conceitos, não dominam a técnica ou algoritmo para responder às tarefas, cometem muitos erros de cálculo e apresentam respostas ingênuas e confusas.

Percebemos também que parte considerável das respostas apresentadas, 18% delas (124 respostas), configurou a ativação pelos alunos de *processos de pensamento rico*. Essas respostas mostram que boa parte desses estudantes conseguiu solucionar de forma satisfatória as questões propostas. Ainda sobre o desenvolvimento mais elaborado surgiu a resposta de um aluno que demonstrou a ativação de *processos de pensamento muito rico*. Esses dois episódios reforçam o argumento de que, mesmo com tarefas *standards*, os alunos podem apresentar, na sua resolução, um desenvolvimento *rico* e até *muito rico*.

Ainda tivemos 12,6% (87 respostas) *confusas* e 11,2% (77 respostas) *em branco*. Podemos inferir dessa ocorrência que muitos alunos não conseguem compreender o enunciado das questões, encontram embaraço para se expressar matematicamente ou simplesmente desistem diante do grau de dificuldade que sentem ao deparar-se com as tarefas matemáticas.

Passemos então a mostrar o resultado geral para as tarefas *não standards*:

Gráfico 4: Tarefas não standards



Fonte: o autor (2019)

No tocante às tarefas *não standards*, obtivemos 672 respostas nas seis questões aplicadas. São 54% (363 respostas) em que os alunos, na sua maioria, ativaram *processos de pensamento pobre*. Aqui também os alunos demonstraram dificuldade na resolução desse tipo de tarefa matemática e, assim sendo, percebemos que os alunos não ativam pensamentos mais elaborados.

Destacamos a existência de 21,1% de respostas *em branco* (142 respostas) e 14,1% de respostas *confusas* (95 respostas). Essas ocorrências apontam, no primeiro caso, a desistência de boa parte dos alunos em responder às questões e, no segundo caso, a dificuldade também de parte considerável deles em lidar com a simbologia e com a linguagem matemática.

Nas questões *não standards*, encontramos 9,7% (65 respostas) que incluíram os alunos na categoria *processos de pensamento rico*. Esse número é pouco mais da metade do número de respostas dadas nas tarefas *standards* para essa mesma categoria (que foi 124). Esses dados mostram que os alunos ativaram mais *processos de pensamento rico* nas tarefas *standards* que nas *não standards*. Talvez eles estejam mais acostumados a lidar com problemas fechados em sala de aula do que com problemas abertos.

No geral, os resultados nos mostram que, tanto em questões *standards* quanto em questões *não standards*, a maioria dos estudantes do ensino médio apresenta dificuldade para solucioná-las, incorrendo em processos de pensamento *pobres*. São poucos os alunos que apresentam facilidade em lidar com conteúdos e situações matemáticas e demonstram um pensamento *rico* ou *muito rico*.

Ainda em relação aos resultados, o número de alunos – que produziu uma resposta confusa e deixou as questões em branco – é maior quando apresentamos tarefas *não standards* do que tarefas *standards*.

Após aplicar os testes da nossa pesquisa, levamos as mesmas tarefas propostas para que pudéssemos discuti-las com os alunos que dela participaram. A experiência tem sido agradável, pois eles têm respondido novamente às questões *standards* e às *não standards* e participado das discussões em torno da possibilidade de estudar questões com solução única e com múltiplas respostas. Alguns estudantes vêm expressando surpresa diante da possibilidade de encontrar variadas respostas em matemática. De fato, eles estão bastante acostumados com a resolução de tarefas *standards* nas aulas desse componente curricular.

Assim como temos refletido sobre o nosso trabalho em sala de aula após ter feito leituras sobre as temáticas ligadas à resolução de tarefas matemáticas por estudantes e também sobre o tema cognição e metacognição na Educação Matemática, esperamos que os colegas professores e pesquisadores possam também se interessar por esse tema e buscar investigar com outros grupos de alunos de que forma eles resolvem tarefas *standards* e *não standards*.

Outras pesquisas podem investigar, por exemplo, por que os estudantes continuam apresentando tanta dificuldade diante dos conteúdos matemáticos. Mais ainda, podem buscar compreender o que se pode fazer para promover a aprendizagem dos conteúdos matemáticos e levar o educando a refletir que a matemática não é tão fechada como parece e que existe a possibilidade de estudá-la de forma reflexiva.

Por fim, acreditamos que a nossa pesquisa possa despertar um trabalho com questões/tarefas abertas, inserindo o aluno no centro da aprendizagem. Nesse sentido, faço uma reflexão pessoal por meio do que aqui realizamos: a importância de levar para minha prática tudo o que aqui foi proposto para promoção de um pensamento mais autônomo e flexível de meus alunos mediante uma matemática mais aberta e mais metacognitiva.

Como educadores, precisamos buscar a melhor forma de promover a aprendizagem dos nossos alunos, formando cidadãos críticos e transformadores do meio social, que melhorem a própria vida e a dos outros.

BIBLIOGRAFIA

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. *Associando o computador à resolução de problemas fechados*: análise de uma experiência. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102164/allevato_nsg_dr_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 8 set. 2018.

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. *O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2001.

ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho. *Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática*. In: BORBA, M. de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. São Paulo: Autêntica, 2004. Cap. 1, p. 21-38.

BARDIN, Laurence. *Análise de Conteúdo*. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação qualitativa em educação*. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação matemática.* 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base nacional comum curricular.* Brasília, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf >. Acesso em: 23 nov. 2018.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base nacional comum curricular.* Brasília, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2018.

______. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, v. 2, 2006.

CHAMORRO, Carmen; BELMONTE, Juan M. *El problema de la medida: didactica de las magnitudes lineales*. Col. Matematicas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis, 2000.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; JESUS, Cristina Cirino de. *Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática*. **Ciência & Educação**, B**auru**, [s.l.], v. 20, n. 3, p. 751-764, set. 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1516-73132014000300015>. Acesso em: 14 dez. 2018.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 5. ed. São Paulo: Autêntica, 2004. p. 6-15.

DALTO, Jader Otavio; SANTOS, João Ricardo Viola dos; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. *Multiplicidades de resoluções de alunos do ensino médio em problemas abertos de matemática*. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 98, n. 248, 2017. Disponível em: <http://rbep.inep.gov.br/index.php/rbep/article/view/2877>. Acesso em: 26 out. 2018.

DANTAS, Cláudia; RODRIGUES, Camila Cruz. *Estratégias metacognitivas como intervenção psicopedagógica para o desenvolvimento do automonitoramento*. **Revista Psicopedagogia**, v. 30, n. 93, p. 2026-2035, 2013. Disponível em: < http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?pid=S0103-84862013000300009&script=sci_abstract&tlng=en> Acesso em: 30 dez. 2018.

EYSENCK, Michael W.; KEANE, Mark T. *Manual de Psicologia Cognitiva.* Tradução de Luís Fernando Marques Dorvillé e Sandra Maria Mallmann da Rosa. 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 2017.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo Dicionário Eletrônico Aurélio*. 3. ed. Rio de Janeiro: Positivo, 2004. Versão 5.0. 1 CD-ROM.

FONTELLES, Mauro José et al. *Metodologia da pesquisa científica: diretrizes para a elaboração de um protocolo de pesquisa*. **Revista Paraense de Medicina**, v. 23, n. 3, p. 1-8, 2009. Disponível em: <http://files.bvs.br/upload/S/0101-5907/2009/v23n3/a1967.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2019.

GONTIJO, Cleyton Hércules. *Relações entre Criatividade, Criatividade em Matemática e Motivação em Matemática de Alunos do Ensino Médio*. 2007. Tese (Doutorado em Psicologia) – Universidade de Brasília, Brasília, 2007. Disponível em: <http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/2528/1/2007_CleytonHerculesGontijo.PDF>. Acesso em: 14 nov. 2017.

GONZÁLEZ, Fredy E. *El Decálogo del resolvedor exitoso de problemas*. **Investigación y Postgrado**, v. 17, n. 1, p. 11-45, 2002. Disponível em: <http://www.scielo.org.ve/scielo.php?pid=S1316-00872002000100002&script=sci_arttext&tlng=pt>. Acesso em: 31 dez. 2018.

______, Fredy E. *Metacognicion y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos*. **Revista Zetetiké**, Campinas, v. 6, n. 9, p. 59-87 (Primeira parte: p. 59-73), 1998. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646807/13709>. Acesso em: 30 dez. 2018.

______, Fredy E. *Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitários venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos*. ARJÉ. **Revista de Postgrado**, *FACE-UC*, v. 8, n. 14, p. 51-68, jun. 2014. Disponível em: <http://www.arje.bc.uc.edu.ve/arj14esp/art03.pdf >. Acesso em: 1 jan. 2019.

GURAT, Melanie G.; MEDULA JR, Cesar T. *Metacognitive Strategy Knowledge Use through Mathematical Problem Solving amongst Pre-service Teachers*. **American Journal of Educational Research**. 2016; 4(2):170-189. doi: 10.12691/education-4-2-5. Disponível em: < http://pubs.sciepub.com/education/4/2/5/index.html>. Acesso em: 15 dez. 2018.

GUSMÃO, Tânia Cristina Rocha Silva. *A estreita relação entre os modelos de resolução de problemas e a metacognição: uma questão de circunstâncias*. Boletim GEPEM, n. 54, p. 77-92, 2009. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=25&path%5B%5D=5>. Acesso em: 9 jan. 2019.

______, Tânia Cristina Rocha Silva. *Desenho de tarefas para o desenvolvimento da cognição e metacognição matemática*. In: Contribuições da didática da matemática para a prática dos professores. Anderson Souza Neves... (Org)... [et al.]. Salvador: EDUFBA, 2016. p. 318 (Coleção Ensino, filosofia e história das ciências; 2).

______, Tânia Cristina Rocha Silva. *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: uma perspectiva ontosemiótica*. 2006. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 2006. Disponível em: <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf>. Acesso em: 18 set. 2017.

______, Tânia Cristina; FONT, Vincenç; CARAJAVILLE, José A. *Análises cognitivo e metacognitivo de práticas matemáticas de resolução de problemas: o caso nerea*. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 11, n. 1, 2009. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2134> Acesso em: 28 de out. 2017.

HIDALGO, Belkys Pastora; GONZÁLEZ, Fredy Enrique. *Metabolización de información: un modelo dinámico para interpretar el proceso de producción de conocimiento*. **Investigación y Postgrado**, v. 24, n. 1, p. 10-45, abr. 2009. Disponível em: <http://revistas.upel.edu.ve/index.php/revinpost/article/view/908/350>. Acesso em: 1 jan. 2019.

HOUAISS, Antônio. *Dicionário Eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa*. Versão monousuário 3.0. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. 1 CD-ROM.

KRIPKA, Rosana Maria Luvezute; SCHELLER, Morgana; BONOTTO, Danusa Lara. Pesquisa documental: considerações sobre conceitos e características na pesquisa qualitativa. **Atas CIAIQ2015**, v. 2, 2015. Disponível em: <https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2015/article/view/252>. Acesso em: 28 fev. 2019.

LEAL JUNIOR, Luiz Carlos. *Tessitura sobre discursos acerca de Resolução de Problemas e seus pressupostos filosóficos em Educação Matemática: cosi è, se vi pare*. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2018. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/157077>. Acesso em: 01 jan. 2019.

MEDEIROS, Kátia Maria de. *O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula*. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_medeiros.pdf>. Acesso em: 26 out. 2018.

MIRA, Maria Helena Novaes. *Processos criativos no ensino-aprendizagem:* uma contribuição da psicologia escolar. Arquivos Brasileiros de Psicologia, v. 41, n. 4, p. 46-65, 1989. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/abp/article/viewFile/21720/20473>. Acesso em: 12 mai. 2018.

MOLINA, Raquel Garcia; FERNÁNDEZ, Isabel María Gallardo. *Creatividad y diseño de tareas en Educación Infantil*. 2017. Disponível em: <http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/61041/CREATIVIDAD%20Y%20DISE%C3%91O%20DE%20TAREAS.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 6 fev. 2018.

MOREIRA, Celma Bento; GUSMÃO, Tânia Cristina Rocha Silva; MOLL, Vicenç Font. *O que Tem Dentro? O que Mudou? Desenho de Tarefas para Promover Percepções Matemáticas na Educação Infantil*. **Revista Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 21, 2016. Disponível em: <http://www.trilhasdahistoria.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2222>. Acesso em: 20 nov. 2017.

MOURA, Humberto Plácido Gusmão de. *Análise das eleições e decisões dos estudantes quando enfrentam situações-problema de matemática: uma contribuição desde a didática fundamental da matemática*. 2015. Tese (Doutorado em Didática das Ciências Naturais e da Matemática) – Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 2015. Disponível em: < https://minerva.usc.es/xmlui/handle/10347/13972 >. Acesso em: 14 out. 2018.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematic***.** Reston: NCTM, 2000.

PIAGET, Jean. *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Tradução de Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

POCHULU, Marcel; FONT, Vicenç; RODRÍGUEZ, Mabel. *Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas*. **Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa**, v. 19, n. 1, p. 71-98, 2016. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362016000100071>. Acesso em: 6 dez. 2017.

PRIMI, Ricardo et al. *Precisão de avaliadores na avaliação da criatividade por meio da produção de metáforas*. **Psico-USF** (Impr.), Itatiba, v. 12, n. 2, p. 197-210, dez. 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-82712007000200008&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 14 jan. 2019.

RIBEIRO, Célia. *Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem*. **Psicologia: reflexão e crítica**, v. 16, n. 1, p. 109-116, 2003. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/prc/v16n1/16802>. Acesso em: 2 jan. 2019.

RODRIGUES, A. et al. *A criatividade matemática na resolução de tarefas de exploração e investigação:* uma experiência de ensino no 7.º ano de escolaridade. In: XII Congresso da

Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2014, Vila Real. Disponível em: <https://www.academia.edu/20614262/A_criatividade_matem%C3%A1tica_na_resolu%C3%A7%C3%A3o_de_tarefas_de_explora%C3%A7%C3%A3o_e_investiga%C3%A7%C3%A3o_uma_experi%C3%AAncia_de_ensino_no_7.oano_de_escolaridade>. Acesso em: 30 dez. 2018.

SANTOS, João Ricardo Viola dos; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. *Uma análise interpretativa da produção escrita em matemática de alunos da escola básica*. **Revista Zetetiké**, v. 16, n. 2, 2008. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646889/13791>. Acesso em: 8 fev. 2019.

SCHNEIDER, Daniela Ribeiro; FLACH, Patricia Maia von. *Caderno de orientações para o projeto de intervenção: curso prevenção dos problemas relacionados ao uso de drogas:* capacitação para conselheiros e lideranças comunitárias. 1. ed. Brasília: SENAD-MJ/NUTE-UFSC, p. 60, 2014. Disponível em: <http://conselheiros6.nute.ufsc.br/wp-content/uploads/2014/10/Caderno_PI_6%C2%AAEdi%C3%A7%C3%A3o_Final.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2018.

SMOLE, Katia Stocco. *A resolução de problemas e o pensamento matemático*. Disponível em: < https://pt.scribd.com/document/354064755/A-Resolucao-de-Problemas-Pensamento-Matematico >. Acesso em: 2 jan. 2019.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. *Revista Bolema,* Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022>. Acesso em: 6 set. 2018.

STEDILE, Nilva Lúcia Rech; FRIENDLANDER, Maria Romana. *Metacognição e ensino de enfermagem: uma combinação possível?* **Revista Latino-americana de Enfermagem**, [s.l.], v. 11, n. 6, p. 792-799, dez. 2003. Disponível em: <http://www.repositorio.unifesp.br/handle/11600/1948>. Acesso em: 12 out. 2018.

TOZONI-REIS, Marília Freitas de Campos. *Metodologia da pesquisa*. 2. ed. Curitiba, IESDE Brasil S.A., 2009.

TREVISANI, Fernando de Mello. 2012. *Estratégias de generalização de padrões matemáticos*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2012. Disponível em:<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91142/trevisani_fm_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 08 dez 2018.

VALE, Isabel. *As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos*. **Revista Interacções**, v. 8, n. 20, 2012. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/493>. Acesso em: 1 jun. 2018.

WIELEWSKI, Gladys Denise. 2005. *Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas:* uma apresentação contextualizada na obra de Krutetskii. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

ANEXOS

ANEXO A – Documento 1 – Teste *standard*

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO

Unidade Escolar: ____ Data: _____/_____/______
Curso:____
Aluno(a): ______________________________ Série:____ Turma: ____ Turno: ____________

Querido(a) aluno(a):

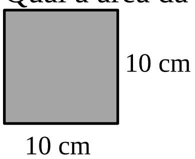
Esse conjunto de atividades foi elaborado para que você possa participar da pesquisa científica "A Prática de Estudantes na Resolução de Tarefas Matemáticas *Standards* e *Não Standards*". Pedimos que responda individualmente a cada uma das questões propostas, sem qualquer consulta a colegas e professores ou a recursos eletrônicos e impressos.

Agradecemos a sua valiosa contribuição.

Aparecido Alves das Flôres
Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

PRIMEIRO TESTE

Questão 1:
Qual a área da figura?



Questão 2 - (GUSMÃO, 2014):
Dona Rosa comprou três metros e meio de mangueira para molhar a sua horta. Quantos milímetros de mangueira ela comprou?

Questão 3 – (GUSMÃO, 2006):
Se vou de carro a 40 km/h até um determinado local, demoro 20 minutos para chegar. Quanto tempo levarei para retornar, se retornar a 50 km/h?
a) 20 minutos b) 16 minutos c) 25 minutos d) 21,25 minutos

Questão 4 – (Adaptada de GUSMÃO, 2006):

Resolva o seguinte sistema de equação do 1º grau: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

Questão 5 – (Adaptada de CHAMORRO; BELMONTE, 2000):
Assinale V para a alternativa verdadeira ou F para a falsa e justifique cada resposta:
a) $8m \times 4m = 32$ **( )**

b) $\dfrac{125}{25cm} = 5$ **( )**

c) $8m \times 5 = 40m$ **( )**

d) $8m \times 5 = 40$ **( )**

Questão 6:
Seja a função $y = x^2 - 6x + 8$. Calcule as raízes e construa o gráfico dessa função.

ANEXO B – Documento 2 – Teste *não standard*

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO

Unidade Escolar: ____ Data: _____/_____/______
Curso:____
Aluno(a): ______________________________ Série:____ Turma: ____ Turno: ____________

Querido(a) aluno(a):

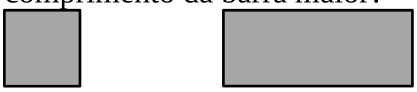
Esse conjunto de atividades foi elaborado para que você possa participar da pesquisa científica "A Prática de Estudantes na Resolução de Tarefas Matemáticas *Standards* e *Não Standards*". Pedimos que responda individualmente a cada uma das questões propostas, sem qualquer consulta a colegas e professores ou a recursos eletrônicos e impressos.

Agradecemos a sua valiosa contribuição.

Aparecido Alves das Flôres
Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

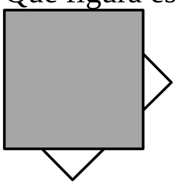
SEGUNDO TESTE

Questão 1 – (GUSMÃO, 2014):
Aproximadamente, quantas vezes a medida do comprimento da barra menor cabe no comprimento da barra maior?



Questão 2 – (GUSMÃO 2014):
Qual a área de um retângulo cujo perímetro é de 30 cm?

Questão 3 – (GUSMÃO, 2006):
Que figura está por trás do quadro cinza? Como você pensou?



Questão 4 – (GUSMÃO, 2006):
Quatro amigos vão a uma sorveteria e tomam sorvetes do mesmo tipo e sucos também do mesmo tipo. Eles pagam tudo junto e, para determinar o preço do sorvete (x) e o preço do

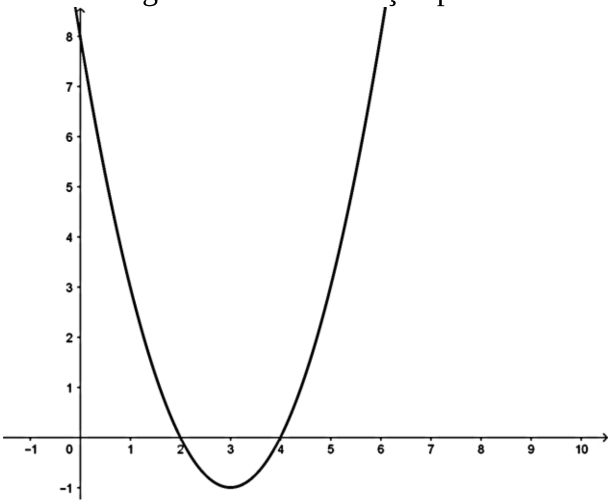
suco (y), cada um deles escreveu duas relações entre os preços, ou seja, montou um sistema de equações para a situação. Veja as equações escritas pelos quatro amigos:

Andreia: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ Carol: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$ Beto: $\begin{cases} 2x+2y=6 \\ 4x+4y=12 \end{cases}$ David: $\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

Comente e justifique se cada uma das propostas pode ser ou não válida.

Questão 5:

Observe o gráfico de uma função polinomial do 2º grau.



a) Encontre a função algébrica que representa o gráfico da função.

b) Quantas raízes tem esta função?

c) Para quais intervalos de x a função é positiva e negativa?

Questão 6 – (GUSMÃO, 2006):

Três bolas são do mesmo tamanho, cor e forma. Duas têm o mesmo "peso" e a outra é a "mais leve". Usando uma balança com dois pratos e realizando uma **única pesagem**, José pegou duas das bolas quaisquer e colocou uma em cada prato da balança. Veja como ele pensou a forma de verificar qual era a bola “mais leve”:

a) Se a balança desequilibrasse, a mais leve estaria no prato de cima.

b) Se pesassem o mesmo, a bola que ficou sem pesar seria a mais leve.

Suponha, agora, que você tem nove bolas semelhantes, das quais uma também é mais leve que as outras. Como você pode descobrir qual é a bola mais leve **em apenas duas pesagens**?

Questão 7 – (GUSMÃO, 2006):

Um pescador trouxe 50 quilos de peixe ao mercado. Durante a manhã, vendeu o quilo a dez reais, e, à tarde, para vender tudo, baixou o preço para sete reais. Se ele vendeu os 50 quilos, quanto arrecadou?