UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CLÁUDIA ALVES TEIXEIRA

UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO METODOLÓGICA POR MEIO DA INTEGRALIZAÇÃO DOS SABERES MATEMÁTICOS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Vitória da Conquista - BA
2020

CLÁUDIA ALVES TEIXEIRA

UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO METODOLÓGICA POR MEIO DA INTEGRALIZAÇÃO DOS SABERES MATEMÁTICOS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Clênia Andrade Oliveira de Melo

Coorientador: Prof. Dr. Robson Aldrin Lima Mattos

Vitória da Conquista - BA

2020

T265u Teixeira, Cláudia Alves.

Uma proposta de intervenção metodológica por meio da integralização dos saberes matemáticos no ensino-aprendizagem da álgebra na educação básica. / Cláudia Alves Teixeira, 2020.

209. il.

Orientador (a): Drª. Clênia Andrade Oliveira de Melo.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2020.

Inclui referências. 204 - 209.

1. Atividades com Potencial Algébrico. 2. Ensino de Álgebra. 3. Matemática. 4. Pensamento Abstrato. 5. Proposta de Ensino. I. Melo, Clênia Andrade Oliveira de. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 512

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção - CRB 5/1890

UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

CLÁUDIA ALVES TEIXEIRA

UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO METODOLÓGICA POR MEIO DA INTEGRALIZAÇÃO DOS SABERES MATEMÁTICOS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 10 de Dezembro de 2020

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Clênia Andrade Oliveira de Melo
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Profª. Dra. Alexsandra Oliveira Andrade
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Profª. Dra. Mirian Ferreira de Brito
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Vitória da Conquista - BA

2020

Aos meus pais, Ilson Benevides Teixeira e Ana Alves Teixeira, razões do meu existir. Dedico essa conquista em forma de amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

Deixo explícito, primeiramente, toda a minha gratidão a Ele. “Em tudo dai graças, porque esta é a vontade de Deus em Cristo Jesus para convosco” (Tessalonicenses 5:18). Obrigada meu Deus por me permitir alcançar as graças que tanto almejo. Tenho por Ti, Senhor, um coração eternamente agradecido e agraciado pelo Teu amor.

Aos meus pais, Ilson Benevides Teixeira e Ana Alves Teixeira, por toda dedicação, carinho e amor. Agradeço a vocês por tudo que sou. Obrigada por serem minha fonte inesgotável de inspiração! Amo vocês bem mais do que consigo expressar!

À toda a minha família, pela motivação e companheirismo. Cada uma com suas particularidades, mas sempre compartilhando as pequenas e grandes conquistas.

À minha querida e amável orientadora Profª. Drª. Clênia Andrade Oliveira de Melo. Obrigada pela oportunidade que me foi dada, quando aceitou orientar o meu trabalho! Por conceder o seu precioso tempo com muitas contribuições e pela confiança que foi depositada em mim e na minha pesquisa! Sem a colaboração vocês, este trabalho não seria possível.

Ao meu querido e afável coorientador Prof. Dr. Robson Aldrin Lima Mattos. Obrigada pela dedicação profissional e pela confiança que depositada em mim e na minha pesquisa! Por toda essa boa vontade e criatividade, que são características suas. Suas ideias e seu incentivo foram muito importantes!

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade do Sudoeste da Bahia-UESB.

Aos colegas da turma do mestrado, pelo companheirismo e pelos momentos partilhados. Obrigada por dividirem comigo os momentos de estudos e conquistas.

Aos meus amigos, não preciso citar aqui nomes porque eles sabem e se reconhecem como tal, pelas palavras de ânimo e de conforto. Obrigada a todos vocês, por serem pessoas tão maravilhosas.

Agradeço às componentes da banca de defesa, Profª. Drª. Alexsandra Oliveira Andrade, Profª. Drª. Mirian Ferreira de Brito e Profª. Drª. Clênia Andrade

Oliveira de Melo, por dedicarem parte de seu tempo com as valiosas contribuições feitas ao longo meu trabalho.

Enfim, externo minha gratidão a todos, que direta e indiretamente se fizeram presentes e acreditaram no meu potencial.

Por isso, vos digo que tudo o que pedires, orando, crede que o recebereis e tê-lo-eis.

Bíblia Sagrada, Marcos 11:24

RESUMO

A pesquisa é um estudo bibliográfico, instituindo princípios que norteiam o ensino-aprendizagem da Álgebra na Educação Básica. Parte-se do problema: De que forma é possível integralizar os saberes matemáticos, de modo que a Álgebra, a Aritmética e a Geometria desenvolvam-se juntas no ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Básica? O suporte teórico adotado abrange reflexões pertinentes ao ensino de Álgebra, sobretudo, ao alargamento do pensamento algébrico, tendo por base os estudos de Blanton e Kaput (2005), Brasil (1997, 1998 e 2017), Canavarro (2007), Lins e Gimenez (1997), Usiskin (1995), dentre outros, bem como, pressupostos históricos, que revelam um desenvolvimento tardio desta ciência (BOYER, 1996; EVES, 2011), e, um ensino inconsistente dos conceitos algébricos (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993), sendo, assim, possível arquitetar conjecturas que levem a um repensar na educação algébrica elementar. O objetivo deste trabalho é construir uma proposta de intervenção metodológica por meio da integralização dos saberes matemáticos, a qual apresenta um encadeamento de sequências didáticas, disposto em um manual, como uma possibilidade eminentemente construtiva no ensino-aprendizagem da Álgebra no contexto da Educação Básica. O produto educacional apresentado constitui um compêndio de atividades com potencial algébrico e contempla a questão norteadora deste estudo ao mostrar que, é possível integralizar os saberes matemáticos, e desenvolver a Álgebra, a Aritmética e a Geometria concomitantemente, uma implicando na(s) outra(s) no ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Básica. Este se compõe de dezoito sequências didáticas que compreendem uma série atividades conectadas entre si para a construção dos saberes matemáticos de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino e aprendizagem. Ambiciona-se que esta pesquisa seja pertinente e enriquecedora para todos que venham lograr das ponderações nela expostas, seja por parte de alunos e/ou professores de escolas públicas ou pesquisadores, visto sua intenção de reconceitualizar o ensino de Álgebra e impulsionar outros estudos com um olhar atento para a aprendizagem duradoura da matemática elementar na área da Educação Matemática, e especialmente, da Educação Algébrica.

Palavras-chave: Atividades com Potencial Algébrico. Ensino de Álgebra. Matemática. Pensamento Abstrato. Proposta de Ensino.

ABSTRACT

This research is a bibliographic study, establishing principles that guide the teaching and learning of Algebra in Basic Education. It starts with the problem: How is it possible to integrate mathematical knowledge so that Algebra, Arithmetic, and Geometry develop together in the teaching-learning of Mathematics in Basic Education? The theoretical support adopted includes reflections relevant to the teaching of Algebra, above all, to the widening of algebraic thinking, based on the studies of Blanton and Kaput (2005), Brazil (1997, 1998 and 2017), Canavarro (2007), Lins and Gimenez (1997), Usiskin (1995), among others, as well as historical assumptions, which reveal a late development of this science (BOYER, 1996; EVES, 2011), and inconsistent teaching of algebraic concepts (FIORENTINI, MIGUEL, and MIORIM, 1993), making it possible to conceive conjectures that lead to a rethink in elementary algebraic education. The objective of this work is to build a proposal for a methodological intervention through the integration of mathematical knowledge, which presents a chain of didactic sequences, arranged in a manual, as an eminently constructive possibility in the teaching-learning of Algebra in the context of Basic Education. The educational product presented constitutes a compendium of activities with algebraic potential and contemplates the guiding question of this study by showing that it is possible to integrate mathematical knowledge, and to develop Algebra, Arithmetic and Geometry concomitantly, one implying the other (s) (s) in the teaching-learning of Mathematics in Basic Education. This is composed of eighteen didactic sequences that comprise a series of connected activities for the construction of mathematical knowledge in an integrated way for better dynamics in the teaching and learning process. It is hoped that this research will be relevant and enriching for all who come to achieve the considerations exposed in it, whether by students and/or teachers from public schools or researchers, given their intention to reconceptualize the teaching of Algebra and to stimulate other studies with a look closely at the long-term learning of elementary mathematics in the area of Mathematical Education, and especially, Algebraic Education.

Keywords: Abstract Thought. Activities with Algebraic Potential. Algebra Teaching. Mathematics. Teaching Proposal.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SD	Sequência Didática
TQP	Trinômio quadrado perfeito
UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
UNEB	Universidade do Estado da Bahia

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ninguém é sujeito da autonomia de ninguém.
Freire

Impera, na contemporaneidade, um mundo amplamente complexo e imensamente desafiador. De modo semelhante, a sociedade também se apresenta assim, explícita na ascensão científica, e, cada vez mais, requer experiência e saber. Subitamente, essas transformações contínuas invadem o contexto escolar numa velocidade incalculável, refletindo diretamente no processo de ensino-aprendizagem das diversas ciências.

A docência no Ensino Superior da pesquisadora instigou questionamentos, reflexões e descobertas que influenciaram no estudo da Álgebra, sendo que a cada passo dado, na busca por conhecimento, sua identidade perpassava por um processo de (re) construção, ante aos novos desafios.

A construção dos conceitos matemáticos requer generalização e abstração como dimensões básicas. Pensando-se desta maneira é que este trabalho fora construído. A ideia aqui apresentada se refere à integralização dos saberes matemáticos no ensino-aprendizagem da Álgebra na Educação Básica, de modo a municiar subsídios que proporcionam a correta formação de tais conceitos.

Todavia, majoritariamente, a construção dos saberes algébricos tem incidido por meio de exemplificações, gerando apenas a apropriação de procedimentos válidos para situações específicas. Sabe-se que, uma aprendizagem duradoura ultrapassa a compreensão das estruturas matemáticas, e, distantes dos meios concretos, visuais e sensoriais, transpassa generalizações sem perder o seu rigor.

Desenvolver-se é crescer na consciência de como se pode modificar sua própria realidade. Foi, portanto, a partir das experiências vivenciadas no retorno como professora às instituições de curso, tanto da Educação Básica como da Educação Superior da pesquisadora, que surgiram ações com poder de transformação.

Em face dos novos desafios, inúmeras inquietações desabrochavam ao longo do exercício da docência na área de Álgebra no Ensino Superior. O caminho mais propício seria reportar ao início da concepção matemática para compreender tais dificuldades apresentadas pelos alunos. Desse modo, vislumbraram indagações desafiadoras, ante as experimentações do ensino de Matemática nas suas mais variadas etapas.

Estar simultaneamente atuante na Educação Básica e na Educação Superior propiciou contrapor hipóteses para uma reestruturação do ensino de Álgebra, visto que, essa ciência contempla um campo conceitual imprescindível à construção de conhecimento matemático. Esta constatação impulsionou pesquisar o contexto em que são construídos os saberes algébricos no Ensino Básico.

No que diz respeito ao ensino de Matemática de um modo em geral a Base Nacional Comum Curricular[1] (BNCC) justifica a importância do aprendizado desta especialidade da seguinte forma:

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (BRAISL, 2017, p. 265).

Dentre as concepções no que discorre à Matemática, o texto da Base, encontra-se subdividido em cinco unidades temáticas, sendo elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Destas, em decorrência das vivências da pesquisadora, foi escolhia a Álgebra como objeto de estudo.

Escolhida a temática, buscou-se conhecê-la, desde a sua origem à álgebra moderna que permeia entre as ciências na atualidade.

Sabe-se que:

> Ao longo da história se reconhecem esforços de indivíduos e de todas as sociedades para encontrar explicações, formas de lidar e conviver com a realidade natural e sociocultural. Isso deu origem aos modos de comunicação e às línguas, às religiões e às artes, assim como às ciências e às matemáticas, enfim a tudo o que chamamos "conhecimento", muitas vezes também chamado "saber". E indivíduos e a espécie como um todo se destacam entre seus pares e atingem seu potencial de criatividade porque conhecem. (D'AMBROSIO, 1996, p. 18).

Para tanto, foi iniciada uma pesquisa bibliográfica com intenção de conhecer a origem da Álgebra, pois, discorrer sobre a mesma exigia conhecimentos profundos acerca desta. Assim, a contextualização histórica da Matemática teve, como respaldo principal, as obras de Boyer (1996) e Eves (2011), sendo acrescidas das

---

[1] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

contribuições de Roque (2012) e Struik (1989). No que tange à evolução histórica da Álgebra, além do aporte teórico abordado por estes, a pesquisa estende-se a autores como: Ferreira e Nogueira (2007), Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) e Lins e Gimenez (1997).

Como referencial teórico à pesquisa, ressaltam-se estudos que discutem a atual conjuntura do ensino de Álgebra, o desenvolvimento do pensamento algébrico e sua relevância na construção da Matemática. Pois, o pensamento abstrato, tido como essencial à compreensão das estruturas matemáticas, assegura o homem a se posicionar, compartilhando suas ideias, problematizando e até mesmo intervindo em sua própria realidade.

Essa ciência, enquanto conhecimento, ao mesmo tempo em que transforma o homem por ele é transformada, além do mais, perpassa por toda a extensão histórica deste, instituindo, a todo o momento, uma nova maneira de relacionar e representar o conhecimento matemático construído.

Nesse pensar, o processo de ensino-aprendizagem desta área da Matemática adquire dimensões mais amplas. Considera-se, todavia, postulados referentes à Educação Algébrica, tendo por base os estudos de Blanton e Kaput (2005), Booth (1995), Canavarro (2007), Coelho e Aguiar (2018), Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), Lins e Gimenez (1997), Usiskin (1995), entre outros. Além disso, este trabalho de dissertação abraça as ponderações expostas nos documentos oficiais Brasil (1997, 1998, 2017), sendo complementadas com outros teóricos que discorrem acerca do ensino do ensino de Álgebra.

O histórico de evolução da linguagem algébrica enuncia como certos obstáculos foram discorridos, e eventualmente superados, de modo similar, revela-se um ensino incompatível às perspectivas de construção do pensamento algébrico. Para Lins e Gimenez (1997, p. 137) “a atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a álgebra.”, e esta, sem perder o seu rigor, justificar a Matemática.

No entanto, percebe-se no âmbito escolar um ensino voltado para a manipulação de regras operatórias, sem considerar a importância do pensamento abstrato. Acredita-se que conceber a habilidade algébrica básica deve ser algo que ultrapasse pura manipulação de símbolos (BOOTH, 1995).

Estudos apontam que uma prática de sala de aula que abrace conjecturas, argumentação, generalização e justificação instiga o pensamento algébrico de modo a proporcionar aos educandos oportunidades de exercitar e desenvolver suas faculdades intelectuais (BLANTON e KAPUT, 2003).

Para discutir sobre os entraves que permeiam o ensino da Álgebra é preciso um olhar mais amplo no que diz respeito à introdução do pensamento algébrico na criança em sua vida escolar, visto que, as atividades vivenciadas fora da escola propicia a incitação do pensamento matemático, todavia, as salas de aula são recintos excepcionais, nos quais, os alunos ampliam as suas possibilidades de expandir e robustecer suas concepções matemáticas, e decorrentes destas desenvolverem o pensamento abstrato.

No que se refere a este tipo de pensamento, Blanton e Kaput (2003, p. 74, tradução da pesquisadora) afirmam que "promover o raciocínio algébrico na sala de aula envolve a incorporação de conjecturas, argumentação, e generalização de forma proposital para que os alunos considerem os argumentos como formas de construírem conhecimento confiável.". Desse modo, deve-se pensar em atividades contínuas que visam explorar tais habilidades no ensino da matemática elementar.

Por esse olhar, conjectura-se que um ensino integrado entre Aritmética, Álgebra e Geometria, de modo que estas desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra, como aponta Lins e Gimenez (1997), tende desenvolver o pensamento algébrico neste nível escolar. Além do mais, em concordância com Coelho e Aguiar (2018) tais habilidades carecem ser conjuntamente desenvolvidas sem distinguir nenhuma delas em detrimento da outra.

Partindo dessa premissa, propõe-se integrar esses três campos do saber, de modo a unificar a Matemática, tornando-a única. Para tanto, é essencial reexaminar crenças profundamente arraigadas sobre as capacidades matemáticas dos alunos, de maneira que, os poderes inatos nos contextos aritmético e geométrico auxiliem no desenvolvimento das habilidades algébricas transformando a generalização em uma atividade matemática, de forma que, estes possam gradativamente desenvolver o pensamento matemático.

Encontra-se nesse contexto a pergunta norteadora deste estudo: De que forma é possível integralizar os saberes matemáticos, de modo que a Álgebra, a Aritmética e a Geometria desenvolvam-se juntas no ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Básica?

Diante dessa questão emerge o objetivo geral deste trabalho: construir uma proposta de intervenção metodológica por meio da integralização dos saberes matemáticos, a qual apresenta um encadeamento de sequências didáticas, disposto em um manual, como uma possibilidade eminentemente construtiva no ensino-aprendizagem da Álgebra no contexto da Educação Básica.

Com isso, busca-se propor atividades que corroborem para o desenvolvimento do pensamento algébrico nas salas de aula de Matemática do Ensino Fundamental, a fim de desenvolver a habilidade de pensar “abstratamente”, possibilitando a construção dos saberes matemáticos como um todo, os quais são essenciais para a formação de cidadãos críticos-reflexivos, com atuação contínua na sua própria realidade.

Para a consolidação desse objetivo geral, foram idealizados, dentro da proposta apresentada, três objetivos específicos, destacados a seguir:

1. Conhecer o percurso histórico da Álgebra, bem como, a educação algébrica elementar, conjecturando novas perspectivas, para repensar o ensino desta ciência;

2. Inserir gradativamente as concepções algébricas conforme sugere a BNCC, tendo por base pressupostos teóricos que norteiam o ensino deste campo do saber, de modo a desenvolver o pensamento abstrato;

3. Integralizar o ensino matemático, subsidiando os alunos das múltiplas formas de representação e/ou justificação de um mesmo objeto matemático, contribuindo significativamente para uma aprendizagem sólida da Matemática.

Diante do exposto, este estudo, intenciona apresentar uma proposta de intervenção metodológica, parte do pressuposto de que ensinar Álgebra por meio de atividades investigativas vai muito além do ensino mecânico de fórmulas e regras desconexas. Trata-se de apresentar aos indivíduos a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico ampliando a habilidade de pensar “abstratamente”, de modo a compreender e intervir na realidade à sua volta (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993).

Conjugada a este diálogo de condução reflexiva, no processo de repensar o ensino-aprendizagem da Álgebra, respalda o escopo deste estudo, sob o olhar de reconceitualizar o ensino desta ciência, de modo a não se restringi-la a um conjunto de procedimentos algébricos, pois, ela é muito mais que uma linguagem, sobretudo, é uma forma de pensar.

Este estudo constitui-se de um produto educacional, no qual fulguram vivências de acadêmica em atividade docente da pesquisadora que, no aprimoramento do saber, empenhou-se em elaborar algo que veementemente viesse contribuir para o ensino de Álgebra, o qual será publicado e disponibilizado para que possa ser utilizado por outros profissionais, atendendo as exigências do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

Dessa forma, com o intuito de responder à problemática e atingir os objetivos traçados, este trabalho encontra-se subdividido em três capítulos.

O primeiro capítulo, “Do surgimento da Álgebra à Educação Algébrica Elementar na contemporaneidade”, apresenta o percurso histórico da Matemática, desde a sua origem à matemática abstrata (BOYER, 1996; EVES, 2011), e especificamente, da Álgebra, a qual aparece com desenvolvimento tardio, ao longo da história (TELES, 2004). Também, revela uma álgebra escolar tradicionalmente ensinada e aprendida, sem considerar a importância e a complexidade do pensamento algébrico, reduzida à linguagem algébrica (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993; LINS e GIMENEZ, 1997). Encontram-se respaldadas, nos documentos oficiais, proposições para o trabalho com esta ciência, de modo a desenvolver este pensamento, as quais salientam a importância deste campo do saber (BRASIL, 1997, 1998 e 2017). Dentre as considerações acatadas, tem-se a importância de desenvolver o pensamento abstrato ao iniciar a vida escolar, e, ampliá-lo ao logo desta (BLANTON e KAPUT, 2005; CANAVARRO, 2007; COELHO e AGUIAR, 2018). Tenciona-se compreender o elo existente entre os saberes algébricos, os aritméticos e os geométricos, visto que, estes dispõem nexos entre seus conteúdos, estando entrelaçados historicamente (BOOTH, 1995; LORENZATO, 2006; USISKIN, 1995).

O segundo capítulo, “Construindo um lugar para a proposta de intervenção”, elucida particularidades que compõem o presente estudo, estando este amparado nos pressupostos da literatura algébrica (brasileira e estrangeira), a qual municia subsídios teóricos e metodológicos para a construção das sequências didáticas propostas no manual apresentado. Além disso, descreve de forma concisa o produto educacional sugerido à proposta de intervenção metodológica pleiteada, a justificativa deste trabalho, o público ambicionado, o contexto e a metodologia, que se encontra amparada tanto na Educação Algébrica como nos documentos oficiais, além do mais, a pesquisa foi realizada de acordo as perspectivas de Gil (2008) e Lima e Mioto (2007). Encontram-se neste, também, alguns entraves, os quais direcionaram modificações ao longo da escrita, sendo estes espontaneamente extintos ao longo do tempo, bem como, reflexões vivenciadas ao longo da experiência docente pela autora. Por fim, torna-se perceptível todo o desenrolar deste trabalho, desde a idealização à criação, delineando o pocesso de construção do produto educacional.

O terceiro capítulo, “O produto educacional”, atualmente há um leque de trabalhos publicados pela comunidade de educadores matemáticos, no entanto, majoritariamente, os professores não conseguem aplicá-los em suas salas de aula, devido à ausência dos recursos necessários. Sob este olhar, pensou-se em construir Matemática com recursos acessíveis a toda a comunidade escolar, de modo que, oportunizasse o desenvolvimento do pensamento algébrico a uma maior gama possível de alunos. Desse modo, esse capítulo, é construído com o intuito de auxiliar os professores, que almejam uma aprendizagem significativa da Álgebra. Para este desígnio, este manual se constitui de nove seções, as quais se referem às etapas do Ensino Fundamental, respectivamente, constituídas de duas sequências didáticas para a aplicação docente, estas se compõem de um encadeamento de atividades exploratórias que visam explanar os conceitos algébricos juntamente com a Aritmética e a Geometria, com a intencional de desenvolver o pensamento abstrato (ZABALA, 1998). Tais sequências didáticas se apresentam em consonância à educação matemática escolarizada, sendo estas ampliadas na proporção em que se dá o desenvolvimento cognitivo do aluno. Como pesquisadora, acredita-se que,

> O desenvolvimento do pensamento algébrico exige uma atenção continuada por parte do professor. Não se trata apenas de seleccionar tarefas adequadas, por muito “algebrizadas” que sejam, nem de permitir o uso de representações diversas por parte dos alunos. Na realidade, no cenário da aula o professor tem um papel muito importante a desempenhar. (CANAVARRO, 2007, p. 110).

Por fim, é apresentado o tópico “Considerações finais”, o qual se compõe de reflexões e conjecturas a partir da expectativa da pesquisadora em apresentar ponderações acerca do ensino de Álgebra por meio de um produto final que possa veemente auxiliar os professores que atuam na Educação Básica, bem como, possíveis repercussões em decorrência da execução das atividades propostas, retomando a problemática inicial e objetivo ambicionado, por acreditar na importância da criação de um ambiente de trabalho onde os alunos possam se identificar como uma comunidade de construção de conhecimento matemático, e expandir o desenvolvimento do pensamento algébrico de forma autonomamente confrontando conjecturas e justificando-as (CANAVARRO, 2007).

1 DO SURGIMENTO DA ÁLGEBRA À EDUCAÇÃO ALGÉBRICA ELEMENTAR NA CONTEMPORANEIDADE

Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.
Hermann Hankel

A Matemática consiste na procura de padrões, e destes formulam-se conjecturas, das quais, acarretam deduções, que por meio de axiomas e definições, estabelecem novos resultados, conduzindo a continuidade do saber. Este campo da ciência torna-se uma especialidade aparentemente difícil, complicada e obscura, chamada Álgebra. Essencial para o desenvolvimento humano, estudá-la é desafiar-se, compreender e se encantar. Por fim, estudar este campo abstrato é escrever Matemática (CANAVARRO, 2007; USISKIN 1995).

Segundo Markarian (1998), o objetivo da Matemática é imperceptível e o poder "desmaterializar" dos objetos que estão ao nosso redor, é o que difere os seres humanos de outros animais. Assim, através de observações, pressuposições e generalizações, e consequentemente, por meio da abstração é construído o conhecimento matemático.

Faz-se necessário um despertar para este campo da Matemática, um tanto assustador, mas, um grande desafio que nos deslumbra na acessão de uma compreensão do mundo explicada matematicamente. Assim, nos cabe refletir: o que é Álgebra?

Etimologicamente, a palavra "Álgebra" advém do termo "al-jabr", a qual pertence ao título de um livro, o "Hisab Al-jabr W'al-muqabalah", escrito pelo matemático árabe Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi[2] (Maome, filho de Moisés de Khwarezm) por volta do ano 825. A palavra "Al-jabr" significava originalmente: "arte de reunir ossos quebrados". A tradução direta do título desse livro é "Ciência da restauração (ou reunião) e redução (ou cancelamento)" que, matematicamente, quer dizer "ciência das equações" (BOYER, 1996; EVES, 2011; ROQUE, 2012).

---

[2] Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi nasceu em torno de 780 e morreu por volta do ano 850 d.C.

Este campo do conhecimento constitui-se no estudo das estruturas matemáticas. Inicialmente, utilizado no estudo das equações e métodos de resolvê-las, para no seu desenvolver, perpetuar no estudo das estruturas matemáticas, como grupos, anéis e corpos, e consequentemente, dominar a abstração que a Matemática exige sem perder seu rigor. De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993, p. 79),

> A origem da palavra está de acordo com o conteúdo real da própria ciência. A Álgebra tem início, na realidade, quando os matemáticos começam a interessar-se pelas “operações” que podem ser feitas com qualquer número, mais do que pelos próprios números; é, essencialmente, a doutrina das operações Matemáticas considerada formalmente a partir de um ponto de vista geral, com abstração dos números concretos.

Atualmente, é considerada uma área da pesquisa essencialmente abstrata e importantíssima para a edificação do saber do individuo, desenvolvendo seu pensamento abstrato, o qual, é indispensável no processo de evolução da sociedade e no alargamento das ciências. Deste modo, urge um repensar no ensino da Álgebra, bem como, conhecê-la em sua totalidade e no seu processo de desenvolvimento, para que os estudos deste campo desperte um encantar, e, por conseguinte, alargue o pensamento abstrato.

1.1 Breve histórico

A história das dificuldades, empenho, tempo envolvido em toda a evolução da matemática dá a dimensão da grandeza dessa realização humana. Retratá-la é mostrar que nada está perfeitamente definido por si só. Tudo, até mesmo o que já parece trivial, custou esforço, erros, tentativas até a construção do produto. Seu histórico difere na sua essência, só na Matemática não há correção significativa, seu desenvolvimento consiste exclusivamente na sua extensão. Cada grande matemático acrescenta algo ao que veio antes, o que torna o seu avanço uma estrutura crescente, sempre mais alta, larga, bela e magnífica (BOYER, 1996).

Além de identificar quantidades concretas (objetos), o homem pré-histórico aprendeu a contar quantidades abstratas (dias, estações, anos). O saber matemático se desenvolveu de forma independente em civilizações completamente distintas que caminhavam para os mesmos resultados. A influência mútua entre os diferentes povos originava novas ideias acarretando no avanço do saber matemático (BOYER, 1996; EVES, 2011).

De inicio, a matemática foi fundamentada no conceito de número, e evidências arqueológicas encontradas trazem o conhecimento rudimentar dos primeiros conceitos matemáticos existentes antes da criação da linguagem escrita.

Boyer (1996) afirma:

> O homem difere de outros animais de modo mais acentuado pela sua linguagem, cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato; no entanto palavras que exprimem ideias numéricas aparecem lentamente. *Sinais* para números provavelmente precederam as palavras para números, pois é mais fácil fazer incisões num bastão do que estabelecer uma frase bem modulada para identificar um número. (BOYER, 1996, p. 3, grifo do autor).

Segundo Eves (2011), os primeiros esforços do homem primitivo consistem no conceito de número e no processo de contar. O autor acredita na existência de algum senso numérico nos humanos mais primitivos "[...] há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50000 anos, era capaz de contar [...]" (EVES, 2011, p. 25). Portanto, depreende-se que o processo de contagem ocorreu de forma largamente conjectural.

O autor acrescenta, com a evolução gradual dos povos, tornaram-se inevitáveis contagens simples, seguida da necessidade de contagens extensas, e posteriormente, surgem a escrita e os sistemas de agrupamentos, dos quais, futuramente originariam a Aritmética.

No que tange a História da Matemática, Boyer (1996) e Eves (2011) discorrem momentos históricos dos diferentes povos e épocas, desde a sua origem à matemática abstrata, da qual dispomos nos dias de hoje. Os autores de modo análogo, respectivamente, abordam em seus livros intitulados "História da Matemática" e "Introdução à História da Matemática" o percurso desta ciência dos primórdios à atualidade.

Dessas leituras, compreende-se que muitos povos se destacaram, dentre eles, os babilônios e os egípcios. Os gregos se destacam na geometria. Vale ressaltar, que afirmações do surgimento, seja da Aritmética, seja da Geometria, são necessariamente arriscadas, pois não há documentos do período pré-histórico.

Acredita-se que esta última se desenvolveu da necessidade das práticas de construção e demarcação de terras. Boyer (1996) lembra que:

> Podemos fazer conjeturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir, e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjetura com história. É melhor suspender o julgamento nessa questão e ir adiante, ao terreno mais firme da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós. (BOYER, 1996, p. 5).

Na geometria os gregos se destacaram com a obra de Euclides, intitulada "Os Elementos". Euclides “[...] se dedicava ao ensino em 300 a.C., trabalhando no centro de ensino e pesquisa mais importante do seu tempo - o Museu de Alexandria[3] - publicou a obra *Elementos* [...]” (TELES, 2004, p. 12). Da literatura matemática, especificamente, dos livros aqui citados, Boyer (1996) e Eves (2011), quais relatam feitos significativos como os trabalhos dos matemáticos Arquimedes e de Apolônio de Perga.

Contam também com as contribuições de Tales de Mileto e Pitágoras. Os árabes ao conquistar a Índia encontram uma matemática diferente, fundamentada na Álgebra e na Aritmética, ao tempo que, espalham os "algarismos arábicos", de invenção dos hindus. Dentre eles, o árabe Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi é tido com um dos maiores propagadores dos conhecimentos matemáticos.

Ainda desses dois literatos, infere-se que em 1202, a Matemática é despertada com a obra "Liber abaci" de Leonardo de Pisa, (Fibonacci), na qual apresenta a "arte de calcular" (Aritmética e Álgebra). Posteriormente, surgem os franceses François Viète e René Descartes com suas contribuições um pouco voltadas para a Álgebra.

Em sucessão, Pierre de Fermat e Blaise Pascal desenvolvem estudos relacionados à probabilidade. Neste encadeamento, surgem os ingleses: Isaac Newton, instigado inicialmente por grandes matemático, e posteriormente, considerado o matemático mais importante do século XVII, leu “[...] primeiro os *Elementos* de Euclides, que achou demasiado óbvio, e depois *La géométrie* de Descartes, que achou algo difícil. Leu também a *Clavis* de Oughtred trabalhos de Kleper e Viète e a *Arithmetica infinitorum* de Wallis.” (EVES, 2011, p. 436), e, John

---

[3] O Museu Nacional de Alexandria é um museu em Alexandria, no Egito. Foi inaugurado em 31 de Dezembro de 2003 por Hosni Mubarak e está localizado num palácio restaurado de estilo italiano na Rua Tariq Al-Horreya (antiga Rua Fouad), perto do centro da cidade.

Wallis com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral e a criação dos números imaginários respectivamente.

Os autores revelam inúmeras contribuições de grandes matemáticos. No século XVII, nasce a Análise Matemática de fundamental importância para esta área do conhecimento. Em subsequência, vários outros nomes como, Pierre Fermat, Gottfried Wihelm Leibniz entre outros.

No desencadear das descobertas, a Álgebra e a Aritmética ganham novos impulsos, por volta de 1770, Lagrange e Vandermonde iniciam estudos, que seriam continuados por Niels Abel e Evariste de Galois, quais, refletiram significativamente na Álgebra dos dias atuais.

Dentre gênios da época, o alemão Johann Carl Friedrich Gauss conhecido como o “príncipe dos matemáticos”, tal qual, o suíço Leonhard Euler, considerado o maior matemático, foi denominado o “rei da matemática” revolucionou quase toda a matemática do soculo XVIII.

Boyer (1996) e Eves (2011) estruturam os fatos históricos de forma heterogênea, contudo, recaem aos mesmos acontecimentos. Boyer (1996, p. 343), afirma “mais do que qualquer outro período, o século dezenove merece ser considerado a Idade de Ouro da matemática”. Em meio aos grandes matemáticos deste período, surgem, Arthur Cayley, o qual ficou conhecido como “o matemático dos matemáticos” e Bernhard Riemann que se tornou um dos maiores matemáticos proeminentes do século.

Em decorrência de toda evolução matemática, Eves (2011, p. 693), afirma “das raízes erguia-se o robusto tronco onde estava gravado *cálculo*. Sobre o tronco finalmente a copa formada de numerosos galhos subdivididos em ramos menores.”.

O século XX inicia e finda com grandes descobertas matemáticas como os resultados de Kurt Gödel, estudos referentes a A Teoria do Caos[4] de Robert Stetson.

Por fim, Eves (2011) aborda o impacto da tecnologia no desenvolvimento do saber matemático e o surgimento da matemática moderna. Ainda faz ressalvas a fatos célebres como, a história de Grace Young, a primeira mulher a obter um doutorado na Alemanha. E, em 1993 o inglês Andrew Wiles prova o último teorema de Fermat.

---

[4] A teoria do caos é um campo de estudo em matemática, com aplicações em várias disciplinas, constitui-se de sistemas complexos e dinâmicos rigorosamente deterministas, com instabilidade inicial que, pode torná-los não previsíveis a longo prazo.

Boyer (1996) complementa, ao afirmar que a matemática contemporânea é caracterizada por tendências já existentes no fim do século XIX. Todavia, o autor prever uma continuidade na evolução dessa ciência, qual será norteada pelos problemas do mundo moderno. Sua continuidade está subordinada aos que a condenam pela possibilidade de destruição da humanidade e os "[...] que querem retirar-lhe tudo salvo suas aplicações para torná-la mais útil socialmente, seja para a medicina seja para a guerra." (BOYER 1996, p. 440).

Portanto, no futuro, como no passado, o grande matemático dará outra forma aos problemas legados. E, grandes ideias podem ser simplificadoras.

Em síntese, segundo Boyer (1996, p. 414),

> A matemática tem sido frequentemente comparada a uma árvore, pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais, ao passo que ao mesmo tempo suas raízes cada vez mais se aprofundam e alargam, em busca de fundamentos sólidos.

Em presença a vasta perfeição da Matemática, com uma extensa área de atuação nas diversas ciências, esta se subdivide em Aritmética, Geometria e Álgebra. Esta última, por sua vez, vem assumindo um cenário extraordinário no século atual, de onde, se concretiza a necessidade de conhecê-la.

Embora, essas sejam as principais fragmentações historicamente legadas pela Matemática, as quais perduram até os dias hoje. À proporção que ocorre a expansão do conhecimento matemático tende a serem reveladas as inúmeras subdivisões da Matemática.

1.1.1 A evolução da linguagem algébrica

Tratando-se especificamente da história da Álgebra, bem como, do desenvolvimento dos métodos algébricos, nota-se três períodos importantes relacionados à linguagem algébrica: a etapa retórica ou verbal, a etapa sincopada e, por fim, a etapa simbólica, que é a linguagem utilizada hoje.

De acordo com Eves (2011), a fase retórica existe desde os babilônios (1700 a.C.), caracterizada pela ausência de símbolos para expressar os procedimentos algébricos, que eram descritos por meio da linguagem textual corrente da época, com destaque para o matemático grego Diofanto (250 d.C.). É o momento "onde apesar de ainda operar verbalmente, são introduzidas algumas abreviações para termos ou operações utilizadas frequentemente.” (ALMEIDA, 2010, p. 20). Além dos gregos, os egípcios e os árabes também usaram a forma retórica para expressar o pensamento algébrico.

Segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), a fase sincopada teria surgido com Diofanto de Alexandria, por volta do século III d.C., ao introduzir a letra “sigma” do alfabeto grego para representar uma incógnita e utilizar símbolos matemáticos que simplificavam os registros e as operações. De acordo com os autores,

> A álgebra árabe, por sua vez, parece não ter utilizado esta forma de expressão. Entretanto, convém assinalar que, apesar da forma retórica de exprimir a Álgebra, os árabes introduziram um novo vocabulário técnico para esse campo de conhecimento, dando-lhe uma certa autonomia que, mais tarde, seria reconhecida através da aceitação universal do termo al-gabr introduzido por al-Khwarizmi. (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p. 80).

No encadeamento do processo de crescente “algebrização”, inicia-se a fase simbólica, na qual se representavam as expressões algébricas somente através de símbolos, sem o uso da linguagem textual. Dentre os principais matemáticos responsáveis pelo desenvolvimento da linguagem algébrica podemos destacar François Viète, qual é considerando o responsável pela introdução da linguagem formal, conforme afirmam Ferreira e Nogueira (2007, p. 5):

> Viète introduziu o uso das letras para indicar números desconhecidos da forma como são utilizadas até hoje, escrevendo equações e estudando suas propriedades. Ele foi o primeiro a utilizar letras como coeficientes genéricos (positivos) aproximando a representação simbólica das equações à praticada atualmente.

O processo de reconstrução histórica do desenvolvimento da linguagem algébrica acarreta apontamentos que possibilitam a compreensão da Álgebra utilizada pelo homem contemporâneo.

Em subsequência René Descartes consolidaria a linguagem simbólica ao publicar o Lá Geometrie em 1637, transformando sua obra em um divisor de águas na história da matemática. Ferreira e Nogueira continuam:

> Apesar do avanço proporcionado pelos estudos de Viète e da beleza da Álgebra elaborada por ele, esta ainda estava incompleta e a Álgebra de Descartes veio não apenas completá-la, mas também complementá-la, ao possibilitar a síntese entre Geometria e Álgebra, agora de uma maneira sistematizada e formal, transformando a Álgebra geométrica dos gregos, em uma Geometria algébrica, utilizando os principais objetos algébricos, as

> equações, para representar entes geométricos, como retas, curvas, planos, sólidos, entre outros. (FERREIRA E NOGUEIRA, 2007, p. 5-6).

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) completam, para alguns historiadores a Álgebra teria surgido com Diofanto. Em sequência, o matemático Viète introduz novos conhecimentos à linguagem algébrica, concluem expondo o ponto de vista de Jacob Klein “[...] pode-se dizer que é somente a partir da percepção do novo caráter simbólico assumido pela letra que se pode falar em um verdadeiro nascimento da Álgebra [...]” (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p. 81) e de acordo a leitura do autor, reconhecem Viète como sendo autêntico fundador da Álgebra.

Desse modo, é importante ressaltar a existência de uma estreita conexão entre o símbolo e o significado. Ao deparamos com as distintas representações simbólicas, não podemos assumir um significado conceitual idêntico para ambas. A escrita dos conceitos matemáticos é imprescindível para a reestruturação e atualização desta ciência.

Em outras palavras, Boyer (1996) reitera, ainda que em dias de pensamento hiper abstrato, a matemática continua sendo a linguagem da ciência.

De acordo com Almeida (2010), o desenvolvimento da Álgebra tem se fundamentado na concepção de sistemas simbólicos desde que a generalização de Viète e Descartes introduziram a álgebra na Matemática. De tal modo, analisar a simbologia matemática estudada por um certo autor ou de determinado período é oferecer subsídios que corroboram para a análise da evolução de conceitos matemáticos ao longo do tempo.

Para Boyer (1996), a Álgebra do século XIX apresentava duas características distintas, uma se voltava à generalização e a abstração, e, a outra se concentrava nas expressões sujeitas a restrições, quais seriam difundidas posteriormente. Tais particularidades, pareciam se contrapor, no entanto, estavam relacionadas nas questões observadas pelos algebristas da época. Assim, uma visão moderna da Álgebra principia.

Nesse contexto, Eves (2011, p. 546, grifo do autor) ratifica,

> Os primeiros vislumbres dessa visão moderna da álgebra surgiram por volta de 1830 na Inglaterra, com o trabalho de Georg Peacock (1791-1858), um ex-aluno e professor da Universidade de Cambridge que mais tarde se tornou deão de Ely. Peacock foi um dos primeiros a estudar seriamente os princípios fundamentais da álgebra, e em 1830 publicou seu *Treatise on Algebra* no qual procurou dar à álgebra um tratamento lógico equiparável ao

> dos *Elementos* de Euclides, com o que ganhou o epíteto de "o Euclides da Álgebra".

Em sequência, os novos algebristas impulsionam os esboços algébricos para o mais próximo de como modernamente se compreende desse campo. Assim, Duncan Farquharson Gregory traz as leis comutativa e distributiva da álgebra em 1840. Augustus De Morgan contribui significativamente no esclarecimento dos fundamentos da álgebra.

Os matemáticos William Rowan Hamilton e Hermann Günther Grassmann publicaram resultados que acarretaram na libertação da álgebra, e consequentemente, no desencadeamento da álgebra abstrata (BOYER, 1996).

Segundo Teles (2004), até o século XVII, a Álgebra era apenas uma generalização da Aritmética. Ao iniciar o século XIX, ela estende-se à teoria dos grupos, devida às contribuições de Gauss e, sobretudo, às descobertas de Evariste Galois. Posteriormente, surge a teoria dos corpos, por obra de Kjummer, tendo o estudo das estruturas algébricas abstratas como principal objetivo da Álgebra.

Concomitantemente, Boyer (1996) conclui, a multiplicidade de álgebras inventadas nesse século impulsionou o desenvolvimento de determinados conceitos estruturais, dentre eles o conceito de grupo foi imprescindível para o surgimento das novas ideias abstratas.

Assim sendo, todos os esforços do século XX refletem no espírito de generalização e abstração que prevalece atualmente na Matemática. Assim sendo, podemos sintetizar a história da Álgebra. Parecia surpreendente no início do século XIX, e enfraquecendo ou suprindo seus postulados com o decorrer do tempo, ou substituindo-os, chega ao século XX com raízes mais sólidas para as estruturas algébricas, e consequentemente, “a álgebra tornou-se o vocabulário da matemática dos dias de hoje e foi apelidada “a chave mestra da matemática”.” (EVES, 2011, p. 553, grifo do autor).

Em síntese, ao longo da história percebe-se o despontar de uma Álgebra falha, que se desenvolve com maestria ante as necessidades de uma sociedade em constante processo de evolução, se tornando a sustentação de toda a Matemática.

1.2 Concepções do ensino de Álgebra

Igualmente a Matemática careceu evolucionar para prover as necessidades humanas, a linguagem algébrica necessitou se modificar para atender as exigências da própria Matemática. Até o início do século XIX, tudo o que se tinha da Álgebra parecia apenas um acúmulo de regras desconexas. A partir da segunda metade deste, incidiram grandes descobertas que impulsionaram o desenvolvimento desta ciência (BOYER, 1996; EVES, 2011).

Em decorrência destas, têm-se, os conhecimentos algébricos, os últimos a serem consolidados, e de demasiada importância na construção dos conceitos matemáticos, os quais possuem tamanha plenitude no desenvolvimento das diversas ciências na contemporaneidade (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993).

Diante de todo feito da Álgebra nos últimos séculos, é imprescindível discutir o ensino aprendizagem dos seus conceitos. De acordo com Teles,

> O desenvolvimento tardio da Álgebra, registrado na história da Matemática e na própria estruturação do saber científico, parece dar indícios para o estudo, na Educação Matemática, da existência de dificuldades conceituais importantes, subjacentes à construção deste campo do conhecimento matemático. (TELES, 2004, p. 8).

Tais conceitos algébricos consolidados nos últimos séculos, imprescindíveis para a compreensão da Matemática, requerem uma aprendizagem significativa. E estudos mostram um ensino restrito a apenas aspectos técnicos, sem nenhuma contribuição para o desenvolvimento do pensamento abstrato (BOOTH, 1995; FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993).

Este ensino tem priorizado a memorização e mecanização de fórmulas refletindo diretamente na compreensão e na aprendizagem da Álgebra (LINS e GIMENEZ, 1997). Assim, não basta operar conteúdos matemáticos, é imprescindível compreendê-los, para tal, faz-se necessário incitar a investigação matemática para uma melhor percepção dos conceitos algébricos tendo em vista uma aprendizagem expressiva da Álgebra.

Lins e Gimenez (1997) enfatizam a importância de um ensino que explore as conexões entre os diversos campos da Matemática, expandido e efetivando a compreensão dos múltiplos conhecimentos potencializando o ensino e a aprendizagem desta disciplina. E destacam "[...] é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra." (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 10).

O ensino da Álgebra deve propiciar uma aprendizagem da Matemática que corrobore para o desenvolvimento do pensamento abstrato no estudante, o qual é imprescindível na construção do conhecimento, e, essencial para uma atuação precisa como cidadão ativo em harmonia com a sociedade. Assim, o desenvolvimento do pensar e do raciocinar algebricamente, carece um ensino que fortaleça a escrita dessa concepção (BLANTON e KAPUT, 2005; CANAVARRO, 2007; COELHO e AGUIAR, 2018; KIERAN, 2007; KIERAN et al, 2016).

Pietrocola (2002, p. 105-106) afirma que:

> Se a matemática é a linguagem que permite ao cientista estruturar seu pensamento para apreender o mundo, o ensino da ciência deve propiciar meios para que os estudantes adquiram esta habilidade. Não parece que um mero domínio operacional dos conteúdos matemáticos seja capaz de permitir a incorporação de tal habilidade.

Sabe-se que o maior desafio do homem do século XXI é compreender o seu mundo. Aprender as ciências foi, tem sido e continuará sendo uma necessidade de sobrevivência do ser humano no universo qual ele se encontra (D'AMBROSIO, 1996). A princípio, Boyer (1996) conjecturara que o grande desenvolvimento da humanidade majoritariamente seria impulsionado por problemas incorporados da própria matemática pura, no qual, as aplicações da Matemática à ciência se multiplicariam infinitamente.

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) discorrem sobre as três concepções de Educação Algébrica, são elas: *linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural e fundamentalista-analógica.* A primeira caracterizada na aquisição mecânica de técnicas que possibilitavam a resolução de equações específicas. Na segunda, prevalece a crença de que a introdução de propriedades que compõem as operações capacitaria os estudantes a aplicarem e desenvolverem os conceitos em diferentes situações. Por último, baseada no uso de recursos analógicos geométricos e visuais, configura-se a terceira concepção de Educação Algébrica no Ensino Básico.

Percebe-se nas três concepções uma lacuna no ensino dos conceitos algébricos, pois, estas deixam de considerar a importância e a complexidade do pensamento algébrico e da Álgebra, visto que, se restringe meramente à linguagem algébrica. E consequentemente, acarretam na existência de um ensino mecânico de fórmulas e regras desconexas promovendo a redução do pensamento algébrico á linguagem algébrica (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM,1993; LINS e GIMENEZ 1997).

Deste modo, conclui-se que da mesma forma que as primeiras concepções voltaram-se para a linguagem em detrimento do pensamento, do mesmo modo, as últimas enfatizaram o ensino de uma linguagem algébrica edificada, contrariamente ao interesse da construção do pensamento algébrico, o que fere as recomendações dos PCNs. À vista disso,

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução e não atividades voltadas para a memorização desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce de conceitos. (BRASIL, 1998, p. 63).

Portanto, é imprescindível analisar que esse pensamento pode incidir de diferentes formas, seja por meio da linguagem geométrica, da linguagem algébrica, da linguagem textual, e inclusive, por mais de um tipo de linguagem. Por fim, o método de construção do pensamento algébrico é determinado de acordo o contexto da realidade para uma maior eficácia no processo de ensino aprendizagem da Álgebra, visto que, a estruturação dos seus conceitos demanda abstração. Deste modo, a construção do conhecimento algébrico, não deve ser estruturada a partir de exemplos, mas, de generalizações das diversas situações, sobrepondo o pensamento abstrato.

1.2.1 A Álgebra sob o âmbito escolar

O histórico de evolução da Álgebra, além de nos enunciar como certos obstáculos foram discorridos, e eventualmente superados, similarmente assinala quais deles carecem maior importância no ensino desta ciência. A identificação de acontecimentos que retardaram o seu desenvolvimento e como estes entraves foram superados corrobora para uma melhor compreensão das dificuldades no ensino desta área da Matemática no âmbito escolar (TELES, 2004).

Segundo Coelho e Aguiar (2018), estudos mostram possíveis deficiências no aprendizado da Álgebra. Tais constatações acarretaram, ao longo do tempo, discursões e investigações que resultaram em múltiplas reformas educacionais e na elaboração de novas diretrizes para o sistema educacional. Todas estas mudanças trouxeram poucas alterações para o ensino desta ciência, que embora nos dias atuais, este consiste exclusivamente na aprendizagem de um conjunto de técnicas operatórias que se restringia exclusivamente na obtenção de soluções de equações sem nenhuma contextualização.

Nessa perspectiva, fica nítida a importância de motivar o estudante do Ensino Básico com questões contextualizadas que envolvam as operações, de modo que, ao apontar o conceito de operação seja ofertado ao aluno o significado dos primeiros conceitos algébricos. Essa estratégia, se abordada de forma precisa, originar-se-á direções, as quais nortearão para uma aprendizagem efetiva da Matemática.

Entretanto, a história aponta que este ensino se resumia na identificação de equivalências entre as expressões algébricas a partir do uso de um conjunto de regras e propriedades, que resultava na prática mascarada de habilidades. “Acreditava-se que isso fosse o suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas, problemas esses na maioria das vezes deslocados da realidade.” (COELHO e AGUIAR, 2018, p. 173). Esta aquisição mecânica de técnicas, denominada pelo transformismo algébrico, foi o pilar do ensino de Álgebra durante todo o século XIX e meados do século XX.

Todas as abordagens existentes no decorrer do ensino de Álgebra se reduziram ao simples manuseio de práticas algébricas. Para Usiskin (1995) a finalidade desse ensino ainda consiste no ato de medir a capacidade de manejo das técnicas operatórias, qual futuramente, não será tão necessário, visto o desenvolvimento tecnológico atual. Deste modo, o treinamento de técnicas algébricas enrijece de forma precária o desenvolvimento dos conceitos algébricos, e consequentemente, irá contribuir de forma insatisfatória no processo de construção do pensamento algébrico.

A álgebra escolar, imprescindível à elaboração do conhecimento humano, não se restringe tão somente a um conjunto de procedimentos algébricos. Ela é muito mais que uma linguagem, antes de tudo, uma forma de pensar.

Deste modo, ensinar Álgebra, desenvolver o pensar, sobretudo, alargar o raciocínio algébrico, “[...] deve estar associado com a forma de escrever esse pensamento, e essas habilidades devem ser conjuntamente desenvolvidas sem enfatizar nenhuma delas em detrimento da outra.” (COELHO e AGUIAR, 2018, p. 175).

Para tal, os resultados obtidos devem estar acoplados à forma de pensar do estudante na ocasião de abordagem do saber priorizando o desenvolvimento do raciocínio acerca das distintas situações matemáticas.

Depreende-se dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (1997, 1998) que, o estudo de Álgebra, no Ensino Fundamental, deve ocorrer de forma que o aprendiz possa desenvolver a habilidade de relacionar a Matemática às múltiplas situações cotidianas, bem como, a competência de justificar algebricamente seus apontamentos matemáticos acerca destas conjunturas. Uma vez que, “a Matemática move-se quase exclusivamente no campo dos conceitos abstratos e de suas inter-relações.” (BRASIL, 1997, p. 27). Ainda apontam que o ensino desta área do conhecimento deve corroborar o desenvolvimento de habilidades e competências acopladas ao alargamento da maneira de pensar algebricamente.

Assim, no que compete ao ensino de Matemática, a BNCC traz grandes alterações no programa desta ciência. Enquanto os currículos anteriores priorizavam a formação para o mercado de trabalho a Base enfatiza o desenvolvimento de competências, o que significa um repensar no currículo escolar, uma vez que, esta determina os conteúdos essenciais que devem ser abordados em cada etapa do Ensino Básico, mas, não define o método, qual é o responsável pelo desenvolvimento das habilidades de maior complexidade e significação.

Dentre as modificações no que discorre à Matemática, o texto apresenta novas terminologias para os antigos eixos, os quais se encontram subdivididos em cinco unidades temáticas. Destas, surpreendentemente percebe-se um novo eixo desde o primeiro ano do Ensino Fundamental, o eixo Álgebra.

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento - pensamento algébrico - que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2017, p. 270).

Segundo a BNCC, os alunos podem aprender, desde cedo, conceitos que auxiliam no desenvolvimento do pensamento algébrico.

> Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental - Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. [...] No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam,

> aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. (BRASIL, 2017, p. 270).

Ainda em concordância com a Base, o Ensino Fundamental deve proporcionar aos alunos aptidão para compreender conceitos algébricos fundamentais para uma asserção futura da Álgebra.

É necessário, portanto, uma aproximação da linguagem algorítmica com a linguagem algébrica, sobretudo, corroborando para o desenvolvimento de habilidades pertinentes à Álgebra essenciais à expansão do pensamento computacional dos educandos.

No que se refere ao ensino da Álgebra, sobretudo, à aprendizagem matemática, uma vez que, a abstração intervém de forma demasiada no estudo desta ciência, tais mudanças podem transformar significativamente o ensino-aprendizagem desta área. Outrora, ensino dos conceitos algébricos, em geral, era introduzido no findar dos Anos Finais do Ensino Fundamental, de forma inconsistente, priorizando a manipulação de técnicas algébricas, e, deixando de lado o pensamento algébrico, não contribuindo para o alargamento dos conhecimentos matemático.

Contudo, os novos estudos norteiam o desenvolvimento de alguns aspectos da Álgebra desde o primeiro ano do Ensino Fundamental, mas, é especialmente nos seus últimos anos, que os conhecimentos algébricos são expandidos.

No entanto, é necessário um efetivo alicerce para que os aprendizes possam reconhecer as múltiplas funções da álgebra na representação dos inúmeros problemas existentes na contemporaneidade. Por unanimidade, teóricos em Educação Algébrica, bem como, a BNCC defendem a inserção de conceitos algébricos desde o início deste segmento. Neste entendimento, declara os PCNs.

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1998, p. 50-51).

Esse encaminhamento dado à instrução da Álgebra no Ensino Fundamental, será continuado, e de modo consequente, ampliado no findar da Educação Básica.

Entretanto, os estudos mostram que a ênfase dada a este campo do saber não garante o sucesso no âmbito escolar.

> Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (BRASIL, 1998, p. 116).

Posto que, assuma a relevância do trabalho nomeado de pré-álgebra nos Anos Iniciais, este carece ser retomado nos Anos Finais do Ensino Fundamental para que os conhecimentos algébricos possam ser ampliados e consolidados. Para tal, as práticas algébricas devem propiciar ao aluno a habilidade de estruturar o seu conhecimento matemático embasado no contexto qual ele pertence a partir situações-problema. Portanto, é preciso diversificar os contextos dos problemas para tonar oportuno a construção do pensamento algébrico.

No momento atual, teóricos como Blanton e Kaput (2005), Canavarro (2007) Coelho e Aguiar (2018), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Kieran (2004), Kieran et al (2016) e Ponte, Branco e Matos (2009) evidenciam que a principal finalidade do estudo da Álgebra no Ensino Básico é desenvolver o pensamento algébrico. Desse modo, o pensamento algébrico é passível de ser interpretado como uma forma de estruturação do pensamento. Para tal, faz-se necessário o entendimento do que possa corresponder o pensamento algébrico e de que forma pode ser desenvolvido no círculo escolar.

1.2.2 Um repensar: o pensamento abstrato

Segundo Machado (1991) o ensino de Álgebra carece uma conexão entre o pensar, bem como, o raciocinar algébrico e o modo de escrita deste pensamento. Tais aptidões devem ser desdobradas concomitantemente e suas implicações devem estar acopladas à maneira de pensar do que está sendo ensinado. Deste modo, é essencial desenvolver o conhecimento algébrico. Neves (1995) elucida o pensamento algébrico ao afirmar.

> Como toda forma de conhecimento, o conhecimento algébrico é também um produto cultural, construído no processo de ensino e aprendizagem a partir de um conhecimento humano já existente. Para se construir um conhecimento deste tipo será preciso pensar algebricamente. Chamaremos de pensamento algébrico esta intenção ou forma de pensar que possibilite a construção de um conhecimento algébrico. (NEVES, 1995, p. 1-2).

Assim, é necessário desenvolver um pensar que possibilite o aluno aprender Álgebra. Compreender que essa, da mesma maneira que, a matemática em si, não se restringe exclusivamente às questões conhecidas pela humanidade. Sobretudo, a Álgebra dispõe de estrutura e propriedades próprias e requer um desenvolvimento adentro de si mesma. Este universo abstrato, com tal característica, carece ser assistido e desenvolvido na estruturação do conhecimento do aluno, por certo que, o raciocínio abstrato propiciará uma atuação significativa do indivíduo na sociedade em que vive.

A magnitude do pensar algebricamente também é assistida nos documentos oficiais. À vista disso, os PCNs sinalizam a existência de "[...] um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra." (BRASIL, 1998, p. 116). Essa sutileza, na maioria das vezes, é imperceptível aos nossos olhos, uma vez que, a habitual ação de contar se baseia numa tática cognitiva, na qual, reina a abstração.

Ao recorrer à história da Matemática, percebe-se que a falta de compreensão de que a Álgebra não sobreviveria independente de quaisquer justificativas de outras áreas da ciência, que retardou o desenvolvimento do pensamento algébrico abstrato. Visto a importância do pensamento abstrato, questiona-se: como se tornar apto a discorrer "abstratamente"?

Coelho e Aguiar nos contempla com a resposta campeada.

> É claro que alguns conceitos abstratos são mais facilmente aceitos que outros e mais naturalmente assimilados em nosso sistema educacional. Por outro lado, o nosso cotidiano está cheio de momentos em que o pensamento abstrato se faz necessário, quer seja quando discutimos política ou religião ou mesmo esporte, quer seja quando buscamos padrões ou analogias em nossas argumentações. O pensamento abstrato não aparece apenas na matemática ou na Álgebra, especificamente, é algo que nos auxilia no desenvolvimento do ato de raciocinar e, por não ser uma característica inerente ao ser humano, ele pode ser desenvolvido de acordo com o meio social em que vivemos. (COELHO E AGUIAR, 2018, p. 177).

Em vista disso, as concepções algébricas carecem ser incrementadas, desde os anos iniciais do Ensino Básico, evidenciando as múltiplas formas de representação dos conceitos matemáticos por meio de habilidades conquistadas por intermédio dos procedimentos algébricos assistidos, uma vez que, “[...] o desenvolvimento do pensamento é determinado pela linguagem, isto é, pelos instrumentos linguísticos do pensamento e pela experiência sociocultural da criança.” (VYGOTSKI, 1989, p. 44).

De acordo com Ferreira (2017, p. 20-21), o pensamento algébrico exprime-se “[...] como uma forma de estruturação do pensamento - passível de ser desenvolvida desde a Educação Infantil, percorrendo toda a escolaridade - que pressupõe a generalização, transpondo situações particulares a ideias gerais.”. Neste contexto, o ofício de ensinar o aluno a pensar algebricamente deve principiar a Educação Básica.

Sob outra perspectiva, Wasserman (2016) enfatiza a urgência de conhecer e problematizar as operações no âmbito escolar, de modo que, se tenha conhecimento de suas propriedades, pois, “a identificação destas propriedades e a sua generalização desde os primeiros anos de escolaridade constituem uma base importante para o pensamento algébrico.” (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 28).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) afirmam que o pensamento algébrico é algo que vai muito além da Matemática.

> O modo como buscamos caracterizar o pensamento algébrico nos leva, portanto, a pensar que ele é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p.88).

A princípio, o pensamento algébrico desponta no saber assimilado informalmente pelo aluno no seu cotidiano, e, potencializa-se nos conceitos formais propagados pela escola. O ato de incitar a exploração de padrões nos Anos Inicias, instiga o aluno a pensar algebricamente. Em função disso, observa-se um reflexo promissor para a compreensão das propriedades operatórias, onde, os educandos são encorajados a lidar com a abstração, expandindo assim, o pensamento abstrato.

Portanto, é observado tanto na literatura algébrica como nos documentos oficiais, nos quais, é enfatizada a importância do ensino dos conceitos algébricos eleger a construção do pensamento abstrato. Para tal, será imprescindível propiciar no ambiente escolar, especificamente nas aulas de matemática, discussões, questionamentos, reflexões que direcionem à demanda de autossuficiência para a tomada de decisões e, consequentemente, arbitrariamente possa fornecer o pensamento crítico.

1.3 O ensino integrado entre Aritmética, Álgebra e Geometria

De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) a inserção da Álgebra às demais cadeiras do sistema educacional brasileiro ocorreu no início do século XIX. No entanto, essa segmentação perduraria anos após a Reforma Francisco Campos[5] (1931), a qual unificou os campos matemáticos, que a princípio, eram estudados separadamente, em uma única área, ou seja, “[...] a criação de uma nova disciplina denominada Matemática, na qual se reuniriam os ensinos até então isolados da Aritmética, da Álgebra e da Geometria [...]” (GOMES 2012, p. 38). Em síntese, “[...] mais do que qualquer outra coisa o modernismo significou uma mudança na forma de encarar o papel dos conteúdos matemáticos no ensino.” (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 49).

Este fragmento das instruções pedagógicas da Reforma sintetizava o significado da modernização:

> A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico cujas partes estão em viva e íntima correlação. A acentuação clara dos três pontos de vista - Aritmético, Algébrico e Geométrico - não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas. (BICUDO, 1942, p. 157).

Para Miorim (1998), a preocupação persistia na articulação dos vários campos gradativamente, de modo a contemplar o rol de conceitos pertinentes a cada estágio da educação matemática escolarizada, estabelecidos pelo programa de ensino da Reforma.

Embasado nessa percepção, prevalecem ainda, nos dias de hoje, tentativas de correção dos excessos legados pelo movimento modernista, que mesmo ante as inúmeras reformulações, não conseguiu amenizar o descaso pela Álgebra. Sendo assim, o ensino matemático, e especificamente, no que tange ao ensino dos tópicos algébricos, carece de diretrizes capazes de atualizar e subsidiar o ensino-

---

[5] Constitui á primeira reforma educacional de caráter nacional, realizada em 1931, sob o comando do ministro da educação e saúde Francisco Campos.

aprendizagem deste campo do saber, uma vez que, este vem desempenhado um papel intrínseco na história do pensamento humano.

Segundo Lins e Gimenez, o trabalho com Álgebra deve começar ainda no início do Ensino Básico. Os autores sinalizam a necessidade dos conhecimentos algébricos e aritméticos se desenvolverem juntos, de forma que uma área implique no desenvolvimento da outra. Os mesmos expõem reflexões pertinentes para o ensino desta: "[...] a introdução da álgebra é o grande momento de corte na educação matemática escolar, e que a reação usual é deixar para depois, ao invés de antecipar essa introdução." (LINS E GIMENEZ, 1997, p. 11).

Nesta mesma tendência, os documentos oficiais afirmam.

> Há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria). (BRASIL, 1997 p. 53).

Para tal, faz-se necessário a compreensão do elo existente entre a Álgebra, Aritmética e Geometria. Entretanto, o estudo dessas ciências decorre de forma desintegrada embora sejam três áreas correlatas na Matemática. O ensino interdisciplinar pode enrijecer o processo de ensino aprendizagem destes três campos, uma vez que, são ciências que dispõem nexos entre seus conteúdos, estando estas entrelaçadas historicamente.

No princípio, de acordo com Eves (2011, p. 262), os conceitos desabrochavam supostamente individualizados, no entanto, "antes de Maomé os árabes escreviam todos os números em palavras [...]", ao mesmo tempo, Boyer (1996, p. 232-233), conceitua a álgebra geométrica antiga como um instrumento eficaz, ao mostrar "[...] como as operações algébricas, inclusive a resolução de quadrática, são interpretadas geometricamente [...]", e complementa, "[...] Descartes tinha discutido os méritos relativos da álgebra e da geometria, sem mostrar parcialidade por nenhuma delas.". Embora, esta coexistência triunfe desde a antiguidade, hoje, não existe uma ciência em si, existe encadeamento entre estes três campos do saber, os quais constituem uma única ciência, a Matemática.

Sendo assim, o ensino da Álgebra, integrado com a Aritmética e a Geometria tende a contribuir veementemente para um efetivo processo de ensino aprendizagem da Matemática. Todavia, as práticas tradicionais de ensino corroboram para um estudo tardio dos conceitos algébricos no Ensino Básico. E consequentemente, corrobora para um processo contínuo de ensino, em que estas três áreas são desenvolvidas separadamente.

Concatenar estes três ramos da Matemática, de modo que, o estudante possa depreender que a Álgebra é a generalização da Aritmética, bem como, a Aritmética é a estrutura da Álgebra. Da mesma maneira que, a Geometria venha ser compreendida como um instrumento de visualização das duas primeiras. Dado que, “a aritmética e a álgebra constituem, junto com a geometria, a base da matemática escolar.” (LINS E GIMENEZ, 1997, p. 12).

Para tal, é imprescindível enfatizar a importância do uso da Geometria no desenvolvimento dos conceitos algébricos e aritméticos no início do Ensino Básico, de forma que seja possível, o aluno visualizar os conhecimentos matemáticos. No entanto, é necessário, no findar, atestar que a Álgebra é a “chave mestra” da Matemática, visto que, a ela é atribuída, a incumbência justificação das demais. Em síntese, a Álgebra é a sustentação de toda Matemática. Isto é, “um mundo, enfim, completamente “abstrato”.” (LINS E GIMENEZ, 1997, p. 91).

Neste contexto, no que concerne o pensar “abstratamente” os PNC reiteram:

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar “abstratamente”, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados. (BRASIL, 1998, p. 117).

De fato, integrar o ensino matemático é subsidiar o aluno das múltiplas formas de representação e/ou justificação de um mesmo objeto matemático. É contribuir significativamente para uma aprendizagem sólida da Matemática. À vista disso, os documentos oficiais complementam.

> No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medidas, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para os cálculos das áreas. O aluno também poderá ser estimulado a construir procedimentos que levam à obtenção das fórmulas para calcular o número de diagonais ou determinar a soma dos ângulos internos de um polígono. (BRASIL, 1998, p. 118).

De modo incompatível, o ensino dos conhecimentos matemáticos seguem padrões tradicionais. Por consequência, este método educacional não assegura ao aluno o uso do raciocínio, e tão pouco, o instiga a utilizar o conhecimento de mundo que este traz consigo (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993; LINS e GIMENEZ, 1997; TELES, 2004). Num cenário ainda pior, a Álgebra, a Aritmética e a Geometria são expostas como três disciplinas distintas, e seus conteúdos abordados separadamente (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992).

Portanto, o ensino de Matemática recai em um imenso equívoco, visto que, ao separar estas três áreas, torna-se disperso o autêntico significado matemático, o qual consiste em revelar a Matemática como uma ciência única e rara em todas suas dimensões. Em outras palavras, pode-se dizer que “as inovações aparecem, mas esbarram nos conteúdos arraigados que não perdem o seu espaço no Ensino Fundamental.” (AGUIAR, 2014, p. 286).

Por fim, o que concerne a esta três áreas, é genuinamente, a extensão do saber matemático e nunca os conhecimentos subdivididos. Portanto, em um quadro mais amplo, o ensino destes conhecimentos deve eleger o processo de construção de significados de todas as suas esferas de forma unificada para tornar essa ciência única e perfeita. Em suma, “o que precisamos é de uma perspectiva diferente, é preciso reconceitualizar o papel da escola.” (LINS E GIMENEZ, 1997, p. 20).

1.3.1 A Álgebra como aritmética generalizada

Percebe-se ao longo do contexto histórico da Matemática uma segmentação entre a Aritmética e a Álgebra, visto que, esta se desenvolveu após a primeira. E de modo consequente, os conceitos aritméticos têm precedido o ensino da Álgebra. Carraher et al. (2006, p. 89) alegam que, “o fato da álgebra emergir historicamente após a aritmética e como uma generalização desta, sugere para muitas pessoas que a álgebra deve vir em seguida da aritmética no currículo.”.

Conquanto, essa delimitação vem sendo duramente questionada pela nova literatura algébrica (CANAVARRO, 2007; LINS e GIMENEZ, 1997; RUSSELL, SCHIFTER e BASTABLE, 2011), na qual, é defendida a coexistência da Educação Algébrica com a aritmética, de modo que, esses dois âmbitos da Matemática desenvolvam-se juntos, uma vez que, o pensamento algébrico abstrato pode contribuir para a construção dos conceitos aritméticos, sobretudo, instaurar uma aprendizagem arraigada da própria Matemática.

Visto que, existe entre a Álgebra e a Aritmética uma

> [...] relação de complementaridade uma vez que a primeira, devido ao seu poder de generalização, era encarada como uma ferramenta mais potente que a segunda, pois ampliava as possibilidades desta última, especialmente no que se refere à resolução de problemas. (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 42-43).

Os argumentos de Pérez e Marín (1928, p. 13) enrijecem esta percepção, visto que, “[...] na álgebra dá-se maior generalidade que na arithmetica ao estudo da quantidade e à resolução dos problemas.”. O autor elucida que “o fim que se propõe a arithmetica é encontrar um número, e este refere-se a um caso particular e concreto. O fim que se propõe a álgebra é achar uma fórmula, e esta refere-se a um caso geral e abstracto.".

Nessa perspectiva, Usiskin (1995) propõe que o ensino dos conceitos algébricos deve ter como base a generalização da Aritmética. O autor observa que, o desenvolvimento de tais conceitos, deve contribuir efetivamente para o encontro das respostas exigidas nas múltiplas circunstâncias existentes no contexto do aluno. Para tal, faz-se necessário compreender que o ensino desta ciência consiste no estudo das estruturas matemáticas.

Todavia, conjectura-se de que a maior dificuldade na aprendizagem da Álgebra, na verdade, são provenientes de problemas legados do estudo da aritmética. Sendo assim,

> Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam aprendidos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado. (BOOTH, 1995, p. 33).

Segundo Teles (2004), os estudos em educação matemática atribuem à Aritmética, as operações e suas propriedades, e o aspecto de generalização desta à Álgebra. Para a autora, no que tange a matemática escolar, tanto é incabível delimitá-las, quanto ordená-las. Deste modo, não existe estudo dos conceitos a aritméticos sem lidar implicitamente com a abstração.

Um dos conceitos mais importantes da Matemática, o “[...] de número, implica, já em suas origens, uma relação complexa entre pensamento concreto e abstrato.” (ROQUE, 2012 p. 67), ou seja, o conhecido e o desconhecido, visto que, os números são infinitos. Neste contexto, é passível a inserção de noções de Álgebra na educação dos pequenos, uma vez que, o processo de contagem dá origem a “um número” e quando acrescentado mais uma unidade surge um “novo número”.

Conforme a autora, a definição de número implica, portanto, uma “abstração”.

> O conceito de número é abstrato, mas não porque pode ser representado por um símbolo, e sim porque pressupõe abstrair a natureza particular dos seres em uma coleção. A abstração torna possível um conceito de número que poderá, então, receber um nome e ser representado por um símbolo. Assim, em diferentes processos de contagem, ainda que o estabelecimento de correspondências seja equivalente, os nomes dos números podem diferir. (ROQUE, 2012 p. 68-69).

O ato de contar e fazer operações pode ser dito coisas da Aritmética, a abstração tem lugar a partir do momento em que, é preciso encontrar o número de determinado problema que foi abstraído.

De forma concomitante, Lins e Gimenez (1997) enfatizam a importância de não limitar o aprendizado de um ou outro campo da Matemática. Para eles, o ensino desta ciência deve explorar suas inter-relações.

Deste modo, a transposição do “concreto” da Aritmética para o “abstrato” da Álgebra configura-se uma das maiores dificuldades no aprendizado matemático, daí, a necessidade de uma articulação entre essas duas áreas. Usiskin (1995, p. 15) exemplifica essa transição, “isto é, para armar a equação, devemos raciocinar exatamente da maneira contrária à que empregaríamos para resolver o problema aritmeticamente.".

Teles (2004, p. 11) argumenta: “embora a dicotomia aritmética tratando de números e álgebra, de letras, como já dissemos, seja simplista, a questão do uso de representações simbólicas é central na álgebra.”. A Álgebra é muito mais do que uma simples generalização da Aritmética, sua essência direciona o indivíduo a perceber, conjecturar, generalizar, representar, justificar e comunicar-se em sociedade.

Portanto, esse elo existente entre a Álgebra e a Aritmética permeia a literatura algébrica, onde, pesquisadores em todo o mundo como Blanton e Kaput (2005), Canavarro (2007), Carraher et al. (2006), Kieran (2004), Lins e Gimenez (1997), Schliemann, Carraher e Brizuela (2007), Teles (2004), entre outros, os quais salientam que uma conexão entre essas duas áreas corrobora para uma melhor compreensão ao longo do processo de abstração ocasionando a edificação do saber matemático.

1.3.2 A relação entre Álgebra e Geometria

> A dicotomia entre número e grandezas contínuas exigia um novo método para tratar a álgebra babilônia que os pitagóricos tinham herdado. [...] Uma "álgebra geométrica" tomara o lugar da antiga "álgebra aritmética", e nessa nova álgebra não podia haver somas de segmentos com áreas ou de áreas com volumes. (BOYER, 1996, p. 53).

Historicamente, o conhecimento científico decorre de inquietações dos povos, de forma análoga, surge a álgebra geométrica, a qual é assistida pela Álgebra de Euclides. Não há dúvida que a álgebra moderna simplifica demasiadamente o estudo da Geometria. No entanto, o "[...] raciocínio algébrico de Euclides era expresso totalmente numa forma geométrica." (STRUIK, 1989, p. 92), além do mais, "[...] não era um instrumento ideal, mas era eficaz.", como afirma (BOYER, 1996, p. 75).

Do ponto de vista algébrico, a Geometria é uma ciência plenamente abstrata, de modo que, as formas geométricas devem ser compostas por intermédio da abstração e interpretadas geometricamente. Isto quer dizer, que o conhecimento matemático que usamos hoje permite enunciar situações gerais a partir da generalização das particularidades observadas de um determinado grupo de objetos. De tal modo, "a geometria, tal como a conhecemos atualmente, lida com formas abstratas." (ROQUE 2012 p. 116).

De acordo com os documentos oficiais, o ensino deve oportunizar ao aluno conteúdos geométricos que tendem a proporcionar a identificação de regularidades de forma que o possibilite fazer generalizações, como a obtenção de fórmulas, de modo que, ocasione o aperfeiçoamento da linguagem algébrica. Sendo assim, ao iniciar o estudo das construções geométricas "[...] que o aluno está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico." (BRASIL, 1998, p. 118).

De modo similar, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) em Matemática propõem uma conexão entre a Álgebra e a Geometria, de modo que, o ensino transcorra em duas vias: "[...] o entendimento de figuras geométricas via equações, e entendimento de equações, via figuras geométricas." (BRASIL, 2006, p.77). Dessa maneira, os conceitos algébricos podem ser interpretados geometricamente, e de forma análoga, os conceitos geométricos tendem a ser justificados algebricamente. Sob essa perspectiva, "[...] a Geometria tende a desempenhar, cada vez com mais frequência, um papel subsidiário na construção de conceitos e na visualização de propriedades aritméticas e algébricas." (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 50).

Num cenário divergente, no qual, uma leitura repentina tende a ocasionar uma distinção, na qual, a Álgebra assemelha a algo incompreensível, enquanto, a Geometria permite a visualização, de modo que possibilite o trabalho com

> [...] as estruturas mentais, possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É, portanto, tema integrador entre as diversas partes da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar. (FAINGUELERNT, 1995 p. 46).

Equivocadamente, a geometria manifesta-se de forma perceptível, porém, esta se constitui da abstração matemática, desde um acessível conceito de ponto às múltiplas dimensões do espaço. Todavia, essa ideia de visualização legada por esta ciência permite uma resolução geométrica de determinada situação-problema para, posteriormente, partir para uma resolução algébrica.

> Assim, entendemos que a geometria pode propiciar um campo vasto de problemas que poderia ajudar nos processos de algebrização e de modelização para que os alunos pudessem mobilizar a álgebra não de forma mecânica, mas como ferramenta que proporciona a solução desses problemas. (SILVA, GAITA e SALAZAR, 2017, p. 18).

Nessa perspectiva, este campo do saber por diversas razões propicia uma pluralidade de oportunidades, das quais, resolver problemas é uma delas, desse modo, os conhecimentos geométricos propiciam um acervo de estratégias para a resolução de problemas, para tanto, o processo educacional deve proporcionar a integração com os demais subtemas para uma perceptibilidade da Matemática como um todo na compreensão do indivíduo.

Ainda nesse contexto, os PNCs enfatizam a relevância de um universo de situações que torne possível esse elo entre diferentes temáticas, oportunizando ao aluno uma concatenação dos conhecimentos dessas três áreas que constituem a matemática elementar, uma vez que, a Geometria assegura o poder da visualização, intensificando a capacidade mental de arquitetar caminhos para a questão solicitada.

De tal modo, este artifício de abstrair a princípio a Geometria, e subsequentemente, permanecer com a definição algébrica contribui para uma compreensão mais ampla do problema, no entanto, este encadeamento, no qual, o uso dos conhecimentos geométricos corrobora para uma argumentação consistente dos cálculos algébricos, tende a contribuir efetivamente para a construção do saber matemático.

Sendo assim, a abordagem algébrica definida pela abstração de características corriqueiras a objetos de naturezas distintas, na qual, são introduzidos conceitos algébricos no estudo da Geometria, de modo que possa transformar de forma gradual a estruturação das demonstrações geométricas. Portanto, “[...] o que determina a extensão de cada tópico é o desenvolvimento em seu próprio conjunto antes de ser interpretado em seu senso matemático mais amplo.” (SIGURDSON, 1962, p. 179 apud MIRANDA, 2003, p. 42).

1.3.3 A proposta de integrar a Álgebra, a Aritmética e a Geometria

Em virtude da inteligência humana, o mundo atual se depara em extensa transição, na qual, a Matemática tem desempenhado papel insubstituível no avanço do conhecimento científico. Nessa perspectiva,

> [...] a matemática vem passando por uma grande transformação. Isso é absolutamente natural. Os meios de observação, de coleção de dados e de processamento desses dados, que são essenciais na criação da matemática, mudaram profundamente. Não que se tenha relaxado o rigor, mas, sem dúvida, o rigor científico hoje é de outra natureza. (D´AMBRÓSIO, 1996, p. 58).

Dentre as principais mudanças, a Álgebra se tornou parte essencial da Matemática. A princípio, seus conhecimentos eram encontrados na matemática utilizada no comércio.

Desde os primórdios, havia uma delimitação da aplicabilidade do saber matemático, a Aritmética no uso dos números e das operações, a Geometria nas formas e a Álgebra na resolução de equações e problemas da época. Estes três ramos se desenvolviam de acordo as necessidades do homem como: divisão de terras e cultivo, partilhas de bens, na astronomia, nas negociações comerciais, na arte, dentre outros (BOYER, 1996; EVES, 2011).

No que refere à contemplação destas três áreas, os PCNs ressaltam a importância de identificar corretamente os conhecimentos a serem explanados, de modo que, contribuam para o desenvolvimento intelectual do educando, ou seja, esses saberes devem auxiliar “[...] na construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica [...]” (BRASIL, 1997, p. 53).

Não há dúvidas de que existe um longo caminho a ser percorrido, uma vez que, a concepção dos conceitos algébricos requer a compreensão dos mesmos, ou seja, sua elaboração desenrola-se, ao passo que, o desenvolvimento cognitivo do aluno é revelado. Tal caminho, também, pode ser tortuoso e com alguns obstáculos conforme afirma Booth (1995), as dificuldades deparadas provêm da interpretação que o aluno faz do símbolo operatório, da obrigação de precisão absoluta no registro de dados, da aplicação de letras para designar valores. Segundo o autor, é necessário refletir as percepções erradas, bem como, os entraves no ensino e aprendizagem da Álgebra.

Sob essa perspectiva, os alunos necessitam encontrar acepção nos conceitos algébricos, de forma que ao conectar as novas informações aos conhecimentos prévios já existentes, estes possam refletir e construir significados para as relações matemáticas, de maneira que ao utilizar suas representações intuitivas aos poucos vão aprendendo a elaborar representações convencionais, bem como, a formular generalizações fazendo uso da notação algébrica (SILVA e SAVIOLI, 2012).

Segundo Aguiar (2014, p. 285), “a textualização do saber favorece o aluno a pensar, questionar e a tirar suas próprias conclusões.”. Sendo assim, o contexto histórico-social da Matemática pode contribuir efetivamente na compreensão desta ciência.

> A aritmética transformou-se em álgebra, não só porque possibilitava melhores cálculos práticos, mas também porque era o resultado natural de uma ciência cultivada e desenvolvida nas escolas dos escribas. Pelas mesmas razões, a medição deu origem aos começos - mas não mais que isso - da geometria teórica. (STRUIK, 1989, p. 48).

Ao longo do tempo, conforme é retratado pelo contexto histórico, a existência de uma delimitação da Matemática, assim, o seu ensino, de modo semelhante, tem seguido o mesmo paradigma de fragmentação entre seus âmbitos, no qual, a aprendizagem da Aritmética, Álgebra e Geometria ocorre separadamente, como se fossem disciplinas diferentes.

A atual literatura matemática aponta para a reformulação do ensino, a qual enfatiza a necessidade da inclusão da Álgebra ainda nos anos iniciais da Educação Básica, bem como, a importância do estudo pautado no elo existente entre as múltiplas concepções matemáticas (BRASIL, 1997, 1998, 2017; CANAVARRO, 2007; KIERAN et al, 2016). Em suma, essa instrução unificada dessas três áreas deve principiar a construção do saber matemático como uma única disciplina, a Matemática. (FERREIRA, 2017; LINS e GIMENEZ, 1997; LORENZATO 2006; TELES, 2004; USISKIN, 1995).

Segundo Canavarro (2007), nos últimos anos, tem-se presenciado um movimento que aponta para uma inserção do pensamento algébrico na matemática escolar desde o seu princípio. A autora ainda afirma que,

> A introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade representa um passo em frente muito significativo pela possibilidade que inspira de uma abordagem à Matemática mais integrada e interessante, na qual os alunos desenvolvam as suas capacidades matemáticas motivados por uma atividade rica e com sentido, que lhes possibilita a construção de conhecimento relevante, com compreensão, ampliando o seu património quer ao nível dos processos, quer dos produtos matemáticos (conhecimentos que podem usar posteriormente). Em consequência, os alunos poderão desenvolver uma atitude favorável em relação à Matemática, reconhecendo a sua unidade, o seu valor e o seu poder, e poderão igualmente conseguir melhorar a preparação para as aprendizagens posteriores, nomeadamente no domínio da Álgebra. (CANAVARRO, 2007, p. 113).

Na percepção da autora, o caminho para alcançar uma aprendizagem duradoura da Matemática inclui infiltrar a Álgebra ao longo de todo o currículo desde os anos iniciais.

De acordo com Lorenzato e Vila (1993), a História da Matemática aponta que essa ciência vem assistindo as inquietações da vida quotidiana durante séculos. No entanto, ao longo da escolaridade, não é apresentada a dimensão exata de sua aplicabilidade.

Os conhecimentos matemáticos a serem ensinados devem assistir ao homem e à sociedade, uma vez que, "[...] se a sociedade muda, e com ela suas demandas, temos já, aqui, um inicio do que é importante fazer: preparar nossos estudantes para a mobilidade." (LORENZATO e VILA 1993, p. 41). Isso quer dizer, que é preciso rever o ensino deste campo do saber e dispondo aos alunos uma efetiva compreensão dos conceitos e princípios matemáticos, de modo que estes possam raciocinar e comunicar matematicamente, bem como, aplicar seus conhecimentos a problemas reais.

Visto que, o saber matemático de séculos atrás difere da matemática abstrata de hoje, este trabalho sugere a integração de todos os campos desta ciência, uma vez que, não existem várias disciplinas, e sim, conhecimentos coexistentes entre si que constituem uma única Matemática. Essa conexão entre os diferentes ramos deste campo do saber é exposta por Ávila (2006, p. 20) numa análise da obra de Euclides, "um equívoco que se comete com frequência é pensar que os Elementos são uma obra apenas sobre Geometria. Na verdade, há muito de Aritmética e Álgebra em vários dos livros dos Elementos.".

Este estudo fundamenta-se no aporte teórico algébrico, o qual sugere a inserção da Álgebra ao principiar a instrução matemática, para tal, estas concepções devem ser abordadas de forma integrada com a Aritmética e Geometria, e, aprofundadas, à medida que, decorre a evolução do desenvolvimento cognitivo. Ou seja, diferente de como este ensino tem ocorrido, ao integrá-las, não existirá sequer uma área a ser estudada inicialmente, os conceitos serão construídos em conjunto e incrementados ao longo da escolaridade.

Para tal, desde o primeiro ciclo é possível notar os elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Dentre os objetivos para esta fase:

> Interpretar e produzir escritas numéricas, levantando hipóteses sobre elas, com base na observação de regularidades, utilizando-se da linguagem oral, de registros informais e da linguagem matemática. [...] Desenvolver procedimentos de cálculo - mental, escrito, exato, aproximado - pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados. (BRASIL, 1997, p. 65).

Assim, a edificação do pensamento matemático consiste em um processo, no qual,

> As crianças constroem uma fundamentação lógica para o pensamento matemático com base em sua experiência direta e reflexão individual de como eles participam de atividades fora da escola. No entanto, as salas de aula da escola são lugares privilegiados em que as crianças têm acesso a ferramentas matemáticas e a experiências que irão expandir e fortalecer suas ideias matemáticas. (SCHLIEMANN, CARRAHER e BRIZUELA, 2013, p. 103, tradução da pesquisadora).

Daí a urgência do ensino contínuo dos conceitos matemáticos previstos no currículo do Ensino Básico, uma vez que, a segmentação dos conteúdos, e sua inserção tardia, provoca uma ruptura que perdura todo o processo de ensino aprendizagem. Posto isso, o ensino integrado tende a proporcionar a aquisição gradual dos conceitos aritméticos, geométricos e algébricos, ou seja, um aprendizado gradativo desta ciência como um todo, atendendo ao fato de que a Aritmética, a Álgebra e a Geometria juntas, constituem a base da matemática elementar (LINS e GIMENEZ, 1997).

De fato, não há justificativas para retardar o ensino tanto da Álgebra quanto da Geometria e priorizar a Aritmética, visto que, para uma base matemática sólida, ambas devem ser desenvolvidas juntas. Posto isso, é sabido que o maior osbstáculo no ensino aprendizagem dessa ciência é o desvinculo destas três áreas.

O processo de estruturação do conhecimento matemático pode ser notado na observação das inter-relações da Álgebra com a Aritmética, tal como, da Álgebra com a Geometria, em razão de que, a primeira é uma generalização da segunda, tal como, permite uma conexão com a última.

No entanto, é necessária a junção das três para proporcionar ao aluno a sabedoria de raciocinar matematicamente e aplicar na resolução dos problemas quotidianos os conhecimentos aritméticos e algébricos no que foi observado geometricamente.

Portanto, o ensino da Matemática deve explorar as conexões entre suas diversas esferas, distendendo as potencialidades no ensino e na aprendizagem desta ciência (BRASIL, 1997, 1998; CANAVARRO, 2007; FERREIRA, 2017; MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992; KIERAN et al, 2016; LINS e GIMENEZ, 1997; LORENZATO, 2006, USISKIN, 1995).

Lorenzato (2006) enfatiza a importância tanto do ensino interdisciplinar, quanto do ensino intradisciplinar ao alegar que todos os âmbitos da Matemática propostos pelo currículo da Educação Básica precisam ser instruídos de forma integrada.

Segundo Roque (2012, p. 68), é admissível “[...] pensar em uma abstração também quando associamos cores a objetos, pois abstraímos todas as outras características do objeto para nos fixarmos somente em sua cor.”. Afora que, o conceito de cor seja incompatível ao de número, ao identificar as propriedades do objeto, há uma incitação, mesmo que imperceptível, do pensamento abstrato.

Donde, desdobra diversas situações a serem exploradas algebricamente, geometricamente e aritmeticamente.

O pensamento algébrico, imprescindível à aprendizagem da Álgebra e da Matemática como um todo, pode

> [...] expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL,1993, p.88).

Embora, o pensar algebricamente vá além dos campos da própria Matemática, acredita-se que o educador, enquanto responsável pela administração currículo, possa potencializar o ensino ao integrar os conhecimentos matemáticos às diferentes ramificações pertencentes a esta esfera do saber. O uso de construções geométricas que permitam tanto a retirada de conceitos algébricos como identificar operações aritméticas encontra-se fundamentado nos PCNs.

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. (BRASIL, 1998, p. 117).

Nessa mesma perspectiva, é valido sugerir, a princípio, a abordagem com sequências de padrões geométricos acopladas a situações, em que é passível, a generalização da Aritmética para o estudo das noções algébricas, de forma a desencadear o aprendizado dos conceitos algébricos diferente de como vem ocorrendo, pois, a mecanização da Álgebra nada contribui para a aprendizagem matemática.

Embora, Ponte (2005), atente para alguns dos obstáculos encontrados no ensino aprendizagem dos conhecimentos algébricos, dentre os quais, constitui uma das

> [...] dificuldades dos alunos são na transição da aritmética para álgebra. Dificuldades em usar letras para representarem variáveis e incógnitas, traduzir informação da linguagem natural para a linguagem algébrica e compreender as mudanças de significados, na aritmética e na álgebra. (PONTE, 2005, p. 39).

Para tanto, carece compreender a maestria da abstração como algo que transcenda a mera manipulação de técnicas algébricas. À visto disso, a reestruturação do ensino de Álgebra carece ser mais qualitativa, em outras palavras, é preciso remodelar o objeto de estudo, uma vez que, apenas modificar conteúdos ou metodologias de ensino, não tem tido primazia (HOUSE 1995).

Visto que, tanto a comunidade de educadores matemáticos, quanto os documentos oficias, como, os PCNs, a BNCC, dentre outros, enfim, toda a literatura matemática, aponta para um ensino integrado dos conhecimentos matemáticos, de modo que, possa unificar as “múltiplas matemáticas”, de forma que, estas se desenvolvam juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra, ou seja, a Álgebra, a Aritmética e a Geometria, as quais constituem os ramos para o ensino da matemática elementar na Educação Básica, deixariam de ser independentes, pautadas na aprendizagem duradoura, para instituir, integradamente, uma só: a ciência de todas as ciências, a Matemática (BOOTH, 1995; CANAVARRO, 2007; FERREIRA, 2017; MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992; KIERAN et al, 2016; LINS e GIMENEZ, 1997; LORENZATO, 2006, USISKIN, 1995).

Por fim, o ensino dessa ciência é essencial “[...] para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade.” (ÁVILA, 2010, p.8).

Portanto, a Matemática é, na verdade, um meio para compreender e atuar no mundo. E, “[...] o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.” (BRASIL, 1998, p. 24). Embora, esse entendimento esbarre naquele presente tanto na sociedade de forma majoritária como na escola, as quais, de maneira equivocada, concebem à Matemática, uma estrutura de conhecimento imutável, que deve ser aprendido.

> A Matemática é uma ciência viva, não apenas no cotidiano dos cidadãos, mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos que, a par de seu valor intrínseco, de natureza lógica, têm sido instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos da maior importância. (BRASIL, 1998, p. 24).

Enfim, a construção da Matemática ocorre ante aos impasses vividos pelo homem, na sua busca incessante por compreensão de um mundo enigmático, o qual ele vive, e destes, decorre a ascensão científica revolucionária na contemporaneidade, a qual se encontra a sociedade.

Imediatamente, aclaram-se as particularidades metodológicas vinculadas à proposta de intervenção metodológica pleiteada. Deste modo, serão descritas as suas especificidades em relação à área de estudo e às abordagens metodológicas definidas. Além do mais, sob um olhar meticuloso apresentar-se-ão as particularidades desta. Por fim, serão expostos os caminhos pretendidos para a construção do produto educacional, com vista ao desenvolvimento do pensamento abstrato, na intenção de incitar perceptivas para reconceitualizar o ensino de Álgebra.

2 CONSTRUINDO UM LUGAR PARA A PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

O abandono da matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas do mundo.
Roger Bacon

A constatação da relevância do pensamento abstrato na aprendizagem da Matemática impulsionou pesquisar o contexto em que é construído os saberes algébricos na Educação Básica. Inquietações transcorriam ao longo do exercício da docência na área de Álgebra no Ensino Superior, o qual era expressivamente um tanto desafiador, pois, a realidade não condizia com o modo em que os conhecimentos deveriam ser desenvolvidos. Inúmeras indagações vislumbraram, dentre elas, uma em forma de questionamento: como ocorria a construção dos conceitos algébricos dentro da matemática elementar?

> Para discutir o ensino e a aprendizagem da álgebra com compreensão, devemos primeiro olhar para o os alunos de álgebra que costumamos encontrar em salas de aula. A imagem tradicional da álgebra, baseada em mais de um século de álgebra escolar, é de expressões algébricas simplificadoras, resolvendo equações, aprendendo as regras para manipular símbolos - a álgebra que quase todo mundo ama odiar. (KAPUT, 2000, p. 3, tradução da pesquisadora).

Para o autor, esse ensino tradicional tem sido falho em quase todas as dimensões, uma vez que, a simples memorização dos procedimentos algébricos minimamente contribui para a construção e apropriação do conhecimento matemático, distanciando do mais importante, que é o seu entendimento, assim como, a aplicabilidade nas suas próprias vidas.

Em face dos novos desafios, a mais acertada alternativa seria reportar ao início da concepção matemática para compreender tais dificuldades apresentadas pelos alunos. O diferencial, para toda esta reflexão, destina-se às experimentações do ensino de Matemática nas mais variadas etapas da Educação Básica.

Vale ressaltar que, estar simultaneamente atuante no Ensino Básico e Superior propiciou contrapor hipóteses para uma reestruturação do ensino de Álgebra, uma vez que, essa ciência contempla um campo conceitual imprescindível à edificação do conhecimento matemático.

Embora, esse campo do saber pareça algo de difícil compreensão para a maioria dos estudantes, esta proposta foi ponderada a partir de reflexões atreladas ao produto de atividades desenvolvidas ao longo da experiência docente da autora nas diferentes esferas do ensino de Matemática. A ideia é mostrar que a Ágebra não é um mistério que está fora do alcance da maioria dos alunos, visto que, esses podem entender o complexo de situações ao mesmo tempo em que constroem grandes ideias matemáticas.

Partindo dessa premissa, conjecturou-se este produto educacional, o qual foi pensado e elaborado de acordo com a prática de sala de aula da pesquisadora que, ao longo da docência, e excepcionalmente, no aprimoramento do saber, empenhou-se em estudar e idealizar algo que veementemente viesse contribuir para o ensino de Álgebra nas salas de aula, visto que, a etapa final para a obtenção do titulo de mestre consiste na

> [...] elaboração de um trabalho final de pesquisa profissional, aplicada, descrevendo o desenvolvimento de processos ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino na área específica, sugerindo-se fortemente que, em forma e conteúdo, este trabalho se constitua em material que possa ser utilizado por outros profissionais. (MOREIRA, 2004, p. 134).

Portanto, este produto consiste em um procedimento indispensável para a conclusão da etapa final do curso de mestrado, e concomitantemente, à obtenção do título de mestre, o qual constituirá a presente dissertação.

2.1 Ponto de partida

Para Zabala (1998, p. 13), “um dos objetivos de qualquer bom profissional consiste em ser cada vez mais competente em seu ofício.”. A demanda por esta maestria instaurou a idealização deste trabalho de dissertação, o qual se encontra assistido pela literatura educacional, tanto pelos documentos oficiais norteadores do ensino, quanto, por estudiosos e pesquisadores da área, os quais apresentam subsídios teóricos e metodológicos essenciais para a elaboração deste produto educacional, o qual tende eleger uma proposta sob uma perspectiva de intervenção amplamente minuciosa no ensino da Álgebra.

Instigações originárias na docência no curso de Licenciatura em Matemática do Campus VI da Universidade do Estado da Bahia - UNEB, sobretudo, na área de

Álgebra, as quais reportavam às deficiências identificadas na aprendizagem deste campo da Matemática legadas do Ensino Básico, têm impulsionado inquietações que acarretaram a ideação deste produto educacional, no qual, será exposto um encadeamento de atividades que devem ser explicadas sequencialmente, à medida que, o desenvolvimento cognitivo do aluno é estruturado, uma vez que, "a maneira de configurar as sequências de atividades é um dos traços mais claros que determinam as características diferenciais da prática educativa." (ZABALA, 1998, p. 18).

2.1.1 Primeiros apontamentos

Preliminarmente, foi realizado o estudo no âmbito dos saberes matemáticos, em particular, da Álgebra. Ratificado o propósito, foi realizada uma pesquisa dentre os tantos estudiosos e pesquisadores desta ciência, e a devida escolha da bibliografia a ser analisada minuciosamente, para a escrita de todo o aporte teórico, dado que,

> Uma das etapas mais importantes de um projeto de pesquisa é a revisão de literatura. A revisão de literatura refere-se à fundamentação teórica que você irá adotar para tratar o tema e o problema de pesquisa. Por meio da análise da literatura publicada você irá traçar um quadro teórico e fará a estruturação conceitual que dará sustentação ao desenvolvimento da pesquisa. (SILVA e MENEZES, 2001, p. 37).

Realizada análise da literatura pertinente à temática, buscou-se discorrer a concepção que ratifica esta proposta de intervenção. Sabe-se, que a cada novo saber que é exposto abre cursos para novas descobertas para questionar os saberes já existentes, dos quais alguns se tornarão obsoletos e outros serão reafirmados. Sendo assim, iniciou-se a elaboração deste produto educacional, o qual propõe uma nova roupagem ao ensino de Álgebra, visto que, o poder de transformação do ensino consiste na

> [...] capacidade de um professor para transformar o conhecimento do conteúdo que ele possui em formas pedagogicamente poderosas e adaptadas às variações dos estudantes levando em consideração as experiências e bagagens dos mesmos. (SHULMAN, 1987, p. 15 tradução da pesquisadora).

Subsequente à pesquisa bibliográfica, “[...] aquela baseada na análise da literatura já publicada em forma de livros, revistas, publicações avulsas, imprensa escrita e até eletronicamente, disponibilizada na Internet.” (SILVA e MENEZES, 2001, p. 38), elegeu-se o público, o qual esta proposta de intervenção didática contemplará.

Instigada pelas alterações para o ensino de Matemática expostas pela nova BNCC, e, encorajada pelos desafios ostentados no exercício docente da pesquisadora. Para tanto, explorou-se concepções de diversos pesquisadores como, Blanton e Kaput (2005), Booth (1995), Canavarro (2007), Coelho e Aguiar (2018), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Kieran (2004), Kieran et al (2016), Lins e Gimenez (1997), Ponte, Branco e Matos (2009), Teles (2004), Usiskin (1995).

Conhecedora das principais teorias que norteiam este trabalho e amparada pelos documentos oficiais que orientam o ensino na Educação Básica, buscou-se uma estratégia que transladasse a construção dos saberes algébricos. Para tal, foi pensado em uma sequência de atividades que contemplasse desde os Anos Iniciais aos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Partindo das concepções iniciais ainda com os pequenos nos Anos Inicias do Ensino Fundamental, visto que, o pensamento algébrico nesta etapa do ensino envolve o desenvolvimento de maneiras de pensar por meio de atividades que contemplem a análise de relações entre quantidades, a percepção de estruturas, o estudo de mudanças, a noção de generalização, a resolução de problemas, a modelagem e a justificação (BRASIL, 1997).

Ao pensar como se desenvolve esse pensamento nos alunos nessa etapa da escolaridade, Blanton e Kaput o definem como um

> [...] processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade. (BLANTON e KAPUT, 2005, p. 413, tradução da pesquisadora).

Tal abordagem se firma de forma continuada nos PCNs dos Anos Finais do Ensino Fundamental, onde, é orientado o aprofundamento dos conceitos algébricos de modo que possa ampliar o pensamento abstrato, fase qual, oportuniza ao aluno

> [...] (a) o uso da aritmética como o domínio da expressão e formalização da generalização (aritmética generalizada); (b) a generalização de padrões

> numéricos para descrever as relações funcionais (pensamento funcional); (c) a modelação como um domínio para a expressão e formalização das generalizações; (d) e a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos do cálculo e das relações. (BLANTON e KAPUT, 2005, p. 413, tradução da pesquisadora).

No estágio final da Educação Básica se dá o alargamento do pensar “abstratamente”, fase, em que ocorre a construção efetiva do conhecimento algébrico, a qual se encontra pautada nas orientações apresentadas nos documentos oficiais. Portanto,

> No nosso ponto de vista, a primeira etapa da Educação Algébrica deve ser o trabalho com situações-problema. Esse trabalho deve ser realizado de forma a garantir o exercício daqueles elementos caracterizadores do pensamento algébrico destacados anteriormente. É esse trabalho reflexivo e analítico sobre situações-problema de naturezas diversas, isto é, sobre o modo como conduzimos e expressamos o nosso pensamento visando à resolução de tais situações, que possibilitará a construção de uma linguagem simbólica que seja significativa para o estudante. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL,1993, p. 89-90).

2.1.1.1 No que tange à pesquisa

Sabe-se que, nos últimos anos, as publicações, majoritariamente, adentram no campo da pesquisa qualitativa, a qual considera “[...] que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números.” (SILVA e MENEZES, 2001, p. 20), o que justifica a sua significação dentre as múltiplas perspectivas de estudos dos fenômenos que envolvem indivíduos nas diversas áreas do conhecimento.

No entanto, o período em que se deu a escrita desta dissertação vivenciou um momento ímpar na história da humanidade. Raiou do inesperado um vírus que parou o mundo. Em meio ao medo e às incertezas, o vírus se propagava cada vez mais em uma esfera formidável, provocando a infecção em massa da população em todo o mundo, acarretando em uma doença cognominada Covid-19[6].

O caminho adotado para tentar conter o vírus foi o isolamento social, ocasionando assim, a interrupção majoritariamente das atividades consideradas não essenciais, dentre elas, ocorreu a suspensão das aulas por tempo indeterminado. Para tanto, a pesquisa teria que continuar, uma vez que, o momento vigente exprimia

[6] A Covid-19 é uma doença causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, que apresenta um quadro clínico que varia de infecções assintomáticas a quadros respiratórios graves. Disponível em: < https://www.gov.br/saude/pt-br/Coronavirus>. Acesso em: 01 mai. 2020.

perplexidades para uma possível cura, ainda que, a ciência ininterruptamente perscrutava uma vacina.

Neste contexto, conjecturaram-se novos caminhos, os quais conduziram a um repensar, e este, dispôs a reestruturação do presente trabalho, no qual a pesquisadora ante à complexidade vivenciada outorgou outros rumos. A princípio, ambicionava-se tanto a elaboração da proposta metodológica de intervenção quanto sua aplicação, tendo em vista os aspectos subjetivos, por intermédio de uma abordagem qualitativa, a qual se tornaria demasiadamente significadora em decorrência da sua fidedignidade.

Conhecida a complexidade deste estudo, o qual foi estruturado para uma pesquisa de intervenção, na qual a pesquisadora intencionara intervir na realidade e atuar no campo de investigação, “[...] colocando em análise os efeitos das práticas no cotidiano institucional, desconstruindo territórios e facultando a criação de novas práticas.” (ROCHA e AGUIAR, 2003, p. 71). Todavia, convém salientar que as dificuldades sinalizadas ocasionaram a recolocação das abordagens de modo a se descaracterizar da perspectiva quantitativa.

Portanto, “partindo de questões amplas que vão se aclarando no decorrer da investigação, o estudo qualitativo pode, no entanto, ser conduzido através de diferentes caminhos.” (GODOY, 1995, p. 21).

Desse modo,

> Considerando, no entanto, que a abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques. (GODOY, 1995, p. 21).

Por fim, direcionou-se à pesquisa bibliográfica, já que o caminho para se chegar a determinado fim tenderia a análise das publicações ascendentes a este estudo. Assim,

> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Parte dos estudos exploratórios podem ser definidos como pesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo. (GIL, 2008, p. 50).

Segundo o autor, a regalia preeminente da pesquisa bibliográfica consiste no fato de permitir ao pesquisador a abrangência de uma gama de fenômenos demasiadamente mais ampla do que aquela passível de ser pesquisada diretamente. Contudo, faz-se necessário certificar-se as fontes analisadas, para que em hipótese alguma, o pesquisador venha reproduzir ou mesmo a ampliar dados errôneos (GIL, 2008).

Para tanto, realizou-se a revisão da literatura norteadora deste trabalho, acarretando os primeiros apontamentos que constitui o referencial teórico deste estudo, o qual desencadeou novas análises a acerca dos conhecimentos matemáticos para construção deste produto educacional, e este último se dispor-se-á a diagnóstico sob o olhar da Educação Algébrica voltado para a construção do saber matemático de forma significativa. Desse modo, conhecer da realidade não significa simplesmente transladar essa realidade para o pensamento, de modo antagônico, consiste no ato de refletir criticamente por intermédio de um conhecimento acumulado acarretando o concreto pensado.

> Finalizando, reafirma-se a pesquisa bibliográfica como um procedimento metodológico importante na produção do conhecimento científico capaz de gerar, especialmente em temas pouco explorados, a postulação de hipóteses ou interpretações que servirão de ponto de partida para outras pesquisas. (LIMA e MIOTO, 2007, p. 44).

Em suma, este trabalho de dissertação consiste numa pesquisa exploratória que visa, a partir, de bibliografias, analisar, desenvolver, desvendar e modificar conceitos e ideias que tencionem a elaboração de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos subsequentes (GIL, 2008), proporcionando uma visão geral acerca da temática abordada e constituindo assim, o primeiro estágio de uma investigação mais ampla, uma vez que, se trata de uma pesquisa bibliográfica, com a criação de um produto final passível de aplicação que desencadeará futuras reflexões, as quais poderão reafirmar ou descontruir o propósito desta proposta metodológica de intervenção no ensino de Álgebra.

Implicações decorrentes da junção das principais teorias norteadoras deste estudo com os conhecimentos matemáticos em suas diferentes esferas desencadearam a ideação de tais atividades, as quais constituirão o produto educacional que será desenvolvido pela pesquisadora. Para tal, o mesmo encontra-se minuciosamente detalhado na continuidade desta pesquisa.

2.2 A Criação do Produto Educacional

Pensou-se em construir Matemática com recursos acessíveis a toda a comunidade escolar de forma que oportunizasse ao aluno o desenvolvimento do pensamento algébrico, e consequentemente, a aprendizagem significativa da Álgebra. Para tal, conjecturou-se um encadeamento de atividades agregado a uma combinação de conteúdos predeterminados passível de uma abordagem integrada de todas as esferas que compreendem a matemática elementar.

Portanto, de modo antagônico ao que é assistido no ensino da matemática escolarizada, não existe áreas estanques, o que de fato existe, é uma relação de complementaridade entre a Aritmética, Álgebra e Geometria, as quais carecem ser desenvolvidas juntas, de forma que uma implique no desenvolvimento das demais, para alcançar a desejada construção sólida e duradoura do saber matemático.

É sabido que,

> O ensino da Matemática é justificado, em larga medida, pela riqueza dos diferentes processos de criatividade que ele exibe, proporcionando ao educando excelentes oportunidades de exercitar e desenvolver suas faculdades intelectuais. (ÁVILA, 2010, p.6).

Entretanto, a razão mais sublime para justificar o ensino da Matemática é o expressivo papel que esta ciência exerce na construção de todo o edifício do conhecimento humano.

Nesse contexto, Ubiratan D'Ambrosio escreve:

> Vejo a disciplina de *matemática* como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural. (D'AMBROSIO, 1996, p.7, grifo do autor).

Visto a importância do conhecimento matemático, especificamente, à relevância do poder de intervenção do pensamento algébrico abstrato na aprendizagem desta ciência, este produto educacional configura-se como um procedimento didático com um potencial atrativo no sentido do colaborar no ensino significativo dos conceitos matemáticos.

2.2.1 Descrição do Produto Educacional

O produto desenvolvido consiste em um caderno disposto em duas partes constituídas, respectivamente, por dezoito sequências didáticas experimentais que ambicionam demonstrar de forma significativa para os alunos o elo existente entre os conceitos aritméticos, algébricos e geométricos, possibilitando a construção do saber matemático de forma ampla e significativa.

Compreende-se, que tais atividades, as quais constituem esta proposta metodológica de intervenção, como um encadeamento de situações respeitando o desenvolvimento cognitivo do aluno, organizada de acordo os conhecimentos pertinentes de cada etapa da instrução matemática, assim definida como um produto educacional disposto em nove seções formadas pelas dezoito sequências didáticas ordenadas sistematicamente.

Para tanto, Zabala (1998, p. 18) define sequência didática (SD) como “[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos seus alunos.”, ou seja, compreende a um conjunto de atividades encadeado de passos e estágios concatenados entre si para tornar mais promissor o processo de aprendizado, o qual oportuniza ao professor um ambiente auspicioso para a construção do conhecimento nos múltiplos contextos, tornando a temática mais significativa e ampla para o aluno.

De modo paralelo, Oliveira (2013) afirma que SD é

> [...] um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino aprendizagem. (OLIVEIRA, 2013, p. 39).

Logo, esse composto de ações metodológicas, elaborado pelo professor, para que, os alunos possam alcançar a compressão almejada do conteúdo proposto, acarreta em intervenções pedagógicas, cujo fim, é o ensino dos saberes matemáticos, mediante a, “[...] uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos.” (TEIXEIRA e PASSOS, 2013, p. 158).

Oliveira (2013) acrescenta que, uma sequência didática constitui-se em um procedimento para a sistematização do processo ensino-aprendizagem, no qual, é imprescindível a real participação dos alunos desde o planejamento inicial inteirado a estes ao próprio objetivo da SD no âmbito escolar, até o término da sequência para uma decorrente avaliação e análise dos desfechos obtidos.

Ciente do poder de transformação do professor pesquisador, uma vez que, a "pesquisa é o que permite a interface interativa entre teoria e prática." (D'AMBROSIO, 1996, p. 79), iniciou-se a elaboração das sequências didáticas para o apoio efetivo da aprendizagem significativa no campo algébrico, a qual foi fundamentada na literatura matemática, uma vez que, inteirada da Educação Algébrica, este passo consiste em aliar tais saberes aos conhecimentos matemáticos de forma que seja possível explorar o elo existente entres os três principais ramos desta ciência.

Iniciado os passos deste ciclo, foram arquitetadas as possíveis atividades e como estas poderiam ser desenvolvidas. O desenvolnvimento destas priorizou tanto o uso de recursos acessíveis ao âmbito escolar quanto uma metodologia auto explicativa para faciliatar a aplicação pelos professores em suas salas de aula.

No entanto, alguns padrões foram considerados de forma a preservar o rigor que a Álgebra exige em si, almejando assegurar uma implementação promissora. Asssim, várias intercalações entre os saberes aritméticos, algébricos e geométricos foram empreendidos com a expectativa de antender a maior gama possível das exigências de cada perfil.

Encadear os saberes agébricos aos demais conhecimentos de forma harmoniosa àquela defendida pela Educação Algébria exigiu um olhar detalhado dos conteúdos matemáticos de todos os estágios do Ensino Fundamental, visto que,

> Para entender o que um aluno entende, é necessário compreender profundamente o material a ser ensinado e os processos de aprendizado. Esse entendimento deve ser específico para determinadas disciplinas escolares e para tópicos individuais da disciplina. (SHULMAN, 1987, p. 19, tradução da pesquisadora).

Assim, buscou-se compreender os processos de apresndizagem dos conteúdos selecionados para compor as atividades. Feito isto, iniciou-se o processo de eleboração das sequências didáticas contemplando cada fase do Ensino Fundamental.

Para tanto, a estruturação empreendeu os pressupostos da BNCC, de modo, que fosse estudado os processsos de contrução do pensamento algébrico a partir das atividades propostas, observando as habilidades passíveis de serem desenvolvidas em determinda sequência didática, para encadear a sequência subsequente.

Iniciada a construção da série ordenada e articulada de atividades pertinente aos nove anos do Ensino Fundamental pretendidos, reverenciando os objetivos ansiados a cada estágio, de modo a abusar de uma organização lógica destas atividades, visto que, a maneira com que as atividades se articulam determinam a especifidade da sequência didática, percebendo que, dentre as circunstâncias de desenvolvimento destas, serão experimentados momentos mais conceituais, noutros procediementais e por último os atitudinais, os quais oportunizarão aos alunos contruíerem os conceitos, desevolverem tais concepções e atuarem na edificação do próprio conhecimento (ZABALA, 1998).

Para Libâneo (2006) o trabalho docente é uma atividade consiente e sistemática e está ligada às concepções sociais e experiência de vida dos alunos. Assim,

> Uma criança pequena aprende a distinguir determinados barulhos, aprende a manipular um brinquedo, aprende a andar. Uma criança maior aprende habilidades de lidar com as coisas, nadar, andar de bicicleta etc., aprende a contar, a ler, a escrever, a pensar, a trabalhar junto com outras crianças. Jovens e adultos aprendem processos mais complexos de pensamento, aprendem uma profissão, discutem problemas e aprendem a fazer opções etc. As pessoas, portanto, estão sempre aprendendo em casa, na rua, no trabalho, na escola, nas múltiplas experiências da vida. (LIBÂNEO, 2006, p. 81).

Enquanto, demais países vêem desenvolvenvendo o pesnamento algébrico desde o início da vida escolar, o ensino brasileiro principia os primeiros passos com as modificações expostas na BNCC. No Brasil, a introdução dos conceitos algébricos acontece de forma muito tardia, até o momento em que se deu a realização desta pesquisa, ela era iniciada ao adrentrar no sétimo ano do Ensino Fundamental. À vista disso, Canavarro (2007, p. 92) recomenda em sua investigação

> [...] uma “algebrização do currículo”, significando com isso uma abordagem ao pensamento algébrico desde o início da escolaridade, integrando-o com outros temas matemáticos, incluindo diferentes vertentes, tendo por base as capacidades cognitivas e linguísticas dos alunos, e encorajando uma aprendizagem activa que valorize a construção de significados e a compreensão (Kaput, 1999). Assim, como argumento para defender a inclusão do pensamento algébrico no currículo de Matemática dos primeiros anos pode evocar-se, não só o seu carácter preparatório para a Álgebra dos

> anos posteriores, mas também o seu contributo para o aprofundamento da compreensão da Matemática e do poder desta área do saber.

Essa atual conjuntura impactou a amplificação deste estudo tornando-o abrangente a todo o Ensino Fundamental, uma vez que, ao olhor da pesquisadora, escolher uma etapa para não contemplaria, seu propósito, o pensamento algébrico não se desenvolve de imediato, ele é construido à medida em que o desenvolvimento cognitivo é elaborado.

Nessa perpectiva, desencadeou o desenvolvimento deste conjunto de atividades amarradas aos conteúdos respectivamete. Sendo que, a primeira fração de atividades a ser elaborada especificava-se aos Anos Inicias, considerada a fase mais complexa em consequência do limitado conhecimento acerca do exercício docente nesta etapa de ensino por parte da investigadora.

Faz-se necessário ressaltar que, a inserção da Álgebra no início da escolaridade é extremamente recente, e tais alterações ainda estão sendo implementadas na rede de ensino em todo o país. Ainda, cabe observar que, além das dificuldades identificadas na aprendizagem da Álgebra, (BOOTH, 1995; CANAVARRO, 2007; FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993; LINS e GIMENEZ, 1997; USISKIN, 1995), os professores encontrarão múltiplos obstáculos ao lidar com esta adversidade, assim, a aplicabilidade desta proposta metodológica pode contribuir fervorosamente no desennvolviento do pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.

Concluída tal etapa, inicia-se a estruturação das atividades para os Anos Finais, na qual algumas das atividades propostas repercutiam suas práticas pedagógicas enquanto docente. Assim, este momento cosntitui a fase mais afável da pesquisa, onde, a elaboração das sequência didáticas foi imensamente prazerosa.

Para findar de forma glamourosa, diligencia-se, à última fração, um arrajo de atividades com maior grau de complexidade, as quais possibilitam adentrar de forma mais acentuada na álgebra abstrata. Enfim, torna-se perceptível todo o desenrolar deste trabalho. Todavia, o desenvolvimento do pensamento algébrico requer muito mais do que o simples ato de selecionar tarefas adequadas, na sala de aula, o professor tem uma função muito importante a desempenhar (BLANTON e KAPUT, 2003; CANAVARRO, 2007).

Sob um olhar atentamente da pesquisadora, esse encadeamento iniciado no primeiro ano do Ensino Fundamental, e se no escoar do tempo, suceder a construção das atividades, de forma gradativa até o último ano, outorgando a concepção de como os conhecimentos algébricos podem ser construídos, e consequentemente, como o pensamento abstrato se desenvolveria à medida em que o desenvolvimento cognitivo do aluno seria elaborado.

Conjecturar, estruturar e elaborar tais sequências didáticas exigiu ousar além das margens do conhecimento que se tinha. Neste caminho auspicioso, é imprescindível ressaltar que este produto educacional procedente desta pesquisa, inter-relaciona-se e desdobra-se numa abordagem didática proposta para a Educação Básica, articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)[7] (BRASIL, 2017).

Portanto, essa interveção implica, a princípio, numa inversão do saber escolar em relação ao cientifico, pois, o trabalho

> [...] do professor envolve um importante desafio que consiste numa atividade que é, num certo sentido, inversa daquela do pesquisador. Pois, enquanto o matemático elimina as condições contextuais e busca níveis mais amplos de abstração e generalidade, o professor de matemática, ao contrário, deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais significativa para o aluno. (PAIS, 2011, p. 28-29).

Por fim, é sabido que o exercício da docência exige do professor a produção de conhecimento. Têm-se, como produto desse exercício acoplado a um aperfeiçoamento contínuo do estudo da Matemática, e especialmente dos saberes algébricos, particularidades metodológicas, as quais constituem estas sequências didáticas decorrentes de indagações pertinentes ao ensino e aprendizagem da Álgebra, por um olhar mais detalhado, que consiste em “[...] encontrar formas de tornar o poder da álgebra (na verdade, de toda a Matemática) acessível a todos os alunos - encontrar maneiras de ensinar que criem um ambiente de sala de aula que permita aos alunos aprender com compreensão.” (KAPUT, 2000, p. 4, tradução da pesquisadora).

Subsequentemente, na tentativa de contemplar os objetivos aqui expostos responder a questão norteadora desde trabalho, elencam-se dezoito sequências

---
[7] Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

didáticas estruturadas em nove seções que se dispõem em duas partes atendendo aos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental, constituindo o produto educacional elucidado anteriormente. Este foi construído para auxiliar o professor na sua atuação em sala de aula, de modo que, as informações nele apresentadas são de uso exclusivo docente. Tais sequências reportam às recomendações da BNCC e atendem os pressupostos da Educação Matemática, especificamente, da literatura algébrica, e, encontram-se encadeadas e devidamente aclaradas, nas suas peculiaridades, de modo a se explorar os conceitos algébricos juntamente aos conceitos aritméticos e geométricos, tendo em vista, o desenvolvimento do pensamento algébrico, por considerá-lo imprescindível a uma aprendizagem significativa e duradoura da Matemática.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO METODOLÓGICA POR MEIO DA INTEGRALIZAÇÃO DOS SABERES MATEMÁTICOS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Cláudia Alves Teixeira

Orientadora: Profª. Drª. Clênia Andrade Oliveira de Melo

Coorientador: Prof. Dr. Robson Aldrin Lima Mattos

3 O PRODUTO EDUCACIONAL

[...] o caminho envolve infiltrar álgebra ao longo de todo o currículo de matemática desde o início da escola.
(KAPUT, 2000, p. 4, tradução da pesquisadora)

Prezado (a) Professor (a),

> Ajudar os alunos a construir um repertório de ferramentas intelectuais que os apoiem no desenvolvimento do pensamento algébrico é uma importante função que o professor deve assumir. Na exploração matemática das tarefas realizadas pelos alunos tendo em vista este propósito, é importante que o professor lhes dê a conhecer "objectos" como tabelas diversas, rectas numéricas, diagramas, gráficos de vários tipos, artefactos visuais, materiais concretos – estes objectos, afirmam Blanton e Kaput (2005), tornam-se referências em torno das quais os alunos pensam algebricamente. (CANAVARRO, 2007, p. 110).

Este manual constitui o produto educacional desenvolvido no Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). As sequências didáticas, que serão apresentadas neste produto, foram pensadas com o intuito de proporcionar, ao professor de Matemática da Educação Básica, uma proposta metodológica de intervenção no desenvolvimento dos conceitos algébricos, explorando o elo existente estre os múltiplos saberes de modo a agenciar a construção dos conhecimentos algébricos no ensino da Matemática tendo o aluno como protagonista no seu processo de aprendizagem.

Embora os estudos na área de Educação Algébrica tenham crescido substancialmente nos últimos anos, a realidade vivenciada aponta a existência excessiva de omissões no ensino da Álgebra na Educação Básica, seja por parte do sistema educacional brasileiro, tanto pelos instrumentos didáticos, como, por uma grande fração dos professores. Sobretudo, esse material anseia contribuir com o ensino, de forma que, o estudante possa construir o seu próprio conhecimento do desenrolar das sequências didáticas.

Conjecturando atenuar tais lacunas, foi elaborada esta proposta de intervenção composta por dezoito sequências didáticas que compõem este caderno de atividades, as quais apresentam características passíveis de assegurar o processo de produção de significados dos conceitos algébricos, de modo a explorar o elo existente entre estes com os demais, aritméticos e geométricos, para a construção do saber matemático.

Encontram-se dispostas todas as atividades de forma gradativa desde os anos iniciais, em menor amplitude, uma vez que, nesta fase o leque de conhecimentos a ser construído é menor, o que não deixa de ser importante, pois, o encantar permeia este estágio. Na medida em que é arquitetado o saber, vai expandindo a gama de conteúdos, e é ampliado o rol de atividades das sequências didáticas justificado na escala de saberes matemáticos já edificados pelos alunos, e principalmente, na dimensão, a qual se encontra o desenvolvimento cognitivo destes.

Faz-se necessário salientar o fato de que as sequências didáticas foram elaboradas para alcançar os objetivos descritos em cada atividade, conquanto, essas podem ser modificadas e adaptadas para as múltiplas realidades existentes no meio escolar.

Este estudo pauta-se nas concepções de Booth (1995) que apontam algumas dificuldades iniciadas em Álgebra, Blanton e Kaput (2005) e Canavarro (2007) que ressaltam a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico na aprendizagem matemática nos primeiros anos de escolaridade, nas contribuições de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que propõe um repensar na educação algébrica elementar, nas perspectivas de Lins e Gimenez (1997) e Usiskin (1995), as quais salientam a relevância da abordagem algébrica integrada à aritmética, nas recomendações apresentadas nos documentos oficiais, Brasil (1997, 1998, 2017), dentre outros.

Portanto, este manual constitui-se do encontro dos posicionamentos desses autores aos demais enunciados neste trabalho amarrados às concepções da nova BNCC, que propõe a inserção dos saberes algébricos desde o início da Educação Básica, e, fundamentados matematicamente, por autores dos possíveis livros didáticos de cada ano respectivamente, conforme os conhecimentos referenciados em cada uma das atividades imediatamente descritas aqui. Por fim, espera-se que este produto educacional possa contribuir efetivamente, tanto para a práxis docente, quanto para a aprendizagem significativa e duradoura da parte mais interessada: os alunos.

3.1 Primeira parte: Anos Iniciais

O ensino-aprendizagem, das concepções algébricas no início da escolaridade, constitui-se num grande desafio para os professores dos Anos Iniciais, visto que, este ramo da Matemática é tido como difícil, pois, além de exigir um pensar "abstratamente" de ambos, não há um significante interesse dos alunos nesta esfera do conhecimento. Sendo assim, é necessário romper tais percepções para que essa realidade possa ser modificada.

Trata-se aqui da primeira fração, a qual corresponde às atividades propostas para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Inicia-se com duas sequências didáticas que compreendem às noções algébricas inicias a serem desenvolvidas com os alunos do primeiro ano. Gradativamente, se amplia ao segundo, terceiro, quarto e quinto ano, de modo a adentrar sucessivamente em uma dimensão mais expressiva da Álgebra.

Canavarro (2007) ao apontar a relevância do pensamento algébrico na matemática escolar desde o seu início, salienta que as dificuldades dos alunos neste domínio, residem, majoritariamente, no conteúdo que tem prevalecido nos programas de Álgebra, os quais priorizam o uso da simbologia desprovida de significados, além do mais, "[...] a Álgebra constituiu um domínio à parte isolado dos outros temas do currículo de Matemática, e isolado, também, dos interesses dos alunos, que tendem a não lhe reconhecer valor." (CANAVARRO, 2007, p. 91).

Todavia, as atividades aqui propostas, para tornar essa temática mais atrativa aos alunos, exploram o elo existente entre as diversas áreas da Matemática, de forma que, a Aritmética, a Álgebra e a Geometria possam se desenvolver juntas, tornando a aprendizagem significativa para uma possível construção sólida do saber matemático com o intuito de potencializar o desenvolvimento do pensamento abstrato destes.

3.1.1 Proposições para o 1.º ano

Sabe-se, que o coração da Álgebra nos Anos Iniciais consiste na elaboração de estratégias para compreender o mundo. Para tal, inicia-se o desenvolvimento das noções algébricas por meio da observação de padrões buscando arquitetar o entendimento dessas regularidades. Para tanto, encontram-se, imediatamente dispostas, duas séries de atividades para serem exploradas ao longo do primeiro ano do Ensino Fundamental, constituindo assim, as duas primeiras sequências didáticas. Tais atividades apresentam-se ordenadas e minuciosamente especificadas para facilitar a aplicação do professor nas suas salas de aula.

3.1.1.1 Sequência didática 01

Os passos descritos a seguir, foram pensados de forma a colaborar com a aplicação da sequência didática proposta, os quais devem ser somente para uso do professor. Recomenda-se uma mediação docente sem que o aluno tenha acesso às informações aqui apresentadas.

Esta atividade volta-se para a solidificação de procedimentos matemáticos mentais que foram desenvolvidos ainda na Educação Infantil, e objetiva ampliar as concepções de comparação, ordenação e classificação por meio de padrões.

Para sua realização, serão necessárias, três coleções de objetos, “1) com mesma cor, da mesma forma e de tamanhos diferentes; 2) com cores diferentes e forma e de tamanho iguais; 3) com cor e tamanho iguais e multiplicando as formas”. Tais objetos podem ser confeccionado pelo próprio docente utilizando cartolinas ou folhas de E.V.A.[8], ou outro recurso acessível ao educador. Por fim, é imprescindível um bom planejamento, para que se tenha o propósito contemplado.

Tema: Padrões

Número de aulas: 5 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Padrões figurais

- Investigação de regularidades

Habilidades:

- Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
- Reconhecer e sistematizar o próprio mundo, por meio da observação de padrões, buscando incitar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

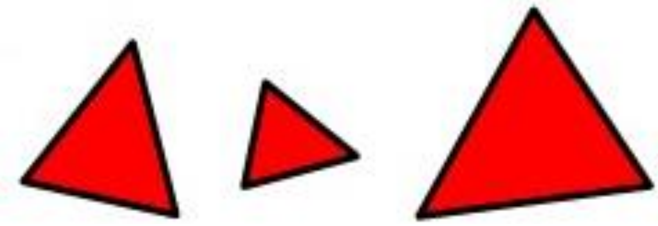
---

[8] O E.V.A., também conhecido como "Material Emborrachado", é um material que serve para uso em artesanato ou trabalhos manuais voltados para à área do aprendizado em escolas.

Descrição da atividade:

Deve-se iniciar a abordagem dividindo a turma em grupos com cinco integrantes. Num primeiro momento, o professor deve entregar às equipes certa quantidade de objetos de mesma cor, da mesma forma e de tamanhos diferentes, conforme sugerido na Figura 3.1. Desse modo, o docente pede aos alunos para tocarem tais objetos e os organizarem de acordo a critérios definidos por cada grupo.

Figura 3.1 - Objetos de mesma cor, mesma forma e tamanhos diferentes

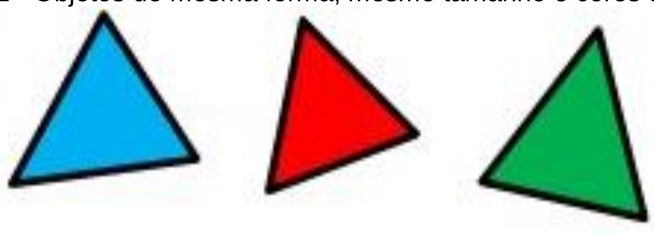


Fonte: Compilação da autora.

Feito isso, investiga-se o processo realizado por cada uma das equipes, de modo que, os alunos possam explicar ao professor e aos colegas o método utilizado para a disposição desses objetos. Espera-se, que as crianças os distribuam em ordem crescente, decrescente, ou ainda, de modo alternado, dispondo-os em fileiras ou até mesmo de outra forma, o propósito de tal atividade consiste nas justificavas apresentadas pelos alunos.

A continuidade desta consiste em alternar objetos, de modo manter a mesma forma, com o mesmo tamanho, porém em cores diferentes, como retrata a Figura 3.2. Novamente, incita a imaginação das crianças, deixando-as livres ao longo do processo de organização das peças. Subsequentemente, explora os critérios utilizados pelos alunos.

Figura 3.2 - Objetos de mesma forma, mesmo tamanho e cores diferentes

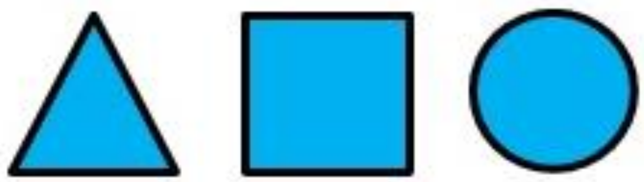


Fonte: Compilação da autora.

Para tal, há uma multiplicidade de soluções, as quais devem ser aperfeiçoadas durante sua exposição, em conjunto com os alunos. O discurso deve partir dos posicionamentos desses com as intervenções necessárias do docente. Pode-se, investigar quantos grupos de cores diferentes cada equipe conseguiu formar, explorando, em conjunto às concepções algébricas, os conceitos aritméticos e os saberes geométricos.

Tal raciocínio é ampliado num terceiro momento, conserva-se a cor e tamanho dos objetos, e, diversificam-se as formas, como mostra a Figura 3.3. Realizada a distribuição e análise dos objetos o professor propõe repetidamente a organização dos mesmos. Tal momento oportuniza um leque de possibilidades, no qual, além de poder explorar geometricamente cada uma das peças, pode-se também, esmiuçar o raciocínio arquitetado para a execução da atividade.

Figura 3.3 - Objetos de mesma forma, mesmo tamanho e cores diferentes



Fonte: Compilação da autora.

Almeja-se ao findar do terceiro passo, que o aluno seja capaz de observar um conjunto de objetos do cotidiano e identificar padrões de acordo à forma, cor e tamanho, bem como, aplicar tais concepções na organização das coisas pertencentes ao seu meio. Sabe-se que o ato de agrupar, classificar e ordenar propicia o trabalho com padrões, portanto, busque explorar as percepções dos alunos nas diferentes formas, seja oral, por escrito ou por meio de desenho, dando início ao desenvolvimento do pensamento algébrico, o qual irá permear toda a Matemática.

Finalização da sequência didática

Por fim, o último momento, no qual, o docente deve proporcionar um espaço para discussões mútuas acerca dos passos efetuados pelos alunos, durante a aplicação desta atividade, partindo sempre dos relatos das ações realizadas pelas crianças na execução desta sequência didática.

3.1.1.2 Sequência didática 02

Encontram-se, minuciosamente descritos aqui, os passos para a aplicação desta sequência didática, os quais devem ser somente para uso do educador. Não é aconselhável disponibilizá-los aos alunos, visto a possibilidade de interferências no propósito desta atividade.

Seu objetivo consiste em identificar padrões de regularidades em diferentes situações de suas vivências, de modo a oportunizar a compreensão do conceito inicial de sequências.

Nessa perspectiva, será utilizado no seu desenvolvimento, além dos recursos essenciais ao exercício docente, um projetor multimídia para facilitar a projeção da imagem sugerida para o início da aula, podendo ser substituído por um cartaz com a referida representação, por meio de um desenho ou uma fotografia. Por fim, o êxito na aplicação desta atividade requer um planejamento adequado ao seu propósito, o qual é atribuído ao educador.

Tema: Sequências

Número de aulas: 6 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Padrões em sequências

- Observação de regras usadas em sequências repetitivas

Habilidades:

- Identificar padrões, de modo a compreender sua invariabilidade e, então, expressá-lo.
- Compreender de modo sequencial a repetição de padrões de regularidade em situações vivenciadas, descrevendo e explicitando-as, sob um olhar facilitador à incitação do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

É sugerido iniciar a aula com uma rápida investigação dos conhecimentos já trazidos pelos alunos em decorrência de vivências anteriores a esta etapa de ensino. Para isto, projete a imagem de um detetive com o auxílio de um projetor multimídia, conforme sugere a Figura 3.4, e, prossiga questionando os alunos acerca da imagem exposta: o que faz um detetive? O que ele faz para descobrir os mistérios?

Figura 3.4 - O detetive

Fonte: Compilação da autora.

Espera-se que os estudantes expressem oralmente seus conhecimentos quanto às atribuições de um detetive. De posse destas concepções, elenque os caminhos percorridos por um detetive em sua investigação, os quais foram relatados pelas crianças e acrescidos pelo docente fazendo analogias ao vocabulário matemático que trata de sequência.

Sabe-se que o lúdico é formidável ao ensino-aprendizagem nesta faixa etária. Exponha a necessidade de levantar hipóteses do itinerário a ser percorrido pelo detetive em sua investigação, para depois, analisá-las e descrevê-las. Este processo permite aos alunos a oportunidade de elencar as estratégias adotadas pelo investigador, e assim, compreender que há uma sequência de passos a serem seguidos.

Feito isso, solicite a pretensão de seis alunos, sendo estes, três meninos e três meninas, e disponha-os em fila conforme a Figura 3.5.

Figura 3.5 - Sequência composta por meninos e meninas

Fonte: Nova Escola[9].

Conduza as crianças à observação questionando-os: o que se pode perceber nessa fila? Como podemos descrevê-la? Qual característica deve ter a próxima criança que poderia compor esta fila? Todos devem participar oralmente, tanto os participantes da fila, como, os demais. Anseia-se que os alunos consigam identificar que a fila é composta por menino e menina, esta é a classificação mais provável para esta faixa etária.

Para ampliar a percepção de padrões de regularidade, propõe-se compor uma nova fila, de modo a posicionar uma criança em pé voltada para frente, a seguir uma em pé voltada para trás, depois outra agachada como mostra a Figura 3.6. Para tal, alterne os colaboradores na construção da nova fila para que todos os alunos possam participar.

Figura 3.6 - Sequência composta de acordo às posições das crianças

Fonte: Nova Escola[10].

---

[9] Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/593/brincando-de-detetive-1>. Acesso em: 12 ago. 2020.

[10] Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/593/brincando-de-detetive-1>. Acesso em: 12 ago. 2020.

Espera-se que os alunos percebam a repetição do padrão na expressão corporal dos participantes. Promova uma discussão acerca da sequência de posições, indagando-os: qual é o próximo elemento da sequência? Explique o porquê da sua resposta. Inclua mais uma criança para representar o elemento discutido, repetindo o processo e ampliando ainda mais a sequência, até que todos entrem na fila. No findar deste encadeamento, anseia-se pela identificação do padrão.

Após posicionar todos os alunos na sequência, indague-os: qual padrão de regularidade foi formado? Perpetue a discussão até que todos os alunos compreendam o critério de formação desta. Sua continuação consiste na solicitação de um desenho para representar a fila. Assim, peça as crianças para desenhar e descrever o padrão, com o intuito de reforçar a assimilação dos conhecimentos explorados. Vale ressaltar que, ao desenhá-los em uma fila, eles vivenciam a experiência de retratar suas vivências na prática.

Por último, proponha aos alunos a buscarem uma nova estratégia para construir mais uma sequência, contudo, todos devem atuar tanto na sua elaboração como composição desta. Guie-os no processo para que se crie uma fila do menor para o maior ou vice-versa. Proceda sistematizando as diferentes maneiras de chegar à solução, de modo a explorar as múltiplas estratégias, sempre fazendo analogias aos conhecimentos matemáticos pertinentes a esta faixa etária.

Ao se organizarem conforme o padrão estabelecido, os alunos além de ampliar ideias algébricas iniciais por meio da comparação, desenvolverão conceitos relacionados às medidas, tendo como protótipo o aluno menor e/ou o aluno maior, relevantes à Geometria. Tais saberes ainda podem ser incrementados sob o enfoque da Aritmética como, a quantidade de alunos da sequência, a quantidade de meninos e de meninas, unificando o saber de forma que as diferentes áreas da Matemática possam se desenvolver juntas.

Finalização da sequência didática

Por fim, convide os alunos a permanecerem em suas posições da última sequência e proponha um passeio, em forma de trenzinho, pela escola, apresentando as estes o seu ambiente de estudo.

3.1.2 Proposições para o 2.º ano

Neste encadeamento, são propostas duas sequências didáticas para serem aplicadas ao longo do segundo ano do Ensino Fundamental. Para tal, todas as etapas encontram-se, minuciosamente detalhadas, com o intuito de facilitar sua aplicação. É aconselhável, não disponibilizar tais informações aqui descritas, abstendo de quaisquer interferências que esta exposição possa vir acarretar na sua intenção. É imprescindível que a aplicação das atividades sugeridas ocorra de forma lúdica e, ao mesmo tempo, questionadora, na qual, as crianças devem envolver-se na construção do saber, criando hipóteses, dando explicações, analisando possíveis respostas e ponderando o porquê delas, pois, tal interação corrobora para o desenvolvimento da autonomia destas.

3.1.2.1 Sequência didática 03

O encadeamento de passos detalhados nesta atividade destina-se à aplicação da sequência didática sugerida, devendo ser de uso exclusivamente do professor, sem que o aluno tenha acesso aos dados aqui expostos, evitando qualquer interferência no propósito almejado.

Seu objetivo consiste em identificar regularidades nos diferentes tipos de sequências geométricas por meio de observações das composições dadas.

Para o seu desenvolvimento, serão necessárias, papel sulfite colorido, no mínimo duas cores diferentes, impressões com exemplos de sequências geométricas, alguns colares que tenham algum tipo de padrão de objetos na sua composição e tiras de papel sulfite branco. O material didático a ser utilizado pode ser confeccionado pelo professor durante o seu planejamento.

Tema: Sequências repetitivas

Número de aulas: 7 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Sequências geométricas

- Padrões em sequências

Habilidades:

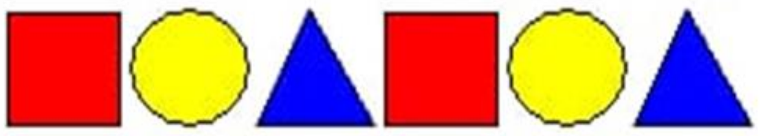
- Identificar sequências geométricas, de modo a compreender sua invariabilidade e, então, expressá-la.
- Descrever os elementos presentes em sequências compostas de objetos ou figuras, de forma a diligenciar caminhos para desenvolver o pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

Inicia-se a abordagem organizando a turma em quartetos. Em seguida, coordene mediante a um bate-papo uma investigação acerca do que as crianças já sabem, apresente-os o quadrado e o retângulo. Concluído o diálogo, oriente-os para a primeira tarefa a ser realizada, entregue para cada grupo, dois quadrados de mesmo tamanho e cor, dois círculos exatamente iguais e dois triângulos idênticos, isto é, tais formas geométricas diferem apenas nos seus formatos e nas suas cores respectivamente.

Peça-os para observarem e organizarem em uma só fileira, de modo que um quadrado nunca fique ao lado de outro, tal critério, também, é válido para os círculos e os triângulos. A Figura 3.7 mostra uma das possíveis soluções.

Figura 3.7 - Sequência geométrica



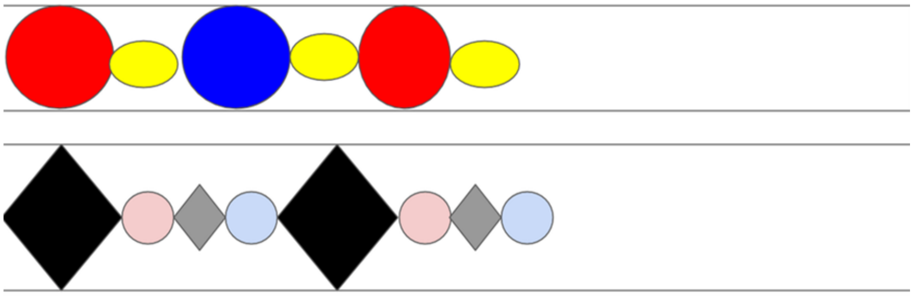
Fonte: Compilação da autora.

Feitas todas as composições, instigue-os a exporem para os colegas os procedimentos adotados, discutindo-os mutualmente, pois, a experiência de uma criança pode auxiliar na construção do conhecimento da outra, de modo que, as observações expostas de uma delas, possa ajudar a outra a perceber algo que ela não havia notado.

A segunda atividade constitui uma sequência de figuras geométricas, já iniciada, para ser completada pelos alunos. Assim o professor entrega esta impressa, e, destina um tempo para que os alunos completem-nas.

A Figura 3.8 mostra algumas sugestões, no entanto, cabe ao professor, adotar composições figurais mais simples ou complexas de acordo a realidade dos seus alunos.

Figura 3.8 - Exemplos de sequências geométricas



Fonte: Compilação da autora[11].

Sua continuidade se dará, com uma exposição de colares, o professor pode levar alguns, ou até mesmo confeccionar com material manipulável, para que os alunos possam ver e tocar. Vale ressaltar a importância da variedade de colares, para que se tenha um maior número de composições diferentes de modo a enriquecer esta atividade.

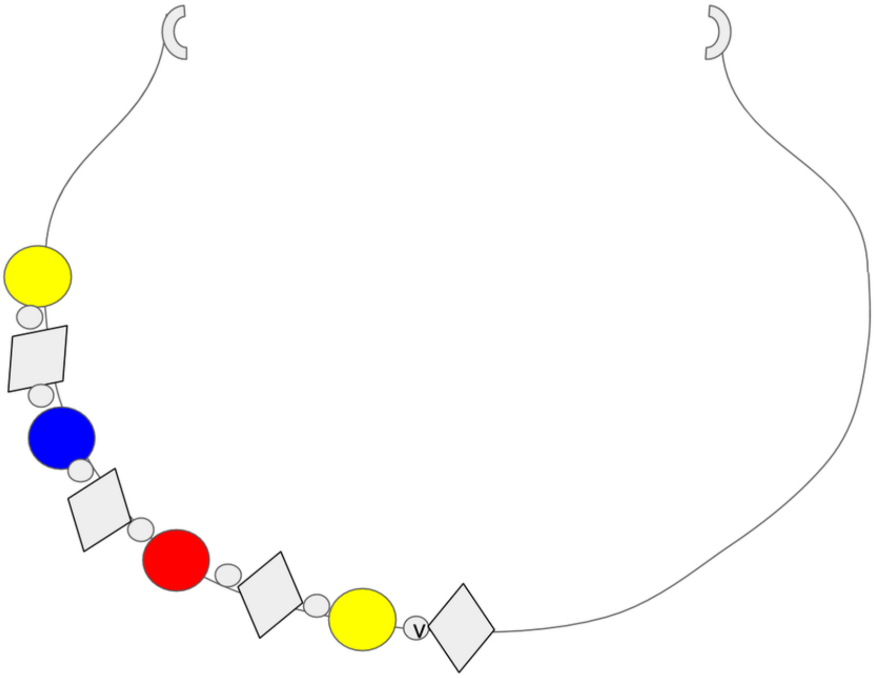
Para tanto, entregue os colares aos alunos, e, propicie um tempo para que estes os toquem e os observem. Feito isto, agencie a troca de colares entre os quartetos para que todos os alunos possam perceber sua diversidade e conhecer as diferentes formas das peças que os compõem.

Discuta os padrões de cada colar com a turma, de modo que, os alunos possam exteriorizar suas percepções, complementando-as sempre que julgar necessário.

De posse das ideias apresentadas pelos alunos, proponha a cada quarteto a composição um colar usando figuras geométricas. Para tal, entregue a cada equipe o desenho inicial de um colar, o qual ficará a escolha do professor. A Figura 3.9 exibe uma possível composição a ser trabalhada.

[11] Montagem a partir de imagem coletada no site da Nova Escola.

Figura 3.9 - Colar composto por formas geométricas



Fonte: Nova Escola[12].

Norteie-os a completar o colar, a princípio observando o padrão já desenhado, e posteriormente, desenhando e pintando as peças que faltam para completar a sequência. Certifique-se de que eles compreenderam a proposta, circulando pelos grupos.

Concretizadas todas as composições, instigue a conversação, de modo a fazer indagações que os conduzam a pensar no padrão que compõe o colar, apontando suas soluções para o término da sequência apresentada, considerando suas formas e suas cores.

Para tal, questione os alunos: qual o padrão está exposto? Como foram escolhidos os desenhos e cores para a composição da sequência? Explique como desenhou cada colar. Almeja-se exercitar habilidades algébricas, como a identificação de regularidades, no processo de justificação dos caminhos utilizados pelos alunos.

Para findar o trabalho com as composições geométricas, entregue a cada aluno, uma tira de papel sulfite branco medindo vinte e um por quatro centímetros, os sentencie a compor um padrão e repeti-lo, sucessivamente, até completar toda a tira de papel, estruturando o desenho de uma a pulseira, deixando-os livres para

[12] Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1115/padroes-que-enfeitam>. Acesso em: 22 ago. 2020.

criar suas próprias sequências de figuras. Durante a realização desta atividade, enrijeça o vocabulário matemático.

Após a confecção das pulseiras, prenda-as nos pulsos dos alunos com cola ou com fita adesiva e proponha formarem um círculo para compartilharem suas ideias e criações, de modo que, estes possam verbalizar suas concepções, buscando assim desenvolver a autonomia nas crianças, tornando-as menos dependentes, de forma a desenvolver suas capacidades de argumentação.

Finalização da sequência didática

Ao findar atividade, propicie um tempo para os alunos expressarem suas percepções e compreensões acerca de regularidades identificadas em objetos do seu meio, explorando o poder de justificação e permitindo-as criarem estratégias para a verbalização das próprias experiências.

3.1.2.2 Sequência didática 04

Encontram-se, detalhadamente descritos aqui, os passos para a aplicação desta sequência didática, os quais devem ser somente para uso do professor. Não é aconselhável o acesso destas informações pelos alunos, uma vez que, podem influenciar no propósito desta atividade.

Seu objetivo consiste em identificar os elementos faltantes em sequências recursivas, compreendendo, os critérios de formação destas, para posteriormente, identificar e descrever os seus próximos termos.

Para seu desenvolvimento, serão utilizados os recursos essenciais ao exercício da docência além de cartolinas e pincéis coloridos para a confecção de cartazes. O uso de slides é opcional e fica a critério do planejamento docente, o qual deve priorizar atividades desafiadoras para alcançar com êxito o propósito desejado.

Tema: Sequências recursivas

Número de aulas: 9 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Sequências numéricas

- Observação de regras usadas em seriações numéricas

Habilidades:

- Identificar sequências numéricas, de modo a compreender sua invariabilidade e, então, expressá-la.
- Compreender os diferentes critérios de formação existentes em composições de sequências recursivas de números naturais, arquitetando estratégias que venham contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

Para dar início à sequência, organize a turma em trios, de modo que estes se disponham em um semicírculo. Em seguida, faça um breve momento de sondagem, de modo a conhecer as noções algébricas construídas na etapa que precede a atual. E partindo dos conhecimentos prévios dos alunos inicie a atividade.

Para tanto, proporcione a construção de uma sequência introdutória, na qual cada trio deve escolher um objeto e aguardar sua vez para expressá-lo. Coordene a atividade de modo que, um primeiro trio fala o item escolhido, o próximo deve repetir o primeiro objeto, e imediatamente, pronunciar sua escolha, o terceiro faz as repetições precedentes, e, expressa verbalmente o elemento por este designado, continua sucessivamente, até todos se expressarem.

Para tanto, o professor deve anotar todas as escolhas pronunciadas pelos trios, as quais constituem os elementos da sequência recursiva, por exemplo: livro; livro, mesa; livro, mesa, porta; livro, mesa, porta, bola. Se quiser abusar da criatividade, ainda pode desenhá-las no quadro branco, com o intuito de expandir o entendimento das características de cada artefato.

Realizada a composição da sequência explore as percepções dos alunos acerca da mesma. Há um leque de possibilidades para tal, como fazer a relação dos objetos mencionados às formas geométricas, e também, a quantidade de cada um deles existente na sala de aula no presente momento, de modo a integrar os saberes matemáticos. Retome as concepções relativas à compreensão da sequência construída, investigando a apreensão das noções inicias dos alunos com relação à composição sequencial criada.

De posse dessas e outras respostas, inicia-se a próxima atividade, na qual, o docente recorre à introdução das sequências numéricas. Para tal, encontram-se, imediatamente, dispostas no Quadro 3.1 alguns exemplos de possíveis seriações numéricas a serem trabalhadas. Vale ressaltar que, as sequências são apenas sugestões, cabe ao professor adaptar à sua realidade.

Quadro 3.1 - Sequências numéricas

PROCURANDO PADRÕES EM SEQUÊNCIAS		
SEQUÊNCIA Nº 1	SEQUÊNCIA Nº 2	SEQUÊNCIA Nº 3
1, *2*, *3*, *4*, ...	*1*, *3*, *5*, *7*, ...	*0*, *3*, *6*, *9*, ...

Fonte: Compilação da autora.

Para tanto, há uma transformação no cenário, são postas situações em que a criança deve descobrir os elementos ausentes nas sequências, no qual, percebe-se a existência de uma progressão, havendo um aumento no nível de complexidade, uma vez que, a princípio foi construído uma sequência, e partido das compreensões alcançadas, busca-se entender uma sequência apresentada, ou seja, dada uma sequência, espera-se que os alunos sejam capazes de explicitar o seu critério de formação, assim como, identificar os seus elementos.

Tais sequências numéricas podem ser colocadas no quadro branco, ou expostas em cartazes, ou ainda, apresentadas em slides de acordo o planejamento do docente. Orienta-se, que o professor apresente as sequências e as discuta separadamente. Para tal, é relevante o uso do lúdico, para que os alunos possam representar por meio de agrupamentos de objetos cada uma das sequências, fazendo a relação com o número que constitui cada elemento e a quantidade correspondente.

Durante o desenvolvimento da atividade, explore ao máximo os conceitos matemáticos pertinentes a esta etapa da Educação Básica, de maneira que, os alunos possam expressar suas percepções dos diferentes caminhos existentes para solucionar o mesmo problema.

Repita os passos para todas as sequências até que todos as compreendam. No decorrer da aplicação da atividade é possível explorar conceitos aritméticos como os números e operações. Deve-se observar noções de adição na sequência numérica, *1*, *2*, *3*, *4*, ..., na qual, ao adicionar uma unidade ao termo anterior obtém-se o próximo termo.

Desse modo, frente a esta realidade, pode-se observar, mais um, mais três, mais cinco e mais ou menos algum valor numérico dentro da compreensão dos alunos.

Posteriormente, ao entendimento do segredo presente nas seriações numéricas, se dá a explicitação, onde, as crianças podem verbalizar os elementos ausentes, uma vez, que elas já conhecem o critério de formação destas. Para edificar o conhecimento, discuta com a turma situações que os permitam observarem e desvendarem os próximos números de cada uma das sequências respectivamente.

De posse a estas respostas, deve-se propiciar uma elevação no nível de complexidade, explorando seriações numéricas que permitam a identificação de outras regularidades, por exemplo, na sequência de 5 em 5 a partir do 2 (*2*, *7*, *12*, *17*, *22*, ...) os números terminam em 2 ou 7. Em outra sequência com um maior nível de abstração, é dado o seu primeiro termo (ou primeiros termos) e uma regra para o cálculo dos demais elementos. A sequência *1*, *1*, *2*, *3*, *5*, *8*, *13*, ... exprime um padrão, no qual, a recursividade consiste na soma dos dois termos anteriores para obter o próximo elemento a partir do segundo termo. Assim, seu terceiro elemento é 1 + 1 = 2, seu sucessor é 1 + 2 = 3 e assim por diante, conforme exposto no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 - Sequências numéricas repetitiva e recursiva respectivamente

PROCURANDO PADRÕES EM SEQUÊNCIAS	
SEQUÊNCIA Nº 4	SEQUÊNCIA Nº 5
2, *7*, *12*, *17*, *22*, ...	*1*, *1*, *2*, *3*, *5*, *8*, *13*, ...

Fonte: Compilação da autora.

Nesse contexto, o ato de observar sequências já iniciadas e construir sequências, do modo a compreendê-las e identificar seus elementos faltantes é imprescindível à aprendizagem das ideias algébricas. É essencial explorá-las matematicamente, de forma, que possam ser investigadas as condições de existência destas, por exemplo, pode-se abordar tanto a adição ou a subtração como a introdução da multiplicação por meio dos múltiplos.

Para finalizar, o docente deve propiciar um espaço para a criação de uma nova seriação numérica, construí-la com seus alunos e confeccionar cartazes com os números desta juntamente com a turma, de modo que, se possa observar e perceber sua regularidade e, então, expressá-la.

Adote dois elementos, deixe que as crianças desvendem o objeto ausente e continuem determinando os próximos termos em função do seu antecessor, de forma que, o cálculo do terceiro elemento seja obtido por meio da soma do seu antecessor com o elemento ausente, considere *0*, *5*, *10*, ..., por exemplo. Ao findar este passo, promova um debate coletivo e deixe que as crianças compartilhem os seus posicionamentos, essa troca é muito importante para a construção do saber.

Finalização da sequência didática

Por fim, peça que os alunos se organizem em uma fila única, solicite um critério para isto, ajude-os se necessário. O objetivo é formar um trenzinho de forma (de) crescente para realizar um passeio pela escola, no qual, cada criança, irá levar um número da sequência criada para apresentá-la à comunidade escolar.

3.1.3 Proposições para o 3.º ano

Neste conjunto de atividades, encontram-se encadeadas duas sequências didáticas para serem aplicadas ao longo do terceiro ano do Ensino Fundamental. Para tanto, encontram-se descritos, de forma detalhada, todos os passos para a aplicação de cada uma das propostas metodológicas sugeridas aqui. É imprescindível que, no seu desenrolar, seja oportunizado aos alunos a construção de caminhos que conduzam à generalização, de modo a contribuir de forma efetiva no desenvolvimento do pensamento algébrico destes, pois, este é essencial para uma aprendizagem sólida e duradoura da Matemática.

3.1.3.1 Sequência didática 05

Encontra-se, minuciosamente descrito aqui, o encadeamento de passos a serem seguidos pelo professor na aplicação desta sequência didática. Não é aconselhável compartilhar estas informações com os alunos, visto que, sua exposição pode interferir no propósito desta atividade, devendo o docente guiá-los conforme as sugestões retratadas.

Seu objetivo consiste em identificar o critério de formação de determinada sequência numérica, encontrando os elementos faltantes e descrevendo uma regra válida para os termos ainda não conhecidos, de modo que, seja possível idealizar uma lei de formação que valha para a composição de outras sequências com as mesmas caraterísticas em um contexto propício à generalização.

Pensou-se em atividades que abordam as operações por meio de sequências numéricas com figuras geométricas, sob o enfoque da problematização, priorizando o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para desenvolvê-las, serão necessários, além dos recursos essenciais ao exercício da docência, recortes quadrangulares de papel sulfite ou cartolina, e também, atividades impressas com as sequências numéricas dadas acrescidas de tampinhas para sua composição. A elaboração e confecção do material devem ser de acordo ao planejamento do professor.

Tema: Sequências numéricas

Número de aulas: 10 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Números figurados

- Identificação de regularidades em sequências numéricas com figuras geométricas

Habilidades:

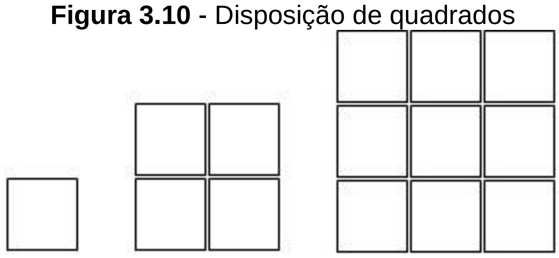
- Perceber sequências numéricas em sequências com figuras geométricas, de modo a compreendê-las e expressá-las.
- Identificar a invariabilidade em sequências de números naturais, resultantes da realização de operações sucessivas, descrevendo uma lei de formação da sequência, idealizando estratégias de generalização para a edificação do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

É sugerido iniciar a aula por meio de um processo de investigação dos conhecimentos já construídos ao longo do desenvolvimento de atividades pertinentes ao campo algébrico. Para isto, faça indagações como: o que é uma sequência? O que você sabe sobre sequências de objetos? E de números? Apresente aos alunos, um exemplo de cada uma delas, ressaltando a imprescindibilidade de suas participações no decorrer da exteriorização de opiniões.

Dispondo tais saberes, organize a turma em duplas, e, inicie a atividade. Para tanto, entregue a estas, quatorze quadrados com três centímetros de lado, estes podem ser recortes de papel sulfite ou cartolina. Em seguida, direcione-os a formarem um quadrado usando apenas uma das peças, oriente-os a construírem outro quadrado utilizando quatro das peças restantes, e os conduza à próxima composição com os últimos recortes, conforme é indicado na Figura 3.10.

Figura 3.10 - Disposição de quadrados



Fonte: Compilação da autora.

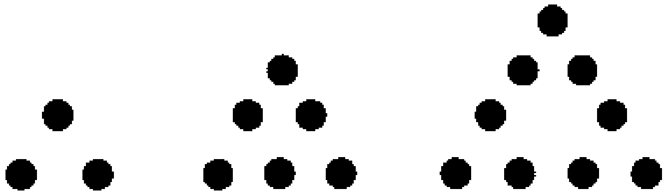
Feitas as composições, deixe que os alunos realizem a leitura da mesma.

Continue explorando os conceitos matemáticos como: ao considerar uma unidade para o lado do quadradinho, quantas unidades têm cada lado das figuras formadas respectivamente? Quantas peças compõem cada uma das figuras? Induza os alunos a exporem suas compreensões e a partir delas solicite de cada dupla o desenho das duas próximas figuras.

Finalize este passo questionando-os: o que aconteceu do primeiro quadrado para o segundo? E do segundo para o terceiro quadrado? De que forma é possível saber o número de quadrados do próximo quadrado? Incite os alunos na busca pelo padrão de modo a sistematizar o pensamento, as soluções e as diferentes maneiras de encontrá-las.

De posse das percepções dos alunos acerca da primeira atividade, inicia-se o segundo passo. Para tanto, apresente no quadro branco ou por meio de slide as próximas sequências, a começar pela Figura 3.11. É indispensável dispor de material manipulável, como tampinhas ou outro recurso confeccionado pelo professor, além, da entrega de material impresso contendo os três primeiros termos de cada uma das sequências para serem completadas pelos alunos, no qual, serão desenhados os termos solicitados.

Figura 3.11 - Números triangulares



Fonte: Compilação da autora.

Desse modo, solicite aos alunos a análise da sequência dada e proponha uma discussão coletiva para externarem suas descobertas. Feito isso, oriente-os a comporem os dois próximos triângulos com as tampinhas. E em seguida, peça-os para:

a) Desenhar o triângulo seguinte;

b) Determinar quantas tampinhas ele tem;

c) Desenhar mais três termos do padrão dado;

d) Determinar o número de tampinhas do sétimo triângulo;

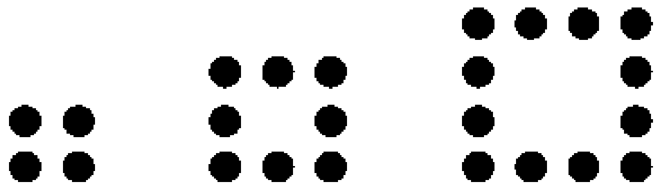
Neste momento, observe o desenrolar dos alunos, para aumentar, caso seja possível, a quantidade de termos conforme o desenvolvimento cognitivo da turma, com o intuito de ampliar potencialidades que possam enriquecer a elaboração do pensamento algébrico. Concretizada esta etapa, promova um debate a acerca dos passos realizados pelos alunos, priorizando suas percepções, de forma que, esta exteriorização possibilite aos demais alunos conhecer as diversas estratégias.

Induza-os às anotações dos conhecimentos discutidos. Espera-se que as crianças escrevam a sequência numérica recursiva: *3*, *6*, *9*, *12*, *15*, *18*, *21*, ..., e também, percebam que a partir do primeiro termo, pode-se calcular os próximos por meio de adições sucessivas, identificando o acréscimo de três unidades de um elemento para o outro. Professor, caso os alunos apresentem dificuldades, guie-os para alcançar o objetivo proposto.

Explore os múltiplos conceitos matemáticos concedidos por esta sequência. Dentre eles, têm-se a adição, bem como, os múltiplos a serem explorados aritmeticamente. No campo geométrico, além dos tamanhos dos triângulos pode-se estudar conceitos e propriedades. E também, todas as estratégias algébricas favoráveis à ampliação do raciocínio já descritas.

Prossiga apresentando a próxima sequência, a Figura 3.12. Repita todos os passos descritos na sequência anterior, pois, as mesmas têm propriedades algébricas iguais, diferindo apenas no elemento faltante, o qual possui uma unidade a mais, acarretando em uma nova forma geométrica, o quadrado.

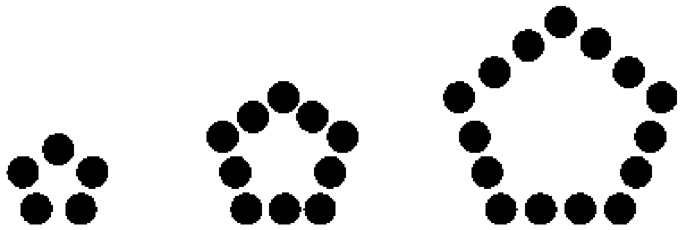
Figura 3.12 - Números quadrados



Fonte: Compilação da autora.

O mesmo processo é necessário à sequência representada na Figura 3.13. É imprescindível investigar juntamente com os alunos todas as possibilidades matemáticas propiciadas por esta atividade.

Figura 3.13 - Números pentagonais



Fonte: Compilação da autora.

Portanto, foram apresentadas estratégias de estudo com números geométricos, na qual, propõem-se adentrar nas diferentes esferas da Matemática. Tais saberes são de grande relevância na construção do conhecimento ao logo da escolaridade, tanto no trabalho com as operações como na elaboração dos conceitos geométricos, além do objetivo principal, que é o estudo da Álgebra.

Por fim, proponha-os a analisarem suas conclusões, escrevendo no quadro branco as seguintes informações:

a) Para o triângulo, escreveu-se a sequência numérica *3*, *6*, *9*, *12*, *12*, ..., sempre aumentando três tampinhas, uma de cada lado;

b) Para o quadrado, escreveu-se a sequência numérica *4*, *8*, *12*, *16*, *20*, ..., sempre aumentando quatro tampinhas, uma de cada lado;

c) Para o pentágono, escreveu-se a sequência numérica *5*, *10*, *15*, *20*, *25*, ..., sempre aumentando cinco tampinhas, uma de cada lado.

Explore com a turma, a identificação de uma regra para calcular o número de tampinhas dos termos desconhecidos para cada uma das sequências dadas, incentivando à generalização.

Espera-se que os alunos percebam as adições sucessivas, sendo um momento oportuno para introduzir a multiplicação, pois, para o primeiro termo da primeira sequência numérica tem-se $1 \times 3 = 3$, para o quinto, $5 \times 3 = 15$, de forma que para calcular o termo desejado, basta multiplicá-lo pelo número correspondente ao polígono dado, definido pelo seu número de lados.

Em seguida, interrogue-os sobre a possibilidade de obter uma regra que valha para outros polígonos, apresentando estratégias que induzam a imaginação dos alunos, para que eles percebam as múltiplas possibilidades passíveis de análise sobre os diversos olhares. Guie-os para a identificação dos polígonos e percepção de número de lados e quantidade de tampinhas da primeira figura.

É imprescindível estudar todos os saberes proporcionados ao longo do desenvolvimento desta atividade, os principais no campo algébrico descritos aqui, e aritméticos, também supracitados, que são as operações, tais como, os geométricos, como os diferentes tipos de polígonos e suas características, dentre outras aplicações a depender do desenvolvimento cognitivo do aluno.

Finalização da sequência didática

Por fim, conhecedor das habilidades desenvolvidas nos alunos, divida a turma em dois grupos e proponha-os a criarem uma nova sequência para outros polígonos, orientando-os se necessário e finalize com a apresentação das sequências construídas.

3.1.3.2 Sequência didática 06

Encontram-se, imediatamente, todos os passos para a aplicação desta sequência didática, os quais são para uso exclusivo do professor. Não é oportuno compartilhá-los com os alunos, pois, conhecê-los pode acarretar distorção no propósito desta atividade, tais informações foram pensadas para direcionar o docente na sua atuação.

Desse modo, objetiva-se, identificar regularidades presentes em operações de adição, de modo a explorar propriedades algébricas aditivas imperceptíveis ao olhar do aluno, desenvolvendo assim, noções de Álgebra por meio da habilidade de generalização da Aritmética, além de explorar estratégias prósperas ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Foram arquitetadas atividades lúdicas e exploratórias que abordam a adição por meio de jogos. Para tal, serão necessários dois dominós exatamente iguais para iniciar a aula. Para a continuidade desta, propõe-se um modelo de dominó a ser seguido, porém, o professor pode estar fazendo adaptações de acordo o nível de conhecimento dos alunos. Vale ressaltar que, a impressão do jogo deve ser feita em papel cartão ou algum outro tipo de papel um pouco mais rígido, para facilitar o manuseio das peças. Deve-se fazer uma cópia para cada quarteto, de acordo o número de alunos.

Tema: Relação de igualdade

Número de aulas: 9 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Relação de igualdade em operações aritméticas

- Ideia de igualdade na escrita de sentenças envolvendo adições de dois números naturais

Habilidades:

- Compreender a ideia de igualdade na escrita de diferentes sentenças de adições de dois números naturais que resultam em uma mesma soma.
- Identificar regularidades pertinentes à adição de números naturais, resultantes da existência das propriedades algébricas ainda não conhecidas, construindo caminhos para a generalização e elaborando o alargamento do pensamento algébrico.

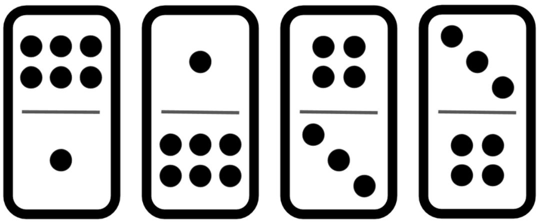
Descrição da atividade:

Inicie a aula organizando a turma de modo que forme um semicírculo e apresente as peças do dominó aos alunos. Em seguida, solicite a pretensão de oito alunos para realização de duas partidas simultâneas, caso saibam jogar, apenas conduza o jogo orientando os alunos, de modo que todos possam observar as caraterísticas de cada uma das peças. Se houver a necessidade, ensine-os como se joga.

Finalizada a partida de dominó, inicie uma breve discussão, acerca das características relevantes, observadas pelos alunos, nas peças durante o jogo. Este momento é importantíssimo para a identificação de conhecimentos prévios, os quais servirão de base para a continuidade da atividade.

Em seguida, separe quatro peças específicas do dominó, conforme a Figura 3.14, apresente-as aos alunos, questionando-os: o que estas peças têm em comum?

Figura 3.14 - Peças de dominó: sena de ás e quadra de terno



Fonte: Compilação da autora.

Partindo de perguntas-chaves e evoluindo para ideias mais abstratas, direcione os alunos à investigação de alguma proposição que valha para todas as peças.

Espera-se que, dentre as hipóteses arquitetadas, os alunos percebam que ao adicionar o número de pontos de cada peça, obtém-se um mesmo valor, caso isso não aconteça, guie-os no processo. Solicite-os a escrita de todas as adições, de modo a introduzir a ideia de igualdade.

Reforce-os sobre a relação entre as peças de dominó, direcionando-os a observarem que, independentemente da ordem das parcelas, a soma dos pontos, em qualquer uma das peças expostas, corresponde a sete.

Recorra ao quadro branco e escreva todas as sentenças, de modo a inserir, gradativamente, a propriedade comutativa da adição.

Sendo assim, tem-se:

a) Para as duas peças da esquerda, $6 + 1 = 7$ e $1 + 6 = 7$;

b) Para as duas peças da direita, 4 + 3 = 7 e 3 + 4 = 7.

Espera-se que, os alunos percebam as diversas formas se obter sete em uma adição com dois números naturais, além destas sentenças aqui apresentadas, explore as demais, de modo que, eles conjecturem tais possibilidades argumentando suas respostas.

Convide-os a arquitetar outras situações parecidas com a descrita acima utilizando outras peças do dominó, com o intuito de provocar a reflexão sobre as quantidades de pontos das peças, de modo que, os alunos compreendam que a soma dos pontos das duas pontas não se altera, independente da ordem em que, são adicionados os números que representam tais pontos de cada uma das pontas, e, partindo desta regularidade, introduza a propriedade comutativa da adição.

Explore todas as possibilidades expostas pelos estudantes, com a intenção de incitá-los à justificação dos conhecimentos matemáticos experimentados no contexto mencionado.

Finalizando essa primeira parte, divida a turma em grupos com quatro integrantes cada. Apresente o dominó da adição exposto no Quadro 3.3, orientando os alunos sobre sua criação, de modo que, estes compreendam que os espaços em brancos nas peças devem ser completados com sentenças constituídas pela adição de dois números naturais, as quais precisam corresponder a um dos números especificados na ponta de determinada peça de dominó, por exemplo: 1 + 2 = 3, 5 + 4 = 9, 6 + 7 = 13 e 5 + 2 = 7.

Entregue o dominó impresso para os alunos recortarem, e imediatamente, escreverem as sentenças faltantes. Circule entre os grupos direcionando-os e observando o desenrolar dos alunos. Se necessário, norteie-os na escrita das expressões matemáticas requeridas, sempre observando as estratégias adotadas pelos alunos.

Quadro 3.3 - Dominó da adição

DOMINÓ DA ADIÇÃO							
7	1 + 2	3		18		19	
25		10	5 + 4	9		24	
11		27		21	6 + 7	13	5 + 2
26		20		4		8	
6		15		23		5	
30		29		28		16	
17		14		12		22	

Fonte: Compilação da autora.

Este momento é extremamente importante, uma vez que, serão trabalhados, inconscientemente, infinitos caminhos para a escrita da adição de dois números naturais diferentes e/ou iguais que resultem em uma mesma soma, os quais são imprescindíveis para uma aprendizagem com autonomia.

Percebe-se a existência das múltiplas habilidades matemáticas trabalhadas arbitrariamente, desde os conceitos aditivos mais simples às ideias abstratas dos conteúdos matemáticos, como noções de probabilidade, além das concepções algébricas propostas, uma vez que, busca-se inseri-las, juntamente com a Aritmética e a Geometria, de modo a se desenvolverem juntas, uma complementando a outra.

Ao expressar, oralmente ou por escrito, as múltiplas possibilidades de representar um número natural por meio da adição de outros dois números naturais, comparando os resultados a determinado número, os alunos estabelecem uma relação de comparação, que além de desenvolver estratégias, ampliam o raciocínio matemático, também, contribuem efetivamente para a aprendizagem das propriedades algébricas.

Portanto, devem ser inseridas noções de Álgebra no estudo das operações aritméticas, e de forma gradativa, introduzir propriedades algébricas, como a comutatividade aqui descrita. Além do mais, pode incluir o elemento neutro da adição, caso algum aluno faça uso do número zero na escrita de alguma sentença, e à medida que, verifica-se a ascensão do saber escolar explorar as demais propriedades por intermédio da generalização da aritmética, uma vez que, esta tem se tornado o principal contexto para o desenvolvimento das relações associadas ao pensamento algébrico.

É imprescindível explorar todos os saberes proporcionados ao longo do desenvolvimento da atividade, tanto no campo algébrico, conforme descrito aqui, que são a relação de igualdade e a percepção de regularidades com enfoque na generalização da propriedade comutativa da adição, como no campo aritmético, que são as operações, dentre outras aplicações de acordo o desenvolvimento cognitivo do aluno. Encerre a atividade retomando com os estudantes a ideia de igualdade entre números naturais somados em ordens diferentes, com o intuito de aclarar e edificar o conhecimento proporcionado no desenvolvimento desta sequência didática.

Finalização da sequência didática

Por fim, proporcione um momento lúdico em que os alunos possam jogar com os dominós confeccionados, reforçando assim, a aprendizagem dos conceitos matemáticos desenvolvidos nas aulas.

3.1.4 Proposições para o 4.º ano

A busca de padrões é imprescindível à aprendizagem matemática. Partindo desta premissa, foram elaboradas duas sequências didáticas, as quais devem ser aplicadas ao longo do quarto ano do Ensino Fundamental. Para isto, foi estruturado um encadeamento de passos, de forma detalhada, para sem aplicadas pelo professor. É imprescindível, no seu desenrolar, oportunizar caminhos que conduzam a estratégias para investigações de regularidades presentes, partindo da generalização da Aritmética, de modo a colaborar, significativamente, no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, essencial para uma aprendizagem sólida e duradoura da Matemática.

3.1.4.1 Sequência didática 07

Encontram-se, detalhadamente expostas aqui, todas as informações necessárias à aplicação desta sequência didática. Sendo estas, para uso exclusivo do professor, uma vez que, o seu aclaramento aos alunos pode interferir na finalidade desta proposta de intervenção. Sendo assim, cabe ao docente direcionar o desenvolvimento das atividades sugeridas.

Para tanto, tem-se como objetivo: identificar padrões e regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de números naturais, realizando multiplicações sucessivas, de modo a completar as sequências sob a percepção de uma infinidade dos seus termos, desvendando uma proposição válida para os termos ainda não conhecidos, de maneira que, seja possível conjecturar uma lei de formação que defina o conjunto de múltiplos dos números naturais estudados dentro de uma conjuntura propícia à aprendizagem da Álgebra.

Foram consideradas atividades que elucidam os múltiplos de números naturais por meio de sequências numéricas compostas por multiplicações sucessivas do natural cogitado fazendo uso de sequências geométricas, sob o enfoque da integralização dos saberes, sobrepondo a elaboração do pensamento algébrico. Para desenvolvê-las, serão necessários além dos recursos característicos da atuação docente, tanto o uso de um projetor multimídia, uma vez que, anseia-se harmonizar a imagem projetada, quanto materiais concretos, como, cinquenta e seis tampinhas, ou outro objeto similar, para cada grupo. Além do mais, deve-se ter para a aula o equivalente a quatro caixas de fósforos para cada quinteto para a realização da última atividade. Por fim, é imprescindível um planejamento que contemple atividades desafiadoras para uma aprendizagem significativa e duradoura.

Tema: Sequências numéricas

Número de aulas: 9 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Sequência de números triangulares

- Sequências numéricas recursivas formadas por múltiplos de números naturais

Habilidades:

- Investigar a existência de sequências numéricas em sequências compostas por figuras geométricas, de modo a compreendê-las e expressá-las.
- Identificar regularidades presentes em sequências numéricas compostas por múltiplos de números naturais, decorrentes da realização de operações sucessivas, descrevendo uma lei de formação da sequência, arquitetando estratégias prósperas ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

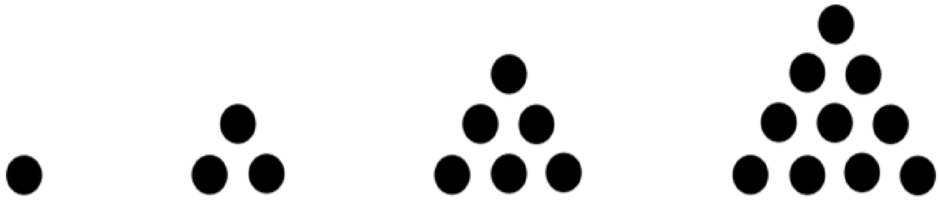
Inicie a aula com uma breve discussão sobre sequências numéricas com o intuito de investigar os conhecimentos prévios dos alunos. Para tal, forme grupos com cinco integrantes cada e solicite-os a compartilharem entre si suas concepções individuais, para em seguida, apresentarem os pareceres grupais à classe argumentando-os.

De posse das hipóteses levantadas neste momento inicial e dos saberes com relação às sequências já conhecidas pelos alunos, os quais guiarão o desenrolar da atividade, intensifique seus conhecimentos utilizando os números naturais como ponto de partida. Continue com mais questionamentos de modo a conhecer os seus conceitos acerca dos triângulos.

Espera-se dos alunos relatos relevantes às características deste polígono, incremente-os se necessário, de modo a relembrar sua definição e introduzir demais conceitos harmônicos a esta etapa de ensino.

Apresente aos alunos, com o auxílio de um projetor multimídia, a sequência composta por triângulos exposta na Figura 3.15, solicitando a análise desta. Em seguida, convide-os para compor a sequência dada com material concreto, como tampinhas, as quais devem ser entregues em quantidade suficiente a cada grupo, com o intuito de dar significado e despertar o interesse nos alunos.

Figura 3.15 - Números triangulares

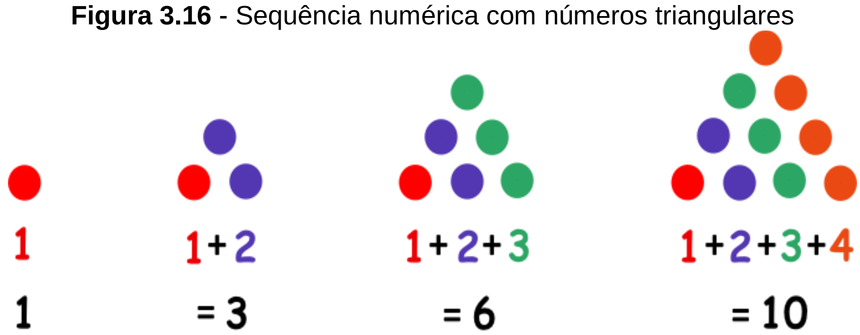


Fonte: Compilação da autora.

Proporcione um momento de reflexão, no qual, os grupos devem anotar os seus apontamentos. Em seguida, permita que cada grupo se expresse de modo a compartilhar suas informações analisadas. É conjecturado que, os alunos compreendam a sequência numérica, *1*, *3*, *6*, *10*, ..., formada pela quantidade de bolinhas de cada triângulo disposto, a qual se constitui de números triangulares, pois, todos os seus termos são números naturais que podem ser representados na forma de um triângulo equilátero.

Partindo de questionamentos como: existe um padrão geométrico nesta sequência? E numérico? Quais são? Interrogue-os, acerca das suas estratégias para encontrar os elementos faltantes, conduzindo-os à investigação do critério de formação desta sequência de números triangulares. Oportunize a exteriorização das hipóteses arquitetadas pelos grupos. E em seguida, apresente as informações da Figura 3.16 por meio de slide.

Figura 3.16 - Sequência numérica com números triangulares



Fonte: Compilação da autora.

Dentre os múltiplos conceitos matemáticos, explore a regularidade presente, de modo a encontrar os próximos termos.

1 = 1

1 + 2 = 3

1 + 2 + 3 = 6

1 + 2 + 3 + 4 = 10

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

Portanto, o próximo elemento pode ser escrito como sendo o número anterior mais o número da posição ocupada por ele, ou ainda, como sendo o somatório dos *n* números naturais até a posição solicitada, por exemplo, o termo 15 ocupa a quinta posição na sequência, podendo ser escrito como a soma de 10 + 5, e também, o somatório dos cinco primeiros números naturais, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.

Dentre os cinco primeiros números triangulares, três são múltiplos de 3, e, dois múltiplos de 5, solicite aos alunos a buscarem características comuns, guiando-os para esta percepção. Aproveite o momento para introduzir os múltiplos dos números 3 e 5 em forma de sequências numéricas.

a) Múltiplos de 3: *0*, *3*, *6*, *9*, ..., ou seja, 3 vezes um número natural qualquer;

b) Múltiplos de 5: *0*, *5*, *10*, *15*, ..., isto é, 5 vezes um número natural qualquer.

Explore as sequências numéricas formadas pelos múltiplos dos números dados de modo a construir uma regra válida para todos os múltiplos de cada um deles.

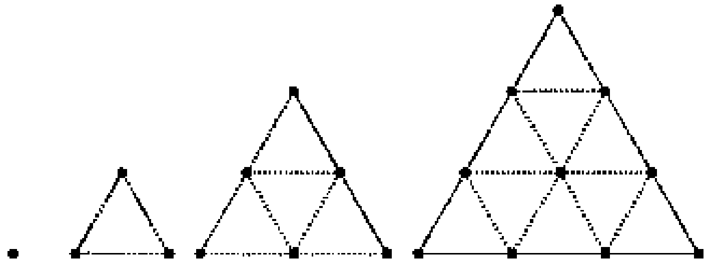
Anseia-se que os alunos compreendam que os múltiplos de 3 podem ser escritos através da fórmula *3n*, com *n* sendo um número inteiro. Ratificada tal compreensão, introduza o conceito de múltiplos solicitando dos alunos a escrita de algumas sequências, por exemplo, os múltiplos de 2, e demais números naturais, aumentando gradativamente conforme o desenvolvimento cognitivo destes.

Vale ressaltar a relevância do significado de múltiplo de um número, e também, as regularidades existentes na multiplicação, das quais, pode-se explorar os números pares sob a escrita de um múltiplo de 2, dentre outras para demais múltiplos de números naturais. Tais regras podem ser exploradas algebricamente por meio da composição de fórmulas, *2n* para os múltiplos de 2, *3n* para os múltiplos de 3, dentre outras.

A busca por padrões é essencial ao estudo da Matemática, a generalização ocorre a partir da identificação destas regularidades, implicando diretamente no desenvolvimento do pensamento algébrico, o qual é essencial para a produção de conhecimento matemático. Assim, propõe-se uma última atividade, a qual ampliará intuitivamente o conceito dos múltiplos de 3.

Para tanto, distribua palitos de fósforos em grandes quantidades aos grupos, direcionando-os à sequência de números triangulares inicial, de modo que, estes possam estar ligando as bolinhas que constituem as figuras triangulares formando vários triângulos menores, de acordo à Figura 3.17.

Figura 3.17 - Sequência de triângulos formadas pelos números triangulares



Fonte: Compilação da autora.

Discuta com os alunos a nova sequência encontrada, *0*, *3*, *9*, *18*, ..., de modo que todos compreendam que a partir da segunda figura, a quantidade de palitos de fósforo usada em cada uma é, o número de palitos da figura anterior adicionado ao produto do número referente a posição ocupada por três, ou seja, [(número de palitos da figura anterior) + (número da posição) × 3], obtendo uma sequência numérica composta pelos múltiplos de três, *0*, *3*, *9*, *18*, *30*, ..., uma vez que, o uso de padrões auxilia expressivamente no estudo dos conceitos matemáticos.

Finalização da sequência didática

Por fim, solicite-os a contagem de triângulos menores de cada figura e escreva uma nova sequência no quadro branco, *1*, *4*, *9*, *16*, ..., sem adentrar ao conteúdo, sugerindo apenas uma observação de tais números, os quais perpetuarão ao logo da escolaridade dos educandos.

3.1.4.2 Sequência didática 08

Encontram-se, elencados aqui, os passos a serem seguidos pelo professor para a aplicação desta sequência didática. Não é oportuno disponibilizar estas informações aos alunos, devido a possíveis interferências na sua intenção, devendo o docente conduzir o seu desenvolvimento.

Seu objetivo incide em investigar e compreender a escrita de expressões matemáticas por meio do produto de números naturais, identificando equivalências nas operações de multiplicação e explorando propriedades algébricas multiplicativas imperceptíveis ao olhar do aluno, desenvolvendo assim, a habilidade de argumentar ante a generalização dos conceitos aritméticos, essencial ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Foram idealizadas atividades lúdicas e investigativas que abordam a multiplicação por meio de jogos. Para isso, serão necessários dois dados exatamente iguais para o início da aula. Para seu prosseguimento, é proposto um modelo de dominó a ser seguido, entretanto, o professor pode realizar adaptações conforme os conhecimentos dos alunos. Vale salientar que, a impressão do jogo deve ser feita em papel cartão ou algum outro tipo de papel mais firme, para facilitar o manuseio das peças. Deve-se fazer uma cópia para cada quarteto, obedecendo ao número de alunos.

Tema: Relação de igualdade

Número de aulas: 9 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Relação de igualdade em operações aritméticas

- Ideia de igualdade na escrita de sentenças envolvendo multiplicações de dois números naturais

Habilidades:

- Compreender a escrita de diferentes sentenças de multiplicações de dois números naturais que resultem em um mesmo produto determinando-os.
- Identificar regularidades pertinentes à multiplicação de números naturais, resultantes da existência das propriedades algébricas ainda não conhecidas, construído caminhos propícios à generalização, e consequentemente, contribuir na elaboração do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

Inicie a aula organizando a turma de modo que forme um semicírculo e apresente os dados aos alunos. Em seguida, solicite a pretensão de dois alunos para atuarem na aula. Os estudantes devem jogar os dados simultaneamente, de maneira que, possa escrever sentenças multiplicativas com os números correspondentes aos pontos de cada um deles em cada lançamento. A Figura 3.18 retrata uma das possibilidades ansiadas.

Figura 3.18 - Dados brancos

Fonte: Compilação da autora.

Para tanto, espera-se que após sucessivos lançamentos encontrem ao menos uma situação que possa representar a comutatividade da multiplicação, por exemplo, 4 × 2 = 8 e 2 × 4 = 8. Desse modo, o professor deve construir uma tabela no quadro branco para anotar os possíveis produtos.

Quadro 3.4 - Lançamentos de dados

TABELA DE LANÇAMENTOS		
Aluno 1	Aluno 1	Produtos
4	2	4 × 2 = 8
1	6	1 × 6 = 6
2	4	2 × 4 = 8
2	3	2 × 3 = 6

Fonte: Compilação da autora.

Os lançamentos devem persistir até a obtenção de dados necessários para iniciar a explanação do conteúdo, conforme é exemplificado no Quadro 3.4, as diferentes formas de escrever uma sentença por meio da multiplicação de dois números naturais que resultam em um mesmo produto.

Partindo de perguntas-chave e evoluindo para ideias mais abstratas, direcione os alunos à investigação, uma vez que, se objetiva trabalhar as propriedades das operações por meio de atividades investigativas, buscando a compreensão da Álgebra, de forma que anteponha à percepção das regularidades existentes nas operações procedentes de especificidades algébricas.

Anseia-se que, dentre as hipóteses arquitetadas, os alunos compreendam que existe mais de uma forma para escrever um mesmo número natural, bem como, a invariabilidade nos resultados na escrita de algumas sentenças, de modo a inserir a comutatividade da multiplicação de maneira investigatória.

Para tanto, recorra ao quadro branco e escreva algumas destas sentenças, de modo a solidificar a compreensão de tais saberes. Sendo assim, tem-se: diferentes formas para escrever um número natural, $1 \times 6 = 6$, $6 \times 1 = 6$, $2 \times 3 = 6$ e $3 \times 2 = 6$; além do mais, a precisão da comutatividade.

Almeja-se que, os alunos compreendam as diversas formas se obter um número natural qualquer por meio da multiplicação de outros dois números naturais. Instigue-os a arquitetar outras situações parecidas com a descrita acima utilizando outros números conhecidos, intentando acarretar impulso nas habilidades algébricas ansiadas.

Ao finalizar essa primeira atividade, divida a classe em grupos com quatro integrantes cada. Apresente o dominó da multiplicação exposto no Quadro 3.5, norteando os alunos sobre a sua confecção, de modo que, estes compreendam que, os espaços a serem completados devem conter expressões que contemplem a multiplicação de dois números naturais, as quais devem igualar-se, aos números elencados nas peças do dominó, por exemplo: $2 \times 2 = 4$, $2 \times 4 = 8$, $3 \times 5 = 15$ e $3 \times 6 = 18$.

Entregue uma cópia do dominó impresso para ser recortada, e imediatamente, acrescentadas as sentenças faltantes. Circule entre os grupos observando e guiando-os na execução da atividade. Se necessário, auxilie-os na escrita das expressões assistindo os caminhos percorridos pelos alunos.

Quadro 3.5 - tabuada da multiplicação

DOMINÓ DA MULTIPLICAÇÃO							
18		10		14		16	
49	2 × 2	4		30		20	
3		6	2 × 4	8		24	
21		27		12	3 × 5	15	3 × 6
28		32		36		5	
25		35		40		45	
42		48		54		60	

Fonte: Compilação da autora.

Este momento é de extrema importância, visto que, serão trabalhadas, inconscientemente, inúmeras estratégias para a escrita do produto de dois números naturais que levam ao mesmo resultado, sendo estas essenciais à autonomia dos alunos no processo de aprendizagem Matemática.

Ao expressar, seja por meio da oralidade ou através da escrita, as múltiplas possibilidades de retratar um número natural através do produto de outros dois números naturais, confrontando as soluções a um número definido, os alunos estabelecem uma relação de comparação, que além de desenvolver estratégias que alargam o raciocínio matemático, também, contribuem de forma efetiva para uma aprendizagem duradoura da Álgebra.

Deste modo, as concepções algébricas devem ser incorporadas aos conhecimentos aritméticos, e de forma investigativa, introduzir os conceitos algébricos. Dentre eles, deve-se sobrepor o estudo do elemento neutro da multiplicação, caso algum aluno faça uso do número um na escrita de alguma sentença, bem como, adentrar no estudo da Álgebra a partir da generalização da

Aritmética, de modo a investigar suas propriedades no decorrer da execução da atividade, visto sua vasta contribuição para o desenvolvimento das relações associadas ao pensamento algébrico.

Há um leque de saberes a serem explorados nesta proposta de sequência didática, nos diferentes campos da Matemática, além das proposições algébricas, conforme descritas aqui, têm-se os conhecimentos aritméticos, partindo da multiplicação à inserção da divisão como operação inversa, dentre outras aplicações à proporção em que ocorre o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Conclua a atividade retomando a ideia das diferentes possibilidades para a escrita de um número natural por meio do produto de outros números naturais.

Finalização da sequência didática

Por fim, oportunize um momento lúdico em que os alunos possam interagir com os dominós confeccionados, enrijecendo os saberes construídos no decorrer da atividade desenvolvida.

3.1.5 Proposições para o 5.º ano

A inserção, de forma gradativa, das proposições algébricas é essencial ao processo de elaboração do pensamento algébrico. Partindo deste princípio, foram idealizadas duas sequências didáticas, as quais devem ser aplicadas ao longo do quinto ano do Ensino Fundamental. Para este fim, foi, minuciosamente, encadeado um conjunto de passos para nortear o trabalho do professor. Sabe-se o quão os saberes algébricos são imprescindíveis à construção de conhecimento matemático, e, partindo desta percepção, busca-se oportunizar caminhos que conduzam a estratégias, por meio de investigações, para a realização de generalizações dos conceitos aritméticos, impulsionando concepções acerca da Álgebra, as quais são peculiares à aprendizagem significativa da Matemática.

3.1.5.1 Sequência didática 09

Dispõe-se, imediatamente, um encadeamento de passos a serem seguidos pelo professor, para a devida aplicação da sequência didática, aqui descrita. No entanto, tais informações são de uso exclusivo docente, visto que, o seu aclaramento aos alunos pode acarretar em inferências no propósito almejado.

O objetivo desta proposta consiste em perceber padrões em determinada sequência geométrica, de modo a identificar regularidades decorrentes da existência de uma proposição que comtemple os números quadrangulares, proporcionando um contexto propício à elaboração e estratégias pertinentes à aprendizagem dos conceitos algébricos.

Para o seu desenvolvimento, serão necessários além dos recursos essenciais ao exercício docente, um projetor multimídia, uma vez que, anseia-se projetar imagens, e também materiais concretos, como, cinquenta e cinco tampinhas, ou outro objeto similar, para cada grupo, bem como, uma malha quadriculada na mesma quantidade de equipes. Em síntese, uma aprendizagem significativa e duradoura requer um planejamento que contemple atividades desafiadoras por parte do professor.

Tema: Sequências numéricas

Número de aulas: 7 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Sequência de números quadrangulares

- Sequências numéricas recursivas formadas pelo produto de um número natural por ele mesmo

Habilidades:

- Investigar, em sequências geométricas, a existência de sequências numéricas, de modo a compreendê-las e expressá-las.
- Identificar regularidades presentes em sequências numéricas decorrentes de operações aritméticas, decodificando uma proposição válida para a escrita dos elementos faltantes, elaborando estratégias auspiciosas ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

Inicie a aula organizando a classe em quartetos para uma conversa rápida acerca das sequências numéricas já vistas pelos alunos. Para este fim, apresente aos alunos a tabuada pitagórica, sugerida na Figura 3.19, e, com o intuito de inteira-se dos seus conhecimentos prévios, solicite aos educandos a identificação de possíveis sequências nesta tabela, os quais devem exteriorizar suas concepções argumentando-as.

Figura 3.19 - Tabela de Pitágoras

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	**36**	42	48	44	60
7	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**

Fonte: Compilação da autora.

De posse das questões expostas neste momento introdutório e dos conhecimentos sobre as sequências já contempladas pelos alunos, os quais nortearão as ações do professor na aplicação desta atividade, reforce a compreensão utilizando as sequências numéricas citadas pelos estudantes.

Espera-se a percepção dos números naturais, dos números pares que também são os múltiplos de 2, demais múltiplos, e até mesmo, que relatem a sequência destacada na diagonal da tabela dentre as sequências mencionadas, uma vez que, o propósito é a análise detalhada desta.

Prossiga indagando-os acerca dos seus conhecimentos geométricos com o propósito de investigar suas concepções em relação aos quadrados. Anseia-se por relatos expressivos no que tange às características deste polígono, enriqueça-os, de modo a recordar sua definição e introduzir demais conceitos relevantes a esta etapa de ensino.

Exponha aos alunos, com o auxílio de um projetor multimídia, a sequência constituída de quadrados de acordo a Figura 3.20, solicitando sua análise.

Imediatamente, proponha-os a reprodução da sequência dada com material concreto, como tampinhas, devendo estas ser entregues em quantidade satisfatória a cada grupo, buscando acoplar o lúdico ao abstrato.

Figura 3.20 - Números quadrangulares

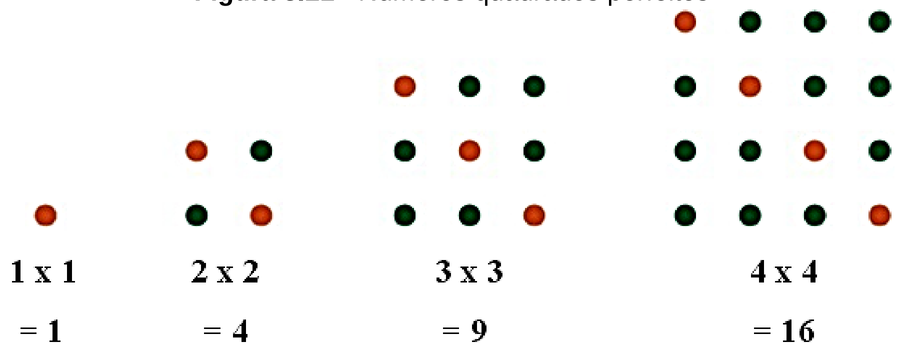
Fonte: Compilação da autora.

Oportunize aos estudantes um momento de observação, no qual, eles devem interpretar suas análises para expressá-las posteriormente. Constroem-se hipóteses de que os alunos sejam capazes de compreender e escrever a sequência numérica, 1, 4, 9, 16, ..., formada pela quantidade de bolinhas de cada quadrado disposto, a qual se constitui de números quadrangulares, pois, todos os seus termos são números naturais que podem ser representados na forma de um quadrado.

Estes quadrados representam na Matemática, um número inteiro que pode ser escrito como o quadrado de outro número inteiro, portanto, os números quadrangulares serão estudados nos anos subsequentes como quadrados perfeitos. Assim, para esta etapa do ensino deve-se apenas mostrar que os números quadrangulares, de modo similar, são cognominados como quadrados perfeitos.

Partindo de questões como: existe um padrão geométrico nesta sequência? E numérico? Quais são? Indague-os acerca das suas percepções com relação às observações desenvolvidas, conduzindo-os a investigar o critério de formação desta sequência de números quadrangulares. Oportunize a discussão das hipóteses arquitetadas pelos alunos. Em seguida, apresente as informações da Figura 3.21 por meio de slide.

Figura 3.21 - Números quadrados perfeitos



Fonte: Compilação da autora.

Esperam-se múltiplas compreensões, desde a percepção de uma sequência composta por números naturais ao analisar o número de bolinhas dos lados cada quadrado, e também, de suas diagonais, ou seja, a sequência numérica, *1*, *2*, *3*, *4*, ..., a qual constitui uma das possibilidades de resposta. Sob um olhar geométrico, vê-se uma sequência de quadrados, do menor para o maior, aumentado sempre uma unidade na medida de cada lado, caracterizando um contexto oportuno à introdução das noções iniciais de perímetro e área.

No que tange a Álgebra, busca-se a identificação de um padrão, assim, ao explorar o total de bolinhas de cada quadrado, percebe-se a sequência numérica, *1*, *4*, *9*, *16*, ..., na qual, intenciona-se que o aluno perceba, que ao multiplicar um número natural por ele mesmo, se tem um outro número natural que faz parte desta sequência de números.

$1 \times 1 = 1$

$2 \times 2 = 4$

$3 \times 3 = 9$

$4 \times 4 = 16$

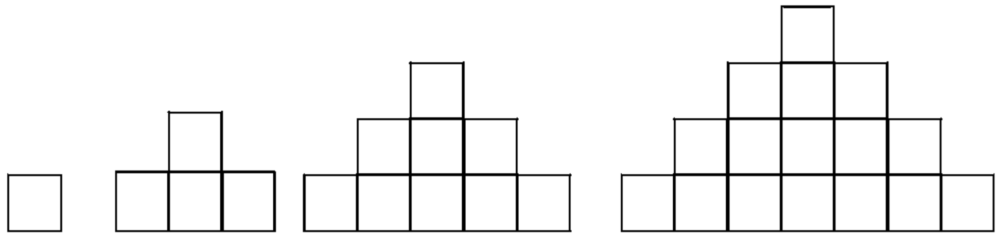
Prossiga de modo a conjecturarem uma proposição que possibilite escrever a lei de formação para a sequência dada, mostrando aos alunos que representando determinado número natural por n, o número natural procurado será $n \times n$, assim, se $n = 5$, tem-se $n \times n = 5 \times 5 = 25$, para $n = 6$, tem-se $n \times n = 6 \times 6 = 36$, e assim sucessivamente, até obter o maior número de elementos conforme a aptidão da classe.

Anseia-se que os alunos interpretem o padrão de modo compreender que a fórmula $n \times n$ é válida para qualquer número natural. Vale ressaltar que, de forma imperceptível, o aluno está realizando tanto o cálculo de áreas do polígono dado como o algoritmo da potenciação, uma vez que, $n \times n = n^2$, os quais são propostos nas etapas de ensino subsequentes.

Propõe-se uma última atividade, a qual proporcionará uma reiteração dos saberes construídos até o presente momento, visto que, a busca por regularidades que permitem generalizar determinadas propriedades deve ocorrer por meio de investigações, de modo a desenvolver habilidades algébricas essenciais à aprendizagem matemática.

Para tanto, entregue a cada grupo uma malha quadriculada para o recorte de pequenos quadrados. Feito isso, solicite dos alunos a representação da sequência analisada, em uma proposta de sequência geométrica diferente da apresentada. Caso eles apresentem dificuldade construa com eles a ideia inicial sugerida na Figura 3.22 e deixe prevalecer a criatividade destes.

Figura 3.22 - Uma disposição diferente dos números quadrangulares



Fonte: Compilação da autora.

Discuta com os alunos o novo formato em que os números foram dispostos geometricamente, de modo que todos compreendam que uma ideia pode originar outra um tanto inesperada, explorando o pensamento abstrato, o qual contribui efetivamente na construção do conhecimento matemático.

Finalização da sequência didática

Finalize com uma breve discussão dos momentos importantes no desenrolar da atividade, enfatizando que o alargamento de tais saberes incidirá no decorrer da Educação Básica.

3.1.5.2 Sequência didática 10

Encontra-se, imediatamente, um encadeamento de passos sugeridos, ao desenvolvimento desta sequência didática. Não é oportuno compartilhá-lo com os alunos, visto a possibilidade de distorção na intenção da atividade, devendo o docente norteá-los no processo.

Com o objetivo de realizar generalizações, por meio de investigações em operações aritméticas, buscou-se elaborar atividades que contemplassem propriedades algébricas, ainda não conhecidas pelos alunos, que permitissem conclusões partindo de situações particulares para contextos gerais, de modo que, intuitivamente, possam desenvolver nos alunos, habilidades pertinentes a Álgebra, no findar dos Anos Iniciais do Ensino fundamental, as quais são demasiadamente, enriquecedoras na elaboração do pensamento algébrico, e, indispensáveis a uma aprendizagem matemática duradoura.

A aplicação desta sequência didática requer um maior espaço de tempo, uma vez que, há uma multiplicidade de saberes a se explorar. Para tanto, foram arquitetadas atividades que conectam o lúdico ao abstrato em um processo investigativo e desafiador. Para a realização desta, serão necessários, além do material essencial ao exercício docente, um projetor multimídia para uma ampla projeção das imagens pertinentes a elaboração do conteúdo a ser desenvolvido, e, uma quantidade de dominós, o suficiente para que todos os quartetos formados na turma possam jogar ao mesmo tempo. Desse modo, cabe ao professor planejar antecipadamente, e fazer as adaptações necessárias para atingir o êxito na sua atuação pedagógica.

Tema: Relação de igualdade em operações

Número de aulas: 15 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Padrões pertinentes às operações aritméticas

- Análise de regularidades operatórias como uma estratégia para o processo de generalização das propriedades aritméticas

Habilidades:

- Perceber padrões que procedem de regularidades pertinentes às operações com números naturais.

- Identificar, por meio de investigações, padrões fixos em operações, expressos de forma não algébrica, e partindo de especificidades operatórias da Aritmética para a realização de generalizações das propriedades características da Álgebra, elaborar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

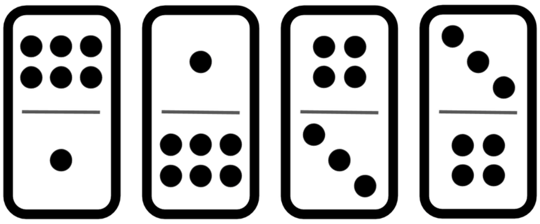
Descrição da atividade:

Deve-se iniciar a abordagem dividindo a turma em grupos com quatro integrantes cada. Logo após, distribua os dominós aos quartetos e proponha a realização de partidas simultâneas, caso saibam jogar, apenas coordene a execução da ação orientando os alunos, de maneira que além das estratégias dos jogadores, os pontos caraterísticos das peças sejam notados. Se houver a necessidade, ensine-os como se joga.

Concluídas as partidas de dominó, explore os conhecimentos prévios dos alunos por meio de uma rápida conversa sobre as características observadas pelos educandos, nas peças durante a realização do jogo, visto a importância destes para a continuidade da atividade.

Propõe-se reiterar saberes já construído de modo a ratificar sua compreensão. Para isso, adote peças específicas do dominó, conforme retrata a Figura 3.23, apresente-as aos alunos, questionando-os: o que estas peças têm em comum?

Figura 3.23 - Adição de pontos das peças de dominó: sena de ás e quadra de terno



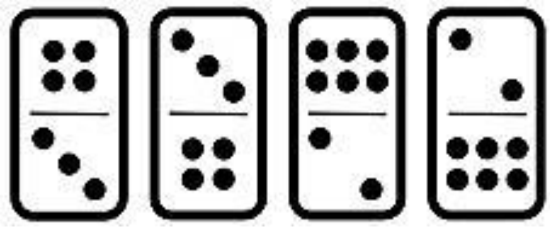
Fonte: Compilação da autora.

Anseia-se que este cenário ative a memória dos alunos e os impulsionem a conectar os novos saberes aos conhecimentos já explorados. Busca-se a compreensão de que o somatório dos pontos de qualquer uma das peças será sempre igual. Partindo de ideias mais simples, mostrando que há várias possibilidades para representar certos números naturais a partir da soma de outros dois números naturais, e, evoluindo para conceitos mais abstratos, inserindo a propriedade comutativa da adição.

Recorra ao quadro branco mostrando aos alunos que 6 + 1 = 7 = 1 + 6, bem como, 4 + 3 = 7 = 3 + 4, e, exemplificando que independente dos números escolhidos, tal propriedade será válida. Então, ao escolher dois números desconhecidos e nomeá-los de a e b, respectivamente, pode-se afirmar a validade da igualdade, $a + b = b + a$, uma vez que, a adição é comutativa. A relevância deste processo consiste na compreensão por meio e investigações, visto que, o entendimento da proposição algébrica excede a capacidade cognitiva para esta etapa da Educação Básica.

Convide-os a investigar a existência desta propriedade na multiplicação. Para tanto, solicite o produto do número de pontos das pontas de cada uma das peças, por exemplo, 4 × 3 = 12, e, a análise dos resultados. Na Figura 3.24, encontra-se uma combinação de peças sugeridas.

Figura 3.24 - Multiplicação de pontos das peças de dominó: quadra de terno e sena de duque

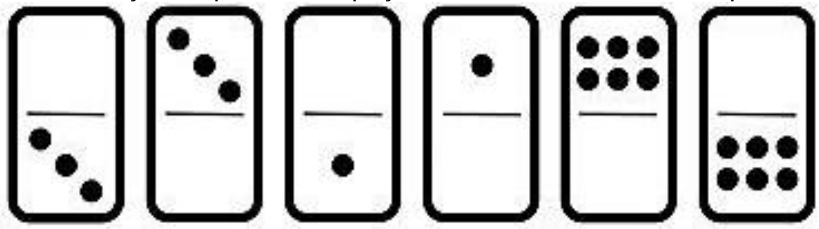


Fonte: Compilação da autora.

Utilizando da mesma estratégia adotada para a adição, recorra ao quadro branco demostrando que 4 × 3 = 12 = 3 × 4, bem como, 6 × 2 = 12 = 2 × 6, e, exemplificando que independente dos números a se multiplicarem, persistirá a comutatividade. Direcione os alunos à conclusão de que a ordem dos fatores não altera o produto, logo, é possível inferir que dois números naturais, representados por a e b, satisfazem a igualdade: $a \times b = b \times a$. Vale ressaltar mais uma vez que as noções algébricas serão trabalhadas por meio de atividades investigativas.

Anseia-se o estudo de demais propriedades, assim, sugere-se, para a inserção do elemento neutro das duas operações fundamentais, a análise de mais peças do dominó. Inicia-se com a adição retratada na Figura 3.25.

Figura 3.25 - Adição de pontos das peças de dominó com uma das pontas branca



Fonte: Compilação da autora.

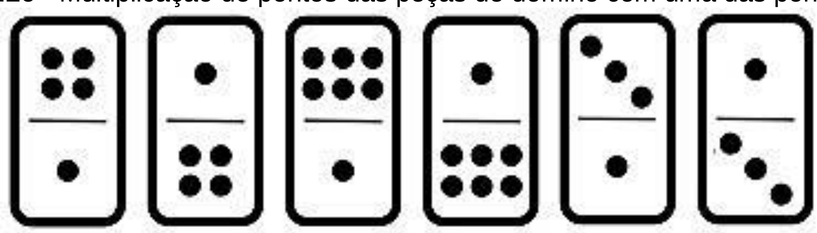
Para tanto, pleiteie a soma dos pontos de cada uma das peças dadas. Dê um tempo para que realizem todas as somas. Solicite dos alunos a exteriorização de suas percepções ao efetuar as adições. Exponha, no quadro branco, as concepções dos alunos, atentando para a regularidade percebida em virtude da existência do zero em todas as somas.

Partindo desta premissa, escreva as sentenças: 0 + 3 = 3 = 3 + 0, 0 + 1 = 1 = 1 + 0 e 6 + 0 = 6 = 0 + 6, e indague-os: o que acontece quando se tem certa quantidade e nada é acrescentado? Há algum padrão na adição de determinado número com o zero?

Espera-se que dentre as hipóteses arquitetadas, os alunos compreendam que qualquer número natural adicionado a zero tem como resultado o próprio número. Esta concepção propicia a inserção da propriedade algébrica do elemento neutro, pois, permite inferir que ao adicionar zero a um dado número natural não conhecido, cognominado *a*, tem-se, $a + 0 = a = 0 + a$, logo, o zero é o elemento neutro da adição.

Seu prosseguimento se dá na multiplicação, assim, deve-se agenciar o cálculo utilizando o algoritmo da multiplicação dos pontos de uma ponta pelos pontos da outra em cada uma das peças expostas na Figura 3.26.

Figura 3.26 - Multiplicação de pontos das peças de dominó com uma das pontas de ás



Fonte: Compilação da autora.

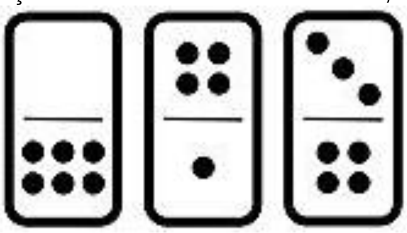
Anseia-se um maior engajamento, visto que, a estratégia a ser adotada foi comtemplada na atividade anterior. Reforce a habilidade desenvolvida, representando e explicando cada uma das seguintes expressões no quadro branco: $4 \times 1 = 4 = 1 \times 4$, $6 \times 1 = 6 = 1 \times 6$ e $3 \times 1 = 3 = 1 \times 3$.

Prossiga com questionamentos acerca das percepções elaboradas como: o que acontece quando um mesmo valor se mantém e nada lhe é sobreposto? Há algum padrão na multiplicação de determinado número natural com o número um?

Cogitam-se respostas que contemplem o entendimento da propriedade, dentre as quais, deve estar mencionada a afirmação de que qualquer número multiplicado por um resultará nele mesmo. Neste contexto, insere-se a propriedade do elemento neutro da multiplicação, demonstrando que, para um número a qualquer, possa se escrever: $a \times 1 = a = 1 \times a$, dado que, o número um é o elemento neutro desta operação.

Pensou-se em uma atividade que contemplasse também a associatividade tanto da adição como da multiplicação. Assim, deseja-se efetuar o somatório do total de pontos das três peças escolhidas como mostra a Figura 3.27.

Figura 3.27 - Adição com as peças de dominó: branca de sena, quadra de ás e terno de quadra



Fonte: Compilação da autora.

Este somatório deve ser feito de duas maneiras da esquerda para direita, e depois, da direita para esquerda. Oriente os alunos circulando entre os grupos e observando as estratégias adotadas, e posteriormente, explane a propriedade de modo que permita a generalização.

Para isto, tem-se:

a) $6 + 5 + 7 = (6 + 5) + 7 = 11 + 7 = 18$

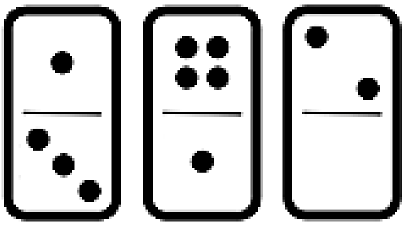
b) $6 + 5 + 7 = 6 + (5 + 7) = 6 + 12 = 18$

Então, as diferentes formas de associar as parcelas em uma adição não interferem no resultado, ou seja, independente da maneira em que são somadas as parcelas o resultado é o mesmo. Assim, se expressa o somatório solicitado: $6 + 5 + 7 = (6 + 5) + 7 = 11 + 7 = 18 = 6 + 12 = 6 + (5 + 7) = 6 + 5 + 7$.

No que tange às concepções algébricas, por meio de investigações, insira no contexto em questão, que dados quaisquer três números naturais, denominados, *a*, *b* e *c*, respectivamente, vale a igualdade: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Adota-se o mesmo procedimento para a multiplicação. Do mesmo modo, o objetivo consiste em efetuar o produto entre o total de pontos de cada uma das três peças indicadas na Figura 3.28.

Figura 3.28 - Multiplicação com as peças de dominó: ás de terno, quadra de ás e duque de branca



Fonte: Compilação da autora.

Deve-se calcular o produto observando a ordem da esquerda para direita, e em seguida, da direita para esquerda. Circule entre os grupos observando o desenrolar dos alunos, de modo a auxiliar no desenvolvimento da atividade. De posse das respostas dos alunos exemplifique generalizando-as.

Tem-se:

a) $4 \times 5 \times 2 = (4 \times 5) \times 2 = 20 \times 2 = 40$

b) $4 \times 5 \times 2 = 4 \times (5 \times 2) = 4 \times 10 = 40$

Logo, independente da forma de se associar os fatores o resultado mantém-se o mesmo, isto é, a associação dos fatores não modifica o produto, de tal modo que: $4 \times 5 \times 2 = (4 \times 5) \times 2 = 20 \times 2 = 40 = 4 \times 10 = 4 \times (5 \times 2) = 4 \times 5 \times 2$.

Partindo da Aritmética para Álgebra tem-se a propriedade associativa da multiplicação, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, retratando o produto de três números naturais quaisquer, representados por *a*, *b* e *c*.

Mais do que exemplificar algebricamente, deve-se aclarar a questão da associação, uma vez que, ao determinar quais números se pretende adicionar ou multiplicar primeiro, se expressa tal sentença acrescentando parênteses, com a pretensão de corroborar para a aprendizagem dos conceitos aritméticos ante a existência de outras operações, como no caso do estudo com expressões numéricas.

A compreensão algébrica de todas as propriedades aqui descritas é necessária à aprendizagem matemática. As atividades supracitadas dispõem um leque de saberes a serem explorados. De início, o jogo com os dominós objetiva instigar o raciocínio matemático, uma vez que, a busca de estratégias atua diretamente no pensamento dos alunos. Além do mais, são múltiplas as possibilidades do trabalho com as operações, sob o enfoque de duas extremidades, indo do lúdico ao operar adições e multiplicações, e, perpassando do concreto ao abstrato, conjecturando hipóteses e ratificando sua veracidade, por meio de investigações características ao ensino-aprendizagem da Álgebra.

A continuidade das propriedades algébricas das operações dar-se-á na etapa seguinte ao ensino, que constitui os Anos Finais, visto que o trabalho com a distributividade das operações requer uma gama de conhecimentos matemáticos ainda não condizentes ao cognitivo dos alunos em curso dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Finalização da sequência didática

Após uma sequência de passos alternados indo do concreto ao abstrato, oportunize um momento lúdico em que os alunos possam interagir ente si, e proponha uma disputa com os vencedores das partidas que deram início a esta aula, proporcionando um momento para o descanso mental necessário.

3.2 Segunda parte: Anos Finais

A segunda parte versa a fração que constitui às sequências didáticas propostas para os Anos Finais do Ensino Fundamental, na qual, é atribuída duas atividades para cada ano. Ao considerar que este produto seja acatado e devidamente utilizado pelos professores dos Anos Iniciais, esta direciona-se a arraigar o conhecimento algébrico dos alunos no desenrolar dos Anos Finais, uma vez que, o ensino-aprendizagem é muito mais significativo à proporção que um novo saber é incorporado às estruturas de conhecimento do aluno de forma expressiva, sobretudo, concatenando ao seu conhecimento prévio.

Segundo Lins e Gimenez (1997), é necessário iniciar o trabalho com a Álgebra mais cedo, uma vez que, a inserção tardia ocasiona uma ruptura no ensino matemático, acarretando nas múltiplas dificuldades encontradas no âmbito escolar no que se refere à aprendizagem desta ciência. Os autores frisam o elo existente entre os conceitos algébricos e aritméticos propondo uma abordagem unificada.

Para tanto, de forma ainda mais ampla, é colocado um tratamento tríplice, compreendendo os três principais ramos da Matemática. Considerando a relevância do pensamento algébrico na formação do estudante, inicia-se, neste estágio da Educação Básica, um alargamento do pensamento abstrato dos alunos de modo progressivo, onde a Geometria possibilita uma visualização do que está sendo explanado, a Aritmética propicia a sensação do perceptível, e por último, a Álgebra vislumbra o aspecto de abstração, existindo assim uma relação de complementaridade entre os conhecimentos matemáticos.

Desse modo, espera-se que as atividades desta seção comtemplem a continuidade do ensino de Álgebra posposto aos primeiros anos do Ensino Fundamental, uma vez que, estes saberes desempenham importantíssimo papel “[...] na história do pensamento humano, particularmente na história do pensamento científico e matemático.” (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 52).

Por fim, buscar progresso em direção a melhorias no âmbito educacional é requisito imprescindível no fazer pedagógico do profissional da educação. Assim,

> Um levantamento contínuo do que envolve exatamente o aprendizado de novos tópicos de matemática, acompanhado por uma análise dos erros cometidos pelos alunos e de suas causas, pode nos proporcionar instrumentos extremamente úteis para decidir sobre os meios de ajudar as crianças a melhorarem sua compreensão da matemática. Cabe aos professores e pesquisadores darem os passos que puderem para implementar esses esforços. (BOOTH, 1995, p. 35-36).

Estando certa de que este produto educacional constitui um instrumento de grande aplicabilidade no ensino de Álgebra, anseia-se reflexões na prática educativa, e espera-se, por intermédio deste, estar contribuindo para modificações na abordagem algébrica, tanto no âmbito teórico como no âmbito prático, de forma que, a sala de aula seja lugar de aprendizagem tanto para alunos quanto para professores, de modo a torna-se uma via para o desenvolvimento do pensamento algébrico de todos os envolvidos.

3.2.1 Proposições para o 6.º ano

Inserir, gradativamente, conceitos algébricos é imprescindível ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Partindo desta premissa, foram elaboradas duas sequências didáticas, as quais devem ser aplicadas ao longo do sexto ano do Ensino Fundamental. Para tanto, foi encadeado, de forma precisa, uma série de passos para nortear o trabalho docente. Sabe-se o quão significativos são os saberes algébricos na construção do conhecimento matemático, e, respaldando-se nesta concepção, procura-se por caminhos que oportunizem a construção de estratégias, fazendo uso de atividades investigativas, com o propósito de generalizações da Aritmética, intensificando a aprendizagem da Álgebra, a qual trás contribuições peculiares ao ensino-aprendizagem da Matemática como um todo.

3.2.1.1 Sequência didática 11

Dispõe-se, aqui, um encadeamento de passos sugestivos à aplicação desta sequência didática. Não é aconselhável compartilhá-lo com os alunos, pois, este é para uso exclusivo do professor, abstendo assim, de possíveis interferências que sua exposição pode acarretar no propósito desta atividade.

Seu objetivo consiste em realizar generalizações, por meio de atividades investigativas em operações aritméticas, buscou-se relembrar propriedades algébricas já conhecidas e contemplar a distributividade partindo de situações particulares para contextos gerais, de modo que, intuitivamente, explorasse as habilidades algébricas dos alunos, ampliando ricamente o processo de elaboração do pensamento algébrico.

A aplicação desta sequência didática busca dá continuidade aos saberes construído nos Anos Iniciais. Para tanto, foram elaboradas atividades que conectam a Aritmética à Álgebra em um processo investigativo e desafiador. Para a realização desta, além do material essencial ao exercício docente acrescido de algumas tesouras, será necessário um projetor multimídia para a projeção das tabuadas. Sendo estas impressas em tamanho grande e na quantidade de uma cópia da tabuada do cinco para cada grupo, e também, diferentes tabuadas, totalizando o número de grupos. Vale ressaltar a imprescindibilidade de um bom planejamento docente para o êxito de sua intenção.

Tema: Relação de igualdade em operações

Número de aulas: 10 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Padrões pertinentes às operações aritméticas

- Análise de regularidades operatórias como uma estratégia para o processo de generalização das propriedades aritméticas

Habilidades:

- Compreender regularidades ao efetuar operações com números naturais.
- Identificar, por meio de atividades investigativas, padrões estáveis em operações, apresentados de forma não algébrica, e partindo de especificidades operatórias da Aritmética para a "algebrização" das propriedades características da Álgebra, elaborar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

Em face da importância das tarefas com potencial algébrico na elaboração do conhecimento matemático, busca-se a "algebrização" a partir da observação de regularidades em problemas aritméticos. Para isto, propõe-se no desenvolver desta atividade ampliar as propriedades algébricas propostas para a fase final dos Anos Iniciais.

Deve-se iniciar a abordagem por meio de situações que levem os alunos à reintegração destas propriedades, e, partindo de questões como:

a) Qual o resultado das adições, 5 + 6 e 6 + 5? E se somarmos 0 a qualquer valor?

b) Qual o resultado das multiplicações, 3 × 4 e 4 × 3? E se multiplicarmos um valor qualquer por 1?

c) Quais as diferentes maneiras para adicionar estes três números, 2 + 3 + 5? E como poderíamos representar o produto destes valores?

Propicie a exteriorização dos conhecimentos prévios dos alunos de modo que possam justificar suas respostas. Espera-se que os alunos compreendam que, tanto a ordem das parcelas não altera a soma, quanto, a ordem dos fatores não altera o produto.

Reforce os saberes contemplando o potencial algébrico, mostrando que dados dois números quaisquer, *a* e *b*, valem as igualdades: $a + b = b + a$ e $a \times b = b \times a$, abordando a propriedade comutativa da adição e da multiplicação.

Além do mais, anseia-se pela percepção e identificação do elemento neutro da adição e da multiplicação. Assim, rememore que $a + 0 = a = 0 + a$ e $a \times 1 = a = 1 \times a$, sendo *a* um número qualquer.

Por fim, é ambicionado que os alunos recordem que as diferentes formas de associar uma adição ou uma multiplicação não interferem nos resultados a serem alcançados. Reforce, mais uma vez, a escrita algébrica das igualdades, $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Partindo de conceitos intuitivos, intenciona-se proporcionar aos estudantes a descoberta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição por meio de investigações no estudo das linhas da tabuada.

Para tanto, organize a classe em grupos com cinco integrantes cada, e apresente a tabuada do cinco, exposta no Quadro 3.6, projetando-a com o auxílio de um projetor multimídia, ou recorrendo a cartazes e/ou outros recursos.

Quadro 3.6 - Tabuada do cinco

TABUADA DO CINCO
1 × 5 = 5
2 × 5 = 10
3 × 5 = 15
4 × 5 = 20
5 × 5 = 25
6 × 5 = 30
7 × 5 = 35
8 × 5 = 40
9 × 5 = 45
10 × 5 = 50

Fonte: Compilação da autora.

Após projetá-la, conduza a investigação de modo a explorar os conceitos aritméticos, como os números e as operações, evidenciando, a análise intuitiva da propriedade distributiva, uma vez que, sua estrutura exprime cunho intensamente algébrico.

Agencie a escolha das terceira e sétima linhas: 3 × 5 = 15 e 7 × 5 = 35, e, adicione os números relativos à ordem das linhas: 3 + 7 = 10, em seguida, requisite a análise da décima linha da tabuada: 10 × 5 = 50. Prossiga com perguntas intencionadas a conhecer as percepções dos alunos nesta análise: esta linha apresenta alguma analogia à terceira e a sétima linhas? Que relações poder ser observadas entre os números destas três linhas da tabuada?

Anseia-se pela compreensão da igualdade existente entre soma das linhas nomeadas e a décima linha. Sendo assim, principie a análise em conjunto com toda a turma com o intuito de diligenciar as explorações a se fazer, recorrendo à projeção da tabuada para assinalar as linhas selecionadas para a identificação da linha completa e não apenas o respectivo número de ordem, de acordo com o exposto no Quadro 3.7.

Quadro 3.7 - Análise das linhas da tabuada do cinco

TABUADA DO CINCO
1 × 5 = 5
2 × 5 = 10
3 × 5 = 15
4 × 5 = 20
5 × 5 = 25
6 × 5 = 30
7 × 5 = 35
8 × 5 = 40
9 × 5 = 45
10 × 5 = 50

Fonte: Compilação da autora.

Concretizada a identificação das linhas, aponte para os números de ordem destas e questione: ao adicionar o 3 com o 7 obtém-se o 10, há algo a mais no estudo destas três linhas? Espera-se que os alunos compreendam que ao adicionar as duas linhas tem-se o resultado da outra.

É cogitada, também, a percepção de operações inversas, de modo que, seja possível estabelecer uma relação que valha para a subtração utilizando estas linhas, por exemplo, ao subtrair a sétima linha da décima, tem-se a terceira. Caso algum aluno identifique esta situação, reserve um momento antes da finalização desta sequência didática, para explanar sua veracidade. Vale lembrar que no meio algébrico, existe apenas as operações de adição e multiplicação, no qual, a subtração consiste em adicionar o oposto de tal elemento.

Após os alunos se expressarem, sintetize, de modo a aclarar as justificativas elencadas por estes, ratificando que, ao adicionar os resultados das linhas do três e do sete, obtém-se resultado que está na linha do dez, escrevendo:

$$3 \times 5 + 7 \times 5 = 10 \times 5$$

E para confirmar a veracidade desta expressão explique para a turma, acrescentando os parênteses:

$$(3 \times 5) + (7 \times 5) = 10 \times 5$$

Imediatamente, conclua,

$$15 + 35 = 50$$

De posse às respostas dos alunos, continue a atividade entregando a cada grupo uma tabuada do 5 impressa em tamanho grande para ser recortada em linhas. Feito isto, conduza-os às novas construções, de modo a escolher duas linhas, cujo, a soma dos números relativos à sua ordem não ultrapassasse o dez.

Para tal, os estudantes devem:

a) Escolher uma linha da tabuada;

b) Escolher outra linha;

c) Adicionar os respectivos números referentes à ordem das linhas selecionadas;

d) Identificar a linha de número igual ao obtido alínea anterior.

Solicite aos alunos que registrem suas experiências. Anseia-se por diferentes soluções, em virtude da autonomia que fora concedida aos grupos. Explore todas as resoluções apresentadas sob uma perspectiva algébrica intencionada a generalizar os conceitos aritméticos. O Quadro 3.8 retrata duas das possíveis soluções.

Quadro 3.8 - Investigando a propriedade distributiva

3 × 5 = 15	$\underbrace{3 \times 5}_{15} + \underbrace{4 \times 5}_{20} = \underbrace{7 \times 5}_{35}$	2 × 5 = 10	$\underbrace{2 \times 5}_{10} + \underbrace{7 \times 5}_{30} = \underbrace{9 \times 5}_{45}$
4 × 5 = 20		7 × 5 = 35	
7 × 5 = 35		9 × 5 = 45	

Fonte: Compilação da autora.

Após findar a investigação da adição de outras linhas da tabuada do 5, entregue, a cada grupo, uma tabuada diferente, e convide-os a testar a regularidade descoberta em tabuadas diferentes, indagando-os: ao adicionar duas das linhas de outras tabuadas, escolhendo números cuja soma não ultrapassasse o dez, sempre terá uma linha que corresponda a esta soma?

Espera-se que, ao efetuar as operações os alunos intuam a invariabilidade da relação nas diferentes tabuadas, e posteriormente, exteriorize apresentando suas experiências para os demais colegas.

Este momento é propício à formulação de hipóteses, para tal, agencie a elaboração de uma frase que traduza a relação para todos os casos estudados, guiando-os na tentativa de justificação da regularidade observada. Partindo de questões, como: o padrão investigado sempre será verdadeiro? Por quê? Como justificá-lo?

A partir das conclusões expressas pelos alunos, generalize a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição buscando criar uma conjectura a partir de um caso particular, assim:

a) Nomeie o número 5, chamando-o de *c*;

$$3 \times c + 7 \times c = 10 \times c$$

b) O número 10 foi obtido somando os números correspondentes às linhas adicionadas, deste modo, o dez é três mais sete, ou seja, 10 = 3 + 7. Substitua-o por 3 + 7;

$$3 \times c + 7 \times c = (3 + 7) \times c$$

c) Alterne os membros da igualdade ratificando a inalterabilidade da expressão;

$$(3 + 7) \times c = 3 \times c + 7 \times c$$

d) Recapitule as conclusões exteriorizadas, de modo a demostrar que esta regularidade valha para quaisquer duas linhas escolhidas, então estes números de ordem podem ser outros diferentes de 3 e 7, assim, nomeie tais números de *a* e *b*, respectivamente, e mais uma vez, substitua.

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

Conjectura-se que, os alunos apresentem dificuldades na compreensão desta propriedade algébrica, visto o grau progressivamente de generalização amplamente maior ao de abrangência. Todavia, sua inserção por meio de atividades investigativas busca oportunizar aos aprendizes um caminhar de forma gradual, propiciando a oportunidade de análise de casos, experimentação, conjecturas, testes, explicações e constatações.

Portanto, a relevância algébrica nesta atividade consiste em priorizar a estrutura das expressões e não apenas os seus resultados. O estudo da Álgebra vai além de fórmulas prontas, é imprescindível desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, de modo a privilegiar a análise cuidadosa das estruturas algébricas ultrapassando a visibilidade estrutural da Matemática.

Finalização da sequência didática

Após esta sequência de passos alternados partindo do particular ao para o geral, oportunize uma discursão com os alunos que evidencie algumas situações semelhantes à desenvolvida na aula, como por exemplo, um jogo de perguntas e respostas, passíveis de dedução em decorrência de uma situação particular, como: no cair de uma peça de dominó estando todas enfileiradas ou o adjetivo pátrio de quem nasce em uma cidade de determinado país, levando os alunos a intuírem conclusões.

3.2.1.2 Sequência didática 12

Encontra-se, aqui, um conjunto de passos significativos para uma precisa aplicação desta sequência didática. No entanto, tais informações são de uso exclusivo do professor, uma vez que, o seu aclaramento aos alunos pode ocasionar distorções no propósito almejado, devendo o docente nortear os alunos no seu desenvolvimento.

Seu objetivo consiste em investigar regularidades decorrentes da existência padrões, de modo a criar conjecturas e generalizar escrevendo proposições válidas para todos os elementos em análise, elaborando sentenças e fórmulas algébricas, comtemplando um ambiente propício ao alargamento do pensamento algébrico.

Para o seu desenvolvimento, serão necessários, além dos recursos essenciais ao exercício docente, um projetor multimídia para facilitar a projeção das imagens sugeridas no desenvolver das aulas, na inexistência deste aparelho, o mesmo pode ser substituído por um cartaz com a referida representação, por meio de um desenho ou uma fotografia. Por fim, para obter êxito na aplicação desta sequência didática é imprescindível um planejamento ajustado ao seu propósito, o qual é responsabilidade do docente.

Tema: Explanação de fórmulas matemáticas

Número de aulas: 5 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Potenciação

- Dos números quadrangulares à potência de números naturais com expoente dois

Habilidades:

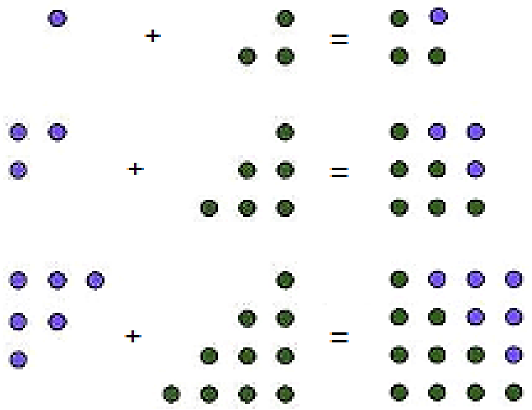
- Investigar regularidades em sequências figurativas e numéricas, de modo a compreendê-las e expressá-las usando escrita corrente ou uma representação simbólica.
- Compreender a existência das diferentes operações nas relações de igualdade em sentenças e fórmulas matemáticas presentes nas múltiplas situações, elaborando estratégias auspiciosas ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

Para dar início a esta sequência didática, organize a turma em trios, de modo que, estes se disponham em um semicírculo. Partindo de reflexões acerca dos saberes já construído, propicie um momento de sondagem, de forma que permita conhecer as noções algébricas construídas nas etapas ascendentes a esta.

Para tanto, projete a imagem proposta na Figura 3.29 e oportunize os alunos a recapitularem seus conhecimentos. Solicite observações detalhadas e aguarde pela análise.

Figura 3.29 - Somando números triangulares



Fonte: Compilação da autora.

Tencionado a instigar as percepções dos alunos, indague-os: existem padrões nesta imagem? Quais são eles? Quantas e quais são as sequências numéricas formadas por estes padrões? Qual a relação geométrica percebida? Qual relação operatória pode ser notada? O que mais pode ser observado? Conduza-os a investigar o critério de formação para esta sequência numérica.

Prossiga com a exteriorização dos trios acerca de suas compreensões. Anseia-se pelo reconhecimento dos números triangulares e quadrangulares, uma vez que, o estudo de tais saberes encontra-se sugerido aos anos que precedem o atual. Todavia, não se pode afirmar que a explanação desta temática tenha sido executada.

Sendo assim, acompanhe os relatos dos alunos enriquecendo-os. Explore a maior sucessão possível de saberes matemáticos, pois, estes serão fundamentais à continuação desta atividade.

Do ponto de vista geométrico, ambiciona-se rememorar, tanto, conceitos e propriedades de tais polígonos, quanto, o cálculo de área de um deles: o quadrado. Ao olhar da Álgebra, além do reconhecimento de sequências geométricas e numéricas, tem-se, o potencial algébrico proporcionado em consequência das justificações conjecturais destas. Sob um enfoque aritmético, acrescentam-se os números e operações.

De posse destes conhecimentos prévios, direcione a análise ao intuito de potencializar o pensamento algébrico, escrevendo as sequências no quadro branco, de modo que seja possível explorá-las algebricamente.

Desse modo, tem-se:

a) *1*, *3*, *6*, ..., números triangulares;

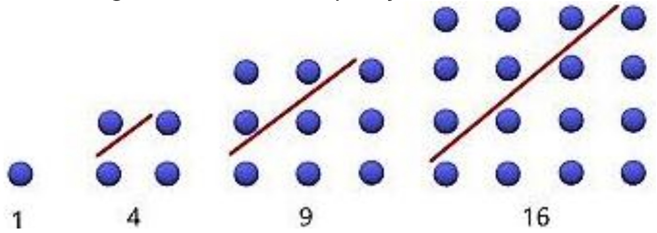
b) *3*, *6*, *10*, ..., números triangulares;

c) *4*, *9*, *16*, ..., números quadrangulares.

Vale ressaltar a importância de relembrar ou conceituar os números que compõem estas sequências numéricas. Incite o pensamento investigativo dos alunos, solicitando oralmente os próximos elementos destas, a partir da análise das figuras geométricas que as compõem, instigando assim, as habilidades algébricas já desenvolvidas nas etapas anteriores.

Após tal excitação na memória dos estudantes, direcione o foco, das investigações, para as múltiplas representações dos números quadrangulares. Inicie mostrando que todo número quadrangular, com exceção do número 1, pode ser obtido por meio da adição de dois números triangulares. Assim: 1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9 e 6 + 10 = 16. Note que, a junção dos triângulos, que representam estes números, forma o quadrado correspondente ao número obtido na operação especificada, demostrada na Figura 3.30.

Figura 3.30 - Decomposição de números



Fonte: Compilação da autora.

Partindo da análise dessa representação geométrica, induza a escrita de uma afirmação que descreva esta situação, de modo a instigar a elaboração de estratégias que auxiliam no alargamento das concepções algébricas.

Sendo assim, deve-se inferir a seguinte conjectura: considerando a ordem crescente dos números naturais, a partir do segundo número quadrangular, todos os demais podem ser obtido por meio da adição de dois números triangulares, sendo um deles de mesma ordem e o outro de ordem precedente a este.

Posteriormente, mostre aos alunos que, se considerado o número de bolinhas dos lados dos quadrados, o seu total de bolinhas corresponde às suas respectivas áreas, dando significado à explanação da fórmula matemática em questão, tendo em conta, a investigação do somatório de bolinhas dos quadrados compostos na justaposição dos triângulos.

Desse modo, busca-se inferir a conjectura $n \times n$, em consequência das operações, $1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $4 \times 4 = 16$, inserindo a expressão n^2, a qual corresponde à formula para o cálculo de área do quadrado. Esta ocasião é de extrema importância para os conhecimentos pretendidos neste encadeamento de atividades.

Consequentemente, obtém-se os elementos da sequência numérica, *1*, *4*, *9*, *16*, ... n^2, os quais constituem os números quadrangulares, também, cognominados de números quadrados perfeitos, e ainda, conhecidos como números quadrados.

Assim, deve-se escrevê-los, da seguinte forma:

$1 \times 1 = 1^2 = 1$

$2 \times 2 = 2^2 = 4$

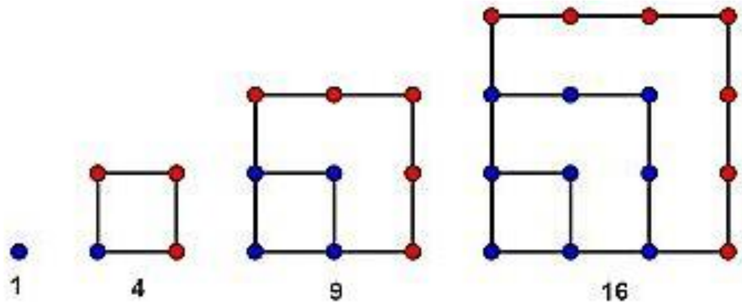
$3 \times 3 = 3^2 = 9$

$4 \times 4 = 4^2 = 16$

Partindo desta situação, introduza o conteúdo de potenciação, mostrando aos alunos uma nova forma de representar estes números, adentrando ao campo algébrico de forma gradativa, tanto na representação numérica quanto na escrita de sentenças e fórmulas.

Para isso, agencie uma análise detalhada da Figura 3.31, indagando-os: qual o total de bolinhas de cada quadrado? Há sempre um aumento no somatório de bolinhas, como descrever este fato? Há um padrão nos números adicionados para a obtenção dos próximos elementos? Como podemos representar cada elemento desta sequência?

Figura 3.31 - Investigando os números quadrangulares



Fonte: Compilação da autora.

Partindo das exteriorizações expostas, guie-os na elaboração de hipóteses. Ao observar as sequências de figuras e números, a partir do segundo elemento, tem-se, o termo anterior adicionado três unidades, ou seja, $1 + 3 = 4 = 2^2$.

Note que:

$$1 + 3 = 4 = 2 \times 2 = 2^2$$

Percebe-se que a soma dos dois primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 2.

O próximo elemento foi composto adicionando cinco unidades ao termo anterior, assim:

$$4 + 5 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3 = 3^2$$

Questione-os acerca das suas percepções na situação dada. Espera-se que, os alunos apresentem argumentos categóricos evidenciando afirmativas como, a soma dos três primeiros números naturais ímpares é igual ao quadrado de 3.

De modo análogo, escreve-se o próximo elemento.

$$9 + 7 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \times 4 = 4^2$$

Indague-os com relação à existência de um padrão, com o intuito de possibilitar a compreensão de que, o somatório dos *n* primeiros números ímpares corresponde ao quadrado de *n*, onde, *n* nomeia a ordem do terno em análise, e seu quadrado o termo em questão.

Induza os alunos à elaboração de uma fórmula para representar um número ímpar, mostrando que todo número ímpar é sempre um múltiplo de dois adicionado uma unidade, isto é, $2n + 1$. Deixe que a fórmula seja elaborada pelos alunos apenas norteando-os neste processo.

Partindo da análise das expressões aritméticas supracitadas, induza a escrita de uma afirmação que descreva esse quadro, buscando generalizar tais casos particulares, de modo que, possa alargar o pensamento algébrico dos alunos. Para isto, infere-se a seguinte conjectura: se pensarmos uma quantidade de ímpares e a chamarmos de n, seu somatório corresponde ao quadrado de n. Escreva-a no quadro branco.

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Portanto, tem-se que a soma dos n primeiros números ímpares consecutivos é igual a n^2.

Por fim, oportunize a escolha de números aleatórios, substituindo-os na expressão algébrica construída, como forma de ampliar os saberes relacionados ao conteúdo de potenciação.

Mais do que identificar o padrão de uma sequência numérica a partir da análise de composições geométricas e expressá-lo por meio de linguagem algébrica, as atividades sugeridas proporciona a exploração de saberes além da Álgebra.

Sob o olhar geométrico tem-se tanto o estudo dos polígonos em questão como a abordagem das medidas de superfície destes. Do ponto de vista aritmético, têm-se as operações de adição e multiplicação, especialmente, de potenciação. Dentro do campo algébrico, além da escrita de expressões e fórmulas, pode ser acrescentada a ideia de equações.

O desenvolvimento das habilidades algébricas, proporcionadas aqui, além de incitar conhecimentos pertinentes a níveis mais elaborados do ensino como, progressões, instiga saberes ainda mais complexos como, noções relacionadas à indução e a recorrências, abordados na álgebra do Ensino Superior. Portanto, pode-se notar a grandiosidade de um ensino voltado para a construção do pensamento algébrico ao longo de toda a escolaridade para a edificação do conhecimento humano.

Finalização da sequência didática

Para findar, sugira à turma a elaboração de uma expressão para representar os números pares, deixe-os construírem tal conjectura, o primeiro trio a conseguir escrevê-la apresentará aos demais colegas relatando os caminhos percorridos para a criação desta. Anseia-se que a dedução da expressão matemática almejada, $2n$, constitua uma atividade imediata.

3.2.2 Proposições para o 7.º ano

O acréscimo, de forma gradativa, dos conceitos algébricos é essencial ao estudo da Matemática. Com este propósito, foram idealizadas duas sequências didáticas para serem desenvolvidas no decorrer do curso do sétimo ano do Ensino Fundamental. Para isto, foi elaborado um encadeamento de passos para nortear o trabalho do docente. Sabe-se, o quão relevante são os saberes algébricos no desenvolvimento do pensamento abstrato. Partindo deste entendimento, busca-se, oportunizar caminhos que conduzam à elaboração de estratégias, por meio de atividades investigavas passíveis da ideação de conjecturas e conclusões algébricas, generalizando os conceitos aritméticos, de modo a impulsionar uma compreensão satisfatória da Álgebra, a qual é peculiar ao aprendizado expressivo desta ciência.

3.2.2.1 Sequência didática 13

Dispõe-se, a seguir, um encadeamento de passos a serem seguidos pelo professor, para a devida aplicação desta sequência didática. Contudo, as informações, aqui expostas, são de uso exclusivo do docente, visto que, a sua exposição aos alunos pode interferir no propósito almejado.

O objetivo desta proposta consiste em identificar, em figuras geométricas, a regularidade de uma sequência numérica, de modo a elaborar conjecturas e expressar simbolicamente um termo qualquer na sua continuidade, proporcionando um ambiente auspicioso à construção dos saberes algébricos essenciais à aprendizagem da Matemática.

Para o seu desenvolvimento, serão necessários além dos recursos essenciais ao exercício da docência, um projetor multimídia com o propósito de projetar as imagens pertinentes à elaboração do conteúdo a ser desenvolvido, e, algumas cópias impressas da figura geométrica sugerida, de acordo ao número de duplas formadas. Desse modo, cabe ao professor planejar antecipadamente, fazendo adaptações, quando necessário, para atingir o êxito na sua atuação pedagógica.

Tema: Sequências numéricas

Número de aulas: 6 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Sequências recursiva e não recursiva

- Linguagem algébrica em sequências numéricas envolvendo as operações

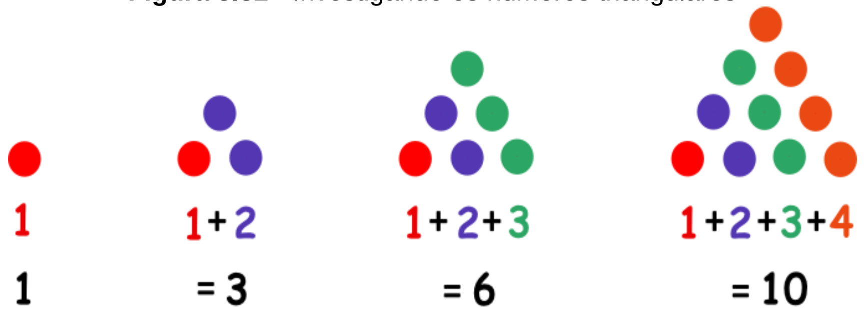
Habilidades:

- Constatar a presença de sequências numéricas em sequências dispostas geometricamente, de modo a compreendê-las e expressá-las classificando-as.
- Identificar regularidades em sequências numéricas decorrentes de operações, decodificando proposições válidas e expressando-as algebricamente, ampliando a elaboração de estratégias auspiciosas ao pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

Para iniciar a aula, forme duplas e as disponha em um semicírculo para uma conversa rápida acerca das sequências geométricas e/ou numéricas já vistas pelos alunos. Para este fim, pleiteie recapitular na memória dos alunos os números triangulares, projetando a imagem sugerida na Figura 3.32, com o intuito de inteira-se dos seus conhecimentos prévios, solicite a análise desta.

Figura 3.32 - Investigando os números triangulares



Fonte: Compilação da autora.

Conduza a análise indagando-os: conhecem estes números? O que acontece de um termo para o seu sucessor? É possível encontrar o próximo elemento faltante dessa sequência? Identifique-o e o represente por meio de uma sentença matemática.

De posse das justificativas dos alunos, anote a escrita de cada número, de modo que proporcione o encontro de uma lei de formação para a sequência dada.

Assim:

1 = 1

1 + 2 = 3

1 + 2 + 3 = 6

1 + 2 + 3 + 4 = 10

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

Mostre aos alunos que a partir do segundo termo, adiciona-se o termo anterior ao número da posição em análise na sequência, por exemplo, para o segundo termo tem-se: o termo anterior + 2 = 1 + 2 = 3. Para o terceiro termo, escreve-se: o segundo termo + 3 = 3 + 3 = 6, e assim sucessivamente, encontra-se os demais termos.

Trata-se de uma sequência recursiva, na qual um termo depende dos termos anteriores, discuta esta característica com a turma. Além desta regularidade, há outra forma para a composição dos números triangulares. Agencie a análise detalhada de cada termo, de modo a proporcionar a percepção de que há um somatório dos números naturais. Aclare a representação de cada elemento, juntamente com a turma, considerando a ordem crescente dos números naturais.

Para o primeiro termo tem-se, o primeiro número natural que é o 1. No entanto, para obter os próximos termos, deve-se somar ao termo que precede o termo em questão o número que corresponde à ordem do elemento procurado.

Note que:

$$1+ 2 = 3$$

Percebe-se a soma dos dois primeiros números naturais.

O próximo elemento compõe-se pela adição dos três primeiros números naturais.

$$1 + 2 + 3 = 6$$

Questione-os acerca das suas percepções na situação dada. Cogita-se que os alunos sejam capazes de externar conjecturas categóricas que evidenciam afirmativas como, a soma dos três primeiros números naturais.

Assim, escreve-se o próximo termo:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Indague-os com relação à existência de uma regra, com o intuito de possibilitar a compreensão de que, o somatório dos n primeiros números naturais corresponde ao termo em questão, onde, n nomeia sua ordem nessa sequência,

Partindo da análise das expressões aritméticas supracitadas, induza os alunos à elaboração de uma proposição algébrica para representar esse quadro, a partir da generalização dos casos particulares analisados expandindo o pensamento algébrico dos alunos. Para tal fim, infere-se a seguinte conjectura: se pensarmos uma quantidade de naturais e a chamarmos de n, seu somatório corresponde ao termo inquirido, o qual será denominado T_n.

Escreva-a no quadro branco.

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$$

Sob esta perspectiva, para o quinto termo desta sequência, tem-se $n = 5$, sendo que o número campeado equivale ao somatório dos cinco primeiros naturais. Logo,

$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

De posse das explanações experimentadas nesse momento de incitação algébrica, as quais nortearão a ação docente no desenvolvimento desta atividade, apresente-os a próxima sequência geométrica projetando-a, conforme sugerido na Figura 3.33.

Figura 3.33 - Fractais[13] : Triângulo de Sierpinski[14]

Fonte: Compilação da autora[15].

Após exposição e análise desta, conceitue-a introduzindo a definição de fractais. Deve-se apresentá-los como figuras geométricas que possuem autossimilaridade, isto é, contém dentro de si cópias menores delas mesmas. Para enriquecer essa explanação, é aconselhável, acrescentar algumas imagens de fractais encontradas na natureza, como o intuito de evidenciar sua relevância.

Feito isso retorne aos conceitos matemáticos, apresentando a sequência de triângulos Sierpinski, a qual é formada pelos triângulos equiláteros pretos. Para isto, distribua uma cópia impressa dos triângulos expostos na Figura 3.33 a cada dupla, viabilizando uma análise minuciosa destes. Explore-a questionando-os: o que é um triângulo equilátero? Esses triângulos compõem uma sequência? É possível descrever o padrão dessa sequência? Qual o próximo termo da sequência? Atente-os para as diferentes estratégias na identificação dos seus termos.

Solicite a escrita no número de triângulos equiláteros pretos dos cinco primeiros termos desta sequência. Aguarde e retome a exteriorização das

[13] Fractais são objetos em que cada parte é semelhante ao objeto como um todo. Isso significa que os padrões da figura inteira são repetidos em cada parte, só que numa escala de tamanho menor. Disponível em: <https://escolakids.uol.com.br/matematica/fractais.htm#:~:text=Fractais%20s%C3%A3o%20objetos%20em%20que,parece%20com%20o%20floco%20inteiro>. Acesso em: 01 set. 2020.

[14] Este triângulo foi descrito por Waclaw Sierpinski em 1915 e obtém-se como limite de um processo recursivo. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm48/sierpinski.htm>. Acesso em: 01 set. 2020.

[15] Montagem a partir de imagem coletada no site da Nova Escola.

percepções dos alunos complementando-as, de modo a representá-los simbolicamente fazendo uso de sentença matemática para descrever cada termo.

Cogita-se que os alunos encontrem a sequência, *1*, *3*, *9*, *27*, ..., tanto por meio da contagem do número de triângulos, quanto, por intermédio do algoritmo multiplicativo.

Deste modo:

1

$1 \times 3 = 3$

$3 \times 3 = 9$

$9 \times 3 = 27$

$27 \times 3 = 81$

Para o primeiro termo tem-se, o número natural 1. No entanto, para obter os próximos termos deve-se multiplicar seu antecessor por 3. Sendo assim, prossiga anotando as sentenças matemáticas no quadro, de modo a aclarar as estratégias elaboradas pelos alunos.

Assim:

$$1 \times 3 = 3 = 3^1$$

Os próximos elementos compõem-se por meio deste mesmo algoritmo multiplicativo, desse modo, elencam-se multiplicações sucessivas.

$$3 \times 3 = 9 = 3^2$$

E constituindo o quarto termo, tem-se:

$$9 \times 3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 = 3^3$$

Partindo das percepções expostas, indague-os com relação à existência de uma regra, com o intuito de possibilitar a compreensão de que, a sequência numérica, *1*, *3*, *9*, *27*, ..., pode ser concebida como uma potência de 3, com expoentes inteiros não negativos, começando do zero e considerando a ordem crescente destes.

Sob o olhar algébrico, tem-se, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, ..., 3^{n-1}, onde, n corresponde ao número natural que nomeia a posição do termo em questão.

Assim, para um termo qualquer tem-se:

$$T_n = 3^{n-1}$$

Desse modo, o quinto termo em análise, poderá ser obtido por meio da expressão, 3^{n-1}, ou seja, $3^{5-1} = 3^4$, logo,

$$T_5 = 3^{5-1} = 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

Diante das representações numérica e algébrica, solicite o cálculo de mais alguns termos de acordo às habilidades dos alunos. Questione-os sobre a existência de alguma incompatibilidade entre as duas sequências estudadas, destacando a diferença entre sequência recursiva e não recursiva, e mostrando que, a última estudada é não recursiva, pois, seus termos não dependem dos anteriores.

Sob um olhar amplamente algébrico, a construção de tais expressões a partir da testagem de casos particulares, de modo a estabelecer uma conjectura e comprová-la, adentra ao universo inicial da álgebra abstrata, acarretando no alagamento do pensamento abstrato.

Do ponto de vista geométrico, tem-se tanto o estudo do polígono em questão como a exploração dos fractais nas suas múltiplas formas. A abordagem aritmética revela operações de adição e multiplicação, especialmente, de potenciação, além do mais, as duas sequências numéricas fazem alusão ao conteúdo de progressões, de modo que, a segunda sequência dada configura uma progressão geométrica.

As habilidades algébricas desenvolvidas aqui, além de incitarem saberes pertinentes a Álgebra em níveis mais elaborados do ensino, instigam, também, a elaboração do raciocínio matemático voltado para a abstração. Portanto, é notória a grandiosidade de um ensino voltado para a construção do pensamento algébrico ao longo de toda a escolaridade para a construção do conhecimento humano.

Finalização da sequência didática

Finalize com uma breve discursão dos momentos relevantes desta atividade, de modo solidificar o alargamento de tais saberes, promovendo a interação de todos os alunos.

3.2.2.2 Sequência didática 14

Elencam-se, aqui, os passos sugeridos ao docente para desenvolver de forma precisa esta sequência didática. As informações apresentadas foram pensadas para facilitar sua aplicação, as quais devem ser para uso exclusivo do professor. Não é oportuno compartilhá-las com os alunos, visto a possibilidade de distorção da mesma.

Seu objetivo consiste em expressar fórmulas matemáticas, por meio de atividades investigativas constituídas pela composição de figuras geométricas, demonstrando-as, algebricamente, com o auxílio de material palpável, e, partindo de situações particulares para contextos gerais, de modo a proporcionar eficácia na aprendizagem desta ciência, inferindo implicações enriquecedoras na elaboração do pensamento algébrico.

Para tanto, foram arquitetadas atividades que conectam o concreto ao abstrato em um processo investigativo e desafiador. Para a realização desta, serão necessários, além do material essencial ao exercício docente, duas folhas de papel sulfite para cada aluno e algumas tesouras. Assim, é imprescindível um planejamento adequado para que se tenha êxito no desenrolar das atividades.

Tema: Medidas de superfície

Número de aulas: 9 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Linguagem algébrica em expressões e fórmulas matemáticas

- Dedução de fórmulas para o cálculo de área das figuras: retângulo, paralelogramo, trapézio, triangulo e losango

Habilidades:

- Compreender os símbolos algébricos existentes em expressões e fórmulas matemáticas.

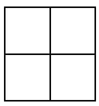
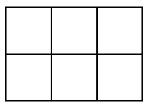
- Deduzir e demostrar fórmulas para o cálculo de área, utilizando a simbologia algébrica em um processo de composição de figuras geométricas, de modo a elaborar estratégias auspiciosas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, essencial à aprendizagem da Matemática de forma significativa e duradoura.

Descrição da atividade:

Inicie a aula organizando a classe em um semicírculo, seguida de uma conversa rápida, buscando instigar a memória dos alunos acerca dos seus conhecimentos sobre os quadrados. Prossiga com a entrega do material, a ser utilizado no desenvolvimento da sequência didática, aos alunos. Para isso, o professor deve entregar duas folhas de papel sulfite a cada aluno, além de tesouras e réguas, a depender da disponibilidade destes, recomenda-se a organizar a turma em grupos.

Dentre os saberes expostos, anseia-se por relatos que revelem a fórmula para o cálculo de área do quadrado. Partindo dos conhecimentos prévios apresentados, introduza o conteúdo de área. Para tanto, proponha a análise dos quadriláteros dispostos no Quadro 3.9, os quais se compõem de quadrados menores, com 1 cm^2 de área cada.

Quadro 3.9 - Calculando a área do quadrado e do retângulo

4 quadradinhos	6 quadradinhos
	
2 cm × 2 cm = 4 cm^2	3 cm × 2 cm = 6 cm^2

Fonte: Compilação da autora.

Desse modo, explore aritmeticamente mostrando que, ao elevar ao quadrado a medida do lado do quadrado, obtém-se o mesmo resultado. Certifique-se da compreensão dos discentes, e generalize relembrando a fórmula para o cálculo de área deste polígono dada pela Equação 3.1.

Assim, tem-se:

$$A_{Quadrado} = l^2 \tag{3.1}$$

Para tal, interaja com os estudantes durante o processo de construção da equação originária da fórmula, de modo que, eles percebam que ao multiplicar a medida do lado por ela mesma obtém a área desejada, ou seja, para realizar este processo, elevou-se ao quadrado tal valor. Não se esqueça de enfatizar que, esta vale para todo e qualquer quadrado.

Neste momento, é imprescindível propiciar a compreensão do porquê das unidades de medidas de superfície se apresentarem ao quadrado, exemplificando detalhadamente, que não apenas efetuou uma multiplicação de um valor numérico por outro, e sim, multiplicou-se duas grandezas, uma pela outra, solidificando assim o conceito de área.

Essa conceituação será de extrema importância para o desenvolvimento das demonstrações, pois, a construção das fórmulas será continuada a partir desta.

Mostre aos alunos que todo quadrado é também um retângulo, e que de modo similar, pode se obter a área do retângulo multiplicando a medida de um dos seus lados pelo outro de tamanho diferente, repetindo o mesmo processo geométrico e aritmético utilizado para o quadrado. Todavia, os lados deste segundo polígono devem ser renomeados e identificados por meio de uma nova simbologia algébrica, *b* e *h*, correspondentes à base e a altura deste respectivamente.

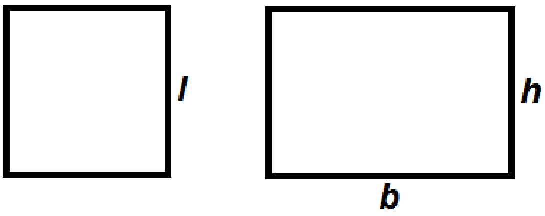
Portanto, tem-se a Equação 3.2, a qual corresponde à fórmula para o cálculo de área do retângulo.

$$A_{Retângulo} = b \times h \tag{3.2}$$

Após inteirar a turma de tal concepção, inicia-se o desenrolar da construção das demais fórmulas. Para isto, o professor deve pedir os alunos para dividirem as duas folhas de papel sulfite em duas metades, obtendo assim quatro retângulos, reservando três deles e recortando um, de modo que, o lado maior fique com a mesma medida do menor, transformando-o num quadrado.

Neste momento, o professor solicita aos alunos a análise dos outros três retângulos com o quadrado construído, dando ênfase às suas diferenças e semelhanças. A figura 3.34 retrata a solicitação requerida.

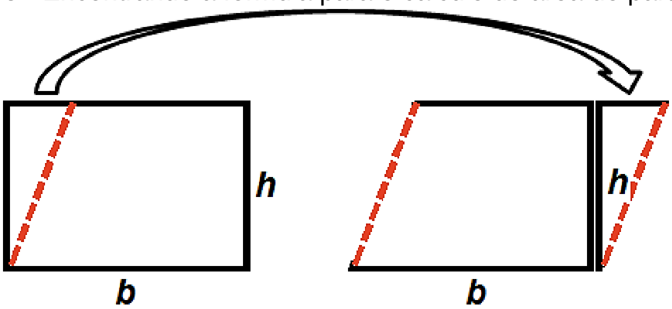
Figura 3.34 - O quadrado e o retângulo



Fonte: Compilação da autora.

Realizados os passos supracitados, serão construídas novas figuras a partir do retângulo e demonstradas suas respectivas fórmulas. Para tanto, marca-se um ponto no canto inferior esquerdo e outro no lado superior distando um quarto do seu canto esquerdo, traça-se uma linha ligando os dois pontos e recorta. Realiza-se a transposição conforme a Figura 3.35, formando um paralelogramo.

Figura 3.35 - Encontrando a fórmula para o calculo de área do paralelogramo



Fonte: Compilação da autora.

Indague os alunos acerca das diferenças e semelhanças das duas figuras, instigando a busca de estratégias para o desenvolvimento do pensamento matemático. Complemente suas percepções mostrando-os que, o novo polígono permanece com a mesma área, pois, a quantidade de papel que o constitui mantém-se igual à do retângulo, além do mais, os dois polígonos têm mesmas bases e alturas. Sendo assim, a fórmula para o cálculo de sua área é idêntica à do retângulo, conforme ratificado na Equação 3.3.

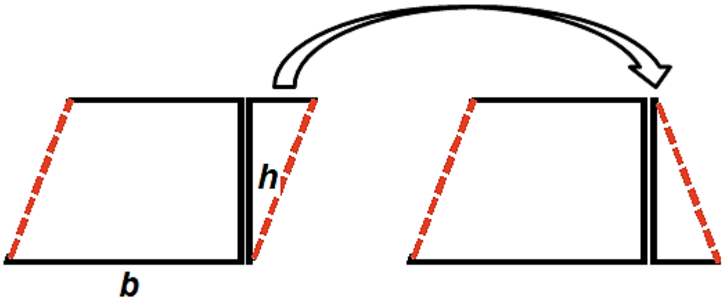
Então,

$$A_{Paralelogramo} = b \times h \tag{3.3}$$

Prossiga com o paralelogramo, gire a parte menor de forma que o lado superior se torne o lado inferior para formar um trapézio, como é indicado na Figura

3.36. Explore as características do trapézio, identificando as bases e, mais uma vez, atenção na altura que se mantém a mesma.

Figura 3.36 - Transformando o paralelogramo em um trapézio

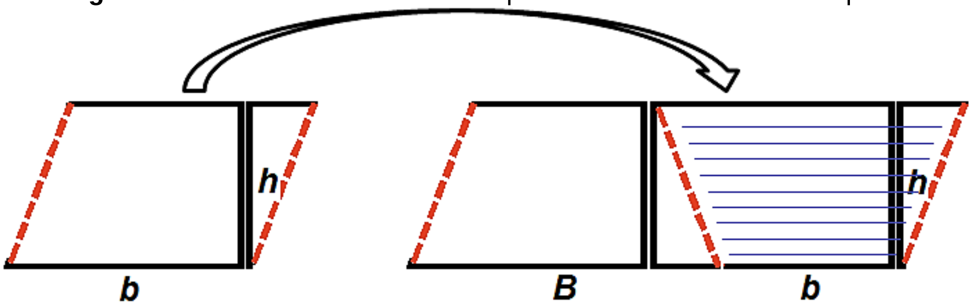


Fonte: Compilação da autora.

Questione-os: o paralelogramo e o trapézio tem a mesma área? Por que? O que aconteceu com a sua base? Houve alteração na altura? É possível usar a mesma fórmula? Por que? Ante a esta interação, insira a ideia de que as duas figuras têm área iguais mesmo apresentando características diferentes, e inicie o desenvolvimento da fórmula desconhecida.

Para isso, peça os alunos para formarem duplas, pois estes devem compor um novo paralelogramo, unindo os trapézios, dois a dois, de modo que, um deles tenha a base maior voltada para baixo e o outro para cima como mostra a Figura 3.37. A junção dos dois polígonos resultará em um paralelogramo maior, o qual já se conhece a fórmula para calcular a área.

Figura 3.37 - Encontrando a fórmula para o calculo de área do trapézio



Fonte: Compilação da autora.

Atente aos alunos, para a nova medida da base, explore a fórmula mostrando que área da nova figura plana foi duplicada com a união dos trapézios, devendo sua área total ser divida por dois. Demonstre todo o processo de elaboração da fórmula no quadro sempre interagindo com a turma.

Partindo da fórmula do paralelogramo, dada pela Equação 3.3, $A_{Paralelogramo} = b \times h$, realize as substituições necessárias nesta, visto que, se tem uma nova medida para a base do novo paralelogramo, sendo esta, a soma das bases do trapézio exposto na Figura 3.37, como detalhado na Equação 3.4.

Assim,

$$A_{Novo\ paralelogramo} = (B + b) \times h \tag{3.4}$$

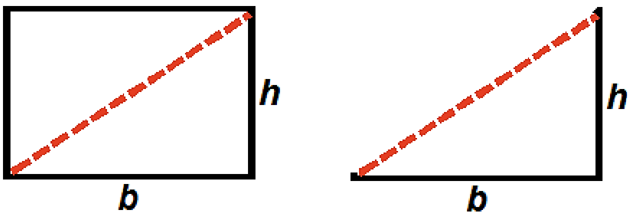
O paralelogramo exposto na Figura 3.37, é composto pela junção de dois trapézios exatamente iguais, então, ao dividir sua área total por 2 obtém-se a área desejada.

Portanto, a fórmula para o cálculo de área deste polígono encontra-se disposta na Equação 3.5.

$$A_{Trapézio} = \frac{(B + b) \times h}{2} \tag{3.5}$$

Retome aos retângulos reservados, em um deles, trace uma linha do canto inferior esquerdo até o canto superior direito e recorte obtendo dois triângulos iguais, como mostra a Figura 3.38. Sobreponha os triângulos mostrando aos alunos que o retângulo foi dividido em duas partes iguais.

Figura 3.38 - Encontrando a fórmula para o calculo de área do triângulo



Fonte: Compilação da autora.

Partindo de indagações sobre o novo polígono, explore suas características comparando-o com o retângulo já estudado, para que os alunos percebam que estes têm bases e alturas idênticas. Como a superfície retangular foi dividida em duas partes iguais, a área da superfície triangular corresponde à metade da forma geométrica inicial.

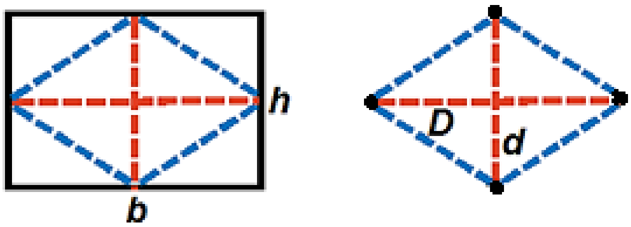
Para tanto, recorde a fórmula para o cálculo de área do retângulo, exposta na Equação 3.2, $A_{Retângulo} = b \times h$. Como o retângulo foi dividido em duas partes exatamente iguais, então, ao dividir sua área por 2 obtém-se a área do triângulo.

Assim, a Equação 3.6 constitui a fórmula para o cálculo de área deste polígono.

$$A_{Triângulo} = \frac{b \times h}{2} \quad \textbf{(3.6)}$$

Por fim, apodere-se do último retângulo, encontre os pontos médios de todos os lados, e ligue-os de modo que forme um losango, recorte-o conforme especificado na Figura 3.39.

Figura 3.39 - Encontrando a fórmula para o calculo de área do losango



Fonte: Compilação da autora.

Questione os alunos sobre o novo polígono: quais suas características? Qual a relação de semelhança das suas diagonais com a base e a altura da figura inicial? O que se pode dizer sobre a sua área?

À medida que os alunos externam suas percepções, oriente-os sobrepor o losango com as quatro partes retiradas, mostrando que este equivale à metade do retângulo. Assista-os nesta análise, dando ênfase nas suas diagonais, pois elas, respectivamente, correspondem às medidas da base e da altura do polígono inicial.

Como o retângulo foi dividido em duas partes exatamente iguais, então, ao dividir sua área por 2 obtém-se a área do no polígono.

Desse modo, ao dividir o segundo membro da equação que compõe a fórmula para o cálculo de área do retângulo, exposta na Equação 3.2, $A_{Retângulo} = b \times h$, constrói-se a Equação 3.7 que constitui a área do novo polígono.

$$A_{Novo\ losango} = \frac{b \times h}{2} \quad \textbf{(3.7)}$$

No entanto, as grandezas que correspondem à base e a altura devem ser renomeadas de acordo à nova forma geométrica, de maneira que, a medida da base, a qual é idêntica à diagonal maior possa ser identificada por (*D*) e a medida da altura equivalente à diagonal menor por (*d*).

Ao realizar as substituições tem-se a fórmula para o cálculo de área do losango conforme explicito na Equação 3.8.

$$A_{Losango} = \frac{D \times \mathrm{d}}{2} \tag{3.8}$$

Todos os passos aqui minuciados devem ser construídos com os alunos, explorando as construções geométricas e oportunizando, a eles, a visualização das diferentes figuras planas, e juntamente, inserir a Álgebra do desenvolver das fórmulas, e para uma maior compreensão, deve-se exemplificar cada uma delas com grandezas numéricas à proporção em que o saber é elaborado.

Este encadeamento de atividades oportuniza um leque de conhecimentos matemáticos a serem explorados sob os diversos olhares. Na perspectiva da Geometria têm-se inúmeros saberes, desde os já conhecidos aos acrescidos durante as construções geométricas, podendo ser reforçados e aprendidos. Sob a análise aritmética o trabalho com as operações pode ser ampliado na medida em que incrementa as grandezas com números fracionários e decimais por exemplo.

Do ponto de vista algébrico, além do estudo das equações por meio da construção das fórmulas, tem-se a demonstração destas, de modo a desenvolver habilidades que incitam a utilização da linguagem algébrica para representar os múltiplos saberes matemáticos, acarretando em ampliações significavas na elaboração do pensamento abstrato. Portanto, é inegável a importância de um ensino voltado para a construção deste pensamento no decurso da Educação Básica.

Finalização da sequência didática

Ao longo do desenrolar deste encadeamento de passos, o docente deve estar atento a minudências observadas durante as construções para serem exploradas na finalização desta sequência didática. Tais podem ser abordadas por intermédio de perguntas e respostas, uma roda de conversa ou o que melhor se adequar à realidade dos alunos.

3.2.3 Proposições para o 8.º ano

A compressão das estruturas matemáticas é essencial à sua aprendizagem. Partindo desta premissa, foram elaboradas duas sequências didáticas, as quais devem ser aplicadas ao longo do oitavo ano do Ensino Fundamental. Com o intuito de colaborar com a atuação docente, encontram, a seguir, um encadeamento de passos para nortear o desenvolvimento destas. Visto a relevância da linguagem algébrica na medida em que os saberes matemáticos são construídos, é imprescindível no seu desenrolar, oportunizar caminhos que conduzam a apropriação da linguagem algébrica a partir da generalização de situações vivenciadas pelos alunos, partindo de casos particulares, de maneira que, experimente a construção de hipóteses, a realização de testes, validando algumas e descartando outras, de modo a alargar o desenvolvimento do pensamento algébrico, o qual se caracteriza como fator indispensável para uma aprendizagem sólida e duradoura da Matemática.

3.2.3.1 Sequência didática 15

Elenca-se, aqui, um encadeamento de passos a serem seguidos pelo professor, para a devida aplicação da sequência didática. Entretanto, estas informações são de uso exclusivo docente, visto que, a sua exposição aos alunos pode ocasionar interferências no propósito almejado.

O objetivo desta proposta consiste em identificar, em diferentes contextos, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, de modo a elaborar conjecturas e expressá-la simbolicamente, e com o auxílio da linguagem algébrica generalizá-la, de maneira a experimentar situações promissoras à construção dos saberes algébricos, os quais são essenciais à aprendizagem da Matemática.

Para o seu desenvolvimento, deve-se acrescentar o projetor multimídia aos demais recursos necessários à atuação docente, com o propósito de projetar as imagens pertinentes ao conteúdo a ser desenvolvido. Visto que, na ausência deste equipamento, as mesmas podem ser apresentadas em forma de desenhos em cartolinhas, e até mesmo, desenhadas no quadro. Desse modo, para que se tenha êxito na atuação pedagógica, é imprescindível um planejamento antecipado para as adaptações necessárias.

Tema: Linguagem algébrica

Número de aulas: 5 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

- Generalização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em expressões algébricas

Habilidades:

- Reconhecer a presença da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em expressões algébricas, de modo a compreendê-la e expressá-la.
- Identificar a propriedade distributiva em diferentes contextos, de modo a conjecturar, testar e inferir validações, utilizando a linguagem algébrica para expressá-la, elaborando estratégias auspiciosas ao alargamento do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

Em face da ampliação dos saberes algébricos sugeríveis a esta etapa de ensino, busca-se a amplificação destes a partir dos conceitos já construídos anteriormente. Para isto, propõe-se no desenvolver desta atividade generalizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, partindo de exemplos presentes na memória dos alunos às expressões complexas.

Deve-se iniciar a abordagem por meio de situações que levem os alunos à reintegração desta propriedade, e, partindo de questões como:

a) O que acontece na soma de duas linhas da tabuada do 5 escolhidas arbitrariamente? Escolha duas linhas em que a soma dos números que correspondem às suas ordens não ultrapasse dez e exemplifique-as.

b) E se escolhermos outra tabuada, a do 9, por exemplo, vale a mesma regra? Escolha duas linhas em que a soma dos números que correspondem às suas ordens ultrapasse dez e exemplifique-as.

Propicie a exteriorização das percepções dos alunos de modo que possam justificar suas respostas.

Anseia-se que ao adicionarem as linhas, eles percebem que existe uma terceira linha, na qual, tem-se o resultado da soma, e que o número de ordem desta linha corresponde à soma das respectivas ordens.

O Quadro 3.10 mostra uma das possíveis soluções apresentadas pela turma. Registre-a no quadro, sempre interagindo com os alunos, justificando a existência da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Quadro 3.10 - Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição Sequências numéricas

3 × 5 = 15	$\underbrace{(3 \times 5) + (4 \times 5)}_{\underbrace{(3+4) \times 5}_{7 \times 5}} = \underbrace{15 + 20}_{35}$
4 × 5 = 20	
7 × 5 = 35	

5 × 9 = 45	$\underbrace{(5 \times 9) + (7 \times 9)}_{\underbrace{(5+7) \times 9}_{12 \times 9}} = \underbrace{45 + 63}_{108}$
7 × 9 = 63	
12 × 9 = 108	

Fonte: Compilação da autora.

Escreva-as, de modo que,

$$(3 + 4) \times 5 = (3 \times 5) + (4 \times 5)$$

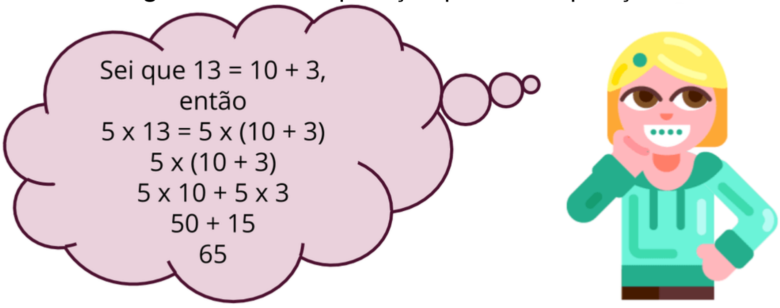
e

$$(5 + 7) \times 9 = (5 \times 9) + (7 \times 9)$$

Após a análise das igualdades, solicite aos alunos a solução de 5 × 13, requeira as respostas de modo que estes justifiquem suas estratégias e aguarde-as.

Espera-se, ao menos, uma resposta com o artifício exposto na Figura 3.40, para análise em conjunto com a turma, caso não haja, contemple-os, de modo que, os alunos identifiquem situações em que tenham feito uso desta propriedade, de forma espontânea, na realização de cálculos aritméticos.

Figura 3.40 - Multiplicação por decomposição



Fonte: Compilação da autora[16].

Esse tipo de operação por decomposição é muito explorado nas etapas de ensino que precedem a esta. Sendo assim, agencie a análise da resolução e solicite a escrita de uma igualdade para representar a propriedade na situação dada. Deste modo, se expressa:

$$(10 + 3) \times 5 = (10 \times 5) + (3 \times 5)$$

Partindo das situações analisadas e utilizando do campo numérico, proponha a generalização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição por meio da linguagem algébrica, apresentando conjecturas e mostrando sua validade para qualquer número.

Assim, dados três números quaisquer *a*, *b* e *c* vale a igualdade:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

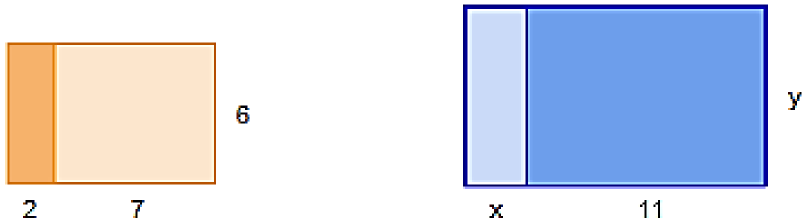
Finalize esta primeira parte, com a exteriorização das estratégias utilizadas pelos alunos, de modo que, analise seus métodos de resolução iniciados com o levantamento de hipóteses, seguido de testes, validando ou descartando-as. Neste processo de tentativa e erro, deve-se enfatizar a relevância da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, bem como, a necessidade da generalização por meio da linguagem algébrica.

Para iniciar o segundo momento desta, apresente, com o auxílio de um projetor multimídia, os retângulos sugeridos na Figura 3.41, e requisite a suas respectivas áreas.

---

[16] Montagem a partir de imagem coletada no site da Nova Escola.

Figura 3.41 - Identificando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição no cálculo de áreas de figuras planas



Fonte: Compilação da autora.

Partindo de questões como: de que forma podemos representar as áreas desses retângulos? Quais estratégias podem ser adotadas na construção de tais soluções? É possível articular a Álgebra e a Geometria na Matemática? Direcione a discursão de modo a oportunizar aos alunos, a exploração e o reconhecimento da ideia da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, fazendo uso da linguagem algébrica para generalizá-la.

Contemple as exteriorizações dos alunos com o detalhamento da ocorrência da propriedade na situação dada, conforme mostra o Quadro 3.11.

Quadro 3.11 - Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição no algoritmo para o cálculo de áreas de figuras retangulares

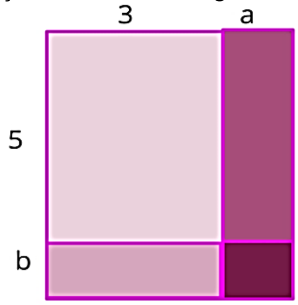
$(2 + 7) \times 6 = 2 \times 6 + 7 \times 6$	$(x + 11) \times y = x \times y + 11 \times y$
$(2 + 7) \times 6 = 2 \times 6 + 7 \times 6$ $9 \times 6 = 12 + 42$ $54 = 54$	$(x + 11) \times y = x \times y + 11 \times y$ $(x + 11)y = xy + 11y$

Fonte: Compilação da autora.

Espera-se que, dentre as soluções apresentadas prepondere estas duas formas de escrever os algoritmos para as áreas solicitadas.

A continuidade se dá no prosseguimento do algoritmo conforme solicitado na Figura 3.42. Embasados na ideia anterior, deve-se representar a área requisitada.

Figura 3.42 - Analisando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição na representação de áreas de figuras retangulares



Fonte: Compilação da autora.

Conjectura-se que, os alunos apresentem algum tipo de dificuldade na efetuação do algoritmo para esta situação. Para tanto, agencie a exteriorização das estratégias utilizadas, anotando-as no quadro, de modo a explorar o passo a passo, como indicado no Quadro 3.12.

Quadro 3.12 - Identificando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição na multiplicação de binômios

$\mathbf{(3 + \textit{a}) \times (5 + \textit{b}) = 3 \times (5 + \textit{b}) + \textit{a} \times (5 + \textit{b})}$
$=[(3 \times 5) + (3 \times b)] + [(a \times 5) + (a \times b)]$ $= 15 + 3b + 5a + ab$ $= ab + 5a + 3b + 15$

Fonte: Compilação da autora.

Reitere mostrando que há outras formas para realizar essas operações, construindo hipóteses e testando-as, validando algumas e descartando outras, de modo que, os alunos possam vivenciar o processo de tentativa e erro no estudo desta propriedade, e, por meio da linguagem algébrica representar tais conjecturas e justificar a validade da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para quaisquer valores expressos por números ou símbolos.

Assim, tem-se:

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times cd + b \times c + b \times d$$

Aconselha-se o acréscimo de macetes como forma de reforçar o entendimento. No entanto, deve-se verificar se todos os alunos compreenderam a propriedade, visto que, a compreensão das estruturas matemáticas é fator determinante à aprendizagem desta ciência. Finalize discutindo com a turma a importância da generalização dos saberes matemáticos e de que forma esta interfere na construção da Matemática.

A compreensão das estruturas matemáticas é essencial à aprendizagem desta ciência, a qual é imprescindível à construção do conhecimento humano. As atividades supracitadas dispõem um leque de saberes que abrange todas as esferas a serem comtempladas nesta etapa de ensino. Além do mais, é ao longo do oitavo ano do Ensino Fundamental, que os saberes algébricos são ampliados e aprofundados, perpassando o concreto e adentrando ao abstrato.

Portanto, surge um novo olhar para as múltiplas formas de apresentar os conhecimentos matemáticos, de modo que, haja uma maior gama de generalização das estruturas básicas da matemática elementar, desenvolvendo o pensamento algébrico dos alunos, de maneira que, a análise cuidadosa destas ultrapasse a visibilidade estrutural da Matemática.

Finalização da sequência didática

Por fim, agencie um debate coletivo que evidencie algumas situações semelhantes à desenvolvida na aula, registrando as soluções no quadro com o propósito de solidificar os conhecimentos de cada uma respeito de generalização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

3.2.3.2 Sequência didática 16

Encontram-se, aqui, o encadeamento de passos a serem seguidos pelo professor para a aplicação desta sequência didática. Não é aconselhável disponibilizar estas informações aos alunos, visto a possibilidade de possíveis interferências no propósito almejado no desenvolver das atividades descritas.

Constitui o objetivo desta sequência didática o ato de estudar o quadrado da soma e da diferença de dois termos, tanto na forma desenvolvida como na forma fatorada, de modo a representar, geometricamente, as diferentes situações, identificando a existência da distributividade nas operações de multiplicação e construindo conceitos algébricos relacionados aos produtos notáveis abordados, de maneira que, oportunize desenvolver as habilidades essenciais à compreensão de tais estruturas matemáticas, as quais são imprescindíveis à ampliação do pensamento algébrico.

Foram arquitetadas atividades que abordam alguns produtos notáveis por intermédio de construções geométricas. Para tal, serão necessários para o seu desenvolvimento, além dos recursos essenciais ao exercício docente, um projetor multimídia para facilitar a projeção das imagens sugeridas, bem como, quatro folhas de papel sulfite para cada dupla, em cores distintas, para o recorte das figuras especificadas ao longo da atividade, além do mais, será preciso tesouras e réguas em quantidade suficiente para a realização desta. Por fim, o êxito na aplicação desta atividade requer um planejamento adequado ao seu propósito, de modo a realizar as adaptações necessárias de acordo à realidade de cada contexto.

Tema: Alguns produtos notáveis

Número de aulas: 10 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: O quadrado da soma de dois termos e o quadrado da diferença de dois termos

- Montando o quadrado da soma de dois termos e desmontando o quadrado da diferença de dois termos

Habilidades:

- Identificar o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos, tanto na forma desenvolvida como na forma fatorada.
- Demonstrar o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos por meio da composição e decomposição de formas geométricas, utilizando a propriedade distributiva, elaborando conjecturas, testando-as, e, inferindo validações, de modo a expressá-las algebricamente, contribuindo para a elaboração do pensamento abstrato.

Descrição da atividade:

Deve-se iniciar a abordagem dividindo a turma em duplas. Prossiga com uma breve conversa acerca da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Para este fim, apresente aos alunos algumas expressões matemáticas que contenham tal propriedade, acrescidas de outras que contemple o quadrado da soma e da diferença de dois termos, conforme sugerido no Quadro 3.13.

Quadro 3.13 - Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em expressões matemáticas

Expressões matemáticas				
$(2 + 7) \times 6$	$(2 - a) \times (b + 6)$	$(2 + 5)^2$	$(a - 2)^2$	$(a + b) \times (a - b)$

Fonte: Compilação da autora.

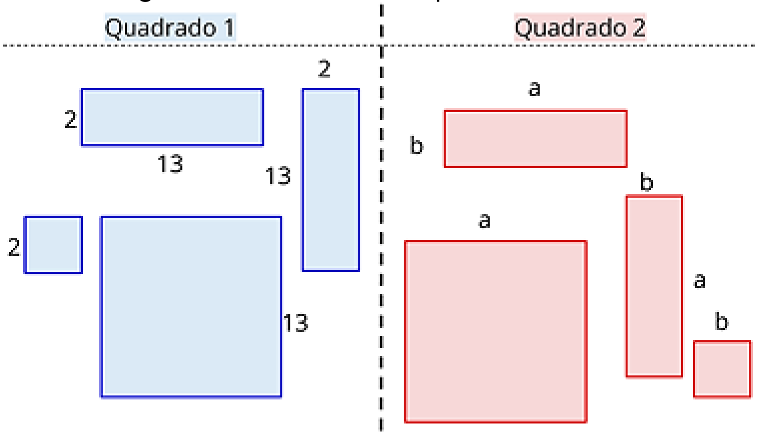
Questione os alunos, de modo que, estas indagações direcionem o desenvolvimento em conjunto com a turma de tais expressões, enfatizando a existência da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Partindo da análise destas, inclua considerações acerca dos conhecimentos matemáticos relacionados à potências, monômios, binômios, trinômios e polinômios.

Feito isso, entregue a cada dupla quatro folhas de papel sulfite em cores distintas, das quais, duas devem ser reservadas, tesouras e réguas, orientando-os a recortar as outras duas da seguinte forma:

a) Um dos integrantes deve recortar dois quadrados, de modo que, um tenha 2 cm e o outro tenha 13 cm de lado, e, dois retângulos, de forma que, seus lados tenham, respectivamente, 2 e 13 centímetros.

b) O outro deve escolher duas medidas quaisquer, e representá-las por a e b, nesta ordem, e, recortar dois quadrados, de modo que, um tenha seus lados medindo a e o outro b, e também, dois retângulos, de maneira que, seus lados tenham, concomitantemente, a e b, como retrata a Figura 3.43.

Figura 3.43 - Montando o quadrado da soma



Fonte: Compilação da autora[17].

Agencie o cálculo da área de cada uma das formas geométricas dadas, de modo que, as duplas tenham uma resposta para cada recorte. Assim, anseia pelo encontro das respectivas áreas, *169*, *26*, *26* e *4* para as formas que irão compor o quadrado 1. E, a^2, ab, ab e b^2 para as demais peças, as quais comporão o quadrado 2.

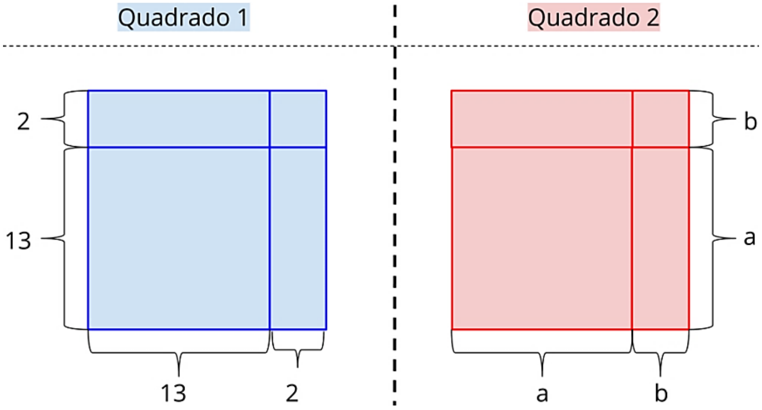
Solicite-os, também, a soma de tais áreas, de modo a obter, $4 + 26 + 26 + 169 = 225$, e, $a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, respectivamente, anotando os caminhos percorridos no processo de busca destas soluções, visto a existência tanto dos valores numéricos quanto dos algébricos, além do mais, preponderam fórmulas matemáticas ante a análise de formas geométricas, em uma relação constituída do elo existente entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria.

Realizados as operações necessárias, peça que, individualmente, cada aluno arrume seus recortes, de modo que, forme um quadrado. Assim, cada dupla terá dois quadrados, nos quais, suas medidas se encontram expressas em duas linguagens distintas e de forma paralela, em um deles têm-se os conceitos aritméticos, e, no outro os conceitos algébricos prevalecem.

Desse modo, os quadrados obtidos pelas duplas, encontram-se expostos na Figura 3.44.

[17] Montagem a partir de imagem coletada no site da Nova Escola.

Figura 3.44 - O quadrado da soma



Fonte: Compilação da autora[18].

Partindo de perguntas-chaves como: qual a medida do lado do quadrado montado? Como foi possível determinar esta medida? De que forma pode ser determinada sua área? Quais as áreas de cada um dos quadrados respectivamente?

De posse dessas respostas, contemple-as, de modo a aclarar as hipóteses decorrentes da análise das Figuras 3.43 e 3.44, demostrando que esta última é consequência da junção das partes da primeira, e, portanto, possuem áreas iguais, como sugere o Quadro 3.14.

[18] Montagem a partir de imagem coletada no site da Nova Escola.

Quadro 3.14 - Analisando a diferença entre áreas

	Quadrado 1	**Quadrado 2**
Área de cada uma das quatro formas	$13 \times 13 = 169$ $13 \times 2 = 26$ $2 \times 13 = 26$ $2 \times 2 = 4$	$a \times a = a^2$ $a \times b = ab$ $b \times a = ba$ $b \times b = b^2$
Soma das áreas das quatro formas	$13^2 + 13 \times 2 + 2 \times 13 + 2^2$ $169 + 2 \times 26 + 4$ 225	$a^2 + ab + ba + b^2$ $a^2 + 2ab + b^2$
Lado do quadrado montado	$(13 + 2)$	$(a + b)$
Área do quadrado montado	$(13 + 2)^2$ $(13 + 2) \times (13 + 2)$ $13^2 + 13 \times 2 + 2 \times 13 + 2^2$ $13^2 + 2 \times (13 + 2) + 2^2$	$(a + b)^2$ $(a + b) \times (a + b)$ $a^2 + ab + ba + b^2$ $a^2 + 2ab + b^2$

Fonte: Compilação da autora.

Prossiga indagando-os: qual a relação entre a área do quadrado montado e as áreas das figuras iniciais? É possível descrever uma conjectura ante a esta situação? Os símbolos *a* e *b* podem representar quaisquer valores, assim, é admissível generalização ao equacioná-los? Qual conclusão pode ser inferida em consequência desta análise?

Evolua para ideias mais elaboradas, direcionando os alunos à investigação, com o intuito de oportunizá-los, a análise do quadrado da soma tanto na sua forma desenvolvida como na forma fatorada, exteriorizando as diferentes soluções e modos de representá-las. Dentre estas, anseia-se pelo domínio da linguagem algébrica no processo de equacionalização.

Para tanto, reforce detalhando todas as resoluções feitas pelos alunos, de modo a propiciar estratégias prósperas à inserção da linguagem algébrica a partir da generalização por meio das investigações feitas, como sugere o Quadro 3.15.

Quadro 3.15 - Desenvolvendo o quadrado da soma

$A = l^2$	$A = l^2$
$A = (13 + 2)^2$	$A = (a + b)^2$
$(13 + 2)^2 = (13 + 2) \times (13 + 2)$ $15^2 = 13 \times 13 + 13 \times 2 + 2 \times 13 + 2 \times 2$ $15 \times 15 = 169 + 26 + 26 + 4$ $225 = 225$	$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b)$ $(a + b)^2 = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$ $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Fonte: Compilação da autora.

Estabelecida a relação entre a área total e as áreas das partes que a compõe, represente-a por meio da linguagem algébrica, de modo a justificá-la e generalizá-la.

Portanto,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Realize um fechamento das ideias discutidas, inferindo que, o quadrado da soma de dois termos quaisquer é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

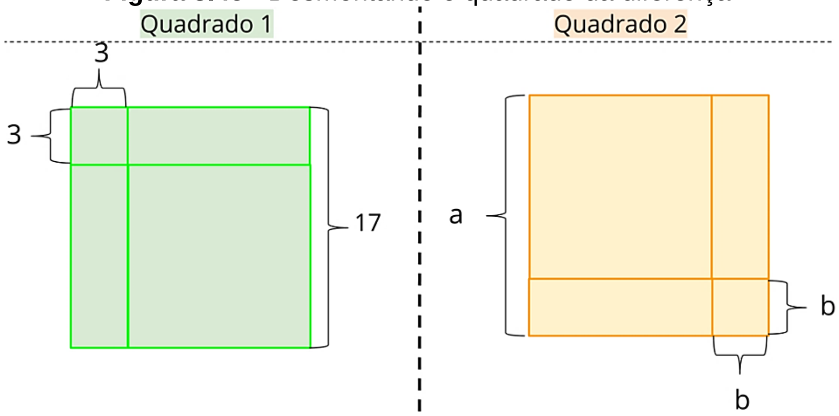
Partindo dos conceitos recentemente construídos, retome às duas folhas reservadas, de modo que:

a) Um dos integrantes possa recortar um quadrado com 17 cm de lado, e, realizar marcações neste, de modo a desenhar sobre o mesmo, um quadrado menor, em um dos seus cantos, com 3 cm de lado e dois retângulos, de maneira que, se tenha dois quadrados, um com 3 cm e o outro com 17 - 3 cm de lado, respectivamente, e, dois retângulos com estas medidas.

b) E o outro possa escolher uma medida qualquer e recortar a forma quadrangular, representando a dimensão do seu lado por *a*, e eleger *b* para representar o tamanho do lado do quadrado menor a ser desenhado em um dos seus cantos. De modo análogo, desenhar dois retângulos, de maneira a obter sobre a forma inicial dois quadrados com lados medindo $a - b$ e b cada um, nesta ordem, e dois retângulos com estas mesmas medidas.

A Figura 3.45 retrata as marcações das formas requeridas sobre a forma quadrangular inicial.

Figura 3.45 - Desmontando o quadrado da diferença



Fonte: Compilação da autora[19].

Agencie o cálculo da área de cada um dos quadrados, de modo que, as duplas tenham uma resposta para cada recorte, sendo que, inicialmente, devam ter, *286* para a área do quadrado 1, e, a^2 para o quadrado 2.

Recorte-os para desconstruir o quadrado inicial procedendo da seguinte maneira:

a) O quarado 1 resultará em dois quadrados com 3 cm e 14 cm, que é equivalente a 17 - 3, de lado cada um, e, dois retângulos com tais dimensões em seus lados.

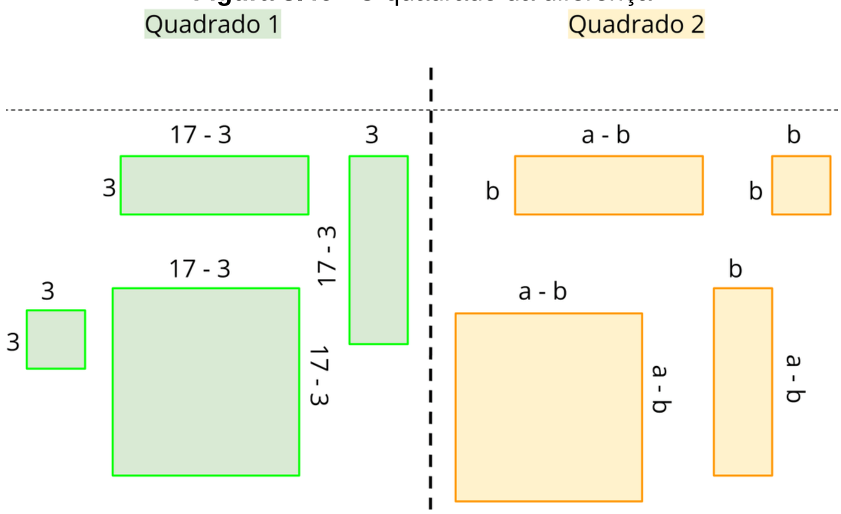
b) O quadrado 2 originarão dois quadrados com lados medindo a - b e b, respectivamente, e, dois retângulos com estas mesmas medidas em seus lados.

Ao desmontar o quadrado têm-se as formas geométricas expostos na Figura 3.46.

---

[19] Montagem a partir de imagem coletada no site da Nova Escola.

Figura 3.46 - O quadrado da diferença



Fonte: Compilação da autora[20].

Realizadas as ações necessárias, peça que, individualmente, os alunos disponham as formas separadas. Assim, cada dupla terá oito formas agrupadas de acordo às medidas dos seus lados, as quais se encontram expressas por meio da linguagem aritmética e algébrica respectivamente, caracterizando dois grupos.

Partindo de perguntas-chaves como: qual a medida do lado do quadrado desmontado? Como determinar esta medida? De que forma pode ser determinada sua área? Qual a área de cada uma das formas? É possível determinar a diferença entre as áreas do quadrado inicial e o quadrado desmontado? Qual expressão representa esta diferença?

Solicite-os, o cálculo da diferença entre a área da forma quadrangular inicial e as áreas das três formas recortadas, de modo a obter, $289 - 42 - 42 - 9 = 196$, e, $a^2 - (ab - b^2) - (ab - b^2) - b^2 = a^2 - 2(ab - b^2) - b^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$, respectivamente, anotando as estratégias adotadas, uma vez que, além dos valores numéricos, têm-se dadas expressões algébricas representando as dimensões das formas geométricas.

Contemple as possíveis respostas, aclarando as hipóteses decorrentes da análise das Figuras 3.45 e 3.46, demostrando que esta última é consequência da decomposição da primeira, e que, ao retirar as partes recortadas restará apenas o novo quadrado, conforme demostrado no Quadro 3.16.

[20] Montagem a partir de imagem coletada no site da Nova Escola.

Quadro 3.16 - Analisando a diferença entre áreas

	Quadrado 1	**Quadrado 2**
Área de cada uma das quatro formas	$17 \times 17 = 289$ $(17 - 3) \times 3 = 14 \times 3 = 42$ $3 \times (17 - 3) = 3 \times 14 = 42$ $3 \times 3 = 9$	$a \times a = a^2$ $(a - b) \times b = ab - b^2$ $b \times (a - b) = ba - b^2$ $b \times b = b^2$
Diferença das áreas das quatro formas	$17^2 - 17 \times 3 - 3 \times 17 + 3^2$ $289 - 2 \times 51 + 9$ 196	$a^2 - (ab - b^2) - (ab - b^2) + b^2$ $a^2 - 2(ab - b^2) - b^2$ $a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2$ $a^2 - 2ab + b^2$
Lado do quadrado desmontado	$(17 - 3)$	$(a - b)$
Área do quadrado desmontado	$(17 - 3)^2$ $(17 - 3) \times (17 - 3)$ $17^2 - 17 \times 3 - 3 \times 17 + 3^2$ $17^2 + 2 \times (17 - 3) + 3^2$	$(a - b)^2$ $(a - b) \times (a - b)$ $a^2 - ab - ba + b^2$ $a^2 - 2ab + b^2$

Fonte: Compilação da autora.

Prossiga indagando-os: o que podemos dizer a respeito da área total e das áreas das partes que a compõe? Qual a relação entre a área da figura inicial e a área do quadrado desmontado? É possível estabelecer uma conjectura em consequência desta análise? É oportuno generalizar esta conclusão, visto que, os símbolos *a* e *b* podem representar quaisquer valores? Qual inferência pode ser deduzida em consequência de tais investigações?

Evolua para ideias mais abstratas, de modo a oportunizar aos alunos, a explanação detalhada do quadrado da diferença de dois termos, tanto na sua forma desenvolvida como na forma fatorada, exteriorizando as diferentes soluções e modos de representá-las através da linguagem algébrica.

Contudo, é importante reforçá-las proporcionando estratégias propícias à compreensão da linguagem algébrica a partir da generalização das situações em análise, conforme sugerido no Quadro 3.17.

Quadro 3.17 - Desenvolvendo o quadrado da diferença

$A = l^2$	$A = l^2$
$A = (17 - 3)^2$	$A = (a - b)^2$
$(17 - 3)^2 = (17 - 3) \times (17 - 3)$ $14^2 = 17 \times 17 - 17 \times 3 - 3 \times 17 + 3 \times 3$ $14 \times 14 = 289 - 51 - 51 + 9$ $196 = 196$	$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$ $(a - b)^2 = a \times a - a \times b - b \times a + b \times b$ $(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Fonte: Compilação da autora.

Posta a relação entre a área total e a área do quadrado desmontado, represente-a algebricamente, de modo a justificá-la e generalizá-la.

Portanto,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Faça um fechamento dos conceitos discutidos, concluindo que, o quadrado da diferença de dois termos quaisquer é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Portanto, verificada a compreensão do conteúdo, é aconselhável o acréscimo de macetes como forma de reforçar o conhecimento adquirido. As atividades supracitadas dispõem um leque de saberes a serem explorados nos diferentes campos da Matemática, além dos conteúdos algébricos, conforme descritos aqui, têm-se os conhecimentos aritméticos e geométricos.

Por fim, o ensino integrado de tais saberes corrobora para uma maior compreensão da Álgebra, de modo que, esta venha proporcionar um encantar nos alunos, justificando a Aritmética e a Geometria em sua completude, e, enrijecer o pensamento algébrico para uma aprendizagem duradoura da Matemática.

Finalização da sequência didática

Finalize, oportunizando um momento de interação em que os alunos possam expor suas concepções sobre as estratégias adotadas do decorrer das atividades desenvolvidas.

3.2.4 Proposições para o 9.º ano

No findar do Ensino Fundamental, busca-se robustecer os alicerces algébricos já construídos, bem como, arquitetar sua continuação. Partindo deste princípio, foram idealizadas duas sequências didáticas, as quais devem ser aplicadas ao longo do nono ano desta etapa de ensino. Para isto, foi encadeado um conjunto de passos para nortear o trabalho do professor. Depreende-se, ao longo deste trabalho, o quão valoroso são os conhecimentos algébricos à aprendizagem da Matemática, ante a este entendimento, faz-se necessário oportunizar caminhos que conduzam os alunos à elaboração de estratégias que visem compreender esta ciência de forma ampla, de modo a aperfeiçoar o pensamento abstrato, o qual corrobora para uma percepção peculiar da realidade do indivíduo, e consequentemente, acarreta transformações impactantes na acessão do conhecimento como um todo.

3.2.4.1 Sequência didática 17

Dispõe-se, imediatamente, um encadeamento de passos para a aplicação desta sequência didática, os quais são para uso exclusivo do professor. Não é aconselhável compartilhá-los com os alunos, pois, conhecê-los pode acarretar interferências no propósito desta atividade, tais informações foram pensadas para direcionar seu desenvolvimento.

Desse modo, seu objetivo consiste em compreender as diferentes maneiras de resolver equações polinomiais de 2.º grau por meio de atividades investigativas, partindo de um caso particular para a dedução da fórmula resolutiva da equação quadrática, de modo a demonstrá-la algebricamente, ampliando habilidades matemáticas passíveis de expandir o pensamento algébrico dos estudantes.

Foram arquitetadas atividades que contemplam do lúdico ao abstrato. Para o seu desenvolvimento, serão necessários além dos recursos essenciais ao exercício docente, duas folhas de papel sulfite em cores distintas para cada dupla a ser formada na turma, bem como, tesouras e réguas, estes dois últimos itens podem ser alternados entre as duplas, caso não disponha quantidade suficiente. Vale ressaltar a importância de um planejamento adequado que contemple adaptações se preciso, com a intenção de oportunizar aos alunos uma aprendizagem significativa e duradoura.

Tema: Fórmula de Bhaskara

Número de aulas: 10 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Equações do 2.º grau

- Dedução da fórmula resolutiva da equação quadrática

Habilidades:

- Identificar expressões algébricas, bem como, seus processos de fatoração com base em suas relações com os produtos notáveis, de modo a compreendê-las e expressá-las, tanto na forma desenvolvida como na forma fatorada.
- Conhecer as múltiplas formas de resolver problemas que possam ser enunciados por meio de equações polinomiais do 2.º grau compreendendo-as, e, a partir de tal compreensão, deduzir a fórmula resolutiva da equação quadrática discutindo o significado das raízes em confronto com a situação-problema, de maneira que, torne possível elaborar estratégias promissoras à ampliação do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

O desenvolvimento desta sequência didática requer alguns conhecimentos elementares quanto às equações do 2.º grau, os três tipos de equações incompletas, bem como, uma breve apresentação do tipo completa. De posse de tais conceitos, deve-se proceder da seguinte maneira, oportunizar uma breve conversa acerca da temática e em seguida organizar a classe em duplas para a realização das atividades.

Para tanto, é sugerido relembrar situações que expressem tais saberes, questionando-os: existe(m) alguma(s) característica(s) que define(m) uma equação quadrática? Qual(is)? O que representa a(s) solução(ões)/raiz(ízes) de uma equação? Complemente as respostas apresentando os exemplos propostos no

Quadro 3.18, é aconselhável adaptá-los conforme o nível de conhecimento dos alunos.

Quadro 3.18 - Os diferentes tipos de equações do 2.º grau

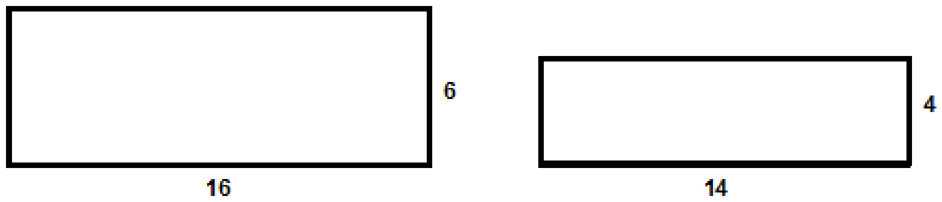
Equações do 2.º grau			
$5y^2 = 0$	$10t^2 + 2t = 0$	$x^2 - 81 = 0$	$x^2 - 8x + 3 = 0$

Fonte: Compilação da autora.

Agencie a busca da(s) solução(ões) das equações dadas, discutindo, juntamente com a turma, questões como: as equações apresentadas possuem todos os coeficientes? Por que? Por que apenas o coeficiente a não pode ser igual a 0? Por que esse tipo de equação pode ter até duas soluções reais?

Partindo das concepções dos alunos no que diz respeito a tais conceitos, inicie o primeiro momento deste encadeamento de atividades. Para isto, entregue a cada dupla duas folhas de papel sulfite em cores distintas e agencie o recorte destas, de forma que, tenham duas formas retangulares com dimensões iguais 16 cm e 6 cm, e, 14 cm e 4 cm, os quais possuem áreas iguais a vinte vezes a sua altura menos vinte e quatro unidades, ou seja, [20 × altura] - 24, respectivamente, como retrata a Figura 3.47.

Figura 3.47 - Figuras geométricas que permeiam uma equação do 2.º grau

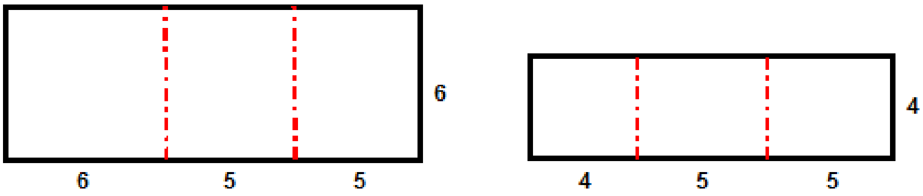


Fonte: Compilação da autora

Vale ressaltar que tal proposição se enquadra para as figuras escolhidas, caso adote dimensões diferentes deverão ser feitas as adaptações necessárias. Instigue os alunos a rememorar o cálculo destas áreas tanto por meio da fórmula quanto mediante a proposição dada.

Feito isso, solicite aos integrantes que, realizem marcações nestes, de modo a desenhar sobre o mesmo, um quadrado e dois retângulos idênticos, de maneira que, use todo o papal das formas retangulares. Deixe-os buscarem por estratégias, auxiliando-os quando necessário. Ao findar este passo, os alunos devem recortar a forma geométrica obtendo um quadrado de lado medindo 6 cm e dois retângulos com dimensões 5 cm e 6 cm, e, um quadrado com 4 cm de lado e dois retângulos com lados correspondentes a 5 cm e 4 cm, conforme exposto na Figura 3.48.

Figura 3.48 - Montando um quadrado perfeito com o auxílio de retângulos

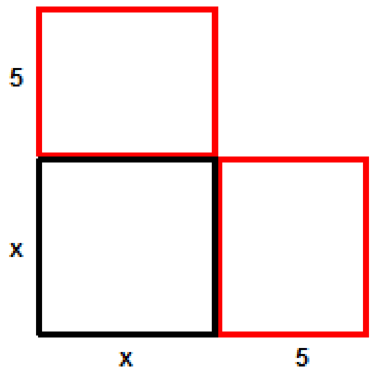


Fonte: Compilação da autora.

Partindo de perguntas-chaves como: o que se pode dizer a respeito das novas formas geométricas? Quais suas diferenças e semelhanças? É possível formar um quadrado para cada recorte? De que forma isto pode ser feito?

Agencie as composições enfatizando que, dentre as respectivas dimensões, suas alturas diferem, de modo a atribuir um símbolo algébrico para representá-la, a renomeando de x. Anseia-se que os alunos as disponham como mostra a Figura 3.49.

Figura 3.49 - O processo de completar quadrados



Fonte: Compilação da autora.

Partindo de questionamentos do tipo: quais as áreas das figuras iniciais? Houve alteração em suas áreas? Represente-as geometricamente. Como representar a área da nova forma geométrica?

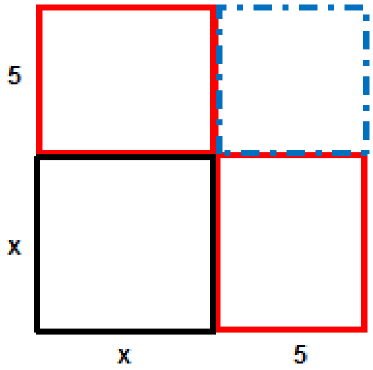
Ambiciona-se que os alunos a expressem corretamente, se necessário guie-os no processo o para o encontro da equação 3.35, mostrando que se tem área do quadrado (x^2) mais duas vezes a área do retângulo ($2 \times 5x$), bem como, que esta soma corresponde a proposição expressa pela expressão matemática: $20x - 24$.

Desse modo tem-se a Equação 3.9:

$$x^2 + 10x = 20x - 24 \tag{3.9}$$

Retome a análise das composições, de modo que, os alunos devem buscar soluções para completar os quadrados. Anseia-se que os alunos realizem a composição sem dificuldades, conforme detalhado na Figura 3.50.

Figura 3.50 - Completando quadrados



Fonte: Compilação da autora.

Realizada esta ação, deve-se representar a área do novo polígono. Questione-os: de que forma é possível representá-la? É possível identificar uma equação quadrática no cálculo da área deste quadrado? Qual?

Promova uma breve exteriorização das múltiplas soluções, mostrando que dentre estas, tem-se o cálculo por meio da fórmula do quadrado, utilizando a medida do lado, $x + 5$, de modo que, $A_{Quadeado} = l^2 = (x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$, bem como, o acréscimo da área da peça, adicionada à composição inicial, $x^2 + 10x$, ou seja, $(x^2 + 10x) + 25$.

Partindo de indagações como: a expressão $x^2 + 10x + 25$ representa a área do quadrado formado, de que forma pode se encontrar o valor numérico que a representa? Quais estratégias podem ser utilizadas para determinar o valor numérico de x.

Possivelmente, os alunos apresentarão dificuldades ao responder este questionamento. Relembre-os que a figura inicial tinha área igual a $20x - 24$, e que foi acrescida uma nova figura com 25 unidades de área.

Então, obtém-se a Equação 3.10, a qual constitui a equação do 2.º grau que representa a área do quadrado.

$$x^2 + 10x + 25 = 20x - 24 + 25 \qquad \textbf{(3.10)}$$

Valorize a participação dos alunos, propondo que eles realizem operações no intuito de escrever a equação na forma: $ax^2 + bx + c = 0$.

Logo,

$$x^2 + 10x + 25 = 20x + 1 \qquad \textbf{(3.11)}$$

Explore a Equação 3.11, juntamente como os alunos, de modo a escrevê-la na sua forma reduzida. Assim, inicie subtraindo $20x$ em ambos os membros para obter as Equações 3.12 e 3.13, respectivamente.

$$x^2 + 10x - 20x + 25 = 20x - 20x + 1 \qquad \textbf{(3.12)}$$

Assim,

$$x^2 - 10x + 25 = +1 \qquad \textbf{(3.13)}$$

Repita a operação, de modo que, seja subtraída 1 unidade em cada membro da igualdade conforme detalhado na Equação 3.14.

$$x^2 - 10x + 25 - 1 = 1 - 1 \qquad \textbf{(3.14)}$$

Reescreva-a na forma reduzida em consonância com a Equação 3.15.

$$x^2 - 10x + 24 = 0 \qquad \textbf{(3.15)}$$

Explore a equação encontrada, de modo que, os alunos possam testar os valores iniciais, os quais foram substituídos por x, de modo a validar sua veracidade, e, identificar características e demais conceitos.

Para tanto, inicie, juntamente com os alunos, a resolução desta pelo processo algébrico de Bhaskara, de maneira que, seja possível desenvolver estratégias que permitam deduzir a fórmula resolutiva posteriormente.

Partindo de questões como: é possível adicionar ou subtrair um número nos dois membros da equação? O que é necessário fazer na Equação 3.15, $x^2 - 10x + 24 = 0$, para que o número 24 desapareça?

Subtraia 24 a ambos os lados desta igualdade conforme minudenciado nas Equações 3.16 e 3.17.

$$x^2 - 10x + 24 - 24 = 0 - 24 \qquad \textbf{(3.16)}$$

Então,

$$x^2 - 10x = -24 \qquad \textbf{(3.17)}$$

Feito isso, relembre os alunos conhecimentos pertinentes quanto aos produtos notáveis, bem como, a identificação de um trinômio do quadrado perfeito (TQP) e seu processo de fatoração, indagando-os: como identificar um trinômio em uma equação quadrática? O que é um quadrado perfeito? Como verificar se um trinômio é um quadrado perfeito? Retome também conceitos sobre monômios, binômios e trinômios.

O próximo passo consiste em transformar a expressão $x^2 - 10x$ em um trinômio quadrado perfeito, conforme especificado na Equação 3.18, adicionando a parcela que falta, a qual constitui a metade do coeficiente b elevada ao quadrado.

$$x^2 - 10x \underbrace{+ \left(\frac{-10}{2}\right)^2} = -24 \underbrace{+ \left(\frac{-10}{2}\right)^2} \qquad \textbf{(3.18)}$$

Mostre aos alunos o cálculo do termo procurado como é indicado na Equação 3.19.

$$\frac{b}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \qquad \textbf{(3.19)}$$

Solicite-os o valor da parcela em questão, de modo a contemplá-los justificando que o termo requisitado é - 5, então, o termo ao quadrado é $(-5)^2 = 25$.

Portanto, adicionando 25 em ambos os lados da Equação 3.18, tem-se um TQP do lado esquerdo da Equação 3.20.

$$x^2 - 10x + 25 = -24 + 25 \tag{3.20}$$

Indague os alunos de modo a aclarar suas percepções: como transformar um trinômio quadrado perfeito em um produto? Como identificar os termos que são quadrados prefeitos? Qual produto notável equivale a esse TQP?

Fatore o TQP valorizando a participação dos alunos, de modo a obter o produto notável apresentado na Equação 3.21.

$$(x - 5)^2 = 1 \tag{3.21}$$

Para concluir essa solução, deve-se extrair a raiz quadrada em ambos os membros como mostra a Equação 3.22.

$$\sqrt{(x - 5)^2} = \pm\sqrt{1} \tag{3.22}$$

Nesse momento, reserve um tempo para aclarar o porquê de se utilizar o sinal ± na equação aos alunos, justificando que, $\sqrt{n^2} = |n| = \pm n$.

Desse modo, prossiga interagindo com a turma e ao realizar as operações necessárias escreva as Equações 3.23 e 3.24.

$$x - 5 = \pm 1 \tag{3.23}$$

Adicionando 5 a ambos os lados da igualdade tem-se:

$$x - 5 + 5 = +5 \pm 1 \tag{3.24}$$

Logo,

$$x = 5 + 1 = 6 \quad \textbf{(3.25)}$$

ou

$$x = 5 - 1 = 4 \quad \textbf{(3.26)}$$

Portanto, as Equações 3.25 e 3.26 mostram que os valores de x podem ser: $x = 6$ ou $x = 4$, tais valores correspondem às dimensões das alturas dos retângulos inicias, pois a equação em análise foi elaborada a partir destas figuras.

Oportunize um momento para exteriorização dos conhecimentos construídos no desenvolver dessa resolução, enfatizando as estratégias adotadas para a representação da equação, tanto por meio de figuras como utilizando a linguagem algébrica, e, ressaltando suas minudências com o intuito de reforçar o conhecimento construído.

Prossiga contemplando essa discussão de modo a incitá-los a deduzir a fórmula resolutiva, utilizando questões como: é possível resolver outras equações utilizando este processo? Como criar uma regra que valha para outras equações? Será que tem alguma fórmula?

Para tanto, realize o processo de generalização da equação em análise, $x^2 - 10x + 24$, mostrando que os números reais podem ser substituídos pelos símbolos algébricos, a, b e c, como coeficientes de x^2, x e o termo independente respectivamente, e, escreva a Equação 3.27.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \textbf{(3.27)}$$

Continue com o processo de dedução da fórmula resolutiva, também conhecida como a fórmula de Bhaskara utilizando a mesma estratégia da atividade anterior. Para isso, em primeiro lugar, dividida toda a equação pelo coeficiente *a*, conforme detalhado no Quadro 3.19, questionando o que considerar para dar início ao processo de dedução da fórmula?

Quadro 3.19 - Primeiro passo da dedução da fórmula resolutiva

Dividindo por a
$ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$
$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$
$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$
$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a}$
$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$

Fonte: Compilação da autora.

Reforce averiguando: a equação $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$ é a mesma que $x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$? Por que?

De posse da Equação 3.28, indague os alunos: é possível deixar apenas a incógnita x em um dos membros? Como? De que forma é possível obter um TQP sem conhecer coeficientes desta equação?

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \qquad \textbf{(3.28)}$$

O segundo passo consiste em mostrar aos alunos que, ao dividir o termo de x por 2, ou seja, dividir $\frac{b}{a}$ por 2 e elevar o resultado ao quadrado obterá o valor a ser adicionado nos dois lados da equação, transformando a expressão $x^2 + \frac{bx}{a}$ em um TQP.

Desse modo, tem-se a Equação 3.29:

$$x^2 + \frac{bx}{a} \underbrace{+ \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2}_{} = -\frac{c}{a} \underbrace{+ \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2}_{} \qquad \textbf{(3.29)}$$

Mas,

$$\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{a} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} \tag{3.30}$$

Mostre que ao substituir $\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$ por $\frac{b^2}{4a^2}$, obtém-se a Equação 3.31.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \tag{3.31}$$

Questione-os sobre as possíveis formas para adicionar as duas frações no segundo membro. Para isso, escolha uma destas e adicione-as. É aconselhável multiplicar numerador e denominador da segunda fração por $4a$, como demonstrado na Equação 3.32, de forma a obter denominadores iguais para adicioná-las.

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4aa} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{3.32}$$

Discuta detalhadamente as operações realizadas e escreva a Equação 3.33 de modo que,

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{3.33}$$

Feito isso, tem-se no primeiro membro da equação um TQP que pode ser escrito na forma fatorada de produto notável conforme mostra a Equação 3.34. Instigue os alunos a recordar as concepções relacionadas a este passo solicitando a participação deles.

Assim,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{3.34}$$

Em seguida, extraia a raiz quadrada nos dois membros da Equação 3.35 sempre valorizando as estratégias apontadas pelos alunos.

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-\ 4ac}{4a^2}} \quad \textbf{(3.35)}$$

Realize juntamente com os alunos as operações necessárias para finalizar o processo de dedução da fórmula conforme minudenciado pelas Equações 3.36, 3.37 e 3.38.

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-\ 4ac}}{2a} \quad \textbf{(3.36)}$$

Prossiga subtraindo $\frac{b}{2a}$ em ambos os membros.

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-\ 4ac}}{2a} \quad \textbf{(3.37)}$$

Então,

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-\ 4ac}}{2a} \quad \textbf{(3.38)}$$

Logo,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \textbf{(3.39)}$$

Portanto, as equações 3.40 e 3.41 apresentam as soluções para toda e qualquer equação quadrática, estas também são conhecidas como raízes.

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \textbf{(3.40)}$$

ou

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{(3.41)}$$

Ao finalizar esse encadeamento de passos indague-os sobre a possiblidade de existir outras formas para a dedução da fórmula resolutiva, ratificado que existem diferentes maneiras para demonstrá-la. No entanto, é dispensável a obrigatoriedade de abordá-las, pois, em outro momento da vida escolar, momento este em que os saberes algébricos se encontrarão mais desenvolvidos, lhes serão apresentada outras demonstrações desta.

Finalize ratificando os saberes construídos, mostrando que a expressão $b^2 - 4ac$ corresponde ao discriminante da equação e que este é representado pela letra grega Δ (delta), de modo que, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ = $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, contemplando-os com as informações a seguir e mostrando que ao analisar as possibilidades de solução através do discriminante, pode corroborar em determinadas situações, e exemplifique-as.

Vale ressaltar a importância de alertar os alunos de que a fórmula é um dos possíveis meios para encontrar as soluções de uma equação polinomial do 2.º grau e que o processo realizado para obtê-la é extremamente relevante para resolver qualquer equação.

Por fim, foi abordado ao longo desta sequência didática um leque de conhecimentos matemáticos, que vai dos conceitos aritméticos mais simples, como as operações, aos mais complexos, como a demonstração de fórmulas, adentrando no campo algébrico por meio de atividades investigativas a partir de uma situação dada. Dentre os tantos saberes explorados, a Geometria possibilitou a elaboração das soluções através da visualização mediante a utilização de figuras em um processo que contemplou os diferentes métodos como alternativas na resolução de equações quadráticas, e consequentemente, a construção da demonstração algébrica da fórmula resolutiva.

O processo de dedução de fórmula, além de incitar saberes pertinentes a níveis mais elaborados do ensino que permeiam a álgebra abstrata, instiga o desenvolvimento de habilidades algébricas mais complexas capazes de alargar de forma significativa o pensamento algébrico, oportunizando aos alunos a capacidade de construir conhecimentos matemáticos.

Finalização da sequência didática

Encerre a atividade reforçando os métodos utilizados no decorrer do processo de dedução da fórmula resolutiva e finalize com um momento de reflexão acerca das estratégias adotadas acrescido de um rápido relato sobre o matemático responsável por esta – o matemático hindu Bhaskara – enfatizando a importância de suas contribuições para a Matemática.

3.2.4.2 Sequência didática 18

Encontra-se, imediatamente, um encadeamento de passos sugestivos à aplicação desta sequência didática. Não é aconselhável compartilhá-los com os alunos, visto que, sua exposição pode acarretar em interferências no propósito desta atividade, tais informações foram pensadas para uso exclusivo do professor.

Seu objetivo consiste em descrever situações da realidade em questão, com base nos conhecimentos a respeito de funções quadráticas, e a partir destas, iniciar uma investigação, por meio do GeoGebra, a respeito das suas características numa completude de saberes aritméticos, geométricos e algébricos, de modo a desenvolver habilidades matemáticas que ampliam significantemente do pensamento abstrato.

Com o intuito de contemplar os saberes algébricos no último ano do Ensino Fundamental, foram idealizadas atividades com maior cunho de abstração. Para desenvolvê-las, serão necessários, além do material essencial ao exercício docente acrescido de barbante, cola, tesouras e réguas, um projetor multimídia para uma melhor apresentação do GeoGebra no decurso das aulas, bem como, papel sulfite e papel milimetrado na quantidade de uma unidade para cada aluno, e também, a prévia instalação do aplicativo GeoGebra nos smartphones dos estudantes. Caso a escola possua laboratório de informática, o docente poderá utilizar o software para computadores. Vale ressaltar a imprescindibilidade de planejar antecipadamente de maneira que se possa realizar adaptações para que se tenha êxito na atuação pedagógica.

Tema: O GeoGebra no estudo de funções

Número de aulas: 11 aulas (de 50 minutos cada)

Conteúdos: Função polinomial do 2.º grau

- Representações numérica, algébrica e gráfica das funções quadráticas

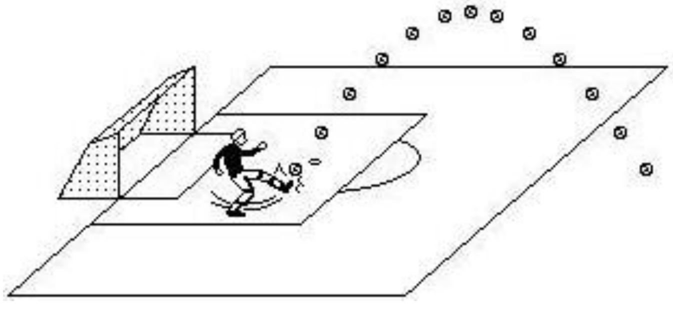
Habilidades:

- Identificar em suas vivências situações que podem ser aplicados os saberes de funções para expressá-las.
- Compreender diferentes maneiras de representar uma função – numérica, algébrica e gráfica – tanto por meio de construções manuais como com o auxilio dos recursos tecnológicos, de modo que, se possa analisá-la algebricamente ampliando as estratégias de elaboração do pensamento algébrico.

Descrição da atividade:

O desenvolvimento desta sequência didática requer conhecimentos básicos do aplicativo GeoGebra para smartphones e noções de funções polinomiais do 2.º grau. Inicie a aula formando trios e organize-os de maneira que ao se disporem componha um semicírculo. Em seguida, solicite a pretensão de um dos trios para atuar na aula, seus integrantes devem se posicionar no centro da sala, e arremessar a bola em direção ao outro, de modo que, esta faça um movimento parabólico semelhante ao apresentado pela Figura 3.51.

Figura 3.51 - O perfil parabólico descrito pela trajetória da bola



Fonte: Compilação da autora.

Solicite os alunos a identificarem possíveis situações do cotidiano que possam ser relacionadas às funções quadráticas, com o intuito de investigar os conhecimentos prévios dos alunos. Comtemple as percepções dos estudantes com outros exemplos como, ocorrências durante um jogo de futebol, que evidenciem um perfil parabólico associado à trajetória da bola, acrescidas da exemplificação de objetos que apresentam formato parabólico, podendo ser estes apenas discutidos, como também, mostrado através de imagens e/ou vídeos curtos.

De posse de tais saberes, questione-os: quais as características de uma função quadrática? De que forma é possível representá-las graficamente? Qual o perfil apresentado pelas diferentes funções polinomiais do 2.º grau? Quais elementos podem ser destacados na representação destas?

Complemente as concepções dos alunos, propondo que o trio realize alguns chutes de modo que:

a) Em um primeiro momento, um dos alunos deve chutar a bola para cima utilizando uma força normal;

b) Para o próximo chute, o segundo aluno deve chutar a bola com uma força maior;

c) Por fim, o terceiro aluno deve chutar a bola com a menor força possível para que o lançamento tenha a menor altura considerando os três chutes.

Feito isso, indague-os: o que aconteceu com a trajetória da bola nos três chutes? Quando o jogador aumenta ou diminui a força do chute, o que acontece com a altura da bola?

Solicite que alunos representem suas respostas por meio de desenhos e os apresente aos colegas justificando-os.

Para a realização do próximo passo, entregue a cada trio um barbante com 20 centímetros, uma folha de papel sulfite ou de outro tipo e uma folha de papel milimetrado ou quadriculado, deixando réguas, tesouras e cola a disposição destes.

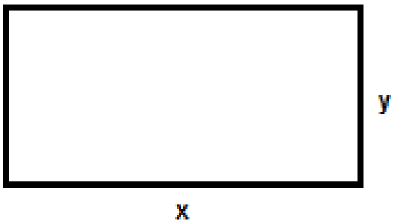
Sua continuidade consiste em propor a turma a construção de uma figura, com o formato de um quadrilátero, que possua a maior área possível e possa ser limitada por esse barbante, de modo que, seja utilizado todo o barbante e os ângulos internos do polígono meçam 90°.

Exponha o problema: quais devem ser as dimensões dos lados desse quadrilátero? E, Instrua os alunos a resolvê-lo utilizando o material que foi disponibilizado, registrando suas estratégias por meio de anotações, desenhos ou outras formas viáveis à organização da solução para o problema.

Acompanhe as estratégias adotadas por cada trio, e, por meio de questionamentos, auxilie-os a perceber que o comprimento do barbante corresponde ao perímetro do quadrilátero e que o cálculo da área requer a identificação prévia das dimensões dos lados figura.

Oportunize um momento para as tentativas, e posteriormente, guie-os na interpretação do problema, sugerindo-os a representar algebricamente os lados do polígono como retratado na Figura 3.52.

Figura 3.52 - Representação algébrica das dimensões do quadrilátero



Fonte: Compilação da autora.

Agencie os alunos à escrita de uma expressão para representar o perímetro do quadrilátero.

Desse modo, encontra-se na Equação 3.42 o perímetro do quadrilátero.

$$P = 2x + 2y = 20 \quad \textbf{(3.42)}$$

Requeira o valor algébrico de y em função de x, dividindo $2x + 2y = 20$ por 2, de modo a obter as Equações 3.43 e 3.44.

$$x + y = 10 \quad \textbf{(3.43)}$$

Com a participação dos alunos reescreva-a:

$$y = 10 - x \quad \textbf{(3.44)}$$

Indague os alunos: conhecidas as medidas dos lados do quadrilátero, qual expressão matemática pode representar sua área? Oriente-os a registrar suas soluções, bem como, os caminhos percorridos e os conceitos necessários para a obtenção destas.

Contemple-os relembrando as definições de um quadrilátero e mostrando que se deve adotar a fórmula para o cálculo de área do retângulo enfatizando que todo quadrado também é um retângulo.

Assim, a expressão algébrica que representa tal área encontra-se representada na Equação 3.45.

$$A = x(10 - x) = -x^2 + 10x \quad \textbf{(3.45)}$$

Como, a área máxima requerida encontra-se em função de x, será representada por $f(x)$, resultando na função polinomial de 2.º grau representada pela Equação 3.46.

$$f(x) = -x^2 + 10x \quad \textbf{(3.46)}$$

Dada a função, $f(x) = -x^2 + 10x$, proponha-os a resolverem o problema por tentativas. Em seguida, organize um momento direcionado às apresentações das soluções propostas por cada trio, de modo que, os alunos expliquem as estratégias adotadas por eles para a resolução do problema proposto, bem como, revelem a solução obtida.

Recorra ao quadro branco para registrar os resultados obtidos por cada trio de forma sintetizada. Ao finalizar das apresentações, indague-os: qual trio alcançou a maior área para o quadrilátero? Quais são as dimensões do quadrilátero de área máxima? Quais foram as estratégias adotadas?

Liste, juntamente com os alunos, as dimensões dos quadriláteros às suas respectivas áreas, chegando, assim, ao quadrado, com base nas soluções apresentadas por eles. Subsequentemente, descreva esse conjunto de informações em função de um dos lados do quadrilátero, elencando dados para a representação gráfica que caracteriza essa situação, conforme detalhado no Quadro 3.20.

Quadro 3.20 - As dimensões dos quadriláteros e suas respectivas áreas

Dimensões	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-x^2+10x}$	$\boldsymbol{f(x)=-x^2+10x}$
1 e 9	**1**	$-(1)^2 + 10 \times 1$	**9**
2 e 8	**2**	$-(2)^2 + 10 \times 2$	**16**
3 e 7	**3**	$-(3)^2 + 10 \times 3$	**21**
4 e 6	**4**	$-(4)^2 + 10 \times 4$	**24**
5 e 5	**5**	$-(5)^2 + 10 \times 5$	**25**
6 e 4	**6**	$-(6)^2 + 10 \times 6$	**24**
7 e 3	**7**	$-(7)^2 + 10 \times 7$	**21**
8 e 2	**8**	$-(8)^2 + 10 \times 8$	**16**
9 e 1	**9**	$-(9)^2 + 10 \times 9$	**9**

Fonte: Compilação da autora.

Para finalizar este passo, solicite que os alunos construam no papel milimetrado o gráfico com base na medida de um dos lados dos quadriláteros formados e suas respectivas áreas.

Para realizar a última etapa desta sequência didática, peça que os alunos acessem o aplicativo GeoGebra – Suíte GeoGebra Calculadora – previamente instalado nos smartphones. Vale ressaltar a importância de uma breve exploração do GeoGebra com a intenção de relembrar ferramentas básicas e acrescentar informações com relação às funções que serão utilizadas.

Em seguida, agencie a construção do gráfico da função $f(x) = -x^2 + 10x$ e indique a forma correta para sua inserção no aplicativo, orientando-os a digitar as informações na caixa de entrada e imediatamente acionar a tecla Enter, seguida da função Otimização com um toque na curva do gráfico para selecionar a função, e por último, Raízes, conforme destacado na sequência de imagens expostas na Figura 3.53, e, de modo análogo, selecione a função para a inclusão e apresentação dos dados.

Figura 3.53 - Representação numérica, algébrica e gráfica da $f(x) = -x^2 + 10x$

Fonte: Compilação da autora.

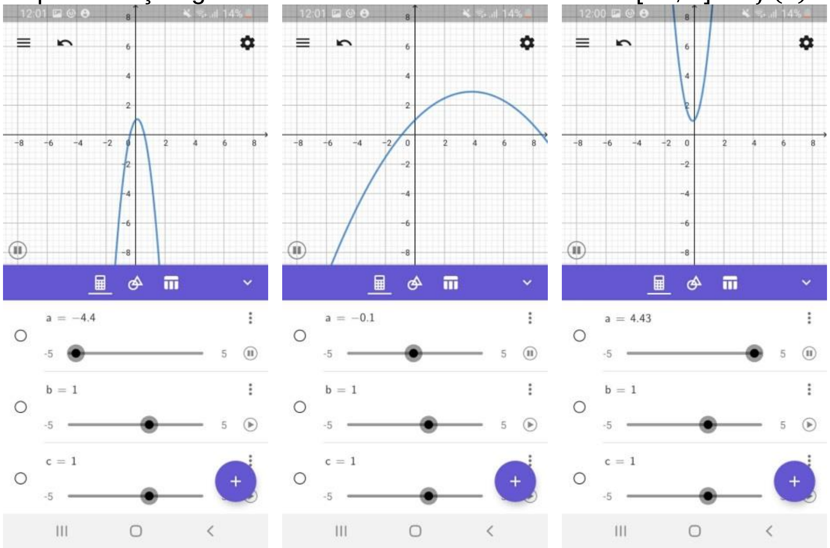
Discuta com os alunos indagando: quais as diferenças na construção do gráfico por meio do aplicativo? Qual a facilidade que o recurso tecnológico trouxe na solução do problema?

De posse dessas concepções, apresente-os a forma algébrica da função quadrática exposta na Equação 3.47 explanando-a.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.47}$$

Prossiga, repetindo o processo de inserção, digitando-a no campo de entrada e imediatamente acionando a tecla Enter. Apresente aos alunos as opções de variações dos coeficientes, a, b e c, aclarando as novas informações exibidas na tela do app, e, em seguida, solicite-os o uso da ferramenta Deslizador, bem como, a observação do movimento do gráfico, instruindo-os que, ao acionarem esta função para o coeficiente de x^2, o valor de *a* irá variar no intervalo de - 5 a 5, conforme momentos retratados na Figura 3.54.

Figura 3.54 - Representação gráfica de instantes de a no intervalo [- 5, 5] na $f(x) = ax^2 + bx + c$

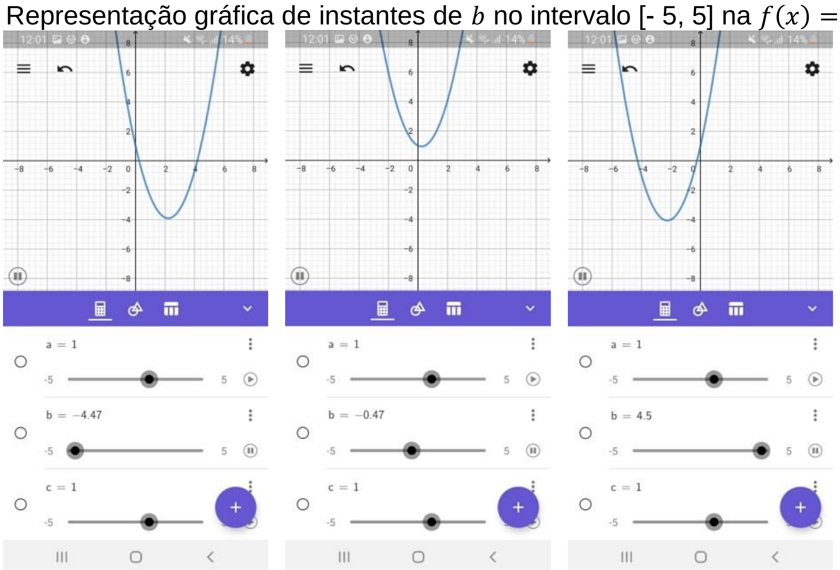


Fonte: Compilação da autora.

Instrua-os a fazer anotações em seus cadernos, questionando-os: o que acontece quando $a = 0$? Qual é o aspecto da parábola quando $a < 0$? E quando $a > 0$? Mostrando que, para a obtenção do gráfico para valores específicos de quaisquer um dos coeficientes, deve-se pausar o controle deslizante, digitar o valor desejado e acionar Enter. Contemple as percepções dos alunos, justificando que o coeficiente a é responsável pela concavidade e pela “abertura” da parábola.

Após essa etapa da construção, retome o momento inicial, utilizando as funções do teclado, digitando 1 para o valor de a e acionando Enter. Solicite o movimento dos outros controles deslizantes, um parâmetro de cada vez, como mostra as Figuras 3.55 e 3.56.

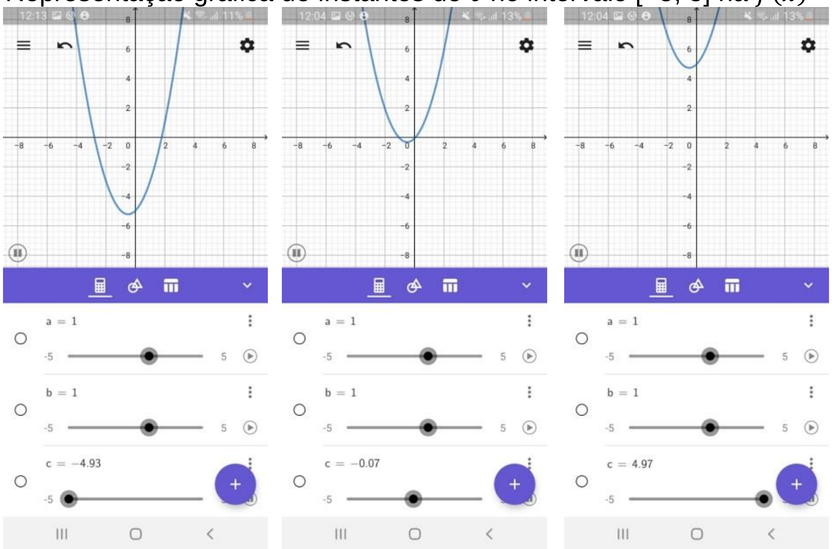
Figura 3.55 - Representação gráfica de instantes de b no intervalo [- 5, 5] na $f(x) = ax^2 + bx + c$



Fonte: Compilação da autora.

Indague-os: qual a característica principal da curva quando $b = 0$? Qual é o aspecto da parábola quando $b < 0$? E quando $b > 0$? Enriqueça as exteriorizações dos alunos, mostrando que o coeficiente b define a posição da interseção com o eixo *Y*.

Figura 3.56 - Representação gráfica de instantes de c no intervalo [- 5, 5] na $f(x) = ax^2 + bx + c$

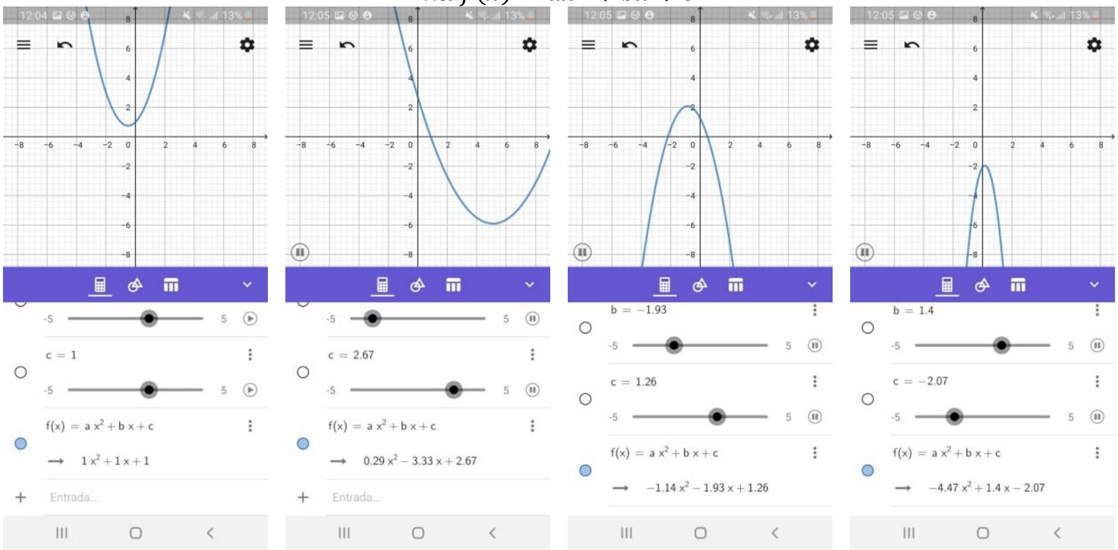


Fonte: Compilação da autora.

Repita as perguntas para os valores de c quando $c = 0$, o que acontece com o gráfico? Qual é o aspecto da parábola quando $c < 0$? E quando $c > 0$? Complemente os argumentos apresentados pelos alunos, justificando a relação do coeficiente c quanto à interseção entre o gráfico da função e o eixo *X*.

Para a continuidade da atividade, peça os alunos para movimentar todos os seletores simultaneamente e observarem tanto o gráfico como as coordenadas apresentadas na janela de álgebra, conforme retratado na Figura 3.57.

Figura 3.57 - Representação numérica, algébrica e gráfica de instantes de a, b e c no intervalo [- 5, 5] na $f(x) = ax^2 + bx + c$



Fonte: Compilação da autora.

Por fim, questione os alunos: qual característica tem o gráfico, quando $b = 0$ e $c = 0$? O que esse(s) ponto(s) representa(m)? Em algum momento, durante o movimento dos seletores a, b e c, de forma individual ou simultânea, a função não cruzou o eixo *X*, o que acontece com os valores das raízes quando isso ocorre? Por que isso acontece? É possível modificar a situação descrita, ao movimentar o seletor c, de modo que, a função possa tocar o eixo *X*?

Contemple as percepções dos alunos, mostrando o que acontece com os valores das raízes quando a função toca o eixo *X* em um ponto, dois pontos e nenhum ponto. Enriqueça este momento sanando dúvidas quanto à manipulação do aplicativo, de modo que, os alunos possam compartilhar seus registros, reforçando a compreensão das minudências do conteúdo em análise.

Após a atividade prática retome ao quadro para a realização de uma sistematização dos conceitos estudados, evidenciando a análise dos coeficientes a, b e c, e, suas inferências no gráfico da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bc + c$.

Em síntese, o uso de uma ferramenta tecnológica tende a enriquecer demasiadamente as construções gráficas no estudo de funções. Todavia o uso do papel quadriculado combinado à tecnologia não implica em perda de conteúdo, e sim, possibilita a percepção de detalhes exigidos pela construção manual do gráfico, os quais, tornam-se imperceptíveis nas construções proporcionadas pelo aplicativo, que do mesmo modo, possui inúmeras ferramentas, inviabilizadas sem o uso do GeoGebra.

Visto a amplitude de saberes matemáticos explorados ao longo desta sequência didática e sua completude no que diz respeito aos diversos conceitos aritméticos, geométricos e algébricos, contemplando campos mais complexos com o estudo de noções de otimização, com a intenção de ampliar o desenvolvimento das habilidades instigadoras do pensamento abstrato, o qual será amplamente intensificado ao adentrar no Ensino Médio, de modo a formar cidadãos pensantes capazes de modificar sua realidade, produzindo conhecimento matemático, e consequentemente, viabilizando a ascensão científica, em um processo contínuo de evolução.

Finalização da sequência didática

Finalize a atividade enfatizando as inúmeras possibilidades proporcionadas pelo uso da tecnologia na aprendizagem da Matemática e oportunizando aos alunos explorar outras funções disponíveis no software em questão.

3.3 Bibliografias abraçadas e consultadas na elaboração deste manual

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. *As ideias da álgebra*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-36.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

______. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

______. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a Base/Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, 2017. 595 p.

CANAVARRO, Ana Paula. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

ESCOLA KIDS. *Matemática*. Disponível em: https://escolakids.uol.com.br/matematica/fractais.htm#:~:text=Fractais%20s%C3%A3o%20objetos%20em%20que,parece%20com%20o%20floco%20inteiro. Acesso em: 02 set. 2020.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. *Pró-posições*, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

GIOVANNI, José Ruy. *A conquista da matemática*: 1.º ano. Ensino Fundamental/Anos Iniciais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2015. 224 p.

GIOVANNI, José Ruy. *A conquista da matemática*: 2.º ano. Ensino Fundamental/Anos Iniciais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2015. 304 p.

GIOVANNI, José Ruy. *A conquista da matemática*: 3.º ano. Ensino Fundamental/Anos Iniciais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2015. 304 p.

GIOVANNI, José Ruy. *A conquista da matemática*: 4.º ano. Ensino Fundamental/Anos Iniciais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2015. 304 p.

GIOVANNI, José Ruy. *A conquista da matemática*: 5.º ano. Ensino Fundamental/Anos Iniciais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2015. 336 p.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. *A conquista da matemática*: 6.º ano. Ensino Fundamental/Anos Finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018. 324 p.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. *A conquista da matemática*: 7.º ano. Ensino Fundamental/Anos Finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018. 324 p.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. *A conquista da matemática*: 8.º ano. Ensino Fundamental/Anos Finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018. 324 p.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. *A conquista da matemática*: 9.º ano. Ensino Fundamental/Anos Finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018. 328 p.

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO. *Triângulo de Sierpinski*. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm48/sierpinski.htm. Acesso em: 01 jul. 2020.

KAPUT, James J. *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth: 2000. 43 p. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441662.pdf. Acesso em:13 jun. 2020.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI*. 4. ed. Campinas: Papirus, 1997. 176 p.

MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângel. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? *Pro-Posições*, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1992.

NOVA ESCOLA. *Planos de aula*. Disponível em: https://novaescola.org.br/plano-de-aula. Acesso em: 01 jul. 2020.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. *As ideias da álgebra*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A algebrização da atividade da aula envolve a desconstrução de longos anos de prática de ensino que não se baseou de forma séria no raciocínio dos alunos, incluindo os diversos processos de representação e simbolização que estes usam. (BLANTON e KAPUT , 2008, p. 363, tradução da pesquisadora)

Buscar meios que direcionem melhorias no âmbito educacional é requisito imprescindível no fazer pedagógico do profissional da educação. Na atualidade, mais especificamente nas últimas três décadas, um grande número de educadores matemáticos, em todo o mundo, têm desenvolvido estudos acerca do ensino de Álgebra. No Brasil, pesquisas nesta área da Matemática se mostram mais recentes revelando um ensino ainda arraigado a uma prática, na qual, se percebe a existência de um ensino que prioriza a manipulação de regras operatórias em detrimento ao pensamento algébrico, desconsiderando sua importância e complexidade e reduzindo-a à linguagem algébrica (LINS e GIMENEZ 1997).

No que se refere à natureza da Matemática, percebe-se menções à sua história, dado que, ao longo do desenvolvimento dessa ciência, a Álgebra surgiu historicamente após a Aritmética. Arrisca-se, portanto, abstrair que o ensino dessa última teria precedido o da primeira.

Desse modo, a análise do percurso cronológico da evolução da criação da Álgebra oportuniza conhecer como certos obstáculos foram discorridos, e eventualmente superados no seu processo de desenvolvimento. Além do mais, compreender evolução histórica da linguagem algébrica constitui base para a reflexão sobre as possíveis dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem desta área da Matemática no âmbito escolar, bem como, é um importante subsídio para o exercício constante de como se convém ensinar.

Com o avanço das pesquisas no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico e o aparecimento de novos métodos e abordagens educacionais, o ensino de Álgebra adquire uma visão revolucionária de educadores e pesquisadores da área, tornando-se um campo de suma importância para a formação de alunos pensantes, logo, transformadores de suas próprias realidades.

Nessa perspectiva, a Educação Algébrica passou por muitas modificações, tanto no âmbito teórico quanto no âmbito prático, dentre elas a unificação da Aritmética, da Álgebra e da Geometria em uma única disciplina denominada Matemática ante os pressupostos da Reforma Francisco Campos. No entanto, o ensino isolado perdurou por anos.

Fica evidente, com base no diálogo travado nesta pesquisa, que o ensino integrado de Aritmética, Álgebra e Geometria voltado para a pretensão de desenvolver habilidades algébricas nos alunos, essenciais à elaboração do pensamento abstrato, o qual desempenha um papel fundamental na construção do saber, pode veementemente contribuir para a apreensão e assimilação de conceitos correlatos em diferentes áreas do conhecimento, construindo e desconstruindo realidades.

Nesse ponto de vista, considerar o ensino-aprendizagem de Álgebra como uma forma de desenvolver o pensamento algébrico, e consequentemente, o raciocínio matemático, é dar uma nova e próspera perspectiva a esse campo do saber.

Percebe-se, no momento atual, que iniciativas políticas e pedagógicas têm, de modo gradativo, mas ininterruptamente, buscado práticas educacionais que oportunizem o desenvolvimento das concepções algébricas desde os primeiros anos de escolarização. Em 2017, após muita discussão, a BNCC já estabelece os conteúdos mínimos que deverão ser desenvolvidos, dentro da Unidade Temática Álgebra, nos Anos Iniciais. Outrora, o ensino dos conceitos algébricos, em geral, ocorria de forma tardia e inconsistente, reduzindo o pensamento algébrico à linguagem algébrica. Todavia, ainda há muito a ser feito nesse sentido.

À vista disso, urgem esforços daqueles que estão direta e indiretamente ligados a esse campo do conhecimento, mais especificamente, da comunidade de educadores matemáticos, com o intuito de alçar um ensino mais significativo e duradouro, sobressaindo um olhar mais qualitativo, ou seja, modificar o objeto de estudo e não simplesmente os conteúdos ou as metodologias de ensino. E é por meio do pensamento algébrico, o qual é defendido nesta pesquisa, que se acredita ser possível alcançar a habilidade de pensar algebricamente através de um ensino significativamente respaldado, que além de auxiliar no crescimento individual dos alunos, possa oportunizá-los a se desenvolverem tanto intelectualmente como emocionalmente, tornando-se indivíduos com iniciativa, responsabilidade e autodeterminação.

Dessa forma, após estudos e pesquisas realizadas a respeito do tema, optou-se, como objetivo geral deste trabalho, construir uma proposta de intervenção metodológica por meio da integralização dos saberes matemáticos, a qual apresenta um encadeamento de sequências didáticas, disposto em um manual, como uma possibilidade eminentemente construtiva no ensino-aprendizagem da Álgebra no contexto da Educação Básica. Com isso, buscou-se elaborar uma proposta de intervenção metodológica para o ensino dos conceitos algébricos no Ensino Fundamental, com o intuito de possibilitar a construção dos conhecimentos matemáticos voltada para a formação de cidadãos atuantes na tomada de decisões dentro do seu contexto social.

Inserida no contexto desse objetivo, relembra-se a perguntas que norteou este estudo: De que forma é possível integralizar os saberes matemáticos, de modo que a Álgebra, a Aritmética e a Geometria desenvolvam-se juntas no ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Básica?

Nessa perspectiva e tentando responder a pergunta deste trabalho, empenhou-se na construção das sequências didáticas para o ensino-aprendizagem dos conceitos algébricos na Educação Básica, sobretudo, no Ensino Fundamental.

Para tanto, buscou-se por atividades favoráveis à investigação de conceitos matemáticos que contemplassem ao mesmo tempo a Álgebra, a Aritmética e a Geometria, uma vez que, estas se encontram historicamente entrelaçadas em seus conteúdos e configuram áreas correlatas da Matemática.

Através desse olhar, este trabalho, ancorado na integralização dos saberes matemáticos direcionada ao ensino de Álgebra – no contexto da Educação Básica – vislumbrou a coexistência dos conceitos algébricos com os aritméticos e geométricos, de modo que, estas três ciências se desenvolvam juntas, uma esteja implicada na outra. Não é preciso aprender primeiramente Aritmética, depois aprender Geometria, para só depois aprender Álgebra, pois, existe uma relação intrínseca entre estes âmbitos da Matemática. Assim, não se justifica retardar a introdução das concepções algébricas, visto que, ambas, ao serem desenvolvidas de forma unificada propicia ao aluno uma aprendizagem da Matemática mais duradoura, capaz de atenuar os impactos gerados pelo contato desconecto desses três campos.

Ao reconhecer o desenvolvimento do pensamento algébrico como o principal propósito do estudo da Álgebra na Educação Básica, deve-se buscar uma prática de sala de aula que apóie conjecturas, argumentação, generalização e justificação dos conhecimentos matemáticos, de modo a potencializar habilidades que asseguram escrever esse pensamento (BLANTON e KAPUT, 2003).

As experiências vivenciadas pelas crianças fora da escola permitem a construção de uma base para o pensamento matemático. Deste modo, explorar os argumentos dos alunos contemplando os diferentes campos desta ciência é subsidiá-los das múltiplas formas de representação e/ou justificação de um mesmo objeto matemático. Consequentemente, a inserção da “algebrificação” no ensino de Matemática tende a contribuir significativamente para o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos estudantes.

É requerido, portanto, do professor que ele crie possibilidades para que os alunos possam construir seu próprio conhecimento a partir de situações que levem os alunos a desenvolver a habilidade de pensar, não apenas no que se refere ao pensamento relacionado aos diferentes campos da Matemática, como também, em outras áreas do conhecimento, indispensável para a formação de indivíduos autônomos e agentes da sua própria realidade.

Dessa forma, a fim de instruir o professor no trabalho com Álgebra nas aulas de Matemática, foi elaborado um manual constituído de dezoito sequências didáticas, duas para cada ano do Ensino Fundamental, contemplando as nove seções apresentadas, no intuito de tentar atestar a proposição levantada. Neste, recomenda-se oportunizar aos alunos desde cedo experiências com esta área da Matemática.

Nesse sentido, ambiciona-se explorar as potencialidades das tarefas matemáticas, tornando os saberes algébricos acessíveis a todos os alunos, de maneira que, criem atividades ricas e significativas capazes oportunizar aos educandos a compreensão da Matemática como um todo.

O produto educacional elaborado teve como finalidade o uso de atividades investigativas a partir situações pertinentes à realidade dos alunos como elemento facilitador para a construção dos conceitos de Álgebra. As temáticas escolhidas para a concretização das sequências didáticas abordam a integralização dos saberes matemáticos, visto que, os saberes aritméticos, geométricos e algébricos constituem juntos a base da matemática escolar, para estudos posteriores no contexto da Matemática.

O princípio fundamental das sequências didáticas idealizadas se firmou na intencionalidade desenvolver o pensamento algébrico no ensino de Álgebra nas aulas de Matemática em nível escolar, pois, este se dá não só pela compreensão dos objetos, mas também, das relações de modo geral e abstrato tanto quanto possível. Acredita-se que o empenho dos alunos em atividades que impliquem diversas fases de investigação, (des) construindo e (re) construindo conceitos, relacionando-os às suas vidas, possa efetivamente contribuir para uma construção duradoura do conhecimento.

Sua elaboração foi, a todo o momento, desafiadora e trabalhosa. Criar sequências didáticas contemplando uma esfera ampla de saberes, com ênfase nos conceitos algébricos, pautadas na estruturação de conteúdos disposta na BNCC, e, ao mesmo tempo, incluir e incrementar, no manual, atividades investigativas com alçada para apossar-se dos poderes naturais dos alunos para construir o raciocínio algébrico a partir do desenvolvimento de conteúdos da matemática elementar.

Nessa perspectiva, o professor de Matemática pode explorar conceitos por meio de experiências práticas com seus alunos, usando uma estratégia didática que problematize um conteúdo, tornando a aula mais instigante em que, por meio da observação direta de uma série de situações particulares e da busca de explicações coerentes com bases em seus próprios conhecimentos.

Vale lembrar que o conhecimento humano não se restringe à assimilação das disciplinas escolares. O saber construído nos estabelecimentos escolares é o reflexo dos múltiplos saberes relacionados ao desenvolvimento do indivíduo, ante as inúmeras interferências de uma sociedade em constante evolução, um conjunto complexo que não se reduz aos ensinamentos explícitos e programados. Todavia, a Matemática, ratificando D'Ambrosio (1996), constitui-se de uma individualidade extraordinária, e, foi desenvolvida pela espécie humana para compreender sua realidade seja perceptível e/ou imaginária, uma vez que, esta ciência move-se quase exclusivamente no campo dos conceitos abstratos e de suas inter-relações.

Portanto, apontar ponderações que tencionam reflexões no ensino de Álgebra, e consequentemente, no ensino de Matemática, é um dos caminhos para que transformações sejam alcançadas no âmbito educacional da atualidade. No entanto, a razão mais importante para justificar o ensino destes saberes é o relevante papel que esta ciência desempenha na construção de todo o edifício do conhecimento humano. Em síntese, ratificando a relevância desta pesquisa, pode-se dizer que a abstração está no coração do pensamento algébrico.

Por fim, a realização deste trabalho foi muito gratificante. Fortaleceu e lapidou conhecimentos passíveis de despertar mudanças na prática escolar da professora/pesquisadora. De modo similar, ambiciona-se que o mesmo venha acarretar transformações enriquecedoras no exercício docente daqueles que venham a conhecê-lo, bem como, robustecer a construção dos saberes matemáticos, especialmente dos algébricos, todos que venham lograr das ponderações aqui expostas. Ao mesmo tempo, anseia-se pela inquietação de educadores matemáticos, visto sua intenção de reconceitualizar o ensino de Álgebra, bem como, da comunidade de pesquisadores desta área da Matemática.

Fica explicito o desejo de se continuar pesquisando essa área da Matemática na tão ambicionada continuação dos estudos. Para tanto, almeja-se pesquisar de que forma ocorre o ensino de Álgebra nos cursos de licenciatura nas instituições públicas de Ensino Superior, sob o olhar atento, de que estas são, em parte, as responsáveis pela construção do conhecimento dos futuros professores que podem vir a colocar em prática nas salas de aulas de Matemática as ponderações expostas neste trabalho pela pesquisadora.

Aqui, não se finda uma etapa, concretizam-se pretensões a curso de doutorado na área da Matemática ou Educação Matemática, dando início à nova etapa que se principia.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Marcia. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no ensino fundamental:** uma análise a partir da transposição didática e da teoria antropológica do didático. 2014. 312 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. **3**. ed. São Paulo: Blucher, 2006. 247 p.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias faces da matemática:** tópicos para licenciatura e leitura geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 203 p.

ALMEIDA, Marcel Augusto Rosa de. **O tratado de álgebra de john wallis e suas relações com a álgebra britânica**. 2010. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de janeiro, 2010.

BICUDO, Joaquim de Campos. **O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação (de 1931 a 1941 inclusive)**. São Paulo: Associação dos Inspetores Federais de Ensino Secundário de São Paulo, 1942. 656 p.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Developing elementary teachers':" Algebra eyes and ears". **Teaching children mathematics**, v. 10, n. 2, p. 70-78, 2003.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Building district capacity for teacher development in algebraic reasoning. *In:* **Algebra in the early grades**. Nova York: Routledge, 2008. p. 361-388.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgardf Blücher, 1996. 496 p.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. *In:* COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As ideias da álgebra**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-36.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Coronavírus**. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/Coronavirus. Acesso em: 01 mai. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares**

Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

______. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**/** Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, 2006. v. 2. 135 p.

______. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a Base**/**Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, 2017. 595 p.

CANAVARRO, Ana Paula. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARRAHER, David W. *et al*. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 37, n. 2, p. 87-115, 2006.

COELHO, Flávio Ulhoa; AGUIAR, Marcia. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. 16 ed. Campinas: Papirus, 1996. 120 p.

ESCOLA KIDS. **Matemática**. Disponível em: https://escolakids.uol.com.br/matematica/fractais.htm#:~:text=Fractais%20s%C3%A3o%20objetos%20em%20que,parece%20com%20o%20floco%20inteiro.htm. Acesso em: 02 set. 2020.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: Unicamp, 2011. 843 p.

FAINGUELERNT, Estela Kaufmam. O ensino da Geometria no 1.º e 2.º graus. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, ano 3, n. 4, p. 45-53, 1995.

FERREIRA, Miriam Criez Nobrega. Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise dos documentos Curriculares Nacionais. **REnCIMa**, v.8, n.5, p.16-34, 2017.

FERREIRA, Lucimeire de Lourdes Adorno; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. O desenvolvimento da linguagem algébrica e sua compreensão por meio da álgebra geométrica. **Paraná**. 2007. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_lucimeire_lourdes_adorno.pdf. Acesso em: 25 mai. 2020.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pró-posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de empresas**, v. 35, n.3, p. 20-29, 1995.

GOMES, Maria Laura Magalhães. **História do Ensino da Matemática: uma introdução**. Belo Horizonte: Caed-ufmg, 2012. 68 p.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. 200 p.

HOUSE, Peggy A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como?. *In:* COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As ideias da álgebra**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 1-8.

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO. **Triângulo de Sierpinski**. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm48/sierpinski.htm. Acesso em: 01 jul. 2020.

KAPUT, James J. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Dartmouth: 2000. 43 p. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441662.pdf. Acesso em:13 jun. 2020.

KIERAN, Carolyn. Algebraic thinking in the early grades: what is it? **The Mathematics E ducator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

KIERAN, Carolyn. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher question from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, v. 16, n. 1, p. 5-26, 2007.

KIERAN, Carolyn et al. **Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching**. Hamburg: Springer Open, 2016. 42 p.

LIBÂNEO, José Carlos. D**idática**. São Paulo: Cortez Editora, 2006. 262 p.

LIMA, Telma Cristiane Sasso de; MIOTO, Regina Célia Tamaso. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálysis**, v. 10, n. esp, p. 37-45, 2007.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI**. 4. ed**.** Campinas: Papirus, 1997. 176 p.

LORENZATO. Sérgio. **Para aprender matemática**. 1. ed. Campinas: Autores Associados. 2006. 141 p.

LORENZATO, Sérgio; VILA, Maria do Carmo. Século XXI: Qual Matemática é Recomendável?. **Zetetiké**, ano 1, n. 1 p. 41-50, 1993.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Cortez, 1991. 103 p.

MARKARIAN, Roberto. A matemática na escola: Alguns problemas e suas causas. **Revista do Professor de Matemática**, v. 38, n. 38, p. 23-32, 1998.

MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângel. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1992.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual Editora, 1998. 121 p.

MIRANDA, Marilene Moussa. **A experiência norte-americana de fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria e sua apropriação pela educação matemática brasileira**. 2003. 98 f. Dissertação (Mestrado em Eduação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2003.

MODANEZ, Leila. **Das seqüências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico**. 2003. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica, São Paulo, 2003.

MOREIRA, Marco Antonio. O mestrado (profissional) em ensino. **Revista Brasileira de Pós-Graduação**, v. 1, n. 1, p. 131-142, 2004.

NEVES, Paulo Sergio de Oliveira. **Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da Álgebra**. 1995. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

NOVA ESCOLA. **Planos de aula**. Disponível em: https://novaescola.org.br/plano-de-aula. Acesso em: 01 jul. 2020.

OLIVEIRA, Maria Marly. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. 1 ed. Petrópolis: Vozes, 2013. 288 p.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. 128 p.

PÉREZ Y MARÍN, André. **Elementos de Álgebra**. 5 ed. São Paulo: Liceu Coração de Jesus, 1928. 385 p.

PIETROCOLA, Maurício. A matemática como estruturante do conhecimento físico. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 19, n. 1, p. 89-109, 2002.

PONTE, João Pedro da. Álgebra no currículo escolar. **Educação e Matemática**, v. 85, n. 85, p. 36-42, 2005.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Portugal: Ministério da Educação/Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular, 2009. 180 p.

ROCHA, Marisa Lopes da; AGUIAR, Katia Faria de. Pesquisa-intervenção e a produção de novas análises. **Psicologia: ciência e profissão**, v. 23, n. 4, p. 64-73, 2003.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 409 p.

RUSSELL, Susan Jo; SCHIFTER, Deborah; BASTABLE, Virgínia. Developing algebraic thinking in the context of Arithmetic. *In:* **Early Algebraization**. New York: Springer, 2011. p. 43-69.

SCHLIEMANN, Analúcia D.; CARRAHER, David. W.; BRIZUELA, Bárbara. M. **Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice**. 1. ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2007. 144 p.

SCHLIEMANN, Analúcia D.; CARRAHER, David W.; BRIZUELA, Bárbara M.. **Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice**. Londres: Routledge, 2013. 222 p.

SIGURDSON, Solberg Einar. **The development of the idea of unified mathematics in the secondary school curriculum, 1890-1930**. 2. ed**.** University of Wisconsin: Madison, 1962. 1136 p.

SILVA, Daniele Peres da; SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 206-222, 2012.

SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 3. ed. Florianópolis: UFSC/PPGEP/LED, 2001. 121 p.

SILVA, Maria José Ferreira da; GAITA, Cecília; SALAZAR, Jesus Victoria Flores. A articulação entre geometria e álgebra na construção de fórmulas para o cálculo de medidas de volume. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 6, n. 1, p. 4-20, 2017.

STRUIK, Dirk Jan. **História concisa das matemáticas**. Tradução: João Cosme Santos Guerreiro. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 1989. 395 p.

SHULMAN, Lee S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard educational review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetike**, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. A Aritmética e a álgebra na matemática escolar. **Educação Matemática em Revista**, ano 11, v. 16, p. 8-15, 2004.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. *In:* COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As ideias da álgebra**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

WASSERMAN, Nicholas H. Abstract algebra for algebra teaching: Influencing school mathematics instruction. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, v.16, n.1, p. 28-47, 2016.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e linguagem**. Tradução: Jefferson Luiz Camargo. Revisão técnica: José Cipolla Neto. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989. 194 p.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar.** Tradução: Ernãni E. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998. 224 p.