



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO



DANIELA SANTOS BRITO VIANA

UMA MATEMÁTICA ESPECÍFICA DA AÇÃO DO PROFESSOR
PARA O ENSINO DO CONCEITO DE DIVISÃO

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA
2022

DANIELA SANTOS BRITO VIANA

**UMA MATEMÁTICA ESPECÍFICA DA AÇÃO DO PROFESSOR
PARA O ENSINO DO CONCEITO DE DIVISÃO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti

**VITÓRIA DA CONQUISTA
202**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**UMA MATEMÁTICA ESPECÍFICA DA AÇÃO DO PROFESSOR PARA O
CONCEITO DE DIVISÃO**

**Autora: Daniela Santos Brito Viana
Orientadora: Profa. Dra. Roberta D. Menduni-Bortoloti**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por Daniela Santos Brito Viana e aprovada pela Comissão Avaliadora.

Data: 31/10/2022

COMISSÃO AVALIADORA



Profa. Dra. Roberta D. Menduni-Bortoloti (Orientadora)



Prof. Dr. Victor Giraldo (UFRJ)



Profa. Dra. Jaqueline de S. Pereira Grilo (UEFS)

FICHA CATALOGRÁFICA

V667u

Viana, Daniela Santos Brito.

Uma matemática específica da ação do professor para o ensino do conceito de divisão. / Daniela Santos Brito Viana, 2022.

108f. il.

Orientador (a): Dr^a. Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti .

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Programa de Pós Graduação em Ensino – PPGEn, Vitória da Conquista, 2022.

Inclui referência F. 103 –108.

1. Matemática para o ensino. 2. Divisão - Ensino do conceito. 3. Livro didático. 4. Estudo do conceito. I. Menduni-Bortoloti, Roberta D'Angela. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Acadêmico em Ensino- PPGEn.

CDD 510

Catálogo na fonte: **Juliana Teixeira de Assunção – CRB 5/1890**

UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

DEDICATÓRIA

Entre lutas e luto dedico esse trabalho aos meus pais. À minha mãe, Maria José Santos, sempre presente, minha grande incentivadora, meu exemplo de que é possível acreditar em um sonho e lutar por ele. Ingressamos juntas na universidade e lá vencemos nossos medos, nossas inseguranças e conseguimos o tão sonhado diploma de nível superior. Obrigada, mamãe, pelo seu amor incondicional e por sempre acreditar que eu seria capaz!

Ao meu amado pai, Antônio Santos do Sacramento (em memória), que me escolheu como sua filha. A ele que tanto me amou e que me ensinou com sua imensa sabedoria. Em um leito de hospital, alegrou-se com a minha aprovação para o mestrado, mas, infelizmente, não resistiu para me ver alcançar a realização desse sonho.

Dedico essa conquista a vocês, meus pais amados!

AGRADECIMENTOS

Gratidão! Obrigada, Senhor pelo teu cuidado com a minha vida. Obrigada Senhor por nunca me desamparar. Obrigada por usar pessoas para caminharem comigo durante esse trajeto.

Pró Roberta, você tem sido uma benção de Deus em minha vida. Obrigada por toda a amizade, dedicação, zelo, incentivo, “injeção” de ânimo e pelos “puxões de orelha”. Você é um exemplo de comprometimento, competência e profissionalismo. Sei que ainda não acabou, mas sem você eu poderia ter desistido e você sabe disso. Quantos desabafos, quantas lágrimas, e quanto cansaço. Louvo a Deus por ter me presenteado com minha orientadora “DD”, doce e durona, que tanto admiro e que aprendi a amar.

Agradeço a minha família por todo incentivo, cuidado e paciência. À minha filha amada, meu motivo maior de almejar dias melhores. A quem eu gostaria de ser exemplo e motivo de orgulho. À minha irmã Aninha, por vibrar a cada conquista e por sempre segurar minha mão. Obrigada por acreditar em mim e sempre me incentivar.

A cada membro do grupo de pesquisas, por fazer parte desse sonho desde o princípio. Às minhas amigas Kamila, Neuraci e Poliana que são minhas companheiras e grandes incentivadoras desde a graduação.

A Laysa Viana, Thiago Araújo e Kamila Barros por me socorrerem sempre que precisei de ajuda no que se refere à parte técnica da pesquisa.

Ao professor Valmir, por contribuir com a construção do meu projeto inicial de pesquisa.

Aos colegas que conheci durante o curso e com os quais, infelizmente, em decorrência da pandemia, não foi possível conviver mais de perto, mas que, ainda assim, contribuíram para minha formação.

Ao coordenador do curso, professor Benedito Eugênio, sempre generoso, prestativo, humano, paciente e empático.

À banca examinadora, que fez contribuições importantes para que eu conseguisse avançar.

À Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia- UESB, por me oportunizar mais uma vez fazer parte do quadro discente dessa instituição.

Ao quadro de professores de excelência com que tive a oportunidade de compartilhar momentos de muita aprendizagem e de discussões que contribuíram para minha formação.

Aos meus amigos. Aos meus colegas de trabalho.

Enfim, agradeço a todos que fizeram parte desse trabalho e que fazem parte da minha vida!

Senhor,

**Se um dia eu estiver prestes a perder as
esperanças, me ajude a lembrar que os teus
planos são maiores que os meus sonhos.
Amém!**

(Chico Xavier)

RESUMO

Apresentamos uma Matemática para o Ensino do conceito de divisão, tema escolhido para esta pesquisa. As primeiras noções de divisão são introduzidas desde a Educação Infantil e perpassa todos os anos da escolarização básica, o que nos permite reunir uma diversidade de modos de capturar tal conceito. Divisão é o ato de dividir e dividir significa partir, separar ou repartir em várias partes; separar em categorias, grupos; fazer com número a divisão, considerando-o como dividendo em relação a um número considerado como divisor. O objetivo geral dessa pesquisa é: configurar uma matemática específica para o ensino do conceito de divisão. As fontes utilizadas foram artigos científicos e uma coleção de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. O objetivo proposto para utilização dos artigos científicos foi: identificar formas de uma matemática, específica da ação do professor, ser assumida e difundida em pesquisas em língua portuguesa, independente do conceito matemático que os artigos trataram. Inspiramo-nos na metodologia de análise de conteúdo de Bardin para desenvolver nossa análise. Os resultados mostraram que foi possível destacar pelo menos três formas como a literatura aborda a matemática que é específica da ação do professor: Conhecimento Matemático para o Ensino (CMpE); Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (CEPM) e Matemática para o Ensino (MpE). O objetivo proposto para utilização dos livros didáticos foi: construir um modelo de Matemática para o Ensino do conceito de divisão a partir de livros didáticos do Ensino Fundamental I. Apoiadas em Davis e Renert, utilizamos o Estudo do Conceito para investigar a variedade de usos do conceito de divisão. Os resultados mostraram dois cenários para o conceito de divisão: 1º) repartir em partes iguais, 2º) como medida, traduzida pela pergunta “quantos cabem?” no cenário, repartir em partes iguais. As realizações foram apresentadas como: estimativa; arredondamento e resultado aproximado; média aritmética; cálculo mental; metade e terça parte; proporcionalidade; contagem; sistema de medidas; número decimal; frações; operação inversa e desenho. No cenário medida, traduzida pela pergunta “quantos cabem?”, as realizações foram apresentadas como: formação de grupos ou conjuntos; cálculo mental; dúzia e meia dúzia; algoritmo das estimativas; operação inversa e desenho. Os possíveis vínculos entre os cenários foram: o algoritmo, a estimativa, o cálculo mental e o desenho.

Palavras-chave: Matemática para o ensino. Divisão. Livro didático. Estudo do conceito.

ABSTRACT

We present a Mathematics for Teaching the concept of division, the theme chosen for this research. The first notions of division are introduced since kindergarten, permeating all years of basic schooling, which allows us to gather a diversity of ways to capture this concept. Division is the act of dividing and dividing means breaking, separating, or dividing into several parts; separate into categories, groups; do with number the division, considering it as a dividend in relation to a number considered as divisor. The general objective of this research is: to set up a specific mathematics for teaching the concept of division. The sources used were scientific articles and a collection of textbooks from the final years of elementary school. The proposed objective for the use of scientific articles was to identify forms of a mathematics, specific to the teacher's action, to be assumed and disseminated in research in Portuguese, regardless of the mathematical concept that the articles dealt with. We were inspired by Bardin's content analysis methodology to develop our analysis. The results showed that it was possible to highlight at least three ways in which the literature approaches mathematics that is specific to the teacher's action: Mathematical Knowledge for Teaching (MKT); Specialized Knowledge of the Teacher of Mathematics (MTSK) and Mathematics for Teaching (MT). The proposed objective for the use of textbooks was to build a Mathematics model for teaching the concept of division from elementary school textbooks. Building on Davis and Renert, we used the Concept Study to investigate the variety of uses of the division concept. The results showed two scenarios for the concept of division: 1st) to divide into equal parts, 2nd) as a measure, translated by the question "how many fit?" in the split evenly scenario. The achievements were presented as: estimate; rounding and approximate result; arithmetic average; mental calculation; half and third part; proportionality; score; measurement system; decimal number; fractions; reverse operation and drawing. In the measured scenario, translated by the question "how many fit?", achievements were presented as: formation of groups or sets; mental calculation; dozen and half a dozen; estimation algorithm; reverse operation and drawing. The possible links between the scenarios were: the algorithm, the estimate, the mental calculation, and the design.

Keywords: Mathematics for teaching. Division. Textbook. Study of concept.

Lista de quadros

Quadro 1- Relação dos artigos selecionados no Portal de Periódicos CAPES.....	41
Quadro 2- Relação dos artigos selecionados na base de dados <i>Scielo</i>	42
Quadro 3- Formas que CMpE foi apresentado.....	54
Quadro 4- Matemática para o Ensino de divisão de acordo a análise de livros didáticos.....	97

Lista de figuras

Figura 1- Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino.....	18
Figura 2- Domínios e subdomínios do MTSK.....	20
Figura 3- A operação da divisão.....	23
Figura 4- Manual do professor- 1º ano.....	70
Figura 5- Manual do professor- 2º ano.....	70
Figura 6- Manual do professor- 2º ano.....	71
Figura 7- Manual do professor- 3º ano.....	71
Figura 8- Manual do professor- 3º ano.....	72
Figura 9- Manual do professor- 5º ano.....	73
Figura 10- Manual do professor- 1º ano.....	74
Figura 11- Manual do professor- 4º ano.....	74
Figura 12- Manual do professor- 5º ano.....	75
Figura 13- Manual do professor- 5º ano.....	76
Figura 14- Manual do professor- 3º ano.....	77
Figura 15- Manual do professor- 4º ano.....	78
Figura 16- Manual do professor- 4º ano.....	79
Figura 17- Manual do professor- 4º ano.....	79
Figura 18- Manual do professor- 4º ano.....	80
Figura 19- Manual do professor- 3º ano.....	80
Figura 20- . Manual do professor- 5º ano.....	81
Figura 21- Manual do professor- 5º ano.....	81
Figura 22- Manual do professor- 5º ano.....	82

Figura 23- Manual do professor- 5º ano....	83
Figura 24- Manual do professor- 4º ano.....	84
Figura 25- Manual do professor- 5º ano.	84
Figura 26- Manual do professor- 3º ano.....	85
Figura 27- Manual do professor- 4º ano.....	85
Figura 28- Manual do professor- 3º ano.....	86
Figura 29- Manual do professor- 5º ano.....	87
Figura 30- Manual do professor- 3º ano.....	88
Figura 31- Manual do professor- 4º ano.....	88
Figura 32- Manual do professor- 3º ano.....	89
Figura 33- Manual do professor- 4º ano.....	90
Figura 34- Manual do professor- 5º ano.....	91
Figura 35- Manual do professor- 3º ano.....	91
Figura 36- Manual do professor- 3º ano.....	91
Figura 37- Manual do professor- 5º ano.....	92
Figura 38- Manual do professor- 5º ano.....	93
Figura 39- Manual do professor- 5º ano.....	95
Figura 40- Manual do professor- 5º ano.....	95
Figura 41- Modelo de Matemática para o Ensino do conceito de divisão	101

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
2. COMO TUDO COMEÇOU	12
3. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	15
4. MATEMÁTICA ESPECÍFICA DA AÇÃO DO PROFESSOR	17
5. CONCEITO DE DIVISÃO	22
6. METODOLOGIA	25
REFERÊNCIAS	28
1. INTRODUÇÃO	33
2. PROCEDIMENTOS	36
3 MATEMÁTICA ESPECÍFICA DA AÇÃO DO PROFESSOR	41
3.1 Conhecimento Matemático para o Ensino (CMpE)	41
3.2 Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (CEPM)	47
3.3 Matemática para o Ensino (MpE)	49
4. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	51
REFERÊNCIAS	54
1. INTRODUÇÃO	58
2. MATEMÁTICA PARA O ENSINO E AS IDEIAS ASSOCIADAS AO CONCEITO DE DIVISÃO	61
3. PROCEDIMENTOS	64
4. IDEIAS ASSOCIADAS À DIVISÃO E OS CENÁRIOS PARA REALIZAÇÕES DO CONCEITO DE DIVISÃO	66
4.1 Primeiro cenário: repartir igualmente	72
4.2 Segundo cenário: medida traduzida pela pergunta “quantos cabem?”	84
REFERÊNCIAS	94
6. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	99
7. UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE DIVISÃO A PARTIR DE DUAS FONTES	100

UMA MATEMÁTICA ESPECÍFICA DA AÇÃO DO PROFESSOR PARA O ENSINO DO CONCEITO DE DIVISÃO

1. INTRODUÇÃO

Apresento inicialmente um pouco da minha trajetória acadêmica e profissional até o encontro com o objeto de pesquisa dessa dissertação. Neste capítulo, especificamente, utilizo a primeira pessoa do singular porque apresento um relato pessoal da trajetória percorrida. Em seguida, retomo a escrita do texto em primeira pessoa do plural, incluindo assim a fala da orientadora que teve papel fundamental ao apontar as possibilidades para o desenvolvimento da pesquisa.

Discurso sobre uma matemática específica da ação do professor e o conceito de divisão, os objetivos, a organização textual do trabalho e as bases metodológicas da pesquisa.

2. COMO TUDO COMEÇOU

Iniciei minha vida escolar na década de 80, aos 7 anos de idade. Sempre estudei em escola pública, me alfabetizei e cursei o primário na escola Rangel Pestana. Aliás, estudar nessa escola representava uma espécie de tradição na minha família. Dentre as recordações dessa época destaco o ensino da tabuada e o ditado de palavras; ambos eram realizados uma vez por semana. A professora avisava qual seria a tabuada da semana que teríamos que memorizar. Ela formava duplas para “tomar” a tabuada e um colega perguntava para o outro. A cada erro éramos punidos com a palmatória, mas não era a professora quem batia e sim o colega que fazia parte da dupla e não aceitava que os alunos se agredissem com violência. Nunca encarei esses momentos como negativos ou positivos. Sempre acreditei que todas as escolas agiam assim e que era assim que se “aprendia”. Meus pais também encaravam com naturalidade e diziam: “na minha época era pior... e você ainda tem a oportunidade de estudar ...”.

Cursei o ginásio e parte do ensino médio no colégio Polivalente e as lembranças mais marcantes que tenho dessa época foi quando cursei 6^a e 8^a séries (hoje 7^o e 9^o anos). Sempre fui muito tímida, de poucas amizades e morria de vergonha de levantar a mão e fazer algum questionamento. Ir na frente, responder uma atividade no quadro ou fazer uma leitura em voz alta era quase uma tortura. Minha professora de matemática da 6^a série era

temida por todos os alunos e senti isso na pele quando fui sua aluna. Apresentei muitas dificuldades na aprendizagem matemática na 6ª série e já imaginava o dia da entrega de resultados. Ela nos chamava pelo nome em voz alta e falava a nossa nota para que todos ouvissem e, na maioria das vezes, fazia um certo “deboche” e afirmava que já estávamos “perdidos” ou na recuperação, mesmo que estivéssemos ainda na I unidade. Devido à dificuldade em matemática, minha irmã me matriculou num reforço escolar e acabei “aprendendo” o suficiente para ser aprovada sem recuperação. Achava que não gostava de matemática, que era difícil e que tinha que me dedicar mais para não passar novamente pela experiência negativa da 6ª série.

Quando cursei a 8ª série tive a oportunidade de ser aluna do professor Valdelício e me apaixonei pela matemática. Eu conseguia compreender e parecia que tudo fazia sentido; as questões ficaram mais simples. E pude entender que o professor faz toda a diferença na aprendizagem do aluno.

Concluí o ensino médio aos 18 anos, no mesmo ano em que engravidei. Casei-me grávida e me afastei dos estudos por aproximadamente uma década. Fiz o vestibular e entrei para a faculdade em 2007. Foi um tempo mágico, pois no ano seguinte minha mãe também passou no vestibular e tivemos a oportunidade de retomarmos os estudos juntas, sendo eu estudante do curso de Licenciatura em Matemática e ela do curso de Letras Modernas.

Senti muita dificuldade durante o curso devido a uma série de fatores, tais como: tempo longe da escola, filha pequena, conciliar trabalho e estudo e amadurecimento acadêmico. Desde então não parei mais de estudar. Terminei a graduação, cursei a especialização em Educação de Jovens e Adultos (EJA) e bacharelado em Serviço Social.

Entendo que a formação inicial proporciona aos professores muitos conhecimentos e constitui uma importante fase do desenvolvimento profissional do professor. No entanto, é no “chão da escola”, na prática profissional, que enfrentamos os conflitos e percebemos que a formação inicial deixa várias lacunas que precisam ser preenchidas através da formação continuada.

No entanto, o cotidiano no ambiente escolar, sobretudo nas escolas públicas, muitas vezes é um fator que impossibilita o professor buscar estratégias que colaborem para o processo de ensino e aprendizagem. Deparamo-nos com uma rotina cansativa de trabalho, com salas de aula lotadas, com uma extensa carga horária e com um número significativo

do alunado desinteressado e indisciplinado, que busca na escola momentos de lazer e descontração.

Tradicionalmente, nós professores, não temos o hábito de nos reunirmos de forma espontânea para discutirmos a nossa prática e a aprendizagem de nossos alunos. Esses encontros, na maioria das vezes, só acontecem quando fazem parte da carga horária da rede de ensino da qual se faz parte.

Além de todos os problemas apresentados, nós professores nos deparamos com as dificuldades dos nossos alunos em relação à aprendizagem de conteúdos matemáticos e entendemos a importância de pensarmos a nossa prática de modo que possamos contribuir efetivamente com o processo de ensino e aprendizagem.

Enquanto professora inserida nesse contexto, senti a necessidade de repensar a minha prática em sala de aula. Em 2017 tive a oportunidade, a convite da professora e orientadora Dr^a. Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti, de integrar o grupo Práticas Colaborativas em Matemática /Lesson Study - Pracomat/LS. Aceitar o convite para fazer parte do grupo foi muito importante para os planos que havia traçado para o meu futuro profissional e acadêmico. Profissional por ter a oportunidade, através das atividades desenvolvidas, de melhorar a minha prática, o meu currículo acadêmico e de ampliar a chance de retornar para a universidade, agora como mestranda. Integrar o grupo possibilitou dentre outras coisas, o acesso ao mestrado e a escolha do objeto de pesquisa. Um dos conceitos abordados pelo grupo foi o de divisão. Tema que foi levantado e escolhido colaborativamente para o desenvolvimento de um *Lesson Study* e que se tornou investigação desse trabalho.

Em relação a minha vida profissional, comecei a atuar como professora de matemática desde o 3º semestre do curso de licenciatura. Inicialmente lecionei na rede privada, em seguida na rede pública municipal. Foi importante, pois tive a oportunidade de conciliar teoria e prática, além de participar financeiramente das despesas em casa, contribuiu para os estágios supervisionados e, principalmente, por poder desenvolver a minha prática.

Desde que comecei a trabalhar sempre lecionei para turmas do 6º ao 9º ano, especialmente para 8º e 9º anos. Já tive oportunidade de atuar como formadora do Programa Todos pela Alfabetização-TOPA e como professora especialista no Projovem Urbano.

Com uma experiência de mais de uma década, trabalhando com turmas do Ensino Fundamental II, pude perceber as dificuldades dos alunos quando se trata do conceito de divisão. Essa dificuldade perpassa todos os anos escolares do Ensino Fundamental. Pude perceber que a dificuldade não era apenas do aluno em compreender o conceito, mas também minha em pensar estratégias que pudessem facilitar o processo de ensino e aprendizagem. No Pracomat/LS tivemos a oportunidade de compartilhar nossas inquietações e o conceito de divisão foi objeto de nossas discussões. O que fortaleceu ainda mais o meu desejo de pesquisar sobre o tema, trazendo então para essa dissertação uma matemática específica da ação do professor e o conceito de divisão.

A chegada da pandemia da COVID-19 trouxe transformações nas mais diversas áreas sociais, e no campo científico não foi diferente. A nossa intenção, a princípio, era realizar uma pesquisa tendo como campo uma sala de aula. No entanto, a realidade imposta pela pandemia modificou o cenário de nosso trabalho. Nos deparamos com escolas fechadas e com aulas remotas, o que tornou inviável a realização da nossa pesquisa de campo.

Optamos por realizar uma pesquisa bibliográfica cujo objetivo geral foi configurar uma matemática específica para o ensino do conceito de divisão. Para atingir esse objetivo, foram pensados dois objetivos específicos:

- Identificar formas de uma matemática, específica da ação do professor, ser assumida e difundida em pesquisas de língua portuguesa;
- Construir um modelo de Matemática para o Ensino do conceito de divisão a partir de livros didáticos do Ensino Fundamental I.

O primeiro objetivo específico listado corresponde ao artigo 1 e o segundo objetivo, corresponde ao artigo 2. Com o resultado dos dois estudos alcançamos o objetivo geral.

Na próxima sessão, discorreremos sobre a organização do trabalho.

3. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O formato escolhido para a escrita da nossa pesquisa é o *multipaper* que é caracterizado como uma coleção de artigos que poderão ser publicados ou submetidos à publicação previamente ou posteriormente à defesa (BARBOSA, 2015; DUKE; BECK, 1999), ou refere-se à apresentação de uma dissertação como uma coletânea de artigos

publicáveis, acompanhados, ou não, de um capítulo introdutório e de considerações finais (MUTTI; KLUBER, 2018).

Costa (2014) destaca que o crescimento desse formato tem ocorrido de forma lenta, mas gradual, por exemplo, nas áreas da química, física, biologia, medicina, atingindo também a área de Educação Matemática. A pertinência desse formato é destacada por Barbosa (2015) quando aponta a possibilidade de elaboração de dissertações e teses em outros formatos diferentes do tradicional ou monográfico. Tais formatos são chamados pelo pesquisador de subordinados criativos, como é o caso do *multipaper*.

Nesse formato, de acordo Barbosa (2015), mesmo que os artigos sejam delimitações de um projeto mais amplo, cada um deles deve conter as características necessárias para publicação, podendo o autor agregar capítulos introdutórios em que circunstância a dissertação e capítulos finais para retomar os resultados apresentados nos artigos.

A escolha por esse formato justifica-se por considerarmos o mestrado a etapa inicial na formação do pesquisador, ao mesmo tempo em que entendemos a oportunidade de escrever artigos com a participação do orientador e/ou do grupo de pesquisa como uma oportunidade ao pesquisador iniciante na familiarização com o discurso científico. Neste formato, “o pesquisador deve demonstrar o seu poder de síntese sem prejuízo da análise realizada sobre o objeto investigado” (GRILO, 2019, p.17).

A dissertação está organizada em dois artigos bibliográficos. O primeiro, do tipo revisão sistemática de literatura, onde foram analisados 13 trabalhos publicados entre 2008 e 2021. A escolha dos artigos foi feita nas bases de dados da CAPES e da *Scielo*. Para analisar os dados e construir as categorias, utilizamos a análise de conteúdo e, como resultado, foi possível identificar algumas formas de como a matemática específica da ação do professor vem se apresentando na literatura em língua portuguesa.

O segundo artigo é uma revisão bibliográfica do tipo análise de livros didáticos. Apresenta uma investigação do conceito de divisão em uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental I. Apropriamo-nos do estudo do conceito como dispositivo para análise da coleção. O resultado mostrou uma variedade de realizações do conceito de divisão, agrupados em dois cenários: repartir igualmente e medida (quantos cabem). Finalizamos com uma conclusão onde buscamos reunir os resultados obtidos nos dois artigos.

Na próxima sessão dissertaremos sobre a Matemática específica da ação do professor.

4. MATEMÁTICA ESPECÍFICA DA AÇÃO DO PROFESSOR

Nos últimos anos vem se pesquisando e sistematizando diferentes formas de ensinar matemática e demarcando um conhecimento/saber que é próprio do ofício da docência em matemática. Dentre esses estudos destacamos por exemplo, Ball; Thames; Phelps (2008); Carrillo; Climent; Contreras; Muñoz-Catalán (2013); Davis e Renert (2014); Santos e Barbosa (2017); Coutinho e Barbosa (2018); Gómez e Barbosa (2018); Menduni-Bortoloti e Barbosa (2018); Grilo (2019).

Shulman (1986), iniciou um debate sobre a especificidade da docência e apresentou o conhecimento profissional do professor em três categorias: Conhecimento do Conteúdo, Conhecimento Curricular e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Em 1987, Shulman revisou as três categorias, desdobrando-as em sete, a saber: o conhecimento do conteúdo que será objeto de ensino; o conhecimento pedagógico geral, com referência especial aos princípios e estratégias gerais de gestão e organização da sala de aula; o conhecimento do currículo, com domínio particular dos materiais e programas que servem como ferramentas de trabalho para professores; o conhecimento pedagógico do conteúdo, aquele amálgama especial de conteúdo e pedagogia, que é competência exclusiva dos professores; o conhecimento do aluno e suas características; o conhecimento dos contextos educacionais, que vão desde o funcionamento do grupo ou da sala de aula à gestão e financiamento da educação; e o conhecimento dos fins e propósitos educacionais e seus fundamentos filosóficos e históricos (SHULMAN, 1987).

Em 2008, Ball, Thames e Phelps, tipificaram os conhecimentos para o ensino de matemática, a partir dos estudos desenvolvidos por Shulman (1986; 1987), propondo um modelo específico para a matemática, o *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) que pode ser traduzido como Conhecimento Matemático para o Ensino (CMpE), necessário para realizar o trabalho de ensinar Matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

No modelo apresentado pelos autores (2008), o conhecimento profissional do professor de Matemática é posto em dois domínios: o Conhecimento Específico do Conteúdo, subdividido em Conhecimento Comum do Conteúdo, Conhecimento

Especializado do Conteúdo e Conhecimento do Conteúdo no Horizonte; e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, subdividido em Conhecimento do Conteúdo e Estudantes, Conhecimento do Conteúdo e Ensino e Conhecimento do Currículo, como mostra a figura 1 a seguir:

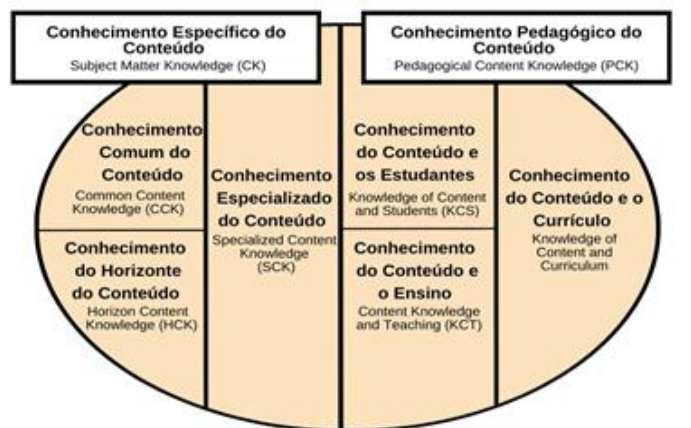


Figura 1. Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino. Adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

Com base em Ball, Thames e Phelps (2008) e alguns outros pesquisadores, apresentamos a seguir, de maneira resumida, um entendimento para cada um dos conhecimentos:

- **Conhecimento Comum do Conteúdo** é aquele que não é exclusivo da profissão do professor e tem como características conhecimento e habilidades que são utilizados por outras áreas além do ensino, por exemplo, engenharia, economia, arquitetura, que utilizam conhecimentos matemáticos no uso de suas profissões. Os pesquisadores (2008) esclarecem que o uso do termo conhecimento “comum” do conteúdo sugere um conhecimento que pode ser utilizado em outras situações diferentes do ensino. É um tipo de conhecimento da disciplina que precisa ser mobilizado pelo professor. Para Silva e Costa (2019), esse tipo de conhecimento, surge pelo domínio dos conceitos necessários ao professor, desde o planejamento das atividades até a avaliação.

- **Conhecimento Especializado do Conteúdo** envolve o conhecimento necessário para a ação de ensinar, ou seja, é uma habilidade voltada para o ato de ensinar. De acordo com os autores, é um conhecimento que não se faz necessário para outros fins senão o ensino.

- **Conhecimento do Conteúdo no Horizonte** é caracterizado pela competência do professor em relacionar os conteúdos lecionados em um determinado ano com os que serão abordados posteriormente ou que já foram abordados anteriormente. Serrazina (2012) acrescenta que o professor precisa “estabelecer conexões entre os vários domínios da matemática e relacionar o que os alunos já sabem com aquilo que vão aprender, não esquecendo aquilo que irão aprender no futuro” (SERRAZINA, 2012, p. 271).

- **Conhecimento do Conteúdo e Estudantes** é caracterizado pela combinação de conhecimento matemático e conhecimento sobre os estudantes. É necessário que o professor esteja atento as ações dos alunos, antecipar possíveis dificuldades, buscar compreender as ideias incompletas ou equivocadas dos alunos, buscar compreender os porquês (RODRIGUES, TEIXEIRA, 2020).

- **Conhecimento do Conteúdo e Ensino** é uma combinação entre conhecimentos em relação ao conteúdo e ao ensino de matemática. Silva e Costa (2019) destacam que uma tarefa, um jogo ou outro recurso mobiliza conhecimento do conteúdo e forma de ensiná-lo, desde que o professor saiba

quais conceitos abordar, quais poderão surgir, qual a ênfase, a valorização das contribuições dos alunos, o tempo pedagógico para cada momento da atividade investigativa, a sistematização do processo e formalização de conceitos etc., requer uma combinação de conhecimentos sobre ensinar e conhecimentos sobre Matemática. (SILVA, COSTA, 2019, p. 288).

Desde o planejamento até a avaliação, cabe ao professor mobilizar não apenas o conteúdo que será ensinado como também as estratégias de o ensinar.

- **Conhecimento do Currículo** tem relação com o que o professor tem de ensinar, bem como a forma como os conteúdos se relacionam e evoluem ao longo dos anos escolares.

Os pesquisadores, Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán, (2013) apontaram limitações do modelo proposto por Ball e seus colaboradores (2008) para investigar certos aspectos do conhecimento dos professores de matemática e sinalizaram a necessidade de um maior refinamento nas categorias proposta no modelo CMpE.

A tentativa de superar essas limitações gerou outras frentes de pesquisa que propõem que todo conhecimento do professor é especializado, configurando assim o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática CEPM (CARRILLO, CLIMENT, CONTRERAS, MUÑOZ-CATALÁN, 2013).

Assim como na ideia proposta por Ball, Thames e Phelps (2008), o modelo CEPM também possui uma divisão em dois domínios do conhecimento, a saber: Conhecimento

Matemático (MK) e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. O Conhecimento Matemático é subdividido em: Conhecimento dos Tópicos Matemáticos, Conhecimento da Estrutura da Matemática e Conhecimento da Prática Matemática. O domínio Conhecimento Pedagógico do Conteúdo é subdividido em: Conhecimento do Ensino de Matemática, Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática, e Conhecimento da Normas da Aprendizagem de Matemática. Nesse modelo são inseridas as crenças dos professores sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem, permeando os subdomínios e dando sentido às suas ações, como mostra a figura 2 a seguir.

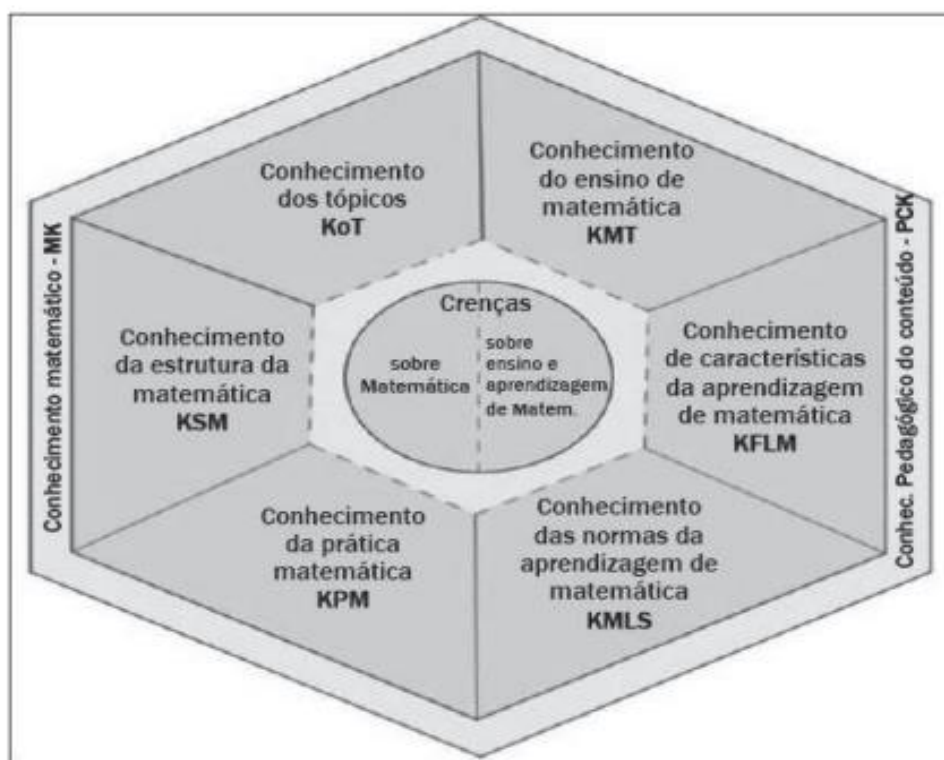


Figura 2. Domínios e subdomínios do MTSK. Adaptado de Carrillo, Climent, Contreras, Muñoz-Catalán (2013, p. 5).

Com base em Carrilo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013), apresentamos a seguir um entendimento para cada um dos subdomínios dos conhecimentos:

- **Conhecimento dos Tópicos Matemáticos** abrange conteúdos matemáticos a serem ensinados e seus aspectos, incluindo definições, interpretações, propriedades de conceitos, uma ou mais demonstrações de um tópico específico, justificativas para procedimentos, exemplos e situação para aplicação.

- **Conhecimento da Estrutura da Matemática** inclui conexões entre tópicos de diferentes áreas matemáticas que permitem reconhecer determinadas estruturas da Matemática, possibilitando vê-la como um sistema de elementos interligados.

-**Conhecimento da Prática Matemática** abarca maneiras de proceder em matemática, inclui modos de produzir na área, aspectos da comunicação matemática, raciocínio e elementos que estruturam uma demonstração, maneiras de definir e de usar uma definição, de argumentar, generalizar e como as relações do conhecimento da estrutura matemática são estabelecidos.

- **Conhecimento do Ensino de Matemática** envolve materiais, recursos, modos de apresentação de um determinado conteúdo e suas características que possibilitam ao professor optar por estratégias de ensino incluindo exemplos, analogias e metáforas.

- **Conhecimento de Características de Aprendizagem de Matemática** compreende o modo como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos, os erros comuns, as dificuldades.

- **Conhecimento das Normas da Aprendizagem de Matemática** diz respeito às especificações do currículo, incluindo os conteúdos e competências previstos para cada etapa da educação e as formas de avaliação que possibilitam a progressão de um ano para outro.

Segundo os pesquisadores Moriel-Junior e Carrillo (2014), os subdomínios do CMpE descrevem como entender o conhecimento específico de um professor de matemática e “também pode ser considerado uma ferramenta metodológica para exploração analítica deste conhecimento” (MORIEL-JUNIOR, CARRILLO 2014, p. 467).

Existem estudos (DAVIS; SIMMT, 2006), por exemplo, que não se apoiam nas categorias elaboradas por Shulman (1986) ou nas que foram construídas por Ball e equipe (2008), pois alguns autores, como mencionados a seguir, compreendem uma matemática mobilizada para ensinar, como Matemática para o Ensino- MpE, que é utilizada pelo professor (DAVIS, SIMMT, 2006; DAVIS, RENERT, 2014). Para Davis e Simmt (2006), por causa de seu caráter dinâmico, a Matemática para o Ensino, sempre ocorre no coletivo, na interação entre professores e alunos e nas experiências que são compartilhadas nos contextos escolares. (DAVIS e SIMMT, 2006, p. 309). A forma de conceber, de se originar é que a diferencia desses tipos de conhecimento.

Os autores ressaltam que a MpE é muito mais que um conjunto de conceitos prontamente catalogado ou testado objetivamente. Enfatizam que a MpE envolve muito

mais que o conhecimento de livros, “é uma maneira de ser com o saber matemático que permite ao professor estruturar situações de aprendizagem” (DAVIS, RENERT, 2014, p. 4).

Para Paiva, Cade e Giraldo (2020) a MpE é uma articulação promovida por uma problematização entre a matemática científica, que vai ser ensinada nos cursos de graduação, e a matemática produzida em outras práticas sociais, desenvolvida a partir de situações informais de aprendizagem, matemática relacionada ao cotidiano.

A MpE tem se mostrado como uma linha de pesquisa que vem se desenvolvendo no Brasil. Para os pesquisadores Santos e Barbosa (2017), Coutinho e Barbosa (2018), Gómez e Barbosa (2018), Menduni-Bortoloti e Barbosa (2018), por exemplo, a “Matemática para o Ensino” é apresentada como um modelo teórico para o ensino de determinado conceito matemático. No nosso trabalho o conceito escolhido foi divisão, tema que já vem sendo discutido nos meios acadêmicos, mas que ainda apresenta lacunas devido ao fato de muitos trabalhos focarem mais no algoritmo e nas dificuldades de ensino e aprendizagem do conceito.

Tratando do conceito de divisão, perguntamos: que matemática para o ensino é necessária para o conceito de divisão? No próximo tópico discorreremos sobre o conceito de divisão.

5. CONCEITO DE DIVISÃO

Caraça (1951) define divisão como sendo a operação inversa da multiplicação. “A inversão consiste em dado o produto e um dos fatores determinar o outro” (CARAÇA, 1951, p. 21), como mostra a figura 3 a seguir.

$$\text{Símbolo} \rightarrow a : b \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}.$$
$$a : b = c \leftarrow b \cdot c = a.$$

Figura 3. A operação da divisão. Caraça (1951, p. 22)

De acordo Caraça (1951), a definição exige que $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$; caso contrário, qualquer que seja \mathbf{c} , ter-se-á $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$ e a igualdade de condição não é satisfeita. Em relação aos nomes, \mathbf{a} chama-se dividendo, o \mathbf{b} é o divisor e o \mathbf{c} é o quociente. Segundo o autor “a divisão é,

portanto, a operação pela qual, dados o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, quociente, que, multiplicado pelo divisor, dá o dividendo” (CARAÇA, 1951, p. 22). Para que a operação seja possível, Caraça (1951) afirma que o dividendo deve ser múltiplo do divisor; caso isso não ocorra, não existe número inteiro c que satisfaça a $c \times b = a$.

Para Salvador (2012) a divisão está relacionada à subtração, “ela é uma subtração reiterada de parcelas, por isso apresenta questões semelhantes às daquela operação” (SALVADOR, 2012, p.37). Os pesquisadores Costa, Santos, Pessoa e Teles (2018) apresentam o método das subtrações sucessivas ou das estimativas como sendo um dos processos para realização de uma divisão. Segundo os autores, ao utilizar algoritmo de divisão por subtração sucessiva ou estimativa, o aluno, além de estimar precisa multiplicar, subtrair e efetuar uma adição. De acordo os pesquisadores (2018) o algoritmo utilizado no Brasil para realizar uma divisão é o “algoritmo euclidiano”. Nessa perspectiva, o conceito de divisão é compreendido como uma ação que requer dividir um número por outro em partes iguais de modo que o resto seja menor que o divisor ou igual a zero (TELES, 2007; LIMA, 2012; SILVA, 2014).

Autores como Nunes e Bryant (1997), Lautert e Spinillo (1999), reconhecem a complexidade que envolve o conceito de divisão, enfatizando que ele envolve regras operatórias complexas e requer o estabelecimento de relações bastante complexas entre as partes que o compõem: dividendo, divisor, quociente e resto.

Para Lautert (2005), entender a divisão exige do indivíduo uma compreensão “que está para além da observação direta dos números ou objetos envolvidos em uma determinada conta ou problema” (LAUTERT, 2005, p. 42). Entender o significado da divisão requer um olhar atento para o número: o dividendo, o divisor, o quociente, o resto, juntamente com as partes envolvidas.

Mesmo diante da complexidade que envolve o algoritmo da divisão, essa operação já faz parte do dia a dia da criança desde muito cedo. Pesquisadores como Fernandes, Oliveira, Sampaio e Paixão (2015) e Wallauer (2006) afirmam que as crianças apresentam conhecimentos prévios sobre o conceito de divisão antes mesmo de entrar na escola e que a divisão se faz presente em vários momentos do seu dia a dia, por exemplo, em situações em que é preciso repartir objetos entre um determinado grupo.

A divisão, apesar de ser um conceito matemático de difícil compreensão, é percebida, mesmo de forma precoce, pelas crianças desde muito cedo (quando conseguem repartir brinquedos entre um grupo, por exemplo). Antes de receberem qualquer ensino sistemático sobre divisão, elas já têm uma ideia das relações que estão envolvidas no “dividir”. (WALLAUER, 2006, p. 33).

Mesmo sendo prematura a sua inserção na vida cotidiana, a divisão é considerada a operação mais complexa, tanto para aluno (SANTOS, 2010 *apud* BRITO, CORREA, 2004, VIANA 2015) quanto para professores e ou futuros professores (SANTOS, 2010 *apud* BRITO, CORREA, 2004, VIANA 2015).

Viana (2015), afirmou em sua pesquisa de mestrado que não tinha todas as respostas às perguntas dos seus alunos sobre as diversas regras do algoritmo da divisão, como:

“de onde aparece esse zero?”, “por que no resultado coloca-se zero e vírgula?”, “por que se o número é pequeno eu coloco o zero e se ainda for pequeno coloco outro zero e agora também um zero no resultado?”, ou seja, neste momento eu parei para refletir e perceber que mesmo após ter terminado uma graduação em licenciatura plena em matemática eu nem sabia quantas e nem quais eram as regras deste algoritmo. (VIANA, 2015, p.8)

Corroborando, Viana (2015), Miguel e Miorim (1986) afirmam que a divisão apresenta dificuldades, tanto para quem ensina, como para quem vai aprendê-la. A reflexão feita por Viana (2015), quando afirma que, mesmo após ter terminado uma graduação em matemática não sabia quantas e quais eram as regras do algoritmo, confirma que a formação inicial não é suficiente para que o professor consiga mobilizar os seus conhecimentos.

Geralmente, o ensino das operações matemáticas, sobretudo da divisão, baseia-se na comunicação de um procedimento. Megid (2012) ressalta que os algoritmos deveriam ser tratados não como ponto de partida, mas como ponto de chegada de um caminho que passa pelas estratégias utilizadas pelos alunos, como as habilidades do cálculo mental.

Para Brião, Muzinatti e Ribeiro (2015) dividir requer uma compreensão clara e profunda do sentido das demais operações. Os autores apoiados no CMpE proposto por Ball, Thames e Phelps (2008) consideram que o conhecimento do professor influi na aprendizagem dos alunos. Em relação à operação de divisão e o conhecimento matemático para ensinar destacam que

A operação de divisão não constitui simplesmente um domínio cuja dificuldade operatória - caracterizada por uma forma algorítmica complexa - seja o ponto mais relevante quando se pensa no ensino e na aprendizagem da mesma. A reflexão acerca dos significados do que é dividir, sem dúvida, é um instrumental

muito importante para que o estudante possa lidar com situações relacionadas à proporcionalidade e às sub-multiplicidades, que caracterizam muitos dos aspectos de ciências como Física e Química, por exemplo. Mas, esses modelos são normalmente discutidos em sala de aula? Esse corresponde a um dos aspectos do conhecimento matemático para ensinar (MKT) e, apesar de a divisão fazer parte do ensino nas séries iniciais, sua relevância se apresenta indiscutivelmente em vários conteúdos apresentados em etapas posteriores na formação escolar. (BRIÃO, MUZINATTI, RIBEIRO, 2015, p. 83).

Como parte desse conhecimento necessário para ensinar divisão cabe ao professor, por exemplo, efetuar corretamente a divisão, utilizando ou não um algoritmo, usar corretamente notações matemáticas e reconhecer erros dos alunos.

Na próxima sessão, discorreremos sobre a construção da matemática para o ensino do conceito de divisão a partir do estudo do conceito proposto por Davis e Renert (2014). Assumimos a MpE como referencial para essa pesquisa, tomando por base a escolha da ferramenta metodológico-analítica que utilizamos para analisar os resultados obtidos nos artigos ou os dados encontrados na coleção de livros didáticos.

6. METODOLOGIA

A abordagem escolhida para essa pesquisa é de cunho qualitativo que, de acordo com Trivinos (1987), trabalha os dados buscando o seu significado com base na percepção do fenômeno dentro do seu contexto. Para Gil (1999), a abordagem qualitativa possibilita o aprofundamento da investigação das questões relacionadas ao fenômeno em estudo e das suas relações, mediante o contato direto com a situação pesquisada.

Nosso primeiro estudo é uma pesquisa bibliográfica, do tipo revisão sistemática de literatura, que se configura como uma modalidade de pesquisa, que segue protocolos específicos, apresentando de forma explícita as bases de dados bibliográficos que foram consultados, as estratégias de busca empregadas em cada base, o processo de seleção dos artigos científicos, os critérios de inclusão e exclusão dos mesmos e o processo de análise dos artigos (GALVÃO; RICARTE, 2019).

Os artigos foram selecionados à medida que identificamos uma matemática específica da ação do professor. Inspiramo-nos na metodologia de análise de conteúdo de Bardin (2011) para desenvolver nossa análise de resultados. A revisão sistemática de literatura forneceu importantes elementos para conhecer a matemática específica da ação do professor presente em pesquisas de língua portuguesa que recorreram ao CMpE, CEPm e à MpE como categorias teóricas.

O segundo estudo também constitui uma pesquisa bibliográfica, elaborada a partir de material já publicado e constituído dentre outros elementos, de livros, como declarado por Prodanov e Freitas (2013):

[...] elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa. (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 54).

O instrumento utilizado nesta investigação foi uma coleção de Livros Didáticos (LD) do Ensino Fundamental I. Para escolha dos livros didáticos do EF-I que compuseram a pesquisa, recorreremos primeiro aos guias dos livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2019 e estabelecemos critérios: fazer parte do Programa Nacional do Livro Didático PNLD 2019 (fundamental I) e a formação acadêmica do autor. Recorreremos ao Estudo do conceito para analisar os dados pesquisados na coleção de livros.

O método de análise escolhido para examinar os dados pesquisados foi o *Concept Study*, que pode ser traduzido como “Estudo do Conceito” (EC). O método foi inicialmente elaborado por Davis e Simmt (2006) e continuado por Davis e Renert (2009; 2013; 2014). Abordagem investigativa apoiada em reflexões coletivas de professores, o EC constitui uma metodologia participativa em que professores compartilham suas experiências, questionam e elaboram seus próprios saberes de matemática visando o ensino (DAVIS; RENERT, 2014, p. 35).

Rangel, Giraldo e Maculan Filho (2015) afirmam que o *concept study*, sem tradução, “constitui tanto um referencial teórico, na medida em que sustenta as questões de pesquisa, como metodológico, pois determina os métodos para investigá-las” (RANGEL; GIRALDO; MACULAN FILHO, 2015, p. 54).

Davis e Renert (2014) propõem o EC a partir de quatro dispositivos para investigar a variedade de formas de ensinar um conceito. Esses dispositivos são chamados de ênfases e são elas: *Realizations*, *Landscapes*, *Entailments* e *Blends*, que traduzimos por realizações, cenários, vinculações e misturas, respectivamente. Descreveremos de forma resumida cada uma das ênfases propostas pelos autores.

- **Realizações** Davis e Renert (2014), inspirados em Sfard (2008), usam o termo realização como referência ao que descrevem como significados e interpretações de um conceito. Para os autores, as realizações podem se basear em definições formais, algoritmos, metáforas, imagens, aplicação e gestos.

- **Cenário** constitui “um mapa em nível macro, enquanto uma realização é uma captura instantânea em nível micro, de um conceito” (DAVIS, RENERT, 2014, p. 62). Cada cenário representa um agrupamento de realizações de acordo um conjunto de semelhanças entre elas, ou seja, uma divisão pode ser realizada e, a depender do contexto, se referir a cenários diferentes. Por exemplo, um desenho é uma realização e realizar uma divisão utilizando desenho com as ideias de repartir em partes iguais ou de formar grupos constituem cenários diferentes para a mesma realização.

- **Vinculações** consiste em investigar os vínculos estabelecidos entre as realizações. Para Davis e Renert (2014), a intenção dessa ênfase é estudar como diferentes realizações moldam o entendimento de conceitos matemáticos relacionados. Portanto, a ênfase vinculações busca refletir sobre as diferentes implicações presentes em cada uma das realizações de um determinado conceito.

- **Misturas** trata de “buscar a coerência, explorando as conexões profundas entre as realizações, reunindo-as em interpretações mais amplas, gerando possibilidades interpretativas” (DAVIS, RENERT, 2014, p. 70 - Tradução nossa).

Para a realização dessa pesquisa, foram utilizadas as quatro ênfases apresentadas.

Durante a pesquisa foram lidos muitos trabalhos voltados para o tema divisão. Muitas pesquisas apresentaram as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do conceito, com foco, na maioria das vezes, no algoritmo. Espera-se que essa pesquisa possa contribuir com a área de educação matemática e com os profissionais que buscam melhorar sua prática em sala de aula. Buscamos apresentar as diversas realizações do conceito de divisão capturadas em uma coleção de livros didáticos, ampliando as possibilidades de se trabalhar o conceito de divisão não apenas nas séries iniciais, como também nos anos seguintes de escolaridade.

REFERÊNCIAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Content knowledge for teaching: What makes it special?** *Journal of Teacher Education*, 59, p. 389-407. 2008.

Bardin, L. 2011. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70.

BARBOSA, J. C. **Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática**. Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática. Campinas: Mercado de Letras, v. 1, p. 347-367, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2020. Matemática. Ensino Fundamental – Anos finais**. Brasília, 2019.

BRIÃO, G.F; MUZINATTI, J. L; RIBEIRO, C. M. **Caracterização de modelos de divisão por professores de Matemática ao interpretar problemas de alunos**. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, p. 82-90, 2015 Disponível em: <http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol3FormCont.pdf> Acesso em 24 de mar. 2022.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, 1951. Disponível em: <http://literamati.dominiotemporario.com/doc/Conceitos.pdf> Acesso em 24 de nov. 2021.

CARRILO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUNÓZ-CATALÁN, M. C. **Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching**. In: UBUZ, B. HASER, C. et al. **Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 8., 2013. Turkey: M.E.T. University, Ankara, 2013. p.2985-2994. Disponível em: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf. Acesso em: 08 de out. 2020.

COSTA. A. P. da; SANTOS. L. F. dos; PESSOA. C. A. dos S; TELES. R. A. de M. **Abordagem de algoritmos da divisão em livros didáticos de Matemática para os anos iniciais**. *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 2, n. 4, jan./abr. 2018 e ISSN 2526-6136 <http://dx.doi.org/10.24116/emd25266136v2n42018a03>.

COSTA, W. N. G. **Dissertações e teses *multipaper*: uma breve revisão bibliográfica**. 2014. Disponível em: <[file:///C:/Users/Daniela%20Brito/Downloads/3086-Texto%20do%20artigo-9614-1-10-20170213%20\(2\).pdf](file:///C:/Users/Daniela%20Brito/Downloads/3086-Texto%20do%20artigo-9614-1-10-20170213%20(2).pdf)> Acesso em: 20 de Jul. 2022.

COUTINHO, J. L. da E.; BARBOSA, J. C. **Modelo de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Combinação Simples**. *Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Número 53. Páginas 46-67. 23 de ago. 2018.

DANTE. L. R. **Telaris matemática, 6º ano: Ensino fundamental, anos finais**. 3. ed. São Paulo. Ática, 2018

DAVIS, B.; RENERT, M. **Mathematics-for-Teaching as shared dynamic participation.** For the Learning of Mathematics, Publishing Association: Canada, v. 29, n. 3, p. 37- 43, 2009.

_____. **Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge.** *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, p. 245-265. 2013.

_____. **The Math Teachers Know: Profound Understanding of Emergent Mathematics.** Routledge Taylor & Francis Group, 141 p. 2014.

DAVIS, B. e SIMMT, E. (2006). **Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know.** *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 61, No. 3, pp. 293-319. Springer.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. **Education should consider alternative forms for the dissertation.** *Educational Researcher*, Washington, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

FERNANDES. J. A. da. S; OLIVEIRA. E. B. de; SAMPAIO. B. S; PAIXÃO. G. da S. **O ensino e aprendizagem de divisão com números naturais, por meio da resolução de problemas no ensino fundamental.** 2015. PUCPR. XII congresso nacional de educação. EDUCERE.

FERREIRA, A. B. de H. **Mini dicionário Aurélio.** 7 ed. Curitiba. Ed. Positivo; 2009.

GALVÃO, Maria Cristina Barbosa. RICARTE, Ivan Luiz Marques. **Revisão Sistemática da Literatura: conceituação, produção e publicação.** *Logeion: Filosofia da informação*, v. 6, n.1 (2019).

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GÓMEZ, O. A. BARBOSA, J. C. **Um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Variável a Partir das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Brasil e da Colômbia.** *ReBECM*, Cascavel, (PR), v.2, n.2, p. 171-193, ago. 2018.

GRILO, J. S. P. **Matemática específica para ensinar: discursos, relações de poder e produção de sujeitos.** 120 fl: il. 2019. Disponível em:

<[Tese JaquelineGrilo.repositorioUFBA.pdf](#)>. Acesso em: 09 de set. 2022.

LAUTERT, Síntria Labres. **As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção.** Universidade Federal de Pernambuco. Departamento de Psicologia. Pós-graduação em Psicologia. Recife. 2005.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. **Como as crianças representam a operação de Divisão: a linguagem oral para outras formas de representação.** *Temas em Psicologia*, Ribeirão Preto, Brasília, v. 7, p. 23-36, 1999.

LIMA. R. R de. **Campo Multiplicativo: estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió.**

2012. 126f. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.

MEGID, M. A. B. A. **O ensino aprendizagem da divisão na formação de professores.** 2012. Disponível em:

<file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/ARTIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/ENSINO%20E%20APRENDIZAGEM%20DE%20DIVIS%C3%83O%20NA%20FORMA%C3%87%C3%83O%20DE%20PROFESORES.pdf> . Acesso em: 12 de out. 2021.

MENDUNI-BORTOLOTTI, R. D. BARBOSA, J. C. **Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um estudo do conceito.** *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.20, n.1, pp. 269-293, 2018.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **O ensino de matemática no primeiro grau.** São Paulo: Atual, 1986.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

MORIEL-JUNIOR, J. G., CARRILLO, J. (2014). **Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK.** En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

MUTII, G. de S. L.; KLUBER, T. E. **Formato *multipaper* nos programas de pós-graduação stricto sensu brasileiros das áreas de educação e ensino: um panorama.** V Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos. 2018. Disponível em: <<https://sepeq.org.br/eventos/vsipeq/documentos/02858929912/11>>. Acesso em 12 de jul. 2022.

NUNES, T. E BRYANT, P. (1997). **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas.

PAIVA, M. A. V; CADE, N. V. L; GIRALDO, V. **Uma Matemática Problematizada Para o Ensino de Equações Diofantinas Lineares na Formação Inicial de Professores.** Sección 4 / El Pensamiento del Profesor, sus Prácticas y Elementos para su Formación Profesional Vol. 33, Número 1, Año 2020.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico.** Novo Hamburgo, RS: Feevale, 2013.

RANGEL, L; GIRALDO, V; MACULAN-FILHO, N. **Conhecimento de Matemática Para o Ensino: Um Estudo Colaborativo Sobre Números Racionais.** JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática IJSME – International Journal for Studies in Mathematics Education. 42 – v. 8(2) -2014.

RODRIGUES, A. L; TEIXEIRA, B. R **Conhecimento Matemático Para o Ensino (Mkt): Um Levantamento Bibliográfico em Dissertações e Teses Brasileiras.** Revista

Prática Docente (RPD) ISSN: 2526-2149. Instituto Federal de Mato Grosso - Campus Confresa Revista Prática Docente. v. 5, n. 2, p. 608-625, mai/ago 2020.

SALVADOR, H. H. de F. **Dividindo histórias e opiniões: Compartilhando e polemizando a operação de divisão.** 2012. Disponível em: <
https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/134642/livro_impressao_Heloisa.pdf?sequence=2&isAllowed=y>. Acesso em 15 de setem. 2022.

SANTOS, G. L. D. BARBOSA, J. C. **Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.19, n.2, pp. 315-338, 2017.

SERRAZINA, M. de L. M. **Conhecimento Matemático para Ensinar: Papel da Planificação e da Reflexão na Formação de Professores.** Revista Eletrônica de Educação, v. 6, n. 1, mai. 2012. Ensaios. ISSN 1982-7199. Programa de Pós-Graduação em Educação.

SILVA, A. L. M. L. S. da. **A apropriação do conceito de divisão por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.** Universidade Federal Do Espírito Santo Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação. Vitória. Espírito Santo. 2014. Disponível em: <
<https://repositorio.ufes.br/bitstream/10/1931/1/Apropria%C3%A7%C3%A3o%20do%20conceito%20de%20divis%C3%A3o%20por%20alunos%20dos%20anos%20iniciais%20do%20ensino%20fundamental.pdf>> Acesso em 21 de set. 2022.

SILVA, D. K; COSTA, D. A. da. **Abordagem Investigativa em Aulas de Matemática: Princípios Balizadores para Ações de Formação de Professores.** Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Volume 12, número 28 – 2019. ISSN 2359-2842

SHULMAN, Lee S. **Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching.** Educational Researcher. v.15, n.2. fev. 1986, pp.4-14.

_____. **Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform.** Harvard Educational Review, v. 17, n. 1, p. 1-22, 1987.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre os campos conceituais na matemática: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

TRIVINOS. A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: A pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo. Editora Atlas S.A 1987.

VIANA, Hilton Bruno Pereira. **Algoritmo da Divisão em Quatro Regras.** Universidade Federal do Amapá Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Macapá 2015.

WALLAUER, A. **Reflexões sobre a construção da operação de divisão em crianças de 1ª e 2ª série de classes multisseriadas.** 2006. 205f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

UMA MATEMÁTICA ESPECÍFICA DA AÇÃO DO PROFESSOR APRESENTADA EM TEXTOS EM LÍNGUA PORTUGUESA

Daniela Santos Brito Viana¹
Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti²

Resumo: Este estudo apresenta uma Revisão Sistemática de Literatura que buscou identificar formas de uma matemática, específica da ação do professor, ser assumida e difundida em pesquisas em língua portuguesa. Foram analisados 13 artigos publicados entre 2008 e 2021. As bases de dados utilizadas para seleção dos artigos foram: Portal de Periódicos da CAPES e base de dados *Scielo*. A análise de conteúdo foi utilizada como meio para verificação dos resultados e construção das categorias de análise. Os resultados indicam que o conhecimento específico da ação do professor é uma linha de pesquisa da área de Educação Matemática que vem se desenvolvendo no Brasil e que se apresenta de algumas formas na literatura, por exemplo, como “Conhecimento Matemático para o Ensino” (CMpE); “Conhecimento Especializado do Professor de Matemática” (CEPM) e “Matemática para o Ensino” (MpE). O CMpE e o CEPM oportunizaram aos professores em formação inicial e/ou continuada (re)construir os conhecimentos matemáticos para o ensino. A MpE se mostrou como um modelo teórico para o ensino de determinado conceito matemático.

Palavras-Chave: Educação Matemática; Conhecimento Matemático para o Ensino; Conhecimento Especializado do professor de Matemática; Matemática para o Ensino; Formação de professores.

Abstract: This study presents a Systematic Review of Literature that sought to identify ways of a mathematics, specific to the teacher's action, to be assumed and disseminated in research in Portuguese. Thirteen articles published between 2008 and 2021 were analyzed. The databases used to select the articles were: Portal de Periodicals da CAPES and Scielo database. Content analysis was used as a means of verifying the results and building the analysis categories. The results indicate that the specific knowledge of the teacher's action is a line of research in Mathematics Education that has been developing in Brazil and that is presented in some ways in the literature, for example, as "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT); "Specialized Knowledge of the Mathematics Teacher" (MKTS) and "Mathematics for Teaching" (MT). The MKT and the MKTS provided opportunities for teachers in initial and/or continuing education to (re)build mathematical knowledge for teaching. MT proved to be a theoretical model for teaching a certain mathematical concept.

Keywords: Mathematics Education; Mathematical Knowledge for Teaching; Mathematics teacher's Specialized Knowledge; Mathematics for Teaching; Teacher training.

¹ Discente do curso de Pós-graduação *stricto sensu* em Mestrado Acadêmico em Ensino (UESB). E-mail: danibrito001@hotmail.com

² Doutora em Educação pela Universidade Federal da Bahia (UFBA). Professora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista/BA. E-mail: robertamenduni@uesb.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Há pelo menos uns 30 anos vem se pesquisando e sistematizando diferentes formas de ensinar matemática e demarcando um conhecimento ou um saber que é próprio do ofício da docência em matemática. Shulman (1986) iniciou um debate sobre a especificidade do magistério e apresentou o conhecimento profissional do professor em três categorias: Conhecimento do Conteúdo, Conhecimento Curricular e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

Em 1987, Shulman revisou as três categorias desdobrando-as em sete, a saber: o Conhecimento do Conteúdo, que será objeto de ensino; Conhecimento Pedagógico Geral, com referência especial aos princípios e estratégias gerais de gestão e organização da sala de aula; o Conhecimento do Currículo, com domínio particular dos materiais e programas que servem como ferramentas de trabalho para professores; o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, aquele amálgama especial de conteúdo e pedagogia, que é competência exclusiva dos professores; o Conhecimento do Aluno e suas Características que envolve aspectos cognitivos e motivacionais; Conhecimento dos Contextos Educacionais, que perpassa o funcionamento do grupo ou da sala de aula, a gestão e financiamento da educação e o Conhecimento dos Fins e Propósitos Educacionais e seus Fundamentos Filosóficos e Históricos (SHULMAN, 1987, p. 15).

Em 2008, Ball, Thames e Phelps, tipificaram os conhecimentos para o ensino de matemática, a partir dos estudos desenvolvidos por Shulman (1986; 1987), propondo um modelo específico para a matemática, o *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), que pode ser traduzido como Conhecimento Matemático para o Ensino (CMpE), ou seja, o conhecimento necessário para realizar o trabalho de ensinar Matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

No modelo apresentado pelos autores (2008), o conhecimento profissional do professor de Matemática é posto em dois domínios. O primeiro domínio, “Conhecimento Específico do Conteúdo”, é subdividido em:

- **Conhecimento Comum do Conteúdo**, aquele que não é exclusivo da profissão do professor e tem como características conhecimento e habilidades que são utilizados por outras áreas além do ensino;

- **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, envolve o conhecimento necessário para a ação de ensinar;

- **Conhecimento do Conteúdo no Horizonte**, caracterizado pela competência do professor em relacionar os conteúdos lecionados em um determinado ano com os que serão abordados posteriormente ou que já foram abordados anteriormente.

O segundo domínio do CMpE, denominado de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, foi subdividido em:

- **Conhecimento do Conteúdo e Estudantes**, caracterizado pela combinação de conhecimento matemático e conhecimento sobre os estudantes;

- **Conhecimento do Conteúdo e Ensino** é uma combinação entre conhecimentos em relação ao conteúdo e ao ensino de matemática;

- **Conhecimento do Currículo** tem relação com o que o professor tem de ensinar, bem como a forma como os conteúdos se relacionam e evoluem ao longo dos anos escolares.

Os pesquisadores Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013) apontaram limitações do modelo proposto por Ball e seus colaboradores (2008) para investigar certos aspectos do conhecimento dos professores de matemática e sinalizaram a necessidade de um maior refinamento nas categorias propostas no modelo CMpE. De acordo com os autores (2013), o modelo CMpE apresenta dois problemas relacionados: 1) a dificuldade em decidir onde termina o subdomínio Conhecimento Comum do Conteúdo e começa o Conhecimento Especializado do Conteúdo, como resultado da própria definição de Conhecimento Comum do Conteúdo; 2) a dificuldade de demarcar o subdomínio Conhecimento Especializado do Conteúdo e o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte; e o subdomínio Conhecimento Especializado do Conteúdo do Conhecimento do Conteúdo e dos estudantes, novamente como resultado da definição de Conhecimento Especializado do Conteúdo (CARRILLO, CLIMENT; CONTRERAS; MUÑOZ-CATALÁN, 2013, p. 3)

Para Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán, (2013) as dificuldades encontradas no modelo CMpE sugerem um olhar mais atento para o Conhecimento Matemático e a delimitação e a reformulação dos subdomínios referentes ao domínio Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. A tentativa de superar essas limitações gerou outras frentes de pesquisa que propõem ao invés de falar sobre Conhecimento Especializado do Conteúdo como parte do conhecimento dos professores, fala-se do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática CEPM (CARRILLO; CLIMENT; CONTRERAS; MUÑOZ-CATALÁN, 2013).

Assim como no modelo proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), o CEPM também possui uma divisão em dois domínios do conhecimento, a saber: Conhecimento Matemático (MK) e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK).

O Conhecimento Matemático é subdividido em:

- **Conhecimento dos Tópicos Matemáticos**, inclui o conhecimento de conceitos e procedimentos matemáticos, juntamente com os fundamentos teóricos correspondentes;

- **Conhecimento da Estrutura da Matemática**, inclui o conhecimento das principais ideias e estruturas, como o conhecimento de propriedades e noções relativas a itens específicos que estão sendo abordados a qualquer momento, ou o conhecimento de conexões entre tópicos atuais e itens anteriores e futuros;

- **Conhecimento da Prática Matemática**, inclui o conhecimento das formas de conhecer e criar ou produzir em Matemática (conhecimento sintático), aspectos da comunicação matemática, raciocínio e testar, saber definir e usar definições, estabelecer relações (entre conceitos, propriedades etc.)

O domínio Conhecimento Pedagógico do Conteúdo é subdividido em:

- **Conhecimento do Ensino de Matemática** é o tipo de conhecimento que permite ao professor escolher uma determinada representação ou material para aprender um conceito ou procedimento matemático, e que lhes permite selecionar exemplos ou escolher um livro didático;

- **Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática** deriva da necessidade do professor de entender como os alunos pensam as atividades e tarefas matemáticas;

- **Conhecimento das Normas da Aprendizagem de Matemática** diz respeito ao conhecimento das especificações curriculares, a progressão de um ano para o próximo, materiais convencionais para suporte, padrões mínimos e formas de avaliação. De acordo Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán, (2013) esse modelo é projetado para refletir as crenças dos professores sobre matemática e seu ensino e aprendizagem.

Em outra perspectiva, pesquisas têm apontado a existência de uma Matemática para Ensino (MpE), que é mobilizada pelo professor e que se difere da que é utilizada por outros profissionais (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2014). Para Davis e Simmt (2006), por causa de seu caráter dinâmico, a MpE sempre ocorre no coletivo, de forma colaborativa na interação entre professores e nas experiências que são compartilhadas nos contextos escolares, na qual os professores engajam-se na reflexão e desenvolvimento de

entendimentos sobre conceitos matemáticos, ou seja, a MpE é produzida no compartilhamento de conhecimentos individual e coletivo entre professores e pesquisadores (DAVIS; SIMMT, 2006, p. 309).

Buscando identificar formas ou modelos de uma matemática, específica da ação do professor, ser assumida e difundida, apresentamos a pergunta de pesquisa: Como a matemática específica da ação do professor é apresentada na literatura de língua portuguesa? Para isso, formulamos o objetivo deste artigo: identificar formas de uma matemática, específica da ação do professor, ser assumida e difundida em pesquisas de língua portuguesa. Selecionamos a matemática específica da ação do professor como objeto de estudo, a fim de contribuir com o debate na área de Educação Matemática que investiga, entre outros temas, a natureza do ofício do professor que ensina matemática, trazendo discussões sobre o conhecimento que é específico da ação docente.

A seguir, descrevemos os procedimentos para selecionar e analisar os artigos que compuseram o *corpus* da pesquisa.

2. PROCEDIMENTOS

A Revisão Sistemática da Literatura (RSL) é uma modalidade de pesquisa que segue protocolos específicos, apresentando, de forma explícita, as bases de dados bibliográficos que foram consultadas, as estratégias de busca empregadas em cada base, o processo de seleção dos artigos científicos, os critérios de inclusão e exclusão dos mesmos e o processo de análise dos artigos (GALVÃO; RICARTE, 2019).

Utilizamos o endereço eletrônico <<https://www-periodicos-capes-gov-br.ez1.periodicos.capes.gov.br/index.php>> do Portal de Periódicos da CAPES como a base de dados para coleta dos artigos que foram analisados. A escolha pelo Portal de Periódicos CAPES se justifica por se tratar de uma base de dados confiável que, de acordo a Biblioteca Unifor³, possui diversos títulos de periódicos científicos em áreas multidisciplinares e por ser um dos maiores acervos do mundo. O Portal é muito relevante por fornecer acesso às informações científicas às universidades de todo país e por auxiliar no aumento da produção científica nacional e no crescimento da inserção do Brasil na produção científica internacional.

³ Conforme informação no site: <https://unifor.br/biblioteca/apresentacao>

A seleção dos trabalhos foi feita em fevereiro de 2022 e utilizamos alguns filtros, de modo que pudessem atender ao objetivo do trabalho. Os filtros utilizados foram: serem artigos, idioma português, revisado por pares, acesso aberto e o período que foi entre 2008 e 2021.

A seleção dos artigos, a priori, contou com 278 trabalhos. A escolha foi feita utilizando os descritores:

- “matemática para o ensino”, sendo encontrados 180 artigos, no entanto, nenhum desses trabalhos tratava especificamente da temática, aparecendo um termo ou outro do referido descritor;

- “conhecimento matemático para o ensino”, sendo encontrados 63 artigos, desses, apenas 6 abordavam a temática;

- “conhecimento especializado do professor de matemática”, com 14 artigos, sendo descartados 13 porque não tratavam do tema;

- “conhecimento de professores de matemática”, com 18 artigos; no entanto, esses trabalhos já haviam aparecido em pelo menos um dos descritores pesquisados, ou seja, os títulos foram repetidos;

- “Conhecimento Especializado de Professores de Matemática”, com 3 artigos, que, também apareceram em pesquisa utilizando o descritor “conhecimento matemático para o ensino” restando 10 trabalhos do período de 2008 a 2021.

Justificamos a escolha de iniciar em 2008 por ter sido o ano de publicação sobre o CMpE proposto por Ball, Thames e Phelps, apresentando à comunidade científica uma tipificação de conhecimentos matemáticos do professor. Finalizamos o período de busca em 2021 porque em 2022 temos o prazo para conclusão e apresentação desta pesquisa.

A escolha por artigos justifica-se pelo fato de muitos deles resultarem de teses e dissertações. Além disso, artigos alcançam bem mais a comunidade acadêmica do que teses e dissertações.

Para finalizarmos a busca com 10 trabalhos fizemos uma leitura mais global e utilizamos como critérios de exclusão trabalhos que apenas usaram os descritores mencionados acima, mas não tratavam especificamente da matemática e sim de outras áreas do conhecimento, como ciências, por exemplo. Os 10 artigos selecionados foram lidos integralmente e a apresentação feita em ordem cronológica crescente, no período de 2008 a 2021 como mostra o quadro 1, a seguir.

Título do trabalho (Ano)	Autor(es)	Tipo de Pesquisa	Revista
Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma eficaz navegação entre representações	RIBEIRO, C. M (2011)	Empírica envolvendo professores atuantes no 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico.	Educação e Pesquisa
Cognições e Tipo de Comunicação do Professor de Matemática. Exemplificação de Um Modelo de Análise num Episódio Dividido	RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, JOSÉ.; MONTEIRO, R. (2012)	Empírica envolvendo duas professoras atuantes no 1º Ciclo do Ensino Básico.	Revista Latinoamericana de <i>Investigación en Matemática Educativa</i>
Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações	RIBEIRO, A. J.; OLIVEIRA, F. A.P. V.S. e. (2015)	Empírica envolvendo seis professores da Educação Básica, envolvidos em processos de formação inicial ou de formação continuada.	Zetetiké
Conhecimento matemático para o ensino: um estudo com professores em formação inicial e continuada	CURY, H. N.; BISOGNIN, E. (2017)	Empírica realizada com professores em formação inicial e continuada.	Revista Thema
Uma análise do Projeto de formação profissional de professores privilegiada pelo PROFMAT	CALDATTO, M. E.; FIORENTINI, D.; PAVANELLO, R. M. (2018)	Teórica- discussão do currículo do PROFMAT	Zetetiké
A análise da produção escrita em matemática como estratégia de avaliação e o conhecimento do conteúdo e dos estudantes por parte de futuros professores	SANTOS, E. R. dos.; TEIXEIRA, B. R. (2019)	Empírica envolvendo futuros professores de Matemática.	<i>Research, Society and Development (Res., Soc. Dev.)</i>
Conhecimentos necessários para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental	MIOLA, A. F. de S.; LIMA, T. E. de A. (2020)	Empírica envolvendo professores da Educação Básica.	Educação, Matemática Debate-EMD
Conhecimento especializado de licenciandos em Matemática no contexto de práticas formativas para inclusão	RIBEIRO, G.G.; CRISTOVÃO, E. M. (2021)	Empírica envolvendo futuros professores de Matemática e cursando duas disciplinas dedicadas à prática como componente curricular	Zetetiké
Conhecimentos mobilizados em contexto colaborativo acerca da generalização algébrica nos anos iniciais	TERES, S. L. L.; GRANDO, R. C. (2021)	Empírica envolvendo professores dos anos iniciais.	Zetetiké
O dispositivo da especificidade matemática e a produção do sujeito-professor(a)-de-matemática	GRILLO, J. de S. P.; BARBOSA, J. C.; MAKNAMARA, M. (2021)	Teórica- ensaio teórico.	Zetetiké

Quadro 1 – Relação dos artigos selecionados. Fonte: Elaboração própria (2022).

Como ao colocar os filtros mencionados acima, a plataforma não mostrou nenhum artigo para o descritor “Matemática para o Ensino”, identificamos uma lacuna e nova busca se fez necessária, utilizando o descritor Matemática para o Ensino, nesse caso sem o uso das aspas e colocando os mesmos filtros. Retornou apenas um artigo que tratava da Matemática para Ensinar, diferente da vertente Matemática para o Ensino, objeto de pesquisa. O trabalho encontrado tem como título: “Programas de ensino e manuais escolares como fontes para estudo da constituição da matemática para ensinar” do pesquisador Wagner Rodrigues Valente, mas que foi descartado após leitura integral e certeza de não fazer parte da temática dessa pesquisa.

Continuamos a busca, porém na base de dados *Scielo*, conforme endereço eletrônico: <https://scielo.org/pt/>. Esta base foi escolhida em conformidade com o Jornal da Unicamp⁴ (2018), que afirma que a *Scielo* representa o preenchimento de lacunas em outras bases de dados no que se refere à produção científica brasileira em várias áreas do conhecimento.

Utilizando os mesmos descritores, com aspas, outra busca por artigos foi feita. Para o descritor “matemática para o ensino” encontramos 14 resultados, sendo que apenas 1 tratava do tema; “conhecimento matemático para o ensino”, 8 trabalhos, sendo excluídos 5 por não tratarem especificamente da matemática; “conhecimento especializado do professor de matemática” 4 resultados, sendo que apenas 1 tratava do descritor pesquisado;” conhecimento especializado de professor de matemática” 4 trabalhos, sendo que todos fizeram parte de pelo menos um dos descritores anteriores.

Para o refinamento, utilizamos os filtros: artigos em português, coleções no Brasil, pois a base não apresentou coleções em Portugal, e sem distinção de periódicos. Foi feita uma leitura geral do título e do resumo, retirando aqueles trabalhos que, apesar de apresentarem uma palavra ou outra utilizada nos descritores não tratavam aaaaa da temática em questão e ao final, encontramos 3 trabalhos. A seleção foi feita em ordem cronológica crescente, no período de 2011 a 2021. A nossa intenção foi buscar trabalhos a partir de 2008, ano de publicação da pesquisa liderada por Deborah Ball, no entanto, a base de dados *Scielo* não apresentou trabalhos anteriores ao ano de 2011, como mostra o quadro 2, a seguir.

⁴ Conforme informação no site: <https://www.unicamp.br/unicamp/ju/artigos/peter-schulz/scielo-20-anos-de-visionario-imprescindivel>,

Título do trabalho (Ano)	Autor(es)	Tipo de Pesquisa	Revista
Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática	RIBEIRO, A. J. (2012)	Teórica- ensaio teórico	Bolema
A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura	MENDUNI-BORTOLOTTI, R.D; BARBOSA, J. C. (2017)	Teórica- Revisão Sistemática de Literatura.	Bolema
Práticas de Ensino Exploratório de Matemática e a Mobilização/Desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino por Participantes do PIBID	MARINS, A. S; TEIXEIRA, B. R; SAVIOLI, A. M. P. das D. (2021)	Empírica- envolvendo participantes do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)	Bolema

Quadro 2 – Relação dos artigos selecionados. Fonte: Elaboração própria (2022).

Após a realização da busca pelas pesquisas que compuseram esse trabalho foi possível encerrar a seleção com um total de 13 artigos.

Inspiramo-nos na metodologia de análise de conteúdo de Bardin (2011) para desenvolver nossa análise de resultados. De acordo com a autora, a utilização da análise de conteúdo prevê três fases: a pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados – a inferência e a interpretação.

A fase de pré-análise, segundo Bardin (2011), envolveu a leitura flutuante, que foi feita a partir dos títulos, dos resumos dos trabalhos e, quando não suficiente, fizemos a leitura de todo o trabalho. Após a leitura flutuante do material, a exploração dele foi realizada a partir da codificação. A codificação se deu com os descritores que foram utilizados na seleção do material que, uma vez comparada com os resultados observados, foram constituindo-se em unidades de registros para, então, efetuar-se a categorização. As categorias definidas foram: Conhecimento Matemático para o Ensino (CMpE), Conhecimento Especializado do/de Professor (es) de matemática (CEPM) e Matemática para o Ensino (MpE).

Os trabalhos que foram baseados na pesquisa de Deborah Ball e seus colaboradores (2003, 2008) foram inseridos na categoria Conhecimento Matemático para o Ensino. As pesquisas que foram inspiradas no trabalho desenvolvido por Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán, (2013) estão na categoria Conhecimento Especializado do/de Professor (es) de Matemática. Os trabalhos que tiveram como suporte

a pesquisa desenvolvida por Davis e Renert (2014) foram inseridos na categoria Matemática para o Ensino.

A partir da categorização citada anteriormente apresentaremos, na próxima sessão, a forma como a matemática específica da ação do professor tem sido apresentada na literatura de língua portuguesa.

3 MATEMÁTICA ESPECÍFICA DA AÇÃO DO PROFESSOR

Com o entendimento de que o conhecimento matemático específico da ação do professor é “o conhecimento necessário para realizar o trabalho de ensinar matemática” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395) apresentamos a primeira categoria: Conhecimento Matemático para o Ensino.

3.1 Conhecimento Matemático para o Ensino (CMpE)

A partir da leitura dos artigos, *corpus* da pesquisa, e das semelhanças encontradas como, por exemplo, as categorias propostas por Ball, Thames e Phelps (2008), que foram utilizadas nas discussões, identificamos nove trabalhos que apresentam o CMpE e as suas subcategorias. Os artigos que compuseram essa categoria versam sobre a formação inicial e continuada de professores, análise de erros, conceitos matemáticos, análise de produção escrita de futuros professores de matemática e a compreensão dos pesquisadores sobre o CMpE.

Para os pesquisadores Ribeiro, Carrillo e Monteiro (2012) o conhecimento profissional dos professores se difere do conhecimento de outros profissionais mesmo que estes utilizem a matemática diariamente. Ao professor cabe conhecer os conteúdos matemáticos a ensinar e as distintas formas de os tornarem compreensíveis para os alunos, e relacionar esses conteúdos com outros que já foram ou serão abordados. Os autores investigaram o desenvolvimento profissional de duas professoras do 1.º Ciclo e apresentaram os resultados da atuação de uma das professoras. A professora em questão possuía 18 anos de profissão, 10 anos de experiência em uma mesma instituição, tendo sido professora dos mesmos alunos desde o primeiro ano de escolaridade e declarou abertamente a má relação com a matemática. Para essa pesquisa, os autores (2012),

elaboraram um modelo de investigação e utilizaram, dentre outras coisas, a especificação de alguns subdomínios do CMpE.

Ribeiro, Carrillo e Monteiro (2012) identificaram nas aulas ministradas pela professora pesquisada os subdomínios Conhecimento Comum do Conteúdo mobilizado a partir do entendimento sobre o conteúdo proposto para aula; Conhecimento do Conteúdo e do Ensino identificado a partir do material apropriado e da verbalização por parte dos alunos que evidenciaram as aprendizagens efetuadas. Ao mobilizar os dois conhecimentos que foram identificados pelos pesquisadores (2012) entendemos que existe um esforço por parte do professor dos anos iniciais ao ensinar um conteúdo matemático. Mesmo alguns professores das séries iniciais, que ensinam matemática, não tendo uma atitude favorável com a mesma, os professores mobilizam um Conhecimento do Conteúdo e do Ensino a partir do momento que conhecem o aluno e planejam suas aulas; recorrem a estratégias e materiais que julgam adequados e que possibilitam a aprendizagem do aluno. Contudo, perguntamos: como, quando e com quem aprenderam a fazer isso? Seriam simplesmente sozinhos, refletindo em suas experiências individuais, por vezes naquilo que deu certo e errado?

Os pesquisadores Marins, Teixeira e Savioli (2021) investigaram os conhecimentos profissionais mobilizados/desenvolvidos por participantes do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), especificamente com licenciandos em Matemática e professores da Educação Básica, quando inseridos em um processo formativo apoiado na perspectiva de ensino exploratório. Os autores (2021) compreendem que o CMpE pode ser mobilizado por meio da participação em um processo de formação que leva em consideração o ciclo letivo do professor, cujo desenvolvimento se dá “em momentos de planejamento, de ensino e de reflexão, aliado a uma abordagem de ensino, a qual proporcione a construção e a reflexão de ações inerentes à prática docente” (MARINS, TEIXEIRA, SAVIOLI, 2021, p. 321).

De acordo Marins, Teixeira e Savioli (2021), o processo formativo desenvolvido em sua pesquisa, foi constituído com base na perspectiva de desenvolvimento profissional docente e os encontros tiveram como base o ciclo de trabalho do professor, envolvendo atividades que se relacionam com a prática docente em momentos de planejamento, de ensino e de reflexão. Para os pesquisadores, esse processo propiciou a mobilização de aspectos relacionados ao CMpE como o Conhecimento Especializado do Conteúdo, o

Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes e o Conhecimento sobre o Ensino e sobre a Matemática.

Os resultados da pesquisa nos mostraram que a formação desenvolvida propiciou que, em conjunto, mobilizassem, além do conhecimento sobre o conteúdo, também conhecimentos sobre o exercício da docência em matemática e, mais ainda, conhecimentos sobre com quem exercem a docência: estudantes. O processo formativo entre licenciandos e professores já em exercício possibilitou o desenvolvimento de conhecimentos na tríade: conteúdo, ensino, estudantes.

Ribeiro (2011) baseou-se nas discussões e reflexões ocorridas num grupo de formação inserido no âmbito de um Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico¹ (PFCM). O pesquisador apresentou reflexões sobre o conhecimento matemático necessário para ensinar as operações envolvendo números decimais (em particular, a multiplicação).

O CMpE foi abordado por Ribeiro (2011) através das representações que os alunos possuem de um mesmo conceito, “quanto mais diversificadas forem as representações que os alunos possuem de um mesmo conceito, maior facilidade eles terão para trabalhá-lo em diferentes contextos” (RIBEIRO, 2011, p. 410). De acordo o autor, esse tipo de exploração só será possível se o professor possuir um CMpE,

Nesse tipo de conhecimento, encontram-se incluídos o conhecer diversos tipos de representações para um mesmo conteúdo (o que, no caso concreto aqui abordado, refere-se a números decimais/fracionários e suas operações) e o possuir o saber que permita uma eficaz navegação entre essas representações, de forma que seja possível enriquecer as estruturas e redes conceptuais dos alunos e permitir-lhes uma passagem e uma complementarização entre essas mesmas redes. (RIBEIRO, 2011, p. 410).

De acordo com Ribeiro (2011), para que o aluno adquira uma competência matemática sobre o referido conteúdo, é necessário que ele seja confrontado com situações que envolvam diversas representações, cabendo ao professor não apenas a escolha dessas representações e dos exemplos utilizados, mas também o tipo de linguagem utilizada, ou seja, é necessário que o professor tenha o conhecimento do conteúdo a ser ensinado e de como ensiná-lo. Inferimos que esse tipo de conhecimento faz parte do subdomínio Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, conforme Ball, Thames e Phelps (2008). Para Ribeiro (2011), ao trabalhar as operações de adição e subtração de números decimais e as

distintas formas de representar uma mesma situação, possibilita uma maior compreensão por parte dos alunos. No entanto, isso só será possível se o professor mobilizar o Conhecimento do Conteúdo e do Estudante que lhe permita utilizar uma linguagem matematicamente correta e compreender as dificuldades dos alunos no entendimento do algoritmo. Em relação à operação de multiplicação de decimais, Ribeiro (2011) destaca que uma das grandes dificuldades dos alunos é a de perceberem por que

motivo, ao multiplicarem duas determinadas quantidades de décimas, vão obter determinada quantidade de centésimas, ou seja, por que motivo, ao multiplicarem décimas por décimas, utilizando o algoritmo, têm de considerar duas e não apenas uma casa decimal (similarmente ao que efectuavam na adição e na subtracção). (RIBEIRO, 2011, p. 417).

Para o autor essa dificuldade do aluno parte da própria dificuldade dos professores em explicarem tal fato, o que demonstra possuírem um Conhecimento Comum do Conteúdo pois, apesar de saberem para si próprios, não possuem um conhecimento aprofundado relativo ao conteúdo que pretendem ensinar. Não é o bastante que o professor possua o Conhecimento Comum do Conteúdo, é preciso mobilizar conhecimentos específicos para ensinar, conhecer o aluno, o currículo e pensar estratégias que propiciem o entendimento dos estudantes.

Outra forma de utilizar o CMpE é a partir da análise de erros cometidos por alunos da educação básica e ou superior. O modelo CMpE foi usado na pesquisa realizada por Cury e Bisognin (2017) a partir da análise de erros cometidos por licenciandos em matemática em relação a uma questão que abordava o conteúdo de sequências numéricas. A análise dos erros cometidos pelos licenciandos foi realizada por mestrandas e doutorandas em cursos de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. De acordo com as autoras (2017), tanto os licenciandos quanto as mestrandas e doutorandas apresentaram dificuldades relacionadas ao CMpE e ressaltam que “conhecer dificuldades de professores, em formação inicial ou continuada, faz parte do conhecimento do conteúdo e dos alunos, que os formadores de formadores também precisam ter” (CURY; BISOGNIN, 2017, p. 248).

De acordo com Cury e Bisognin (2017), não foi solicitado às professoras, em formação continuada, que resolvessem a questão proposta aos professores em formação inicial. Por esse motivo não foi possível avaliar se elas têm o conhecimento do conteúdo e do ensino. No entanto, mostrou-se ter um conhecimento geral do conteúdo e conhecimento

curricular. As autoras relatam que uma das professoras demonstrou não possuir o conhecimento comum do conteúdo de sequências e séries e outra professora mostrou ter conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Para Cury e Bisognin (2017),

Os erros cometidos por alunos de cursos de licenciatura em Matemática são exemplos das dificuldades que esses futuros professores vão enfrentar em suas salas de aula da escola básica, mas também são evidências das suas próprias dificuldades, que poderão ser examinadas por outros professores, em formação continuada, que já têm experiências da ocorrência de erros em suas práticas, mas que também podem sentir dificuldades nos mesmos conteúdos, necessitando discuti-los para criar situações de mudança. CURY; BISOGNIN, 2017, p. 249).

Pesquisadores como Miola e Lima (2020) também apontam lacunas nos conhecimentos matemáticos dos professores. As autoras investigaram os conhecimentos matemáticos de professores licenciados em Matemática e em Pedagogia sobre os números racionais. As autoras utilizaram um questionário como instrumento de produção de dados, elaborado com questões que tratavam sobre a maneira como os professores de Matemática e pedagogos criavam e desenvolviam o ensino de números racionais nos 5º e 6º anos do Ensino Fundamental. As respostas foram agrupadas em categorias de acordo os subdomínios do CMpE. Como resultado, as pesquisadoras (2020) apontaram que os participantes da pesquisa apresentaram lacunas referentes aos subdomínios: conhecimento especializado, conhecimento comum e conhecimento no horizonte. Apesar de inúmeras pesquisas realizadas sobre os conhecimentos que são necessários para a tarefa de ensinar, o que se percebe é que existem muitas dificuldades por parte de professores na aquisição desses conhecimentos.

Segundo Ribeiro e Oliveira (2015, ensinar é um ato complexo “o qual envolve muitos aspectos/domínios que devem ser mobilizados por aqueles que o praticam” (RIBEIRO; OLIVEIRA, 2015, p. 312). Os autores fizeram uma investigação sobre quais conhecimentos matemáticos os professores e futuros professores julgam importantes ao ensino, sobretudo quando preparam aulas sobre equações para a Educação Básica. Os pesquisadores (2015) utilizaram dois subdomínios do CMpE para analisarem os dados da pesquisa, a saber: o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. Identificaram como Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes o fato de os professores reconhecerem as dificuldades dos alunos para caracterizarem uma equação, por exemplo. Em relação ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino

constatarem, dentre outras coisas, que os professores utilizavam analogias como uma balança e seu equilíbrio em relação aos conteúdos de equação e utilizavam uma abordagem etimológica das palavras “equação” e “igualdade”, com o objetivo de promover uma maior discussão e compreensão desse conteúdo em sala de aula.

Ribeiro (2012) propôs em sua pesquisa tecer relações e apontar potencialidades para a constituição do CMpE, para o conceito de equação, a partir das pesquisas realizadas por (RIBEIRO, 2007; BARBOSA, 2009; DORIGO, 2010; STEMPIAK, 2010). Para Ribeiro (2012), as potencialidades do trabalho que envolve os diferentes significados de equação no campo da formação de professor de matemática pressupõem explorar o conhecimento do professor sobre álgebra, ou seja, explorar o Conhecimento Especializado do Conteúdo e a possibilidade que se contemplem as dimensões cognitiva e didático-pedagógica do conhecimento do professor para ensinar, ou seja, o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.

Teres e Grando (2021) realizaram uma pesquisa acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes dos anos iniciais e do Conhecimento Especializado do Conteúdo Matemático, no que se refere à generalização em sequências recursivas. As autoras compreendem que, em relação ao Conhecimento Especializado do Conteúdo, está a preocupação de compreender o porquê se utiliza uma determinada propriedade e como explicar essa compreensão para os estudantes

Ribeiro (2011) destaca a importância de como se consideram e utilizam os comentários dos alunos. Entendemos que essa consideração faça parte do Conhecimento do Conteúdo e do Estudante, uma vez que o professor tem a oportunidade de conhecer o que o estudante sabe ou não sobre o conteúdo. A análise da produção escrita em matemática foi utilizada por Santos e Teixeira (2019) como estratégia de avaliação de futuros professores de Matemática.

Segundo Santos e Teixeira (2019) a análise de produção escrita como estratégia de avaliação é composta por um conjunto de ações: leitura vertical, oportuniza conhecer como o aluno lida com as tarefas matemáticas propostas; leitura horizontal, têm-se um panorama dos erros e acertos mais frequentes e do perfil da turma ao lidar com as tarefas propostas; inferência, possibilita uma reflexão sobre as produções dos alunos; interpretações, capacidade de interpretar os pensamentos dos alunos que são expressos por meio de registros.

A partir da reflexão feita dos artigos que compuseram essa categoria foi possível compreender que, ao professor, cabe muito mais que o domínio do conteúdo que se pretende ensinar, é preciso o domínio de certos tipos de conhecimento que possibilitam o processo de ensino e aprendizagem.

Foi possível identificar que uma pesquisa foi realizada pensando apenas a formação inicial, quatro trabalhos foram voltados para formação continuada e quatro trabalhos abordaram tanto a formação inicial quanto continuada de professores de matemática. Os subdomínios mais mobilizados pela literatura nos trabalhos analisados foram: o conhecimento comum do conteúdo; o conhecimento especializado do conteúdo; o conhecimento do conteúdo e dos estudantes- quatro pesquisas cada- e o conhecimento do conteúdo e do ensino- cinco trabalhos. Esses conhecimentos categorizados em domínios e subdomínios dizem respeito ao conjunto de habilidades que o professor precisa apresentar e que torna a matemática específica de sua ação diferente daquela praticada em outras áreas do conhecimento.

Tendo em vista que o trabalho docente tem sido tema de pesquisas sobre formação de professores (RIBEIRO; CRISTOVÃO, 2021; CALDATTO; RIBEIRO, 2020) discorreremos sobre a segunda categoria que encontramos nos trabalhos analisados: “Conhecimento Especializado do Professor de Matemática”.

3.2 Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (CEPM)

Para essa categoria foram identificados dois trabalhos que apresentam CEPM e as suas subcategorias. Os artigos selecionados discutem a formação de licenciandos de Matemática no contexto de práticas formativas na perspectiva inclusiva, e a formação de professores de matemática desenvolvida no âmbito da política pública do Programa Especial de Formação Pedagógica – PROFOP.

Ribeiro e Cristovão (2021) apresentaram resultados parciais de uma pesquisa de mestrado, em andamento, que objetivou investigar o conhecimento especializado mobilizado por futuros professores de Matemática no contexto de práticas formativas na perspectiva inclusiva. Com base no modelo CEPM as pesquisadoras (2021) relacionaram os conhecimentos propostos no CEPM com as práticas formativas com foco na inclusão e criaram um subdomínio para CEPM, a saber: Conhecimento para o Ensino de Matemática na perspectiva Inclusiva (CEMI). Importante ressaltar que os pesquisadores não tiveram

por objetivo criar um novo modelo. Perceberam a lacuna no CEPM e propuseram um subdomínio que contempla alunos com necessidades especiais.

Para esse novo subdomínio as pesquisadoras (2021) consideraram o conhecimento de recursos e métodos específicos para atender alunos com Necessidades Educacionais Especiais (NEE). “Esse conhecimento está associado aos outros do modelo e, portanto, quando for mobilizado, ele será apresentado de forma articulada aos demais” (RIBEIRO; CRISTOVÃO, 2021, p. 8) conhecimentos propostos no modelo CEPM.

Caldatto e Ribeiro (2020) discutiram os conhecimentos privilegiados pela formação de professores de matemática desenvolvida no âmbito da política pública do PROFOP. Fizeram um levantamento das disciplinas ofertadas pelo programa e categorizaram elementos das ementas e disciplinas de acordo com os domínios e subdomínios do CEPM. Os autores assumiram as perspectivas dos modelos CEPM-MTSK- (Carrillo-Yañez et al., 2018) e da Base do Conhecimento- *Knowledge Base* - (Shulman, 1986).

Segundo os pesquisadores (2020) o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* -MTSK corresponde a uma conceitualização do conhecimento do professor que surgiu de uma releitura do Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball, Thames e Phelps, 2008) e do Conhecimento de Conteúdo e do Currículo (Shulman, 1986), que é voltada para a discussão dos conhecimentos relacionados ao ensino de matemática. O *Mathematics Teachers Knowledge Base*- MTKB é uma articulação entre as especificidades do MTSK e as generalidades do conhecimento do professor.

Note-se que essa forma de entender e representar a imprescindível complementação entre o *Knowledge Base* e o MTSK, desenvolvida e nominada por nós como *Mathematics Teachers Knowledge Base*, visa contribuir para um refinamento do foco de atenção (teórico e metodológico) no/para o entendimento da estrutura e dos objetivos dos cursos de formação. Assim, por meio do MTKB, busca-se contribuir para a promoção de uma formação focada no desenvolvimento integral do conhecimento do professor de matemática, de modo que promova a articulação entre a “forma e o conteúdo” (Saviani, 2009), atendendo às diversas demandas emergentes das práticas desse profissional, particularmente as voltadas para a melhora das aprendizagens e resultados matemáticos dos alunos. (CALDATTO; RIBEIRO, 2020, p. 9)

Caldatto e Ribeiro (2020) apontaram a possibilidade de unir modelos que se complementam como *Knowledge Base* e o MTSK. No entanto, relatam a falta de vínculo entre os conhecimentos pedagógico e matemático. De acordo com os pesquisadores, as disciplinas ofertadas pelo PROFOP se organizam por meio do Núcleo Contextual,

Estrutural e Integrador. Em relação ao Núcleo Contextual, os pesquisadores verificaram que, conforme o conteúdo das ementas, nenhuma das disciplinas contempla tópicos que podem ser associados diretamente à matemática e/ou ao seu ensino, ou seja, “as disciplinas do Núcleo Contextual do PROFOP abarcam conhecimentos de natureza exclusivamente pedagógica” (CALDATTO; RIBEIRO, 2020 p. 13); isto é, estavam relacionadas às dimensões do conhecimento propostas por Shulman (1986, 1987).

Os autores (2020) ressaltam que a falta de vínculos entre o conhecimento pedagógico e o conhecimento matemático do professor afasta-se dos resultados alcançados por pesquisas que investigam a relação entre o conhecimento especializado do professor de matemática e o ensino dessa área do conhecimento no ambiente escolar (CALDATTO; RIBEIRO, 2020, p. 16). Em conformidade com os autores, a formação matemática dos profissionais concentra-se em definições, propriedades e procedimentos matemáticos.

Os dois artigos discutidos nessa categoria que trataram da formação inicial e continuada de professores de matemática no âmbito do CEPM mostraram que as práticas formativas podem auxiliar na preparação do professor para lidar com situações diversas presentes em sala de aula. Ribeiro e Cristovão (2021), por exemplo, ao ampliarem o modelo CEPM acrescentando uma subcategoria voltada para prática formativa na perspectiva inclusiva, mobilizam o conhecimento de professores e ou futuros professores que ensinam matemática. Os pesquisadores Caldato e Ribeiro (2020) não ampliaram as subcategorias do modelo CEPM, mas apontaram a possibilidade de juntar modelos *Knowledge Base* e o MTSK

Tendo em vista que “a matemática para ensinar revela-se como um saber profissional, uma matemática *para* o exercício da docência, uma ferramenta de trabalho do professor *para* ensinar matemática tendo em conta uma matemática *a* ensinar” (VALENTE, 2019, p. 52), enunciamos a terceira categoria intitulada Matemática para o Ensino (MpE).

3.3 Matemática para o Ensino (MpE)

Conforme as buscas que foram feitas e os critérios utilizados para seleção dos artigos, só foi possível identificar um trabalho que apresenta a Matemática para o Ensino. O artigo intitulado: A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de

Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura apresenta uma MpE como um modelo teórico a partir de uma revisão de literatura.

Ressaltamos que o modelo MpE proposto é o único dentre as categorias estabelecidas nesta pesquisa que não explora os tipos de conhecimentos que o professor precisa ter para exercer sua função. Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017) consideram a MpE como “uma forma de estruturar conceitualmente diversas formas de comunicar um conceito, cuja materialização ocorra a partir de diferentes fontes” (MENDUNI-BORTOLOTI; BARBOSA, 2017, p. 950).

Os pesquisadores Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017) identificaram três cenários para o conceito de proporcionalidade direta. No primeiro cenário, “O conceito de proporcionalidade realizado como razão”, identificaram três tipos de relação: a multiplicativa (quando realizada como equivalência de razões, taxa, escala, divisão), a aditiva (soma de vetores) e a comparativa (intervalos musicais). No segundo cenário, “O conceito de proporcionalidade realizado como igualdade entre razões”, identificaram a proporcionalidade realizada como regra de três e como porcentagem. No terceiro cenário, “O conceito de proporcionalidade realizado como função”, o conceito de proporcionalidade foi comunicado como relações multiplicativas, taxa de variação, fator-escala e porcentagem.

Diante de diferentes realizações desse conceito, sintetizaram um modelo de MpE do conceito de proporcionalidade direta. Apresentaram um modelo que capturou diversas formas de comunicar o conceito de proporcionalidade. Tal modelo foi denominado pelos autores (2017) como: “Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade na Educação Básica”.

Oferecer aos licenciandos e aos professores de matemática em formação continuada uma diversidade de modos de apresentar um conceito matemático possibilita uma ampliação desse conceito e agrega outros tantos da própria disciplina quanto de outras áreas do conhecimento. Compreendemos que o modelo MpE possibilita a ampliação dos saberes docente sem necessariamente partir de um modelo pronto e prescritivo. Acontece a partir de um coletivo, de forma dinâmica e compartilhada.

Diante do exposto, a matemática específica da ação do professor foi apresentada conforme as categorias discutidas anteriormente e que serão retomadas brevemente nas considerações no tópico seguinte.

4. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A atenção dada à prática profissional de professores e estudantes da licenciatura tem se mostrado como um avanço na área de formação docente, notadamente a partir dos estudos de Shulman (1986,1987).

Neste trabalho buscamos responder ao objetivo: identificar formas que a matemática, específica da ação do professor, vem sendo assumida e difundida em pesquisas de língua portuguesa. Com base no levantamento realizado, foi possível confirmar pelo menos três formas como a literatura aborda a matemática que é específica do professor: Conhecimento Matemático para o Ensino (CMpE) (BALL; THAMES; PHELPS, 2008); Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (CEPM) (CARRILLO; CLIMENT; CONTRERAS; MUÑOZ-CATALÁN, 2013) e Matemática para o Ensino (MpE) (DAVIS; RENERT, 2014).

A matemática específica da ação do professor e que se difere daquela que é mobilizada por outras áreas de conhecimento foi compreendida de acordo com cada categoria analisada. Em relação ao CMpE e ao CEPM compreendemos a matemática a partir de um conjunto de conhecimentos que o professor precisa mobilizar para exercer sua função. Esse conjunto é composto por categorias que envolvem tipos de conhecimentos, tais como do conteúdo, do aluno, do ensino e do currículo. Na MpE o foco não está em saber quais conhecimentos o professor possui, e sim na construção de saberes no coletivo.

A categoria Conhecimento Matemático para o Ensino se apresentou de três formas nos 9 trabalhos analisados como mostra o quadro 3 a seguir:

CMpE foi	Conhecimentos mobilizados
Apresentado como conhecimentos mobilizados por futuros professores e ou professores experientes	<ul style="list-style-type: none">✓ Conhecimento Comum do Conteúdo✓ Conhecimento do Conteúdo e do Ensino✓ Conhecimento Especializado do Conteúdo✓ Conhecimento do Conteúdo e do Estudante✓ Conhecimento sobre o Ensino e sobre a Matemática
Mobilizados a partir de um conceito matemático	<ul style="list-style-type: none">✓ Conhecimento do Conteúdo e do Ensino✓ Conhecimento do Conteúdo e do Estudante
Capturado como análise de erros ou produção escrita	<ul style="list-style-type: none">✓ Conhecimento do Conteúdo e do Estudante

Quadro 3 – Formas que o CMpE foi apresentado. Fonte: Elaboração própria (2022).

As pesquisas apontaram lacunas em relação ao CMpE. Ribeiro (2011) assinalou dificuldades por parte dos alunos, relacionadas ao algoritmo da multiplicação. Ressaltou que essa dificuldade do aluno parte da dificuldade do professor, o que indica que o professor possui conhecimento comum do conteúdo que é necessário, mas não é suficiente para o exercício da docência. As autoras Cury e Bisognin (2017) apontaram dificuldades em relação ao CMpE por parte dos licenciandos, mestrands e doutorands participantes da pesquisa. Pesquisadores como Miola e Lima (2020) também apontaram lacunas referentes aos subdomínios do modelo CMpE. Apontaram a necessidade de um olhar voltado para formação inicial nos cursos de Pedagogia e Matemática. De acordo com as pesquisadoras, existem problemas referentes à construção desses conhecimentos. As autoras afirmaram que muitos professores resolvem a situação por conta própria e por meio da prática em sala de aula.

Em relação à categoria Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, dois pontos nos chamaram a atenção. O primeiro é a compreensão de que, assim como os pesquisadores Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán, (2013) apontaram limitações do modelo proposto por Ball e seus colaboradores (2008) para investigar certos aspectos do conhecimento dos professores de matemática e sinalizaram a necessidade de um maior refinamento nas categorias propostas no modelo CMpE, as autoras Ribeiro e Cristovão (2021) criaram um subdomínio para CEPM, o “Conhecimento para o ensino de Matemática na perspectiva Inclusiva” (CEMI), que deverá ser apresentado de forma articulada aos demais conhecimentos propostos no modelo CEPM, mas que precisa ser incluída no modelo CEPM.

A identificação das diferentes formas de abordagem para uma matemática própria do professor pode mobilizar formadores de professores a promover ações que desenvolvam conhecimentos profissionais de professores e futuros professores de Matemática. A MpE apontada como modelo teórico por alguns autores, por exemplo, pode ser utilizada como fonte de busca e de orientação para pesquisadores interessados no tema, promovendo ideias e discussões, de modo a contribuir para a Educação Matemática.

Nesse sentido, apontamos a importância de que haja mais pesquisas a respeito da matemática específica da ação do professor na formação inicial e continuada, explorando suas potencialidades, tendo em vista o desenvolvimento profissional do professor e do futuro professor.

Se professores ou futuros professores têm dificuldade para ensinar um conteúdo, essa dificuldade poderá ser repassada para seus estudantes em forma de dificuldades outras ou em erros. Mais preocupante, pode ser retirado do planejamento do professor porque ele não sabe ensinar, porque não apresenta segurança, como foi a geometria por muitos e muitos anos.

Quando o professor ou professores planejam, refletem, isoladamente, é muito limitado o abarcamento que eles, por estarem sozinhos, alcançam. Enquanto que, em processos formativos o ganho é maior porque, pessoas refletindo e interagindo juntas, alçam voos mais longe. Isso se deve ao fato de que elas têm a oportunidade de compartilhar, tanto suas angústias e dificuldades, quanto os seus conhecimentos.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, Y. O. **Multissignificados de equação: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática**. 2009, 196f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. *Content knowledge for teaching: What makes it special?* *Journal of Teacher Education*, 59, p. 389-407. 2008.
- BARDIN L. *Ánálise de conteúdo*. SP: Edições 70, 2011
- CALDATTO, M. E; RIBEIRO, C. M. **Especificidades do conhecimento do professor de matemática na e para a formação: uma discussão em torno do programa de complementação pedagógica**. *Revista Brasileira de Educação* v. 25 e250031 2020.
- CARRILO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUNÓZ-CATALÁN, M. C. Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In: UBUZ, B. HASER, C. et al. **Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 8., 2013. Turkey: M.E.T. University, Ankara, 2013. p.2985-2994. Disponível em: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf. Acesso em: 08 de out. 2020.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., EscuderoÁvila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & MuñozCatalán, M. C. (2018). *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, 1-18. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.
- CURY, H. N.; BISOGNIN, E. **Conhecimento matemático para o ensino: um estudo com professores em formação inicial e continuada**. *Revista Thema* 2017 | Volume 14 | Nº 3. Pág. 241 a 249.
- DAVIS, B.; RENERT, M. *The Math Teachers Know: Profund Understanding of Emergent Matematics*. Routledge Taylor & Francis Group, 141 p. 2014.
- DAVIS, B. e SIMMT, E. (2006). **Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know**. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 61, No. 3, pp. 293-319. Springer.
- DORIGO, M. **Investigando as concepções de equação de um grupo de alunos do Ensino Médio**. 2010, 137f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.
- GALVÃO, Maria Cristina Barbosa. RICARTE, Ivan Luiz Marques. **Revisão Sistemática da Literatura: conceituação, produção e publicação**. *Logeion: Filosofia da informação*, v. 6, n.1 (2019).
- MARINS, A. S; TEIXEIRA, B. R. SAVIOLI, A. M. P. das D. **Práticas de Ensino Exploratório de Matemática e a Mobilização/Desenvolvimento do Conhecimento**

Matemático para o Ensino por Participantes do PIBID. Bolema, Rio Claro (SP), v. 35, n. 69, p. 314-342, abr. 2021

MENDUNI-BORTOLOTTI, R.D; BARBOSA, J. C. **A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 947-967, dez. 2017

MIOLA, A. F. de S.; LIMA, T. E. de A. **Conhecimentos necessários para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental.** Educação Matemática Debate, Montes Claros (MG), Brasil v. 4, e202044, p. 1-16, 2020.

RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multissignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico.** 2007, 142f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

RIBEIRO, A. J. **Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 535-557, abr. 2012.

RIBEIRO, A. J.; OLIVEIRA, F. A.P. V.S. e. **Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações.** zetetiké – fe/unicamp & feuff – v. 23, n. 44 – jul/dez-2015.

RIBEIRO, C. M. **Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma eficaz navegação entre representações.** Educação e Pesquisa, São Paulo, v.37, n.2, p. 407-422, mai./ago. 2011.

RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J; MONTEIRO, R. **Cognições e Tipo de Comunicação do Professor de Matemática. Exemplificação de Um Modelo de Análise num Episódio Dividido.** Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2012) 15 (1): 93-12

RIBEIRO, G.G.; CRISTOVÃO, E. M. **Conhecimento especializado de licenciandos em Matemática no contexto de práticas formativas para inclusão.** Zetetiké, Campinas, SP, v.29, 2021, pp.1-19 – e021019 ISSN 2176-1744.

SANTOS, E. R. dos.; TEIXEIRA, B. R. **A análise da produção escrita em matemática como estratégia de avaliação e o conhecimento do conteúdo e dos estudantes por parte de futuros professores.** *Research, Society and Development* ISSN-e 2525-3409, Vol. 8, Nº. 2, 2019.

SHULMAN, Lee S. **Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching.** Educational Researcher. v.15, n.2. fev. 1986, pp.4-14.

_____. **Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform.** Harvard Educational Review, v. 17, n. 1, p. 1-22, 1987.

STEMPNIAK, I. G. B. **Multissignificados de equação e o professor de Matemática: um estudo sobre a Modelagem Matemática num curso de licenciatura.** 2010, 121f.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

TERES, S. L. L.; GRANDO, R. C. **Conhecimentos mobilizados em contexto colaborativo acerca da generalização algébrica nos anos iniciais**. Zetetiké, Campinas, SP, v.29, 2021, pp.1-24 -e021031. ISSN 2176-1744

VALENTE, W. R. **Programas de Ensino e Manuais Escolares como Fontes para Estudo da Constituição da Matemática para Ensinar**. Alexandria: R. Educ. Ci. Tec. Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 51-63, novembro, 2019.

A COMUNICAÇÃO DO CONCEITO DE DIVISÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL I

Daniela Santos Brito Viana⁵
Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti⁶

Resumo: Este estudo apresenta uma análise da comunicação do conceito de divisão feita em livros didáticos do Ensino Fundamental I para construção de um modelo de matemática para o ensino desse conceito. Neste artigo temos como pergunta diretriz: como o conceito de divisão está sendo apresentado em livros didáticos do Ensino Fundamental I? Ao responder à pergunta alcançamos o objetivo de construir um modelo de Matemática para o Ensino do conceito de divisão a partir de livros didáticos do Ensino Fundamental I. Mesmo sendo inserido desde os anos iniciais, o conceito de divisão é considerado por muitos alunos e professores um dos conteúdos mais difíceis de ensinar e de aprender. Por meio de uma pesquisa bibliográfica, foram escolhidas, obedecendo a alguns critérios, uma coleção de livros didáticos referentes ao ensino fundamental I. Apropriamo-nos do estudo do conceito como dispositivo para análise da coleção. O resultado mostrou uma variedade de realizações do conceito de divisão, agrupados em dois cenários. No primeiro, repartir igualmente, o conceito de divisão foi realizado, por exemplo, como estimativa. No segundo, medida (quantos cabem?), uma das realizações identificadas foi a partir da operação inversa. As duas realizações citadas como exemplo formaram um dos vínculos entre os dois cenários, pois foi possível identificá-las em ambos os cenários.

Palavras-chave: Matemática para o Ensino. Conceito de Divisão. Livro Didático.

Abstract: This study presents an analysis of the communication of the concept of division made in Elementary School I textbooks to build a mathematics model for teaching this concept. In this article we have as a guiding question: how is the concept of division being presented in elementary school textbooks? By answering the question, we achieved the objective of building a Mathematics model for teaching the concept of division from elementary school textbooks. Even though it has been introduced since the early years, the concept of division is considered by many students and teachers as one of the most difficult contents to teach and learn. By means of bibliographic research, a collection of textbooks referring to elementary school I was chosen, according to some criteria. We appropriated the study of the concept as a device for analyzing the collection. The result showed a variety of realizations of the division concept, grouped into two scenarios. In the first, share equally, the concept of division was carried out, for example, as an estimate. In the second, measurement (how many fit?), one of the achievements identified was from the inverse

⁵ Discente do curso de Pós-graduação *stricto sensu* em Mestrado Acadêmico em Ensino (UESB). E-mail: danibrito001@hotmail.com

⁶ Doutora em Educação pela Universidade Federal da Bahia (UFBA). Professora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista/BA. E-mail: robertamenduni@uesb.edu.br

operation. The two achievements cited as an example formed one of the links between the two scenarios, as it was possible to identify them in both scenarios.

Keywords: Mathematics for Teaching. Division Concept. Textbook.

1. INTRODUÇÃO

Tomando a vivência em sala de aula, salientamos as dificuldades que envolvem o processo de ensino e aprendizagem das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), sobretudo da divisão, tanto no uso do algoritmo quanto em interpretações de problemas propostos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (2017, p. 232), as habilidades matemáticas dos alunos nos anos iniciais, apesar de sua importância, não podem se restringir à aprendizagem dos algoritmos das quatro operações. É preciso acrescentar a habilidade de fazer cálculo mental, estimativas e saber decidir quando é apropriado usar um ou outro procedimento de cálculo (BRASIL, 2017, p. 232).

O ensino/aprendizagem das quatro operações, conforme Cruz (2016) “tem estado tradicionalmente associado ao ensino/aprendizagem dos algoritmos tradicionais correspondentes, através do treino dos procedimentos a eles associados” (CRUZ, 2016, p. 1). Megid (2012) ressalta que os algoritmos deveriam ser tratados não como ponto de partida, mas como ponto de chegada de caminhos que passam pelas estratégias utilizadas pelos alunos, como as habilidades do cálculo mental. Para Ramos (2009), o cálculo mental é a capacidade de efetuar uma operação e encontrar sua solução sem necessariamente usar um material concreto ou fazer um registro numérico. Ou ainda “é um cálculo pensado, e não mecanizado, pressupõe o domínio das propriedades das operações, dos números e das relações que podem ser estabelecidas entre os mesmos” (TEIXEIRA; RODRIGUES, 2015, p. 252).

De acordo com Aragão (2009), a divisão já era considerada a operação mais difícil no século XV. Para os autores Miguel e Miorim (1986), entre as quatro operações básicas, a divisão é a que apresenta maiores dificuldades no processo de ensino e aprendizagem. Segundo as pesquisadoras Campos, Wrobel, Souza e Prane (2021), os alunos apresentam dificuldades, seja na interpretação de textos para resolução de problemas, seja na aplicação de algoritmos padronizados, pois “[...] os alunos memorizam mecanicamente, sem

entender que propriedades matemáticas fundamentam cada passo” (CAMPOS; WROBEL; SOUZA; PRANE, 2021, p. 20).

Para os pesquisadores Ribeiro, Policastro, Marmoré e Bernardo (2018), as dificuldades reveladas pelos alunos em relação à divisão podem estar associadas a variadas formas de perceber essa operação e ao modo como a entendemos (compreensão do professor). Como forma de atenuar as dificuldades relacionadas à divisão, os autores (2018) sugeriram o uso de recursos como o material dourado associado a um conhecimento especializado do professor que ensina matemática.

A divisão está presente tanto em outras áreas do conhecimento, como na química e física por exemplo, quanto no cotidiano das pessoas desde a infância. Pesquisadores como Fernandes, Oliveira, Sampaio e Paixão (2015); e Wallauer (2006), afirmam que as crianças apresentam conhecimentos prévios sobre o conceito de divisão antes mesmo de entrar na escola e que a divisão se faz presente em vários momentos do seu dia a dia, por exemplo, em situações em que é preciso repartir objetos entre um determinado grupo.

A divisão, apesar de ser um conceito matemático de difícil compreensão, é percebida, mesmo de forma precoce, pelas crianças desde muito cedo (quando conseguem repartir brinquedos entre um grupo, por exemplo). Antes de receberem qualquer ensino sistemático sobre divisão, elas já têm uma ideia das relações que estão envolvidas no “dividir”. (WALLAUER, 2006, p. 33).

Na disciplina de matemática, o conceito de divisão é trabalhado desde a educação infantil e é aprofundado ao longo dos anos escolares. Segundo Campos, Wrobel, Souza e Prane (2021), era esperado que os alunos dominassem essa operação desde então.

Pesquisas voltadas para o tema de divisão tem sido constantes no meio da Educação Matemática, seja sobre o estudo do conceito em livros didáticos (ARAÚJO; SANTOS, 2016; MARTINEZ, 2012); sobre o algoritmo, (VIANA, 2015; DAMASCENO, 2016); sobre dificuldades de aprendizagem do conceito (LAUTERT, 2005; AGRANIONIH; ENRICONE; ZATTI, 2009; COSTA; MOURA; LEAL; DIAS, 2014); ensino e ou aprendizagem do conceito de divisão (SILVA, 2014; CRUZ, 2016; MEGID, 2012); resolução de problemas (HOFFMAN; OLIVEIRA; SOUZA, 2015), dentre outros.

Apesar de existirem diversos trabalhos discutindo o tema divisão, entendemos que este não se esgotou, pois existe uma grande preocupação por parte dos educadores em torno do ensino e aprendizagem dos alunos em relação ao conceito de divisão. De acordo com uma Revisão Sistemática de Literatura realizada pelas autoras dessa pesquisa, nenhum dos

estudos da revisão sobre a matemática especializada da ação do professor, abordou o conceito de divisão a partir da perspectiva do modelo Matemática para o (MpE).

A compreensão a respeito da divisão, da primeira autora, se restringia à ideia de repartir em partes iguais e de ensinar o algoritmo, sem se preocupar com as demais estratégias utilizadas pelos alunos para resolução de problemas. O planejamento para trabalhar as operações fundamentais tinha como objetivo explorar o algoritmo de modo que o aluno dominasse a técnica da operação. As atividades propostas se baseavam, na maioria das vezes, em listas de exercício repetitivos de “arme, efetue e dê o resultado”, memorização de procedimentos e da tabuada. Nesse sentido, apenas identificava a habilidade do aluno em efetuar o algoritmo, compreendida como necessária para a aprendizagem das operações básicas.

O despertar pelo tema divisão envolve as reflexões da primeira autora a respeito da aprendizagem e dos resultados insatisfatórios obtidos por muitos alunos, e pelas próprias limitações enquanto professora atuante no Ensino Fundamental II. A escolha se concretizou no encontro com o grupo de pesquisa Práticas colaborativas em Matemática *Lesson Study* (PRACOMAT/LS), que vem desenvolvendo ações sobre o tema desde 2019. A participação nesse espaço propiciou reflexão, discussão e compartilhamento de experiências e de angústias semelhantes em relação ao processo de ensino e aprendizagem, em especial, do conceito de divisão.

A partir da experiência de mais de uma década de docência da primeira autora, atuando no Ensino Fundamental II, percebeu-se que a divisão é a operação que os alunos mais demoram a aprender; talvez porque o foco, na maioria das vezes, está no ensino do algoritmo sem antes consolidar a compreensão do conceito de divisão, envolvendo diferentes estratégias para efetuar-la, sem passar pelo algoritmo.

Por existir uma variedade de estratégias para resolver situações envolvendo a divisão, apresentaremos um modelo que capture essas diferentes estratégias para o conceito de divisão, que denominamos de Matemática para o ensino do conceito de divisão.

A Matemática para o Ensino (MpE) é uma frente de pesquisa que vem se desenvolvendo no Brasil. A MpE é mobilizada pelo professor e se difere da matemática que é utilizada por outros profissionais (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2014). Para Davis e Simmt (2006), por causa de seu caráter dinâmico, a MpE sempre ocorre no coletivo, de forma colaborativa na interação entre professores e nas experiências que são compartilhadas nos contextos escolares, nas quais os professores engajam-se na reflexão e

desenvolvimento de entendimentos sobre conceitos matemáticos, ou seja, a MpE é produzida no compartilhamento de conhecimentos.

Os autores Davis e Simmt (2006) e Davis e Renert (2009; 2013; 2014) elaboraram o Estudo do Conceito (EC), abordagem investigativa apoiada em reflexões coletivas de professores. O EC constitui uma metodologia participativa em que professores compartilham suas experiências, questionam e elaboram seus próprios saberes de matemática visando ao ensino (DAVIS; RENERT, 2014, p. 35).

Inspiradas no EC, neste artigo, temos como pergunta diretriz: como o conceito de divisão está sendo apresentado em livros didáticos do ensino fundamental I? Ao responder à pergunta alcançamos o objetivo de construir um modelo de Matemática para o Ensino do conceito de divisão, a partir de livros didáticos do Ensino Fundamental I.

Os livros didáticos são formas de compartilhar uma matemática produzida pelos professores. Os autores, quando escrevem um livro, levam em consideração, por exemplo, experiências de professores e dificuldades de alunos. Os livros didáticos passam pela análise de uma equipe do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) para, assim, serem inseridos no rol de opções para as escolas escolherem; opções que podem justificar um conjunto de conhecimentos a serem considerados para que se faça a indicação de determinadas coleções. De acordo com Turíbio (2015), o processo de escolha do LD demanda, dentre outras coisas, a participação de profissionais de diversas áreas e de professores com larga experiência no processo de ensino e aprendizagem.

Partindo da produção científica voltada para a área de Educação Matemática, oferecemos, de modo sintetizado, diversas formas de como o conceito de divisão foi capturado nos livros didáticos analisados. Consideramos essa sistematização importante pelos encandeamentos que podem ter para o ensino de divisão, notadamente nos cursos de formação docente, pois possibilitará vislumbrar a referida diversidade.

Na sessão seguinte, apresentamos as definições teóricas utilizadas para fundamentar essa pesquisa e a apropriação que fizemos para apresentar uma matemática para o ensino do conceito de divisão.

2. MATEMÁTICA PARA O ENSINO E AS IDEIAS ASSOCIADAS AO CONCEITO DE DIVISÃO

Há muitas décadas vem se pesquisando e sistematizando diferentes formas de ensinar matemática e, há pelo menos uns 30 anos, demarcando um conhecimento/saber

que é próprio do ofício da docência em matemática (SHULMAN, 1986, 1987, BALL; THAMES; PHELPS, 2008, CARRILLO; CLIMENT; CONTRERAS; MUÑOZ-CATALÁN, 2013).

Pesquisas como a de Davis e Renert (2014) têm apontado a existência de uma Matemática para Ensino (MpE), partindo do pressuposto de que existe uma matemática que é específica da prática do professor e que se difere da que é utilizada por outros profissionais (DAVIS; SIMMT, 2006), por exemplo, nas áreas de engenharia e arquitetura.

Segundo Davis e Renert (2014), a MpE representa a maneira como os professores organizam suas aulas, respondem aos questionamentos feitos pelos alunos e interpretam suas ações, ou seja, é muito mais que um conjunto de conceitos prontamente catalogados ou testados objetivamente. Os autores enfatizam que a MpE envolve mais que o conhecimento de livros, “é uma maneira de ser com o saber matemático que permite ao professor estruturar situações de aprendizagem” (DAVIS, RENERT, 2014, p. 4).

Para Davis e Simmt (2006), por causa de seu caráter dinâmico, a MpE sempre ocorre no coletivo, de forma colaborativa na interação entre professores e nas experiências que são compartilhadas nos contextos escolares, nos quais os professores engajam-se na reflexão e desenvolvimento de entendimentos sobre conceitos matemáticos, ou seja, a MpE é produzida no compartilhamento de conhecimentos individual e coletivo entre professores e pesquisadores (DAVIS; SIMMT, 2006, p. 309).

Contudo, pesquisas brasileiras (GOMÉZ; BARBOSA, 2018, SANTOS; BARBOSA, 2017, COUTINHO; BARBOSA 2018, MENDUNI-BORTOLOTTI; BARBOSA, 2018) têm se utilizado da compreensão de uma MpE e, assim, proposto a construção de um modelo para o ensino de determinado conceito. Uma justificativa para a construção desse modelo está pautada na diversidade de formas de ensinar determinados conteúdos, que pode ser capturada em materiais impressos e/ou publicados (pesquisa bibliográfica) ou ainda, com professores (pesquisa empírica).

Neste artigo, nosso foco está em como o conceito de divisão está sendo proposto em livros didáticos do ensino fundamental I. Concebemos a MpE como sendo um modelo teórico que apresenta a diversidade de maneiras de ensinar um conteúdo matemático, no nosso caso, o conceito de divisão.

Benvenuti (2008) salienta que é comum, no cotidiano escolar, o conceito de divisão ser confundido “com a competência em operar o algoritmo da divisão” (BENVENUTTI, 2008, p. 7). Para a autora, o uso do algoritmo de maneira isolada do seu

contexto dificulta o entendimento dos alunos a respeito do conceito de divisão. Enfatiza a importância de compreender os significados da divisão e considerar o que está sendo dividido, para que se possa interpretar o resultado.

O entendimento da divisão se apoia em uma comparação constante entre os elementos envolvidos - dividendo, divisor e resto - “o que vai além da compreensão da distribuição de elementos expressos por números, presentes tradicionalmente em problemas e operações do tipo arme e efetue (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021, p.3)”.

Dividir um número por outro, de acordo Teles (2007), significa repartir em partes iguais de modo que o resto seja o menor possível. Brião, Muzinatti e Ribeiro (2015) destacam que os problemas que utilizam divisão em sua resolução são, na maioria das vezes, classificados em problema de repartição: ideia de partilha, como trazido por Teles (2007), e em problema de agrupamento: trata do conceito de medida.

A divisão, no sentido de medida, é apresentada pela relação “dada uma quantidade inicial (dividendo), pretende-se identificar quantas vezes (quociente) uma outra quantidade (divisor) é necessária para medir a primeira” (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021, p. 4). Segundo os autores, entender a medida requer a compreensão de princípios que fundamentam a atividade de medir: escolha da unidade de medida; partição do todo a ser medido; iteração (repetição) da unidade de medida sobre o todo a ser medido; acumulação de quantidade; atribuição de um valor numérico, correspondente à quantificação de vezes que a unidade foi repetida até completar a quantidade relativa ao todo a ser medido.

Já no sentido de partilha, para Policastro e Ribeiro (2021) a partilha equitativa corresponde a situações em que se pretende repartir equitativamente uma quantidade de elementos de um conjunto (dividendo), entre determinada quantidade de conjuntos (divisor), de modo que, após a partilha, todos os conjuntos contenham a mesma cardinalidade, que corresponde ao quociente.

Selva, Borba e Steedman (2004) apresentaram os dois principais sentidos dados à operação de divisão, a saber: partição e quotição. As pesquisadoras investigaram se o resto de uma divisão era tratado diferentemente por crianças, dependendo do seu sentido de partição ou quotição. Participaram da pesquisa 32 crianças; cada uma resolveu individualmente 16 problemas de divisão variados (partição e quotição).

Costa, Santos, Pessoa e Teles (2018) investigaram o uso dos algoritmos da divisão em situações de partição e quotição em 30 livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Em relação às ideias de partição e quotição, os pesquisadores

identificaram no total 20 atividades que exploram a ideia de quotição, e 32 atividades referentes à ideia de partição. Dessas, “31% são situações de partição em que o sujeito deve encontrar o tamanho das partes, e 19% são situações de quotição nas quais se busca encontrar o número em que o todo foi dividido” (COSTA, SANTOS; PESSOA; TELES, 2018, p. 70).

Os autores afirmaram que os problemas de partição e quotição necessitam de um raciocínio diferenciado que está inserido na situação. Observaram que o algoritmo, quando apresentado por meio de situações que envolvem as ideias de partição ou quotição, tornam o conceito significativo nas atividades.

Apresentamos na próxima seção os procedimentos e o *concept study*, traduzido por estudo do conceito (EC), proposto por Davis e Renert (2014), que se configura como uma metodologia para apoiar o desenvolvimento da MpE.

3. PROCEDIMENTOS

A pesquisa científica apresenta várias modalidades, sendo uma delas a pesquisa bibliográfica. De acordo Prodanov e Freitas (2013), este tipo de pesquisa é

elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa. (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 54).

O material por nós selecionado foi a coleção Ápis de Livros Didáticos (LD) do Ensino Fundamental I (EF-I). A escolha pelo EF- I é justificada pelo fato de ser nesse momento que o aluno tem os primeiros contatos com a divisão de forma sistematizada, ou seja, é nesse período que se forma a base para a aprendizagem do conceito de divisão, que será consolidada nos anos seguintes. Para a escolha dos livros didáticos do EF-I que compuseram a pesquisa, recorreremos a dois critérios. O primeiro critério foi fazer parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) dos anos 2019, para o EF-I; o segundo critério foi a formação dos autores dos livros apresentados no PNLD de 2019.

O PNLD ocorre a cada três anos para cada nível de ensino, avaliando, selecionando e recomendando coleções de livros didáticos, de acordo com critérios previamente estabelecidos, gerais e específicos por área, cujos resultados são divulgados no Guia

Nacional do Livro Didático (GNLD). O autor escolhido foi o professor Luiz Roberto Dante, livre-docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp-SP), campus de Rio Claro. Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Licenciado em Matemática pela Unesp-SP, Rio Claro. Pesquisador em Ensino e Aprendizagem da Matemática pela Unesp-SP, Rio Claro. Ex-professor do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na rede pública de ensino. Autor de várias obras de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A coleção *Ápis* baseia-se no ensino em espiral, em que um mesmo conceito é retomado diversas vezes e, aos poucos, vai sendo ampliado e aprofundado no mesmo volume ou nos subsequentes. Os conceitos são, geralmente, desencadeados a partir de uma situação-problema e, em cada volume, as atividades e os problemas sempre retomam os assuntos estudados em unidades anteriores, fazendo uma revisão contínua. A coleção é dividida em capítulos e a abertura de cada capítulo apresenta uma ideia geral do que será estudado, os seus objetivos e as habilidades, conforme a Base Nacional Comum Curricular-BNCC (BRASIL, 2017).

A coleção apresenta uma articulação entre as cinco Unidades temáticas da Matemática- Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e estatística. O principal destaque da coleção é o foco na Resolução de problemas. O manual do professor apresenta orientações gerais, fundamentos teóricos, avaliação, estrutura geral da coleção, e as orientações específicas para cada ano. Traz orientações sobre os conteúdos, objetivos da unidade, habilidades da BNCC, sugestão de atividades e indicação de livros para os alunos.

A coleção *Ápis* foi lida e, à medida que identificamos realizações que poderiam estar associadas à divisão, codificamo-las para categorizá-las e analisá-las. A codificação foi feita a partir das duas ideias da divisão associadas a ela, não necessariamente o algoritmo. Os códigos utilizados foram repartir igualmente e a ideia de medida traduzida pela pergunta “quantos cabem?”.

Para analisar os dados da pesquisa apoiamos no *Concept Study*, que pode ser traduzido como “Estudo do Conceito” (EC), inicialmente elaborado por Davis e Simmt (2006) e continuado por Davis e Renert (2009; 2013; 2014). Davis e Renert (2014) propõem o EC a partir de quatro dispositivos para investigar a variedade de formas de

ensinar um conceito. Esses dispositivos são chamados de ênfases e são eles: *Realizations*, *Landscapes*, *Entailments* e *Blends* que traduzimos por Realizações, Cenários, Vinculações e Misturas, respectivamente. Descreveremos de forma resumida cada uma das ênfases proposta pelos autores.

- **Realizações** Davis e Renert (2014), inspirados em Sfard (2008), usam o termo realização como referência ao que descrevem como significados e interpretações de um conceito. Para os autores, as realizações podem se basear em definições formais, algoritmos, metáforas, imagens, aplicação e gestos.

- **Cenários** constituem “um mapa em nível macro, enquanto uma realização é uma captura instantânea em nível micro, de um conceito” (DAVIS, RENERT, 2014, p. 62). Cada cenário representa um agrupamento de realizações, de acordo com um conjunto de semelhanças entre elas.

- **Vinculações** consistem em investigar os vínculos estabelecidos entre as realizações. Para Davis e Renert (2014), a intenção dessa ênfase é estudar como diferentes realizações moldam o entendimento de conceitos matemáticos relacionados. Portanto, a ênfase vinculações busca refletir sobre as diferentes implicações presentes em cada uma das realizações de um determinado conceito.

- **Misturas** tratam de “buscar a coerência, explorando as conexões profundas entre as realizações, reunindo-as em interpretações mais amplas, gerando possibilidades interpretativas” (DAVIS, RENERT, 2014, p. 70 - Tradução nossa).

Mesmo compreendo que o EC foi pensado voltado para a prática do professor e considerando o livro didático como sendo um grande norteador da prática pedagógica, olhar para o livro didático é também olhar para situações que refletem o trabalho docente. Ao explorarmos os livros, buscamos capturar as realizações da divisão a partir das ideias de repartir igualmente e de medida. As ideias associadas à divisão serão apresentadas a seguir.

4. IDEIAS ASSOCIADAS À DIVISÃO E OS CENÁRIOS PARA REALIZAÇÕES DO CONCEITO DE DIVISÃO

Ao analisarmos os livros didáticos do Ensino Fundamental I utilizados para essa pesquisa, inferimos que boa parte dos cinco anos que compõem esse ciclo é dedicada ao ensino das operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão). No entanto, não é garantido que as crianças encerrem esse ciclo compreendendo os conceitos

e os algoritmos, especialmente a operação de divisão, que é considerada por muitos alunos e professores como difícil de ensinar e de aprender

A aprendizagem da operação de divisão é, por muitas vezes, resumida à mecanização do uso do algoritmo. Para Mendes (2013), a aprendizagem da divisão ultrapassa o uso do algoritmo tradicional,

significa reconhecer esta operação em diferentes situações, ser capaz de compreender e usar a relação entre a divisão e a multiplicação e desenvolver uma teia de relações numéricas que permita calcular de modo flexível, tendo subjacentes as propriedades destas operações. (MENDES, 2013, p. 6)

Desenvolver uma teia de relações numéricas em situações que envolvem uma divisão pode ser compreendida como uma diversidade de modos de se realizar essa divisão e suas relações em diferentes situações. Dividir em Matemática consiste em descobrir quantas vezes um número cabe dentro do outro. A divisão pode ser realizada em partes iguais ou medidas denominadas de ideias associadas à divisão.

A coleção analisada não apresenta o conceito de divisão euclidiana; explora as ideias associadas (repartir igualmente e medida). Para compor os cenários que serão discutidos nesse texto foram observados os enunciados das atividades propostas. A escolha pelos enunciados se justifica pela possibilidade de identificação das ideias que são bastante exploradas nos livros didáticos analisados.

O primeiro cenário foi composto pela ideia de repartir em partes iguais e o segundo, foi composto pela ideia de medida, traduzida pela pergunta “quantos cabem?” Alguns exemplos mostrados nesses cenários exploram o algoritmo, no entanto o enunciado compõe um ou outro cenário. A ideia de repartir em partes iguais é apresentada nos livros didáticos da coleção Ápis (2017) desde o 1º ano. A palavra divisão é geralmente, substituída por: separação, colocar a mesma quantidade, metade, terça–parte, meio, meia, repartir. Na coleção Ápis, nos livros do 1º e 2º ano a divisão não é mencionada de forma direta, mas algumas atividades sugerem o seu uso.

No livro do 1º ano a divisão aparece na unidade 2 “Números até 10” como mostra a figura 1 a seguir:

3 ESTIMATIVA Respostas pessoais.

A) ANA TEM 6 FLORES E 2 VASOS.

ELA VAI COLOCAR A MESMA QUANTIDADE DE FLORES EM CADA VASO. QUANTAS FLORES VOCÊ ACHA QUE FICARÃO

EM CADA VASO? _____ FLORES.

B) DESENHE AS FLORES, CONTE, CONFIRA SUA ESTIMATIVA E REGISTRE.

ACERTEI.

ERREI.



Figura 1. Manual do professor - 1º ano. DANTE (2017, P.46).

O item A, mostrado na figura 1, aborda noções básicas da divisão. O manual do professor propõe trabalhar com o concreto jarro e flores para que os alunos tenham a oportunidade de experimentar e pede que sejam sugeridas outras possibilidades de divisão explicitando que nem sempre a divisão é exata. Trabalhar com o concreto é uma estratégia que aparece em vários momentos na coleção, mas que não identificamos como sendo outra realização para o conceito de divisão e sim um modo verificar na prática a realização do conceito.

A ideia de divisão como medida aparece no livro do 2º ano, na unidade 4, “Adição”. De acordo com o manual do professor, nessa unidade é apresentado o problema com mais de uma solução. A figura 2, a seguir, mostra um exemplo de uma situação de divisão, mas conforme as informações numéricas apresentadas, podem ser resolvidas utilizando adições.

10 PROBLEMAS

a) Luana vai distribuir igualmente 24 lápis entre as primas dela, e cada uma

receberá 6 lápis. Quantas são as primas de Luana? 4 primas. _____

1 prima:

6 lápis.

2 primas:

$$6 + 6 = 12$$

12 lápis.

3 primas:

$$12$$

$$+ 6$$

$$\hline 18$$

18 lápis.

4 primas:

$$18 + 6$$

$$18 + 2 + 4$$

$$20 + 4 = 24$$

24 lápis.

Figura 2. Manual do professor - 2º ano. DANTE (2017, p. 103)

O problema mostrado na figura 2 sugere uma divisão em que foi agrupada, de forma igualitária, uma quantidade de lápis de modo que se descubra quantas pessoas receberam a quantidade especificada no problema, ou seja, dividir 24 lápis em grupos contendo 6 lápis e descobrir a quantidade de primas que receberam 6 lápis cada uma.

Na unidade 8, “números a partir 100”, o manual do professor traz a atividade mostrada na figura 3 abaixo, que trabalha intuitivamente a ideia de repartir igualmente da divisão.

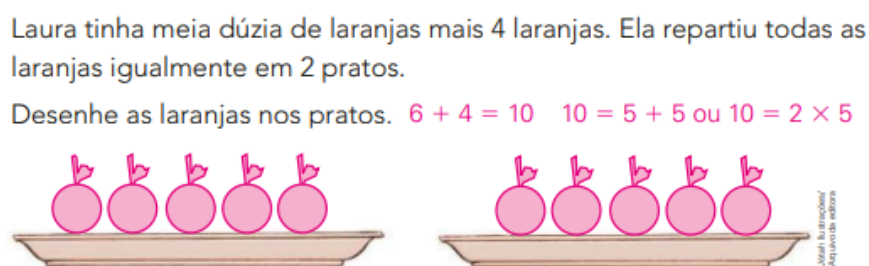


Figura 3. Manual do professor - 2º ano. DANTE (2017, p. 213)

De acordo com o manual, é possível que o aluno descubra a quantidade de laranjas colocando uma a uma em cada prato, por tentativa e erro, decompondo o número 10 em uma adição de quantidades iguais ou em multiplicação por 2.

Na coleção Ápis as ideias associadas à divisão aparecem explicitamente no livro do 3º ano, na unidade 6, “Divisão”. Segundo o manual, nessa unidade são exploradas as ideias de repartir igualmente e a de medida traduzida pela pergunta “quantos cabem?”. As ideias são apresentadas a partir de situações problemas e são exploradas as etapas de resolução de problemas: compreender, planejar, executar, verificar e responder, como mostram as figuras 4 e 5 a seguir:

1 PROBLEMA

Helena fez 18 bombons e vai reparti-los igualmente em 3 caixas.
Quantos bombons ela vai colocar em cada caixa?



Compreender

O que você sabe: Helena fez 18 bombons e vai reparti-los igualmente em 3 caixas.

O que você quer saber: quantos bombons devem ficar em cada caixa.

Planejar

Como Helena quer distribuir igualmente 18 bombons em 3 caixas, ela deve efetuar a operação de **divisão**, dividindo 18 por 3.

Indicamos: $18 \div 3$.

Lemos: Dezoito dividido por três.

Executar

Podemos colocar 1 a 1 os bombons em cada caixa até acabarem.



Complete.

Número total de bombons: 18

Número de caixas: 3

Número de bombons em cada caixa: 6

Divisão correspondente: 18 \div 3 = 6

Verificar

Como são 3 caixas e 6 bombons em cada uma delas, temos $3 \times 6 = 18$, que era a quantidade inicial de bombons. Assim, $18 \div 3 = 6$ e o cálculo está correto.

Responder

Complete: Helena vai colocar 6 bombons em cada caixa.

Figura 4. Manual do professor - 3º ano. DANTE (2017, p. 149)

No problema proposto na figura 4, na etapa do planejar, o autor cita a divisão e introduz o símbolo \div . A figura 5 abaixo mostra a divisão associada à ideia de medida. De acordo o manual do professor, a pergunta “quantos cabem?” traduz a ideia de medida da divisão, por exemplo “quantos palmos cabem em uma mesa?” ou “quantos grupos de 2 cabem em 6?”

Medida (Quantos cabem?)

1 No 2^a ano C da escola de Marta há 20 meninos. Eles vão formar times de basquete para um torneio, sendo cada time formado por 5 jogadores. Quantos times serão formados?



Figura 5. Manual do professor - 3º ano. DANTE (2017, p. 151)

Buscamos nessa parte introdutória apresentar, de forma mais geral, como a divisão foi capturada na coleção analisada. Essas ideias associadas à divisão foram denominadas por nós como os possíveis cenários para comunicar o conceito de divisão. Inspiramo-nos no EC (DAVIS; RENERT, 2014) como uma estratégia metodológica para a análise dos dados, bem como para a modelagem de uma MpE do conceito de divisão.

A primeira ênfase se referiu às *realizações* que foram identificadas nos livros didáticos analisados. Ao analisarmos as realizações, identificamos algumas semelhanças do modo como o conceito de divisão estava sendo apresentado por definições formais, algoritmo e imagens. Na coleção Ápis a divisão foi realizada como “repartir igualmente” e “medida, traduzida pela pergunta quantos cabem?” e foi capturada, por exemplo, como dúzia, meia dúzia, estimativa, metade, terça-parte. À medida que as realizações se aproximavam fomos iniciando a segunda ênfase: *cenários*. Identificamos dois cenários, que foram construídos a partir das “relações existentes entre as realizações que apresentaram características semelhantes” (DAVIS, RENERT, 2014, p. 62).

Para compor os cenários que serão discutidos nesse texto foram observados os enunciados das atividades propostas. O primeiro cenário foi composto pela ideia de repartir em partes iguais e o segundo, foi composto pela ideia de medida, traduzida pela pergunta “quantos cabem?”. Alguns exemplos mostrados nesses cenários exploram o algoritmo, no entanto o enunciado compõe um ou outro cenário.

4.1 Primeiro cenário: repartir igualmente

Observamos na coleção que todos os volumes trabalham as duas ideias associadas à divisão, principalmente a ideia de “repartir igualmente” e depois a de medida (quantos cabem). A escolha dos exemplos que serão discutidos nesse primeiro cenário tem como ponto de partida os termos “mesma quantidade”, “repartir em partes iguais”, que apresentam o mesmo significado.

Entendemos que mesma quantidade ou repartir em partes iguais significa fazer uma divisão em fragmentos de mesmo tamanho. Nessa ideia queremos saber quantos objetos ficam em cada conjunto, ou seja, conhecemos o número de conjuntos que podem ser formados com um determinado total de objetos e é preciso determinar a quantidade de objetos de cada conjunto. Carrer, Doering e Ripoll (2018) afirmaram que, ao dividir em partes iguais, o dividendo, o quociente e o resto são de mesma grandeza e o divisor é apenas um número natural não nulo, por exemplo:

REPARTIR IGUALMENTE

Em uma fábrica trabalham 456 funcionários, distribuídos igualmente em 3 setores. Quantos funcionários trabalham em cada setor?

Figura 6. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 89).

O dividendo, o quociente e o resto dizem respeito à mesma grandeza - funcionários e o divisor estão relacionados à quantidade setores, ou seja, o dividendo, o quociente e o resto são de mesma grandeza. Para esse cenário, com essas características, foram identificadas 12 realizações. Sinalizaremos em negrito, a primeira vez que a realização for mencionada, de modo a facilitar a identificação de cada realização capturada.

As realizações serão apresentadas de acordo o aumento da dificuldade no conteúdo identificado na realização, ou seja, do mais simples ao mais complexo. Não necessariamente por ordem dos volumes correspondentes a cada ano. Iniciaremos pela estimativa realizada como “mesma quantidade” no LD do 1º ano.

No livro didático do 1º ano, a **estimativa** foi associada às operações de adição e subtração. No entanto, a divisão entre números naturais começa a aparecer acompanhada de termos como “colocar a mesma quantidade”. O autor apresenta uma situação em que é preciso arrumar 6 flores em 2 jarros, de modo que cada um fique com a “mesma

quantidade” de flores. Nessa atividade é introduzida a ideia de “repartir em partes iguais” e será explorada nos volumes seguintes.

3 ESTIMATIVA Respostas pessoais.

A) ANA TEM 6 FLORES E 2 VASOS.

ELA VAI COLOCAR A MESMA QUANTIDADE DE FLORES EM CADA VASO. QUANTAS FLORES VOCÊ ACHA QUE FICARÃO

EM CADA VASO? _____ FLORES.



Figura 7. Manual do professor - 1º ano. DANTE (2017, p. 46).

Outra forma de apresentar a estimativa foi como **arredondamento e resultado aproximado**. Entendemos que arredondar um número é o mesmo que escrevê-lo com um valor aproximado. Foram encontradas atividades, nos livros do 4º e do 5º ano, que exploram o arredondamento e o cálculo aproximado relacionadas à ideia de média e à ideia de proporcionalidade. A figura 8 mostra um exemplo de arredondamento e resultado aproximado que apresenta informalmente a ideia de média.

ARREDONDAMENTO E RESULTADO APROXIMADO

Juntando 2 turmas de 3ª ano de uma escola, temos 57 alunos.

As turmas têm, aproximadamente, a mesma quantidade de alunos. Então, há cerca de quantos alunos em cada turma?

Pensamos em um número próximo de 57 que seja fácil de dividir por 2.

$$57 \div 2 \xrightarrow{\text{penso}} 60 \div 2 = 30$$

Portanto, $57 \div 2$ é aproximadamente 30.

Complete a resposta: Há cerca de 30 alunos em cada turma.



Figura 8. Manual do professor - 4º ano. DANTE (2017, p. 169).

Observamos que o tópico é iniciado com uma situação problema. O manual (2017, p. 169) sugere que o professor lembre aos alunos que, em algumas situações, ter o resultado aproximado é suficiente. No entanto não explica por que arredondar para a dezena exata mais próxima já que poderia arredondar por 58, por exemplo, que também é

divisível por 2. A expressão “há cerca de” sugere uma aproximação. Compreendemos que a aproximação para a dezena exata mais próxima, no caso, o 60, facilita o cálculo da divisão sem precisar recorrer ao algoritmo, pois é possível associar a ideia de metade, de dobro ou ainda o cálculo mental operando $6 \div 2 = 3$ e acrescentar o zero ao resultado.

De acordo com o manual do professor (2017, p. 169), a ideia de média também pode ser explorada nessa atividade somando a quantidade de alunos das duas turmas e dividindo o resultado por 2, ou seja, as duas turmas têm 30 alunos em média. O volume do 5º ano apresenta a divisão realizada como repartir em partes iguais comunicada como **média aritmética**.

Valdir disputou 3 partidas de basquete e marcou 15 pontos, 19 pontos e 14 pontos.

- a) Quantos pontos ele marcou no total? **48 pontos.** _____
- b) Imagine agora se ele tivesse marcado esse mesmo total de pontos nas 3 partidas, mas com o mesmo número de pontos em cada uma delas. Qual seria o número de pontos por partida? **16 pontos.** _____
- c) Então, nas 3 partidas que disputou, Valdir fez quantos pontos, em média, por partida? **16 pontos.** _____
- d) Qual é a média de pontos por partida de um jogador que fez 18 pontos, 23 pontos, 21 pontos e 18 pontos em 4 partidas? **20 pontos.** _____

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } \begin{array}{r} 15 \\ 19 \\ +14 \\ \hline 48 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } \begin{array}{r} 48 \\ -3 \\ \hline 16 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{d) } \begin{array}{r} 18 \\ 23 \\ 21 \\ +18 \\ \hline 80 \end{array}
 \end{array}$$

$$80 \div 4 = 20$$

Figura 9. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 94).

O exemplo mostrado na figura 9 aponta a divisão sendo apresentada como média aritmética, tema que integra a unidade temática Probabilidade e estatística. Os itens *a*, *b* e *c* apontam um caminho para que o aluno faça o cálculo da média de pontos feitas em três partidas e prepara o aluno para responder o item *d*, que é parecido com a situação inicial, mudando a quantidade de partidas e de pontos.

Analisando os exemplos das figuras 8 e 9 mostradas anteriormente, vimos que, apesar da ideia de média ser comum às duas questões, o modo como são apresentadas se diferem. No exemplo 8 a média é associada à estimativa e ao cálculo aproximado, enquanto que no exemplo 9, a média é apresentada a partir de valores exatos.

A divisão capturada como **cálculo mental**, que é entendido como uma estratégia para encontrar uma resposta de modo mais rápido e eficiente sem o auxílio de um instrumento como calculadora por exemplo, e sem precisar recorrer ao algoritmo, foi capturada no LD do 5º ano com a ideia de repartir igualmente.

Antes da atividade relacionada ao cálculo mental, o autor apresenta a divisão por 10, 100 e 1000 a partir do algoritmo usual, que é compreendido como uma técnica para realização da divisão, e usando a estratégia de deslocar a vírgula para esquerda de acordo o número de zeros no divisor sem precisar recorrer ao algoritmo usual. Em seguida, sugere a atividade para ser realizada usando o cálculo mental.

Rubens vai gastar R\$ 22,50 para colocar 10 L de combustível no carro dele.
 Quanto ele gastaria para colocar 18 L de combustível? R\$ 40,50

$$22,50 \div 10 = 2,25$$

$$\begin{array}{r} 2,25 \\ \times 18 \\ \hline 1800 \\ + 2250 \\ \hline 40,50 \end{array}$$

Figura 10. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 190).

Nesta atividade, os alunos devem efetuar o cálculo mentalmente para a divisão, aplicando a regra de divisão de um decimal por 10 para descobrir o valor de 1 litro de gasolina, para depois calcular quanto custam 18 litros. O manual do professor não sugere, mas nessa atividade também pode ser explorada a ideia de proporcionalidade, ou seja, é preciso encontrar o valor unitário do litro de gasolina e depois calcular o valor do quantitativo geral, isto é, o valor que deverá ser pago por 18 litros de gasolina.

O cálculo mental foi identificado no LD do 3º ano a partir da ideia de **metade e terça parte** envolvendo valores monetários, como mostra a figura 11 a seguir:

3 CÁLCULO MENTAL
 Pense, calcule e complete.

a) A metade de R\$ 30,00 é R\$ 15,00. $30 \div 2 = 15$

b) A terça parte de R\$ 30,00 é R\$ 10,00. $30 \div 3 = 10$

c) A terça parte de R\$ 21,00 é R\$ 7,00. $21 \div 3 = 7$

d) A terça parte da metade de R\$ 30,00 é R\$ 5,00. $15 \div 3 = 5$

Figura 11. Manual do professor - 3º ano. DANTE (2017, p. 159).

Além de se fazer presente no cálculo mental no livro do 5º ano, a ideia de metade e terça parte é introduzida na coleção analisada a partir do 2º ano. Foram encontradas atividades que exploraram a ideia de metade e terça parte relacionadas a: grandezas discretas, como número de regiões planas e o número de sólidos geométricos; metade e o dobro, a terça parte e o triplo como ideias inversas; sequência de números naturais em ordem decrescente; ideia de metade associada à divisão em duas partes iguais e a conferência associada à multiplicação do dois; ideia de terça parte associada à divisão em três partes iguais e a conferência associada à multiplicação do três; relação entre os termos metade, meia e meio; representação de metade ou meio com decimal; frações e redução de figuras planas integradas à divisão das medidas de comprimento. Escolhemos como exemplo a redução de figuras para mostrar como a divisão foi capturada como metade e terça parte, tendo como contexto a geometria.

· REDUÇÃO DE FIGURAS

Observe as regiões planas **A** e **B** nesta malha triangulada. Desenhe outras 2 regiões planas: na primeira, reduza à **metade** as medidas de comprimento da região plana **A**; na segunda, reduza à **terça parte** as medidas de comprimento da região plana **B**.

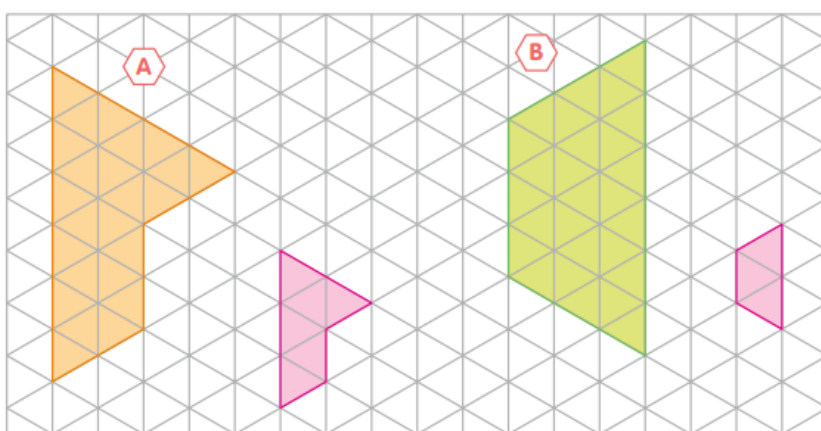



Figura 12 Manual do professor - 4º ano. DANTE (2017, p. 171).

Nesse exemplo mostrado, a divisão foi apresentada como metade e terça parte. Essa atividade, além da geometria, também relaciona a divisão à ideia de proporcionalidade em que o pentágono irregular representado na figura A tem como constante de proporcionalidade $\frac{1}{2}$, pois para reduzir a figura pela metade é necessário dividir os valores de cada lado por 2. O quadrilátero irregular representado na figura B tem como

constante de proporcionalidade $\frac{1}{3}$. Para reduzir a terça parte é preciso dividir cada lado da figura por 3.

Além do exemplo mostrado na figura 12, a **proporcionalidade** foi capturada em várias situações em que a divisão foi apresentada. Por exemplo:

11 Se Marcela comprar 6 cadernos, todos de mesmo preço, então ela vai gastar R\$ 75,00. Se comprar apenas 2 desses cadernos, então quanto ela vai gastar?
Dica: 2 é a terça parte de 6.



$$\begin{array}{r} \text{R\$ } 25,00 \\ \hline 6 \text{ custam } 75 \\ \div 3 \quad \leftarrow \quad \div 3 \\ \hline 2 \text{ custam ?} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 3} \\ \underline{-6} \\ 15 \\ \underline{-15} \\ 00 \end{array}$$

Figura 13. Manual do professor - 4º ano. DANTE (2017, p. 170).

Essa atividade, além de retomar a ideia de terça parte, também relaciona a divisão à ideia de proporcionalidade. De acordo com o manual (2017, p. 170), o aluno sabe o preço de 6 cadernos e deve utilizar uma divisão para calcular o preço de 2 cadernos. Se soubessem o preço de 2 cadernos, poderia calcular o preço de 6 cadernos utilizando a ideia de proporcionalidade, multiplicando a cada grupo de 2.

A divisão realizada como repartir em partes iguais também foi capturada como **contagem** e identificada nos volumes do 2º e do 4º ano. Todas as atividades que foram encontradas exploraram a divisão relacionada à contagem a partir de valores monetários.

10 ATIVIDADE EM DUPLA Luís deu a mesada aos filhos Paulo, Andreia e João, usando estas notas. Todos receberam a mesma quantidade de notas e a mesma quantia.

Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda



Resolvam com o dinheiro do **Meu bloquinho**. Depois, cada um registra em seu livro.

a) Quantas notas cada um deles recebeu? E qual quantia? 5 notas; R\$ 70,00.

Quantia total: 210 reais.
$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 3} \\ \underline{-15} \\ 00 \end{array}$$
 (5 notas cada um)

Total de notas: 15 notas.
$$\begin{array}{r} 210 \overline{) 3} \\ \underline{-21} \\ 000 \\ \underline{-0} \\ 00 \end{array}$$
 (70 reais cada um)

Figura 14. Manual do professor - 4º ano. DANTE (2017, p. 170).

A atividade mencionada acima não tem como foco o algoritmo. Aborda a repartição em quantias iguais, sem a exigência de notas iguais para cada um. Após manipular as notas, os alunos têm a oportunidade de registrar como fizeram e esse registro poderá ser ou não com o algoritmo usual.

A realização em partes iguais comunicada como **sistema de medidas** foi identificada a partir do volume do 3º ano. Foram encontradas 7 atividades relacionadas à medida de intervalo de tempo, de massa, de capacidade e de comprimento. Essas atividades relacionam a divisão com a unidade temática Grandezas e Medidas. Tomamos, por exemplo, a atividade mostrada na figura 15 a seguir, que relaciona a divisão em partes iguais com medida de intervalo de tempo.

Calcule e complete.

Uma atividade de 5 h 40 min foi dividida em 4 períodos de mesma duração.

Então, cada período teve 85 minutos ou 1 h 25 min.

$5 \times 60 = 300$
 $300 + 40 = 340$

3	4	0		4
-	3	2		8
0	2	0		5
-	2	0		
0	0			

$85 \text{ min} = 60 \text{ min} + 25 \text{ min} = 1 \text{ h} + 25 \text{ min}$

Figura 15. Manual do professor - 4º ano. DANTE (2017, p. 170).

Além da divisão, é necessário transformar horas em minutos; como 1 hora equivale a 60 minutos, 5 horas equivalem a 300 minutos que, somados com os 40 minutos dados no problema e em seguida divididos em 4 períodos de mesma duração. Apesar de explorar o algoritmo, o enunciado do exemplo mostrado na figura 15 acima contempla o cenário repartir igualmente, pois divide o intervalo de tempo em 4 períodos de mesma duração.

A divisão também foi identificada como unidade de medida de massa e as relações entre quilograma e grama, por exemplo:

1 Para obter 1 quilograma precisamos de 1000 gramas.

$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$

Com base nessa relação, complete as frases.

a) Meio quilograma de café em pó corresponde a 500 gramas.
 $1000 \div 2 = 500$, pois $2 \times 500 = 1000$.

b) Se 1 kg de farinha foi separado em 5 vasilhas, todas com a mesma quantidade, então cada vasilha ficará com 200 gramas de farinha.
 $1000 \div 5 = 200$, pois $5 \times 200 = 1000$.

As imagens não estão representadas em proporção.

Figura 16. Manual do professor - 3º ano. DANTE (2017, p. 182).

Esse exemplo associa a divisão em partes iguais com a medida de massa, sendo necessário fazer a transformação entre as unidades de medida, quilograma em grama, e retoma a ideia de metade a partir da expressão “meio”.

A divisão também foi identificada como medida de capacidade. O exemplo a seguir propôs o uso de calculadora para facilitar os cálculos decimais e o manual sugere o cálculo mental e o uso do algoritmo como alternativas para resolução do problema proposto.

Para colocar 10 L de gasolina no carro, Laércio gastou R\$ 29,50.
 No mesmo posto, Maurício colocou 16 L de gasolina no carro e pagou com 1 nota de R\$ 50,00. Use uma calculadora e responda: Quanto Maurício recebeu de troco? R\$ 2,80

$29,50 \div 10 = 2,95$ $16 \times 2,95 = 47,20$ $50 - 47,20 = 2,80$

Figura 17. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 223).

Para resolução da atividade proposta no exemplo mostrado acima, é necessária a utilização das operações básicas de subtração, multiplicação e divisão, envolvendo números decimais e valores monetários. O manual não traz, mas é possível trabalhar com proporcionalidade para calcular o valor de 16 litros de gasolina, ou seja, é preciso encontrar o valor unitário do litro de gasolina e depois calcular o valor do quantitativo geral, isto é, o valor que deverá ser pago por 16 litros de gasolina e, por fim, diminuir esse valor de 50 reais.

Assim como no exemplo mostrado na figura 18, em relação à unidade de medida de comprimento também é possível trabalhar com proporcionalidade.

Leia, pense e resolva.

a) Emília comprou 5 m de tecido e pagou R\$ 190,00. Quanto ela pagaria por 4 m?

Ela pagaria R\$ 152,00.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{1}}90\overset{5}{5} \\ -15\overset{3}{3}8 \\ \hline 040 \\ -40 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 4 \\ \hline 152 \end{array}$$

Figura 18. Manual do professor da divisão - 5º ano. DANTE (2017, p. 85).

Para solucionar o problema proposto é necessário calcular o valor de 1 metro de tecido para, em seguida, encontrar o valor de 4 metros. Para isso o manual mostra como solução uma divisão seguida de uma multiplicação. Mais uma vez, o manual não propôs,

mais é possível calcular o valor de um metro de tecido utilizando proporcionalidade, ou seja, é preciso encontrar o valor unitário de um metro de tecido e depois calcular o valor do quantitativo geral, isto é, o valor que deverá ser pago por 4 metros de tecido.

No volume do 5º ano a divisão realizada como repartir em partes iguais foi comunicada como divisão envolvendo **número decimal**, seja na divisão de decimal por um número natural ou em uma divisão não exata entre números naturais com resultado decimal. De acordo com o manual, não foi explorada a divisão entre números decimais. As atividades apresentadas nesse tópico exploram o uso do algoritmo usual. Tomamos como exemplo uma divisão não exata, como mostra a figura 19, a seguir:

3. Exemplo de resposta: Na atividade 1 são 13 crianças para separar em 2 grupos (a unidade é criança) e na atividade 2 são 13 quilogramas para separar em 2 grupos

➤ Divisão não exata de números naturais: resultado decimal (a unidade é quilograma); não se usou decimal porque não há 6,5 alunos, ou seja, não há 6 alunos e meio; já com relação aos quilogramas isso é possível.

1 Para desenvolver uma atividade de Educação Física, a professora resolveu formar 2 grupos com a mesma quantidade de alunos. Mas havia 13 alunos.



a) Qual é o número máximo de alunos que ela pode colocar em cada grupo?

6 alunos.

b) Sobram alunos? Quantos? Sim, 1 aluno.

c) Que divisão representa essa situação?

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 2} \\ - 12 \\ \hline 01 \end{array} \text{ ou } 13 \div 2 = 6 \text{ e resto } 1$$

2 Alice quer separar igualmente 13 quilogramas de arroz em 2 pacotes e saber quanto irá em cada pacote.

Observe que aqui também devemos fazer $13 \div 2$. Mas há uma diferença: podemos trocar a unidade que sobrou por 10 décimos e "continuar" a divisão.

Observe e responda: Quanto Alice deve colocar em cada pacote de arroz? 6,5 kg

D	U	d	
1	3		2
-	1		6,5
0	1	0	U, d
	-	1	
	0	0	

Troca: 1 U por 10 d

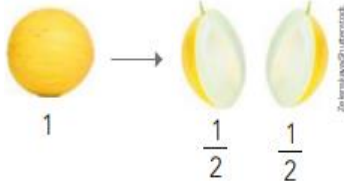
Figura 19 Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 178).

A atividade proposta na figura 19 apresenta a ideia de repartir igualmente. No item 1 é preciso formar dois grupos com a mesma quantidade de alunos. No item 2 separar igualmente 13 quilogramas de arroz em dois pacotes.

Embora os valores do dividendo e do divisor sejam os mesmos nos itens 1 e 2, o quociente é diferente. O item 3 da mesma atividade propõe uma discussão sobre o que há de diferente nos itens 1 e 2 e por que no 1 não se usou decimal. Espera-se que o aluno compreenda que, como a quantidade do item 1 é aluno, não é possível propor a divisão em metades, por exemplo. Em relação ao item 2 como a unidade é quilograma é possível dividir em partes iguais.

Outra forma de comunicar a divisão foi a partir de **frações**. De acordo com o manual (2017, p. 136), a relação entre fração e divisão está vinculada à ideia de fração como quociente e identifica o traço da fração com o símbolo de divisão.

Paula repartiu igualmente 1 melão entre os 2 primos dela.



$1 \text{ melão} \div 2 = \frac{1}{2} \text{ melão}$ ou $1 \div 2 = \frac{1}{2}$

a) Complete: Cada um recebeu $\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ melão.

Figura 20. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 136).


A atividade proposta na figura 20 relaciona a ideia de repartir igualmente com a ideia de fração como quociente. Tais ideias foram apresentadas nos livros do 4º e do 5º ano que também apresentaram a ideia de fração de um número, como mostram as figuras 21 e 22 a seguir.

9 FRAÇÃO DE UM NÚMERO

Claudete tinha 6 balas. Ela deu $\frac{1}{3}$ das balas a sua irmã Neusa. Quantas balas Neusa ganhou? É preciso descobrir quanto é $\frac{1}{3}$ de 6.

$\frac{1}{3}$ de 6 = ?


Complete.



O denominador indica que você precisa separar as 6 balas em 3 grupos com quantidades iguais.

Isto é, fazer 6 \div 3 = 2.

O numerador indica que Neusa ganhou 1 desses grupos, ou seja, 2 balas.



Logo: $\frac{1}{3}$ de 6 = 2, pois $6 \div 3 = \underline{2}$.

Resposta: Neusa ganhou 2 balas.

As imagens não estão representadas em proporção.

Figura 21. Manual do professor - 4º ano. DANTE (2017, p. 207).

Fração de um número


- 1 Complete cada item e descubra a fração de um número.
- a) Para calcular $\frac{1}{2}$ de um número (a metade) dividimos o número por 2.
 $\frac{1}{2}$ de 14 = 7, pois 14 \div 2 = 7.
- b) Para calcular $\frac{1}{3}$ de um número (a terça parte) dividimos por 3.
 $\frac{1}{3}$ de 15 = 5, pois 15 \div 3 = 5.

Figura 22. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 134).

Os exemplos mostrados nas figuras 21 e 22 apresentaram a ideia de fração de um número onde foi necessário o cálculo de divisão e retomadas as idéias de metade e terça parte.

Outra forma de comunicar a divisão capturada na coleção analisada foi a partir da **operação inversa**. No LD do 3º e 4º ano a operação inversa foi apresentada como uma estratégia para efetuar uma divisão, como mostram as figuras 23 e 24 abaixo.

4 Veja mais um processo para efetuar a divisão: usar a multiplicação, sua operação inversa.
 Observe como Rodrigo pensou para efetuar $12 \div 4$.



4 vezes um número dá 12.
 Que número é esse?
 Ou que número vezes 4 dá 12?

$12 \div 4 = ?$
 $12 \div 4 = 3$, pois
 $4 \times 3 = 12$ ou $3 \times 4 = 12$

Faça como Rodrigo, descubra o quociente e justifique com uma multiplicação.

a) $20 \div 2 =$ 10, pois $2 \times 10 = 20$.

Figura 23. Manual do professor - 3º ano. DANTE (2017, p. 157).

4 **USANDO A OPERAÇÃO INVERSA**

Veja o exemplo.

$800 \div 20 = ?$ Mentalmente: $800 \div 20 = 40$, pois $40 \times 20 = 800$.

$195 \div 15 = ?$ Por tentativa, procurando o número que multiplicado por 15 é igual a 195 ou chega mais perto dele, sem ultrapassá-lo.

$10 \times 15 = 150$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 11 \\ \hline 15 \\ + 150 \\ \hline 165 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 12 \\ \hline 30 \\ + 150 \\ \hline 180 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 13 \\ \hline 45 \\ + 150 \\ \hline 195 \end{array}$
----------------------	--	--	--

Logo, $195 \div 15 = 13$, pois $13 \times 15 = 195$.

Efetue mais estas divisões, usando a operação inversa.

a) $1000 \div 20 =$ 50 $50 \times 20 = 1000$ c) $50 \div 25 =$ 2 $2 \times 25 = 50$

b) $148 \div 37 =$ 4 d) $682 \div 31 =$ 22

$\begin{array}{r} 37 \\ \times 3 \\ \hline 111 \\ + 148 \\ \hline 148 \end{array}$	$\begin{array}{r} 31 \\ \times 20 \\ \hline 620 \\ + 620 \\ \hline 651 \end{array}$
--	---

Figura 24. Manual do professor - 4º ano. DANTE (2017, p. 158).

Na atividade proposta na figura 24 mostrada acima, a divisão pôde ser resolvida utilizando o cálculo mental nos itens em que a divisão apresentou zeros no dividendo e no divisor. Quando não apresentou zeros no dividendo e no divisor a divisão foi realizada por tentativa, usando a multiplicação.

Outra estratégia para resolver uma divisão foi o **desenho**, como mostra o exemplo a seguir:

► Estratégias para efetuar uma divisão

1 DESENHANDO

Fazer desenhos é uma boa estratégia para descobrir o resultado de uma divisão. Veja como Lia e Beto efetuaram a divisão $12 \div 3$.

Eu usei a ideia de repartir igualmente. Fui distribuindo bolinhas em 3 regiões até completar 12.

Eu usei a ideia de "quantos cabem". Verifiquei quantos grupos de 3 "cabem" em 12 tracinhos.

Logo, $12 \div 3 = 4$.

a) Faça como Lia, descubra o resultado e complete.

$$14 \div 2 = \underline{7}$$

b) Faça como Beto, descubra o resultado e complete.

$$15 \div 5 = \underline{3}$$

Figura 25. Manual do professor - 3º ano. DANTE (2017, p. 153).

Com essa atividade os alunos podem aprender a estratégia de fazer desenhos para efetuar uma divisão, tanto com a ideia de repartir igualmente, quanto com a ideia de medida. A ideia de medida compõe o nosso segundo cenário e será apresentada no nosso próximo tópico.

4.2 Segundo cenário: medida traduzida pela pergunta “quantos cabem?”

Nessa ideia queremos saber quantos conjuntos ou grupos poderão ser formados com a mesma quantidade de objetos. Foram capturadas, a partir do volume do 3º ano, estratégias de divisão realizadas como medida e apresentadas como formação de grupos ou conjuntos, cálculo mental, dúzia e meia-dúzia, algoritmo das estimativas, desenho, operação inversa e reta numerada. Essas estratégias serão discutidas nesse cenário mais adiante.

Quando a ideia de divisão é medida, saber “quantos cabem?”, os autores Carrer, Doering e Ripoll (2018) dizem que o dividendo e o divisor são grandezas de mesma espécie e queremos saber quantas vezes o divisor cabe no dividendo. O quociente é apenas um número e o resto é de mesma grandeza que o dividendo e o divisor, por exemplo,

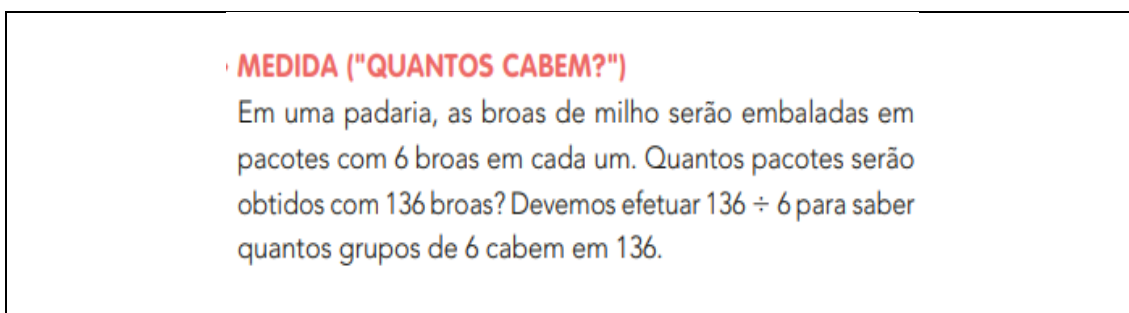
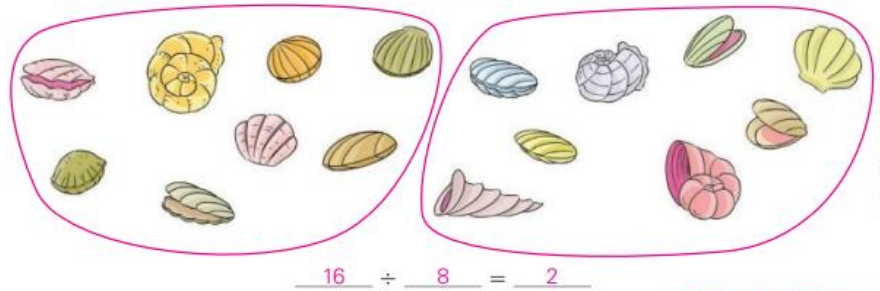


Figura 26. Manual do professor - 5º ano DANTE (2017, p. 85)

O dividendo, o divisor e o resto dizem respeito à quantidade de broas e o quociente está relacionado à quantidade de pacotes, ou seja, o dividendo, o divisor e o resto são de mesma grandeza. Na coleção analisada foram identificadas 7 formas de comunicar a divisão com ideia de medida.

A ideia de medida foi observada pela primeira vez no LD do 3º ano em um capítulo que trata especificamente da divisão e das ideias associadas. A figura 27 mostra a divisão sendo apresentada a partir da **formação de grupos ou conjuntos**.

- 2 Forme conjuntos de 8 conchinhas com as 16 conchinhas abaixo. Contorne-as com uma linha e, depois, indique a divisão.
A escolha das 8 conchinhas em cada grupo é pessoal. Exemplo de resposta:



- 3 Complete cada item para responder à pergunta.
A escolha dos grupos é pessoal. Exemplos de resposta:
a) Quantos grupos de 2 cabem em 6?
Contorne os pássaros e complete a divisão.

$6 \div 2 = 3$

Agora, confira:

$3 \times 2 = 6$



Figura 27. Manual do professor - 3º ano DANTE (2017, p. 152)

O exemplo mostrado acima apresenta a divisão com a ideia de medida representada pelas expressões: “**forme conjuntos**” e “**quantos grupos**”. No exemplo 3, além de apresentar a divisão, também utiliza a multiplicação para verificar se o resultado está correto. Também foram capturadas outras formas de realizar a divisão com a ideia de formar grupos ou conjuntos. Essas realizações serão apresentadas e destacadas a seguir, em **negrito**, de modo a facilitar a identificação.

Para Ananias (2019), as crianças que são estimuladas a efetuar o **cálculo mental** mostram-se mais autônomas e com uma capacidade mais ampla de escolher caminhos para obter a solução de um problema. O cálculo mental realizado como medida foi identificado no LD do 4º ano.

Calcule mentalmente, complete e indique a divisão correspondente.

Com 180 flores, podemos formar 30 arranjos como este.

Divisão: $180 \div 6 = 30$



Figura 28 Manual do professor - 4º ano. DANTE (2017, p. 168).

Antes da atividade proposta na figura 28 apresentada anteriormente, o autor apresenta a divisão contendo zeros no dividendo e no quociente e solicita que o professor peça aos alunos que formulem uma explicação do que aconteceu com as divisões. Espera-se que o aluno perceba que basta fazer: $18 \div 6 = 3$ e acrescentar o zero no quociente.

As atividades propostas no LD do 3º ano que apresentaram a ideia de medida exploraram o uso de materiais concretos como fichas, grãos, palitos, caixas e o uso de barrinhas. No caso de materiais como grãos, palitos e caixas, o manual sugere ao professor apresentar esses materiais e orientar os alunos na manipulação e desenvolvimento das atividades propostas. Em relação às fichas e barrinhas coloridas, a coleção analisada apresenta um material complementar denominado de Meu Bloquinho, composto de figuras e peças que os alunos deverão recortar e utilizar em diversas atividades durante o ano.

As barrinhas coloridas mostradas na figura 29 abaixo fazem parte do Meu Bloquinho do 1º ano e é apresentada no LD do 3º ano como sugestão de atividade para que o aluno perceba concretamente a ideia de medida associada à divisão.

Sugestão de atividade

- No livro do 1º ano desta coleção apresentamos as barrinhas coloridas, que foram utilizadas para desenvolver diferentes atividades de contagem, comparação de números e adição. Apresente aos alunos essas barrinhas, que serão usadas agora para o trabalho concreto com a ideia de medida (Quantos cabem?) da divisão.

Entregue a cada aluno um conjunto dessas barrinhas, que representam os números de 1 a 10. Proponha a eles que, em grupos, façam diferentes experimentações, como "Quantos 2 cabem em 6?" ou "Quantos 3 cabem em 6?".

Barrinhas coloridas.

Matrizes: Livro de manipulação de número

Figura 29. Manual do professor - 3º ano. DANTE (2017, p. 152).

De acordo com Sugiyama (2016), os materiais manipuláveis são recursos didáticos importantes para auxiliar na construção do conhecimento, desenvolvem o pensamento, a criatividade, o raciocínio lógico e o cálculo mental.

Outro material manipulável explorado na coleção analisada é o material dourado. Uma das atividades propostas no LD do 4º ano, realizada como medida, apresenta a divisão como **dúzia e meia dúzia**. No exemplo mostrado a seguir aparece o termo meia dúzia. O manual sugere que o professor questione quantas frutas há em uma caixa com meia dúzia, retomando assim o conceito de dúzia e meia dúzia.

10 Gérson é feirante e quer colocar 744 cajus em caixas com meia dúzia de frutas. De quantas caixas ele vai precisar?



Quando divido **7 centenas por 6**, sobra 1 centena. Transformo 1 centena em 10 dezenas e fico com 14 dezenas. Quando divido **14 dezenas por 6**, sobram 2 dezenas. Transformo 2 dezenas em 20 unidades e fico com 24 unidades. Divido **24 unidades por 6**, obtenho 4 unidades, e o resto é 0 (zero).

C	D	U	6
7	4	4	6
-6			1 2 4
1	4		C D U
-1	2		
0	2	4	
-2	4		
0	0		

Complete: Gérson vai precisar de 124 caixas.

Figura 30. Manual do professor - 4º ano. DANTE (2017, p. 163).

Para a realização da atividade apresentada na figura 30, o manual sugere o uso do material dourado e chama a atenção que, para a divisão realizada, foi necessário fazer a troca de 1 placa por 10 barrinhas e, depois, de 2 barrinhas por 20 cubinhos. A ideia apresentada no problema é de “quantos cabem?”. A sugestão é o material manipulável e a formalização é o algoritmo usual e a exploração do sistema de numeração decimal.

A exploração do algoritmo também foi capturada no livro do 5º ano em que a divisão comunicada como estimativa foi apresentada a partir do **algoritmo das estimativas**, como mostra a figura 31 a seguir.

Algoritmo das estimativas

1 **ATIVIDADE ORAL EM GRUPO** O dono de uma loja comprou 21 bonecas de mesmo preço por R\$ 756,00. Quanto custou cada boneca?

Para responder a essa questão, devemos efetuar a divisão $756 \div 21$.

Veja como efetuar usando o algoritmo das estimativas.

$\begin{array}{r} 756 \overline{) 21} \\ - 420 \\ \hline 336 \\ - 210 \\ \hline 126 \\ - 105 \\ \hline 021 \\ - 21 \\ \hline 00 \end{array}$	<p>Exemplo de resolução:</p> <p>Quantas vezes 21 cabe em 756? Estimamos 20 e fazemos $20 \times 21 = 420$.</p> <p>Quantas vezes 21 cabe nos 336 que restaram? Estimamos 10 e fazemos $10 \times 21 = 210$.</p> <p>Quantas vezes 21 cabe nos 126 que restaram? Estimamos 5 e fazemos $5 \times 21 = 105$.</p> <p>Quantas vezes 21 cabe nos 21 que restaram? Cabe 1 vez. Adicionamos $20 + 10 + 5 + 1 = 36$.</p>	$\begin{array}{r} 756 \overline{) 21} \\ - 210 \\ \hline 546 \\ - 210 \\ \hline 336 \\ - 210 \\ \hline 126 \\ - 105 \\ \hline 021 \\ - 21 \\ \hline 00 \end{array}$ <p>$10 \times 21 = 210$</p> <p>$5 \times 21 = 105$</p> <p>$1 \times 21 = 21$</p>
--	--	---

Logo, $756 \div 21 = 36$ e resto 0.

Converse com os colegas sobre outra maneira de fazer as estimativas para essa mesma divisão ($756 \div 21$). Depois, respondam à questão proposta.

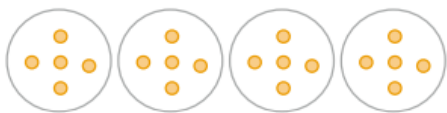
Cada boneca custou R\$ 36,00.

Figura 31. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 89).


Ao analisar apenas o enunciado do problema proposto no exemplo mostrado na figura 31, entendemos que se trata da ideia de repartir em partes iguais conforme Carrer, Doering e Ripoll (2018); no entanto, a estratégia de resolução (algoritmo das estimativas) apresenta a ideia de medida traduzida pela pergunta “quantos cabem?”.

As estratégias de divisão realizadas como medida foram apresentadas como desenho, operação inversa e reta numerada. A utilização do **desenho** para realização da divisão com a ideia de medida foi identificada no item b, mostrada na figura32 a seguir:

2 Veja os desenhos que Ana fez e descubra a divisão correspondente a cada um deles.

a)  Repartindo igualmente:

$$\underline{20} \div \underline{4} = \underline{5}$$

b)  Formando grupos:

$$\underline{16} \div \underline{2} = \underline{8}$$

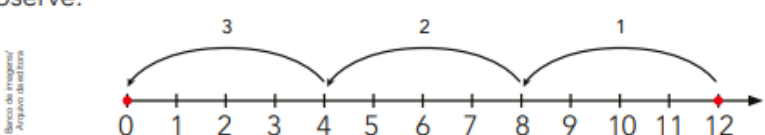
Figura 32. Manual do professor - 3º ano. DANTE (2017, p. 154).

Com essa atividade é possível que o aluno identifique tanto a ideia de divisão (repartir em partes iguais, item a, e de medida, item b), quanto a divisão que está sendo realizada, por exemplo, no item b, contando a quantidade (16) de tracinhos e separando em grupos com (2) tracinhos, quantos grupos foram formados, ou seja: $16 \div 2 = 8$.

A **reta numerada** foi apontada como uma das estratégias para realizar uma divisão, como mostra o exemplo abaixo:

3 **USANDO UMA RETA NUMERADA**

A divisão também pode ser efetuada usando uma reta numerada. Na divisão $12 \div 4$ devemos verificar quantas vezes o 4 cabe em 12. Observe.



O 4 cabe 3 vezes em 12. Então, $12 \div 4 = 3$.
 Agora é com você! Represente na reta numerada e complete o resultado de cada divisão.

Figura 33. Manual do professor - 3º ano. DANTE (2017, p. 154).

De acordo com o manual (2017, p. 154), há duas maneiras de representar uma divisão na reta numerada. A primeira é, a partir do 0 (zero), verificar quantas vezes o 4 cabe no 12, ou seja, o (4) cabe no (12) 3 vezes: $12 \div 4 = 3$. O segundo modo é partir do 12 e ir “pulando” de 4 em 4 para trás até chegar no 0 (zero) ou até não ser possível continuar “pulando”. Na segunda maneira, de acordo com o manual, é possível introduzir a ideia de resto; para os quocientes inteiros exatos retorna-se sempre para o 0 e, quando há resto, retorna-se a outro número da reta. A figura 33 aponta a segunda maneira e o resto 0.

Outra estratégia para efetuar a divisão é a utilização da multiplicação como **operação inversa** da divisão. No LD do 5º ano foi identificada uma atividade que comunica a divisão com a ideia de medida, a partir da multiplicação.

➤ Divisão por número com 2 ou mais algarismos

Algoritmo usando a operação inversa

1 Quantas dúzias de flores um florista pode separar, no máximo, quando tem 84 flores?
Precisamos resolver a divisão $84 \div 12$.

Quantas dúzias de flores um florista pode separar, no máximo, quando tem 84 flores?
Precisamos resolver a divisão $84 \div 12$.

1 dúzia são 12.

Verificamos que número devemos multiplicar por 12 para obter resultado 84 ou chegar mais próximo de 84 sem ultrapassá-lo.

Complete.

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \\ \times 6 \\ \hline 72 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \\ \times 7 \\ \hline 84 \end{array}$	$84 \div 12 = \underline{7}$
--	--	--	------------------------------

Com 84 flores, o florista pode separar, no máximo, 7 dúzias de flores.

As imagens não estão representadas em proporção.






Figura 34. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 88).

A proposta de resolução dessa atividade é realizar a divisão por tentativas, utilizando a multiplicação, onde os alunos buscam possíveis multiplicações, relacioná-las à divisão e verificar se os resultados correspondem ao valor esperado.

No tópico denominado “Divisão por número com 2 ou mais algarismos”, mostrados na figura 34, são apresentados, além do uso da operação inversa, o algoritmo usual da divisão.

Os exemplos escolhidos mostraram a diversidade de modos de apresentar uma divisão que foram capturados na coleção analisada. No tópico seguinte serão expostos os possíveis vínculos existentes entre os dois cenários apresentados.

5. OS POSSÍVEIS VÍNCULOS ENTRE OS CENÁRIOS

Os cenários foram construídos em conformidade com a ideia que surgiu no enunciado presente em cada um dos exemplos analisados. Para a ideia de repartir igualmente, foram capturadas realizações em que apareciam termos como “dividir em partes iguais” e “mesma quantidade”. Para a ideia de medida, foram capturadas realizações que apresentaram as expressões “formar grupo ou conjuntos” e a pergunta “quantos cabem?”. No entanto, ao analisar nos livros os conceitos de divisão, alguns exemplos não apresentaram uma situação problema em que fosse possível encaixar em um dos cenários. Esses exemplos mostraram os procedimentos necessários para realização de uma divisão, sem necessariamente apresentar um enunciado que indicasse as ideias associadas à divisão.

A princípio, foi pensada a possibilidade de um terceiro cenário denominado por nós de algoritmo. Ao fazermos uma análise mais criteriosa, foi possível perceber que o algoritmo se fazia presente na maioria das realizações de cada um dos dois cenários. Então, o que seria um terceiro cenário foi identificado como um dos possíveis vínculos entre eles.

Escolhemos como exemplo o desafio proposto no LD do 5º ano, que aponta quatro formas diferentes do uso do algoritmo para se resolver a mesma divisão, mostrado na figura 35 a seguir e que se vincula à ideia de medida.

5 DESAFIO
 Efetue $432 \div 36$ por 4 processos diferentes. Exemplos de resolução:

<p>Pela operação inversa: $10 \times 36 = 360$</p> $\begin{array}{r} 36 \\ \times 11 \\ \hline 36 \\ +360 \\ \hline 396 \end{array}$ $\begin{array}{r} 36 \\ \times 12 \\ \hline 72 \\ +360 \\ \hline 432 \end{array}$ $\begin{array}{r} 432 \overline{)36} \\ -432 \overline{)12} \\ \hline 000 \end{array}$	<p>Algoritmo das estimativas:</p> $\begin{array}{r} 432 \overline{)36} \\ -360 \overline{)10} \\ \hline 072 \overline{)2} \\ -72 \overline{)12} \\ \hline 00 \end{array}$	<p>Algoritmo usual:</p> $\begin{array}{r} 432 \overline{)36} \\ -36 \overline{)12} \\ \hline 072 \overline{)12} \\ -72 \overline{)00} \\ \hline 00 \end{array}$	<p>Decompondo 36 em 4×9:</p> $\begin{array}{r} 432 \overline{)4} \\ -4 \overline{)108} \\ \hline 03 \overline{)108} \\ -0 \overline{)0} \\ \hline 32 \overline{)108} \\ -32 \overline{)00} \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 108 \overline{)9} \\ -9 \overline{)12} \\ \hline 018 \overline{)12} \\ -18 \overline{)00} \\ \hline 00 \end{array}$
---	---	---	--

Figura 35. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 91).

A figura 35 acima aponta quatro realizações para a divisão apresentada. Esse exemplo não se encaixa nos cenários, pois o enunciado não faz referência à ideia de repartir igualmente e de medida. No entanto, antes de propor o desafio, o autor apresenta três sessões, denominadas: “Algoritmo usando a operação inversa”; “Algoritmo das estimativas” e a sessão “Algoritmo usual”.

Na sessão “algoritmo usando a operação inversa”, foi proposta uma situação problema em que era necessário descobrir quantas dúzias de flores poderiam ser separadas com 84 flores, ou seja, calcular quantas vezes o 12 cabe em 84 (ideia de medida). A resolução foi efetivada por tentativas, utilizando a multiplicação, exemplo mostrado na figura 35.

Na sessão “algoritmo das estimativas”, o manual (2017, p. 89) descreve que tal algoritmo é baseado na ideia de medida da divisão, pois se procura responder à pergunta: “Quantas vezes um número menor cabe em um número maior?”. Propõe uma atividade oral em grupo a partir de uma situação problema em que é necessário dividir 756 por 21. Pergunta: “quantas vezes 21 cabe em 756?”, faz a estimativa inicial de 20, $20 \times 21 = 420$, faz a subtração $756 - 420 = 336$. Continua a divisão agora de $336 \div 21$, “quantas vezes o 21 cabe em 336?”. Estima-se 10 vezes e procede-se assim até que o resto fique igual a zero. Para saber o valor do quociente foi feita uma soma dos valores que foram estimados durante a resolução.

A sessão algoritmo usual é iniciada, mostrando a divisão $2882 \div 45$. Apresenta o “algoritmo euclidiano”, mostra resolução pelo algoritmo usual e pelo algoritmo usual simplificado e faz a verificação, usando a operação inversa. Em seguida, propõe a divisão $420 \div 12$ decompondo o 12 em 3×4 . Divide 420 por 3 e obtem 140, em seguida divide 140 por 4 e obtem 35, ou seja, $420 \div 12 = 35$. O manual descreve essa resolução como sendo mais uma estratégia para efetuar a divisão e solicita que se discuta com o aluno outras possibilidades para calcular o resultado de $420 \div 12$.

Também foi identificado o uso do algoritmo vinculado à ideia de repartir igualmente. As atividades propostas na figura 36, a seguir, foram relacionadas ao uso de calculadora, à exploração do sistema de numeração decimal; a divisão de decimal por um número natural; a divisão de decimal por 10, 100 e 1000 e porcentagem.

5 Leia e depois calcule.

Lembre-se: como 10% correspondem a $\frac{1}{10}$, para calcular 10% de um número basta dividi-lo por 10.

E como 1% corresponde a $\frac{1}{100}$, para calcular 1% de um número basta dividi-lo por 100.



a) 1% de 845 = $\frac{8,45}{845 \div 100 = 8,45}$

b) 10% de 900 = $\frac{90,0 \text{ ou } 90}{900 \div 10 = 90}$

c) 10% de R\$ 42,50 = $\frac{R\$ 4,25}{42,50 \div 10 = 4,250 \text{ ou } 4,25}$

d) 1% de R\$ 370,00 = $\frac{R\$ 3,70}{370,00 \div 100 = 3,7000 \text{ ou } 3,70}$

e) 1% de 921 = $\frac{9,21}{921 \div 100 = 9,21}$

f) 10% de 6583 = $\frac{658,3}{6583 \div 10 = 658,3}$

Figura 36. Manual do professor - 5º ano. DANTE (2017, p. 190).

Esta atividade relaciona porcentagem com as divisões de decimais por 10 e por 100, e a relação entre 1% e 10% com frações. A atividade proposta acima apresenta o algoritmo relacionado à fração de um número e porcentagem. Essa realização também foi identificada no primeiro cenário e se vincula à ideia de repartir igualmente.

Capturamos o algoritmo vinculado aos dois cenários. O exemplo mostrado na figura 37 abaixo apresenta a divisão a partir da ideia de múltiplo de um número natural relacionada com a divisão exata.

7 Quando a divisão de um número natural por outro é exata, dizemos que o primeiro número é **múltiplo** do segundo.

Por exemplo: 10 é múltiplo de 5, pois $10 \div 5$ é uma divisão exata; 21 não é múltiplo de 5, pois $21 \div 5$ não é uma divisão exata.

Descubra e responda.

a) 588 é múltiplo de 8? Não. _____

$$\begin{array}{r} \overline{) 588} \\ \underline{-56} \\ 028 \\ \underline{-24} \\ 04 \end{array}$$

b) 2616 é múltiplo de 12? Sim. _____

$$\begin{array}{r} \overline{) 2616} \\ \underline{-24} \\ 011 \\ \underline{-12} \\ 096 \\ \underline{-96} \\ 00 \end{array}$$

Figura 37. Manual do professor- 5º ano. DANTE (2017, p. 92).

De acordo com o manual, é importante estimular os alunos a descobrirem que a maneira mais prática de saber se um número é múltiplo de outro é efetuar a divisão e verificar se ela é exata ou não. O manual não sugere, mas nessa atividade também podem ser explorados os critérios de divisibilidade. A ideia de múltiplo de um natural está vinculada à divisão realizada como operação inversa presente, tanto na ideia de repartir igualmente, quanto na de medida.

Os possíveis vínculos estabelecidos entre os cenários foram identificados a partir das realizações comuns entre eles. Identificamos o algoritmo como sendo o principal vínculo. No exemplo mostrado na figura 35, o algoritmo se vinculou à ideia de medida. A figura 36 destaca o algoritmo vinculado à ideia de repartir igualmente. No exemplo mostrado na figura 37, a divisão foi realizada como operação inversa e o algoritmo, então, se vincula aos dois cenários.

REFERÊNCIAS

- AGRANIONI, N. T. ENRICONE, J. R. B. ZATTI, F. **Dificuldades no cálculo de divisão na 5ª série do ensino fundamental.** 2009. Disponível em:
- ANANIAS, E. F. **O cálculo mental para a aprendizagem da matemática: recorte de uma pesquisa de mestrado.** VI Congresso Nacional de Educação. Conedu. 2019. Disponível em:
https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO_EV127_MD1_SA13_ID12913_22092019162739.pdf. Acesso em 05 de jul. 2019.
- ARAGÃO, Maria José. **História da Matemática.** Rio de Janeiro: Interciência, 2009.
- ARAÚJO, A. F. Q. SANTOS, E. M. dos. **Análise do conceito de divisão em um livro didático de matemática do 6º ano do ensino fundamental, na ótica da teoria dos campos conceituais.** Encontro nacional de Educação matemática- ENEM. São Paulo. 2016. Disponível em:
<file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/ARTIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/DIFICULDADE%20DE%20DIVIS%C3%83O%20NA%205%C2%AA%20S%C3%89RIE.pdf> . Acesso em: 20 de out. 2021.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. *Content knowledge for teaching: What makes it special?* *Journal of Teacher Education*, 59, p. 389-407. 2008.
- BRASIL. **BNCC. Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em:
<<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/a-area-de-matematica>>. Acesso em 20 de out. 2021.
- BENVENUTTI, L. C. **A operação divisão: um estudo com alunos de 5ª série.** Universidade Vale do Itajaí, 2008.
- BRIÃO, G. F. MUZINATTI, J. L. RIBEIRO, C. M. **Caracterização de modelos de divisão por professores de Matemática ao interpretar problemas de alunos.** XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática- CIAEM, 2015.
- CAMPOS, N. Q. WROBEL, J. S. SOUZA, M. A. V. F. de. PRANE, B. Z. D. **Dividir e compartilhar Série Lesson Study em Matemática – Nº 03.** Edifes Parceria. Vila Velha, 2021. Disponível:
<file:///C:/Users/Daniela%20Brito/Desktop/DISSERTA%C3%87%C3%83O-%20ESCRITA%20FINAL/LIVROS%20EM%20PDF/Dividir%20e%20compartilhar%20-%20Lesson%20Study%20_3.pdf> . Acesso em jul. 2022.
- CARRER, J. J. DOERING, L. R. RIPOLL, C. C. **A divisão Euclidiana e o resto desde os anos iniciais.** III Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática- SBM. Rio de Janeiro. 1ª ed. 2018.
- CARRILO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUNÓZ-CATALÁN, M. C. *Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching.* In: UBUZ, B. HASER,

C. et al. Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. 8., 2013. Turkey: M.E.T. University, Ankara, 2013. p.2985-2994. Disponível em: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf. Acesso em: 08 de out. 2020.

COSTA, T. de L. MOURA, P. C. R. de. LEAL, M.M. DIAS, H. S. **Dificuldades de aprendizagem em resolução de questões de divisão de números naturais dos alunos do 6º ano do ensino fundamental do Centro de Ensino em Tempo Integral João Ferry**. 2014. Disponível em: <file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/ARTIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/DIFICULDADE%20EM%20DIVIS%C3%83O%20DE%20N%C3%9AMEROS%20NATURAIS%206%C2%BA%20ANO.pdf> . Acesso em 20 de out. de 2021.

COSTA, A. P. da. SANTOS, L. P. dos. PESSOA, C. A. dos S. TELES, R. A. de M. **Abordagem de algoritmos da divisão em livros didáticos de Matemática para os anos iniciais**. Educação Matemática Debate, Montes Claros, v. 2, n. 4, jan./abr. 2018. Disponível em: <[file:///C:/Users/Daniela%20Brito/Downloads/COSTA%20SANTOS%20PESSOA%20TELES%202018%20\(4\).pdf](file:///C:/Users/Daniela%20Brito/Downloads/COSTA%20SANTOS%20PESSOA%20TELES%202018%20(4).pdf)> . Acesso em: 03 de jun. 2022.

COUTINHO, J. L. da E.; BARBOSA, J. C. **Modelo de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Combinação Simples**. *Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Número 53. Páginas 46-67. Agosto 2018.

CRUZ, R. M. N. da. **O ensino/aprendizagem da divisão com compreensão um estudo com o 4º ano de escolaridade**. 2016. Disponível em: <file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/ARTIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/ENSINO%20E%20APRENDIZAGEM%20DA%20DIVIS%C3%83O%204%C2%BA%20ANO.pdf> . Acesso em 15 de out. 2021.

DAMASCENO, J. M. S. 2016. **Quem tem medo da divisão? A divisão para os anos iniciais**. Disponível em: file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/ARTIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/Quem%20tem%20medo%20da%20divis%C3%A3o_a%20divis%C3%A3o%20para%20os%20anos%20iniciais%20_Artigo_2016.pdf . Acesso em: 15 de out. 2021.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática -1º ano. Manual do professor**. Editora: Ática e Scipione. 2017. Disponível em: <https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2206628>. Acesso em: 22 de abr. 2020.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática -2º ano. Manual do professor**. Editora: Ática e Scipione. 2017. Disponível em: <https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2206631> Acesso em: 22 de abr. 2020.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática -3º ano. Manual do professor**. Editora: Ática e Scipione. 2017. Disponível em: <https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2206634> Acesso em: 22 de abr. 2020.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática -4º ano. Manual do professor.** Editora: Ática e Scipione. 2017. Disponível em: <
https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2206637 > Acesso em: 22 de abr. 2020.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática -5º ano. Manual do professor.** Editora: Ática e Scipione. 2017. Disponível em:
<https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2206625 > Acesso em: 22 de abr. 2020.

DAVIS, B.; RENERT, M. *Mathematis-for-Teaching as shared dynamic participation.* For the Learning of Mathematics, Publishing Association: Canada, v. 29, n. 3, p. 37- 43, 2009.

_____. *Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge.* *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, p. 245-265. 2013.

_____. *The Math Teachers Know: Profund Understanding of Emergent Matematics.* Routledge Taylor & Francis Group, 141 p. 2014.

DAVIS, B. e SIMMT, E. (2006). *Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know.* *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 61, No. 3, pp. 293-319. Springer.

FERNANDES. J. A. da. S; OLIVEIRA. E. B. de; SAMPAIO. B. S; PAIXÃO. G. da S. **O ensino e aprendizagem de divisão com números naturais, por meio da resolução de problemas, no ensino fundamental.** 2015. PUCPR. XII congresso nacional de educação. EDUCERE.

GÓMEZ, O. A. BARBOSA, J. C. **Um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Variável a Partir das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Brasil e da Colômbia.** ReBECHEM, Cascavel, (PR), v.2, n.2, p. 171-193, ago. 2018.

HOFFMAN, B. V. S. OLIVEIRA, A. P. de. SOUZA, S. R. de. 2015. disponível em:
<file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/ARTIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/narrativas%20sobre%20o%20conceito%20de%20divis%C3%A3o%20em%20grupos%20de%20estudo%20LIDO.pdf> . Acesso em: 20 de out. 2021.

LAUTERT, S. L. **As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção.** 2005. Disponível em:
<file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/ARTIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/AS%20DIFICULDADES%20DAS%20CRIAN%C3%87AS%20COM%20A%20DIVIS%C3%83O.pdf> . Acesso em: 20 de out. 2021.

MARTINEZ, M. C. P. T. **Um olhar para a abordagem do conteúdo de divisão de números naturais em livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental.** 2012. Disponível em:
<file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/AR>

[TIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/DIVIS%C3%83O%20NO%20LIVRO%20S%C3%89RIE%20INICIAIS.pdf](#) . Acesso em 15 de out. 2021.

MENDES, F. (2013). A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos. **Da investigação às práticas**, 3(2), 5-30.

MEGID, M. A. B. A. **O ensino aprendizagem da divisão na formação de professores**. 2012. Disponível em:
[file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/AR TIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/ENSINO%20E%20APRENDIZAGEM%20D E%20E%20DIVIS%C3%83O%20NA%20FORMA%C3%87%C3%83O%20DE%20PROFES SORES.pdf](file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/AR%20TIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/ENSINO%20E%20APRENDIZAGEM%20D%20E%20DIVIS%C3%83O%20NA%20FORMA%C3%87%C3%83O%20DE%20PROFES%20SORES.pdf) . Acesso em: 12 de out. 2021.

MENDUNI-BORTOLOTTI, R. D. BARBOSA, J. C. **Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um estudo do conceito**. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.20, n.1, pp. 269-293, 2018.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **O ensino de matemática no primeiro grau**. São Paulo: Atual, 1986.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo, RS: Feevale, 2013.

POLICASTRO, M. S. RIBEIRO, M. **Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática relativo ao tópico de divisão**. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.29, 2021, pp.1-23 – e021020 ISSN 2176-1744

RAMOS, L. F. **Conversas sobre números, ações e operações: uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos**. São Paulo: Ática, 2009.

RIBEIRO, G.G.; CRISTOVÃO, E. M. **Conhecimento especializado de licenciandos em Matemática no contexto de práticas formativas para inclusão**. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.29, 2021, pp.1-19 – e021019 ISSN 2176-1744.

RIBEIRO, M. POLICASTRO, M. MARMORÉ, J. BERNARDO, R. D. **Conhecimento especializado do professor que ensina matemática para atribuir sentido à divisão e ao algoritmo**. *Educação Matemática em Revista*. EMR-RS - ANO 19 - 2018 - número 19 - v.1 - pp. 152 a 167

SANTOS, G. L. D. BARBOSA, J. C. **Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos**. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.19, n.2, pp. 315-338, 2017.

SELVA, A. C. V. BORBA, R. E. de S. STEEDMAN, L. H. S. **Explorando a resolução de problemas de divisão com resto por crianças de 2ª e 3ª séries**. *Anais do VIII ENEM – Pôster GT 1 – Educação Matemática nas Séries Iniciais*. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. 2004.

SHULMAN, Lee S. *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*. Educational Researcher. v.15, n.2. fev. 1986, pp.4-14.

_____. *Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform*. Harvard Educational Review, v. 17, n. 1, p. 1-22, 1987.

SILVA, A. L. M. L. S. da. **A apropriação do conceito de divisão por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental**. 2014. Disponível em: <file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/ARTIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/Apropria%C3%A7%C3%A3o%20do%20conceito%20de%20divis%C3%A3o%20por%20alunos%20dos%20anos%20iniciais%20do%20ensino%20fundamental.pdf> . Acesso em: 20 de out. 2021.

SUGIYAMA, E. S. **PROJETO DE PESQUISA – CADERNO PEDAGÓGICO ESCALA CUISENAIRE E JOGOS: Uma metodologia alternativa para a compreensão das Operações Fundamentais dos Números Naturais**. 2016. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_uenp_euzashiguekosugiyama.pdf >. Acesso em 05 de jul. 2022.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre os campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as formas de áreas de figuras geométricas planas**. 2007. Dissertação (Mestrado)- UFPE, 2007.

TEIXEIRA, R.; RODRIGUES, M. **Evolução de estratégias de cálculo mental: um estudo no 3.º ano de escolaridade**. In: 3º Seminário de Investigação “Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): Investigar as Práticas em Contexto. 3. Setúbal. Anais...Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal 2015. p. 249-267.

TURÍBIO, S. R. T. **As mudanças ocorridas no livro didático de matemática e a sua influência na prática pedagógica do professor**. Universidade Federal de Mato Grosso Programa de pós-graduação em Educação Mestrado em Educação. 2015. Disponível em: https://ri.ufmt.br/bitstream/1/647/1/DISS_2015_Solange%20Ramos%20TeixeiraTuribio.pdf>. Acesso em 08 de jun. 2022.

VIANA, H. B. P. **Algoritmo da divisão em quatro regras**. Universidade Federal do Amapá Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. 2015. Disponível em: <file:///D:/OUTROS%20ARQUIVOS/%C3%81rea%20de%20Trabalho/MESTRADO/ARTIGOS%20SOBRE%20DIVIS%C3%83O/ALGORITMO-DA-DIVIS%C3%83O-EM-QUATRO-REGRAS.pdf> . Acesso em 20 de out. 2021.

WALLAUER, A. **Reflexões sobre a construção da operação de divisão em crianças de 1ª e 2ª série de classes multisseriadas**. 2006. 205f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

6. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Uma Matemática para o Ensino do conceito de divisão, de acordo com uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental I, pode ser apresentada em dois cenários. Os cenários foram identificados a partir das ideias associadas à divisão.

O primeiro cenário foi construído a partir das realizações que apresentaram a ideia de repartir igualmente. Foi possível capturar 12 maneiras distintas para realização de uma divisão. O segundo cenário foi composto por realizações que apresentaram a ideia de medida. Para esse cenário, foram capturadas 7 maneiras de realização de uma divisão.

Diante da diversidade de realizações para o conceito de divisão, capturadas na coleção de livros didáticos analisada, apresentamos de forma sintetizada uma MpE do conceito de divisão, conforme o quadro 1.

Cenários para realização de uma divisão	Realizações	Possíveis Vínculos entre os cenários
Repartir igualmente.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Estimativa; ✓ Arredondamento e resultado aproximado; ✓ Média aritmética; ✓ Cálculo mental; ✓ Metade e terça parte; ✓ Proporcionalidade; ✓ Contagem; ✓ Sistema de medidas; ✓ Número decimal; ✓ Frações. ✓ Operação inversa. ✓ Desenho. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Identificamos o algoritmo como sendo o principal vínculo entre os cenários; ✓ O algoritmo foi apresentado como estimativa, desenho, cálculo mental e operação inversa nos dois cenários; ✓ O algoritmo apresentado com a ideia de múltiplos de um número natural foi capturado nos dois cenários;
Medida traduzida pela pergunta: “quantos cabem?”.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Formação de grupos ou conjuntos; ✓ Cálculo mental; ✓ Dúzia e meia dúzia; ✓ Algoritmo das estimativas; ✓ Operação inversa; ✓ Desenho. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Para o primeiro cenário, identificamos o algoritmo com a ideia de porcentagem; ✓ Para o segundo cenário, encontramos o algoritmo com as ideias: operação inversa, decomposição e algoritmo usual.

Quadro 1. Matemática para o Ensino de divisão, de acordo com a análise de livros didáticos. Fonte: Elaboração própria (2022).

Os possíveis vínculos foram identificados a partir das realizações comuns entre os cenários. É possível identificar realizações de divisão como estimativa, cálculo mental, desenho e operação inversa nos dois cenários.

Com a ideia de repartir igualmente, a estimativa foi associada às operações de adição e subtração, por exemplo, em uma situação em que foi preciso distribuir uma certa quantidade em dois vasilhames, de modo que ficassem com a mesma quantidade. Na ideia de medida, foi apresentado o algoritmo das estimativas como estratégia para resolver uma divisão.

O cálculo mental foi identificado no primeiro cenário, a partir da ideia de metade e terça parte. No segundo cenário apresentou a divisão contendo zeros no dividendo e no quociente; por exemplo, ao propor a divisão $120 \div 2$, espera-se que o aluno faça mentalmente a divisão $12 \div 2 = 6$ e acrescente o zero no quociente.

O desenho e a operação inversa foram apontados como estratégias para resolver uma divisão, tanto com a ideia de repartir igualmente, quanto com a ideia de medida. Em relação ao desenho com a ideia de repartir igualmente, foi feita a distribuição em regiões até que se completou o valor; e com a ideia de medida, foi verificado quantos grupos pôde ser formado com a quantidade dada.

Em relação à operação inversa, no primeiro cenário foi sugerido o cálculo mental nos itens em que a divisão apresentou zeros no dividendo e no divisor, e tentativas quando não apresentou zeros no dividendo e no divisor. No segundo cenário, a proposta foi realizar uma divisão por tentativas, utilizando a multiplicação, relacioná-las à divisão e verificar se os resultados corresponderam ao valor esperado.

Apresentar aos professores em formação, aos licenciandos em matemática e ao alunado uma diversidade de realizações para o conceito de divisão, de acordo com os cenários identificados nessa pesquisa, amplia as possibilidades de discussão do tema, tendo em vista que se trata de um conceito presente, tanto na matemática, quanto em outras áreas do conhecimento.

7. UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE DIVISÃO A PARTIR DE DUAS FONTES

Para finalizarmos essa pesquisa, buscamos sintetizar os resultados alcançados nos dois artigos que compuseram esse trabalho. Tivemos por objetivo identificar diferentes formas de apresentar o conceito de divisão, utilizando como fonte artigos científicos e livros didáticos do Ensino Fundamental I. O primeiro artigo tratou da matemática específica da ação do professor, teve como pergunta diretriz: como a matemática específica da ação do professor é apresentada na literatura em língua portuguesa? Ao responder à

pergunta, buscamos atingir o objetivo de identificar formas de uma matemática, específica da ação do professor, ser assumida e difundida em pesquisas em língua portuguesa.

A Matemática específica da ação do professor, conforme uma revisão sistemática de literatura, pode ser apresentada em três categorias. Na primeira “Conhecimento Matemático para o Ensino”, foram agrupados os trabalhos que tiveram como base a pesquisa desenvolvida por Deborah Ball e seus colaboradores (2003, 2008). Foi possível identificar uma variedade de temas abordados dentro dessa categoria, a saber: a formação inicial e continuada de professores, análise de erros, conceitos matemáticos, análise de produção escrita de futuros professores de matemática e a compreensão dos pesquisadores sobre o CMpE.

De acordo com as pesquisas que compuseram a categoria CMpE compreendemos que não é o suficiente que o professor possua o conhecimento comum do conteúdo, mas que é necessário mobilizar conhecimentos voltados ao ensino, é preciso conhecer o aluno no sentido de compreender o seu pensamento matemático, os erros cometidos por discentes da educação básica e ou superior, conhecer o currículo e pensar estratégias que possibilitem o entendimento dos estudantes.

Em se tratando da análise de erros, destacamos a pesquisa desenvolvida por Cury e Bisognin (2017), em que as autoras chamam a atenção para os erros cometidos por licenciandos em Matemática. Afirmam que esses erros são exemplos do que os licenciandos vão enfrentar em suas salas de aula na educação básica, ou seja, reforça a importância da formação continuada de professores que ensinam matemática.

A segunda categoria “Conhecimento Especializado do Professor de Matemática”, foi composta por pesquisas baseadas no trabalho desenvolvido por Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán, (2013). Foram discutidos dois trabalhos que compuseram essa categoria, o que nos faz pensar que é uma frente de pesquisa que precisa ser explorada e almejamos que o nosso trabalho possa contribuir de alguma forma com a pesquisa acadêmica.

Ribeiro e Cristovão (2021), utilizaram o modelo CEPm para discutirem a prática formativa na perspectiva da inclusão. Para além da utilização das subcategorias propostas no modelo, as pesquisadoras consideraram o conhecimento de recursos e métodos específicos para atender alunos com Necessidades Educacionais Especiais e criaram um subdomínio “Conhecimento para o Ensino de Matemática na perspectiva Inclusiva”. A

proposta das autoras não foi criar um modelo e sim utilizar esse conhecimento associado aos demais conhecimentos do CEPM.

Caldatto e Ribeiro (2020) mostraram a falta de vínculos entre o conhecimento pedagógico e o conhecimento matemático do professor em disciplinas oferecidas pelo Programa de Formação de Professores, com base nos domínios e subdomínios do CEPM. De acordo os conteúdos propostos nas ementas, as disciplinas não contemplam tópicos relacionados diretamente à matemática e/ou ao seu ensino.

A terceira categoria, “Matemática para o Ensino”, teve como suporte a pesquisa desenvolvida por Davis e Renert (2014). De acordo com as pesquisas que realizamos, o artigo “A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura”, foi o único trabalho que contemplou essa categoria. Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017) sintetizaram um modelo de MpE do conceito de proporcionalidade direta. Tal modelo é diferente das demais categorias discutidas anteriormente por não explorar os tipos de conhecimentos que os professores necessitam ter para exercer sua função, ou seja, os saberes são construídos.

Salientamos que a nossa escolha por esse modelo se justificou por tratar-se de uma matemática dinâmica, que ocorre em conjunto com outros professores, enquanto nos modelos CMpE e CEPM os conhecimentos necessários ao professor para exercer sua função podem até ser discutidos em grupos de professores em formação inicial e ou continuada, no entanto, parecem ser testados individualmente e não construídos no coletivo.

Compreendemos a importância de todos os modelos que foram apresentados nessa pesquisa e entendemos que novos estudos ainda podem surgir como novos refinamentos nas categorias de alguns modelos e com propostas para apoiar ainda mais o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática.

No segundo artigo, “A comunicação do conceito de divisão em livros didáticos do Ensino Fundamental I”, buscamos responder à pergunta: como o conceito de divisão está sendo comunicado em livros didáticos do Ensino Fundamental I? O nosso objetivo foi construir um modelo de Matemática para o Ensino do conceito de divisão a partir de livros didáticos do Ensino Fundamental I. O conceito de divisão, conforme uma análise de livros didáticos, foi comunicado de acordo com dois cenários: repartir igualmente e medida, traduzido pela pergunta “quantos cabem?”.

No primeiro cenário, “repartir igualmente”, foi identificada uma variedade de realizações como para o conceito de divisão, como: **estimativa**, arredondamento e resultado aproximado, média aritmética, **cálculo mental**, de metade e terça parte, proporcionalidade, contagem, sistema de medidas, número decimal, **operação inversa** e **desenho**.

No segundo cenário, “medida- quantos cabem?”, foram identificadas as seguintes realizações para o conceito de divisão: formação de grupos ou conjuntos, **cálculo mental**, dúzia e meia dúzia, **algoritmo das estimativas**, **desenho**, reta numerada e **operação inversa**.

A partir das realizações comuns identificadas em cada cenário, como mostra a figura 41 abaixo, foi possível estabelecer os vínculos entre os dois cenários. Foi possível identificar realizações, por exemplo, como estimativa nos dois cenários, denominadas como estimativa no primeiro cenário, e algoritmo das estimativas no segundo cenário. Do mesmo modo, observou-se o cálculo mental, a operação inversa e o desenho. Além das realizações destacadas anteriormente, identificamos o algoritmo como sendo o principal vínculo entre os dois cenários. Para melhor compreensão, destacamos as realizações comuns aos dois cenários, ou seja, os possíveis vínculos em cores iguais.



Figura 41- Modelo de Matemática para o Ensino do conceito de divisão. Fonte: elaboração própria (2022).

A Matemática para o Ensino do conceito de divisão se estabeleceu na diversidade das realizações para a divisão. A variabilidade de formas de ensinar o conceito de divisão pode ampliar as possibilidades para que não se limite apenas um item como o algoritmo usual, por exemplo. Com a apresentação do modelo de Matemática para o Ensino do conceito de divisão, esperamos contribuir para área de Educação Matemática e, ao mesmo tempo, abrir leques de oportunidade de pesquisas futuras que possam complementar a matemática específica da ação do professor para o ensino do conceito de divisão ou sobre outros conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

CALDATTO, M. E; RIBEIRO, C. M. **Especificidades do conhecimento do professor de matemática na e para a formação: uma discussão em torno do programa de complementação pedagógica.** Revista Brasileira de Educação v. 25 e250031 2020.

CARRILO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUNÓZ-CATALÁN, M. C. **Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching.** In: UBUZ, B.

HASER, C. et al. **Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.** 8., 2013. Turkey: M.E.T. University, Ankara, 2013. p.2985-2994. Disponível em: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf. Acesso em: 08 de out. 2020.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E. **Conhecimento matemático para o ensino: um estudo com professores em formação inicial e continuada.** Revista Thema 2017 | Volume 14 | Nº 3. Pág. 241 a 249.

DAVIS, B.; RENERT, M. **The Math Teachers Know: Profound Understanding of Emergent Mathematics.** Routledge Taylor & Francis Group, 141 p. 2014.

MENDUNI-BORTOLOTTI, R.D; BARBOSA, J. C. **A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 947-967, dez. 2017

RIBEIRO, G.G.; CRISTOVÃO, E. M. **Conhecimento especializado de licenciandos em Matemática no contexto de práticas formativas para inclusão.** Zetetiké, Campinas, SP, v.29, 2021, pp.1-19 – e021019 ISSN 2176-1744.